Ricerche abeliane e tauberiane compiute nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (*).

Memoria di ALDO GHIZZETTI (a Roma).

Sunto. - Si espongono le ricerche destinate ad ottenere teoremi abeliani e tauberiani, relativamente alle trasformate di Laplace ed ai coefficienti di Fourier di una funzione, eseguite dai ricercatori dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo di Roma, nel periodo 1935-1952. Si segnalano nuove possibili ricerche.

§ 1. - Introduzione.

Nel IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Taormina nello scorso ottobre, il Prof. MAURO PICONE ha tenuto una conferenza dal titolo: « *Sull'opera matematica dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel decorso quarto di secolo della sua esistenza* ». In tale conferenza Egli ha fatto una mirabile sintesi di molte ricerche compiute presso l'Istituto da Lui diretto, classificando tali ricerche nel modo seguente: 1) Contributi alla risoluzione delle equazioni funzionali lineari; 2) Contributi alla risoluzione delle equazioni differenziali non lineari; 3) Contributi a ricerche tauberiane; 4) Contributi a ricerche asintotiche; 5) Contributi al Calcolo delle variazioni.

Ho sempre pensato che sarebbe stato assai utile sviluppare più ampiamente ciascuno dei precedenti argomenti e perciò ho scelto il terzo di essi come oggetto di queste conferenze, prendendo anche in considerazione le ricerche abeliane. Naturalmente la mia esposizione sarà limitata alle ricerche abeliane e tauberiane compiute presso il predetto Istituto ⁽¹⁾ e solo incidentalmente avrò occasione di accennare a qualche altro risultato.

Occorre per prima cosa precisare che cosa si intenda per *teorema abeliano* e *teorema tauberiano*. Tali denominazioni trovano origine nei due

(*) Da due conferenze tenute presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli nei giorni 30 e 31 maggio 1952.

(¹) Devo però avvertire che le prime ricerche di L. AMERIO e di L. CESARI, di cui parlerò in seguito, sono state compiute rispettivamente presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma e presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Ho dovuto per necessità inserirle in questa rassegna per poter parlare delle ricerche successive. Nella Bibliografia sono precisati i lavori che figurano nella collana delle pubblicazioni dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo [con l'indicazione INAC, serie ..., n. ...].

classici teoremi di ABEL e di TAUBER relativi alle serie di potenze:

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

aventi raggio di convergenza finito e non nullo, per esempio uguale a 1. Il primo di essi afferma che, se la serie considerata converge nel punto $z = 1$ con somma s , allora esiste il limite radiale di $f(z)$ per $z \rightarrow 1$ e vale s . Il secondo afferma che, se esiste il predetto limite col valore s , avendosi inoltre $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, allora la serie di potenze converge nel punto $z = 1$ ed ha somma s .

Se noi interpretiamo la formula (1) come un'operazione lineare che *trasformi* la successione $\{a_n\}$ nella funzione $f(z)$, possiamo dire che il teorema di ABEL enuncia una proprietà della *trasformata* $f(z)$, partendo da una della *trasformanda* $\{a_n\}$; viceversa il teorema di TAUBER enuncia una proprietà della trasformanda $\{a_n\}$ derivante da una della trasformata $f(z)$ (accompagnata però da un'ipotesi sulla trasformanda stessa).

Le necessità delle applicazioni e gli studi di analisi funzionale hanno da tempo richiesto la considerazione di trasformazioni funzionali lineari del tipo:

$$(2) \quad f(P) = \int_T K(P, Q) F(Q) dQ,$$

o più generalmente, facendo uso dell'integrale di STIELTJES:

$$(3) \quad f(P) = \int_T K(P, Q) dF(Q),$$

ove $K(P, Q)$ è un'assegnata funzione del punto P (variabile in un certo insieme E di punti di uno spazio a p dimensioni) e del punto Q (variabile nel dominio misurabile T a q dimensioni), mentre la funzione trasformanda $F(Q)$ appartiene ad una certa classe di funzioni del punto Q , in modo tale che, per ogni fissato punto P di E , abbia senso l'integrale (2) o (3).

Poichè la (1) si può facilmente far rientrare nella (3), si è mantenuta nella teoria delle trasformazioni funzionali lineari la denominazione di *teoremi abeliani* per indicare i teoremi che esprimono proprietà della trasformata $f(P)$ come conseguenza di ipotesi fatte sulla trasformanda $F(Q)$, e quella di *teoremi tauberiani* per quelli che enunciano proprietà della trasformanda $F(Q)$ dopo aver fatto delle ipotesi sulla trasformata $f(P)$.

A dire il vero ho qui un po' esteso il significato dei due termini, perchè di solito essi si riferiscono soltanto a proprietà di comportamento asintotico della trasformata o della trasformanda, ma tale estensione consentirà di includere nella mia esposizione alcune ricerche che, pur non essendo né abeliane né tauberiane nel senso ristretto ora accennato, lo sono però nel senso più largo che ho introdotto.

E quasi superfluo rilevare che la denominazione di teoremi abeliani e tauberiani va riferita ad una data trasformazione funzionale $\mathcal{T}$, giacchè è ovvio che le due denominazioni vanno scambiate quando ci si riferisca alla trasformazione inversa $\mathcal{T}^{-1}$ (se di questa ha senso parlare). Per le più comuni trasformazioni funzionali $\mathcal{T}$, i teoremi tauberiani sono di regola assai più riposti dei teoremi abeliani, appunto perchè essi sono abeliani per la trasformazione inversa $\mathcal{T}^{-1}$, il cui studio è quasi sempre più difficile di quello della $\mathcal{T}$. La ricerca della $\mathcal{T}^{-1}$, vale a dire di una formula d'inversione della $\mathcal{T}$, è già una ricerca tauberiana per la $\mathcal{T}$ e sta alla base di ogni altra ricerca dello stesso tipo. Diciamo infine che un'altra grande difficoltà che si incontra nelle ricerche tauberiane è quella di arrivare a teoremi tauberiani *puri*, cioè *con sole ipotesi sulla trasformata*; si pensi, per esempio, che il teorema di TAUBER sulle serie di potenze non è, come si è implicitamente osservato, un teorema tauberiano puro.

Presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo si sono svolte (dal 1935 ad oggi) ricerche abeliane e tauberiane soprattutto a proposito delle seguenti particolari trasformazioni funzionali lineari:

I) *Trasformazione di Laplace ad intervallo finito d'integrazione*, che per semplicità considererò sotto la forma:

$$(4) \quad f(s) = \int_0^1 e^{-st} F(t) dt;$$

II) *Trasformazione di Laplace ad intervallo infinito di integrazione*;

$$(5) \quad f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

oppure:

$$(6) \quad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt;$$

III) *Trasformazione di una funzione di una variabile nella successione dei suoi coefficienti di Fourier rispetto ad un dato sistema di funzioni ortogonali o no*; per esempio nei suoi momenti:

$$(7) \quad \mu_n = \int_a^b x^n f(x) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

o nei suoi *coefficienti di Fourier* propriamente detti:

$$(8) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\alpha} f(\alpha) d\alpha, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Le (4), (5), (6), (7), (8) sono tutti casi particolari di (2) e su di esse riferirò particolarmente. Aggiungo che notevoli ricerche sono anche state fatte sulle trasformate doppie di LAPLACE (vedi FAEDO [1], AMERIO [4]) ⁽²⁾ e sui momenti delle funzioni di più variabili (vedi GHIZZETTI [1]), ma su di esse devo, per mancanza di tempo, rinunciare a parlare.

§ 2. - Ricerche sulle trasformate di Laplace ad intervallo finito di integrazione.

Con riferimento alla (4), ove $F(t)$ si suppone sommabile in $(0, 1)$, la trasformata $f(s)$ risulta una funzione intera della variabile complessa s . Nello studio di questioni di unicità per certi problemi sulle equazioni lineari a derivate parziali, il Prof. PICONE si è largamente servito di un teorema (*tauberiano*) il quale, partendo dall'ipotesi che per $|f(s)|$ valga una certa formula di maggiorazione, consente di affermare l'identico annullarsi della $F(t)$ in tutto un intervallo $(0, q)$ con $0 < q \leq 1$.

Tale teorema è il seguente (vedi PICONE [3]):

Se esistono quattro costanti reali H, p, q, σ , con $H > 0, 0 < q \leq 1, \sigma > 0$, tali da aversi

$$(9) \quad |f(s)| < Hs^p e^{-qs}, \quad (\text{per } s \text{ reale } > \sigma),$$

allora la $F(t)$ è quasi ovunque nulla in $(0, q)$.

Come ho detto al § 1, ogni teorema tauberiano si basa su di una formula d'inversione della trasformazione considerata e per l'appunto il precedente teorema deriva dalla formula di inversione di PHRAGMÈN, che si scrive:

$$(10) \quad \int_0^t F(\tau) d\tau = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kst} f(ks), \quad (s \text{ reale}).$$

Ed infatti, poichè dalla (9) segue $|e^{st}f(s)| < Hs^p e^{-s(q-t)}$ per $s > \sigma$, si deduce che, supposto $0 \leq t < q$ e fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare un $s_\varepsilon > \sigma$ tale che per $s > s_\varepsilon$ risulti $|e^{st}f(s)| < \varepsilon$ e quindi anche $|e^{kst}f(ks)| < \varepsilon$ per $k = 1, 2, \dots$. Allora dalla (10) si ottiene

$$\left| \int_0^t F(\tau) d\tau \right| \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \varepsilon, \quad (\text{per } 0 \leq t < q),$$

e di qui segue immediatamente la tesi.

Questo teorema di PICONE è stato recentemente approfondito ed esteso da alcuni matematici polacchi (vedi p. es. MIKUSINSKI [1]).

⁽²⁾ I numeri tra [] si riferiscono alla Bibliografia posta in fine.

Sempre a proposito della (4), il Prof. PICONE ha anche dato dei teoremi (che sono contemporaneamente abeliani e tauberiani) intesi a dare per la $f(s)$ delle *condizioni necessarie e sufficienti affinché essa sia la trasformata di una $F(t)$ di norma sommabile in $(0, 1)$* . Tali teoremi sono facili ad ottenersi quando, fissato un sistema completo $\{\Phi_n(t)\}$ di funzioni ortonormali in $(0, 1)$, ci si valga della corrispondente serie di FOURIER della $F(t)$, la quale converge in media verso la $F(t)$ stessa. Infatti dalla $F(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(t)$ e dalla (4) si deduce che per la $f(s)$ deve valere uno sviluppo in serie del tipo

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s) \quad \text{con} \quad \varphi_n(s) = \int_0^1 e^{-st} \Phi_n(t) dt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty;$$

la condizione necessaria è ricavata e senza difficoltà se ne dimostra anche la sufficienza. Per avere teoremi espressivi, tutto sta a scegliere il sistema $\{\Phi_n(t)\}$ in modo che le trasformate $\{\varphi_n(s)\}$ abbiano un'espressione semplice.

Si trova, ad esempio il teorema seguente (vedi PICONE [2]):

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione intera $f(s)$ sia la trasformata di Laplace, nell'intervallo $(0, 1)$, di una $F(t)$ che sia di norma sommabile in detto intervallo, è che per essa valga uno sviluppo in serie del tipo

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1 - (-1)^n e^{-s}}{s^2 + n^2 \pi^2} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n^2} < +\infty.$$

Si ha allora la formula d'inversione

$$F(t) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \operatorname{sen}(n\pi t) \quad \text{con} \quad c_n = i\pi n [f(in\pi) - f(-in\pi)].$$

§ 3. - Ricerche sulle trasformate di Laplace ad intervallo infinito di integrazione.

Vengo ora a parlare delle ricerche relative alla (5), detta anche trasformazione di LAPLACE *unilatera*, rimanendo per un momento nello stesso ordine di idee esposto alla fine del § precedente. Il Prof. PICONE ha determinato le condizioni necessarie e sufficienti affinché $f(s)$ sia la trasformata di LAPLACE di una $F(t)$ tale da aversi

$$(11) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |F(t)|^2 dt < \infty, \quad (\text{con } \alpha > 0).$$

Il concetto seguito è quello stesso già esposto. Facendo uso dei *polinomi di Laguerre*

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n l_{nk} t^k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

si ottiene il teorema seguente (vedi PICONI [2]):

Condizione necessaria e sufficiente affinché $f(s)$ sia la trasformata di Laplace di una $F(t)$ verificante la (11) con $\alpha = 1$ è che essa sia olomorfa nel semipiano $R(s) > \frac{1}{2}$ e che ammetta ivi uno sviluppo in serie del tipo

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n \quad \text{con} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Si ha allora la formula di inversione

$$(12) \quad F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} L_n(t) \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k l_{nk} f^{(k)}(1),$$

la serie scritta convergendo in media, col peso e^{-t} , verso la $F(t)$.

Della formula d'inversione coi polinomi di LAGUERRE si è anche occupato quasi contemporaneamente TRICOMI [1] nel 1935. Il teorema sopra enunciato si trova riportato nel recente libro di DOETSCH [1] sulla trasformazione di LAPLACE ed è erroneamente attribuito a SHOHAT [1] (che l'ha dato nel 1940), aggiungendo che, per la trasformata di LAPLACE-STIELTJES, era già stato ottenuto in un caso particolare da WIDDER [1] nel 1935.

La formula d'inversione (12) non si presta agevolmente al calcolo numerico, perchè richiede il calcolo delle derivate successive della $f(s)$. Perciò il Prof. PICONI ha ripreso in istudio la questione, sempre con la condizione (11), cercando di risolverla con l'uso dei *polinomi di Legendre* relativi all'intervallo (0, 1):

$$\{P_n(t) = \sum_{k=0}^n p_{nk} t^k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Premesso che, fissato $\alpha > 0$, ogni $F(t)$ verificante la (11) è tale che l'integrale (5) riesce convergente (assolutamente) per $s = \alpha$ e quindi anche per $s = 2\alpha, 3\alpha, \dots$, tutto si fonda sull'osservazione che, con il cambiamento di variabile $e^{-\alpha t} = \tau$, le (5), (11) diventano

$$(13) \quad f(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \tau^{\frac{s}{\alpha}-1} F\left(-\frac{1}{\alpha} \log \tau\right) d\tau,$$

$$(14) \quad \int_0^1 \left| F\left(-\frac{1}{\alpha} \log \tau\right) \right|^2 d\tau < +\infty,$$

e che dalla (13) segue

$$\alpha f[(k+1)\alpha] = \int_0^1 \tau^k F\left(-\frac{1}{\alpha} \log \tau\right) d\tau, \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

e successivamente

$$(15) \quad \alpha \sum_{k=0}^n p_{nk} f[(k+1)\alpha] = \int_0^1 P_n(\tau) F\left(-\frac{1}{\alpha} \log \tau\right) d\tau, \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Indicato con c_n il primo membro di (15), deve dunque essere, in virtù di (14):

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |c_n|^2 < +\infty, \quad F\left(-\frac{1}{\alpha} \log \tau\right) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_n P_n(\tau).$$

Si stabilisce anche facilmente la sufficienza della prima delle (16), dimodochè, ritornando alla variabile t , si conclude col teorema seguente (vedi PICONE [1]):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(s)$ sia la trasformata di Laplace di una $F(t)$ verificante la (11) con un fissato $\alpha > 0$ è che essa sia definita nel punto $s = \alpha$, olomorfa nel semipiano $R(s) > \alpha$ e tale che, posto $c_n = \alpha \sum_{k=0}^n p_{nk} f[(k+1)\alpha]$, risulti $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |c_n|^2 < +\infty$. Si ha allora la formula d'inversione

$$(17) \quad F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_n P_n(e^{-\alpha t}),$$

la serie convergendo in media verso $F(t)$, col peso $e^{-\alpha t}$.

La (17) si presta meglio al calcolo numerico. Presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo essa fu applicata con successo alla risoluzione di un problema di propagazione del calore, di cui, da un altro punto di vista, si è anche occupato MIRANDA [1]. Si trattava di determinare nella semistriscia $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ una funzione $U(x, t)$ soluzione dell'equazione a derivate parziali $U_{xx} - U_t = 0$ con la condizione iniziale $U(x, 0) = 0$ e le condizioni ai limiti $U_t(0, t) - kU_x(0, t) = 1$, $U(1, t) = 0$, con k costante positiva. Si trova immediatamente che la trasformata di LAPLACE

$$u(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} U(x, t) dt$$

della soluzione cercata è data da

$$(18) \quad u(x, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(1-x)\sqrt{s}}{s \sinh \sqrt{s} + k\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}},$$

e partendo da questa formula ci si servì appunto della (17) per effettuare il richiesto calcolo numerico della $U(x, t)$ per $x = 0$.

Ma questo problema ed altri consimili posero per la (5) varie altre questioni di carattere tauberiano. Come si può dall'esame della trasformata $f(s)$ riconoscere la *stabilità* o meno della $F(t)$, supposta reale? Dire che la $F(t)$ è *stabile* significa che essa si mantiene limitata in $(0, +\infty)$ [talvolta si richiede anche la limitatezza della derivata $F'(t)$]. Più particolarmente può interessare la questione se la $F(t)$ ammette o no un limite finito per $t \rightarrow +\infty$ (*valore di regime*) e, più particolarmente ancora, se tale limite vale zero, cioè se si verifica uno *smorzamento* della $F(t)$.

Il Prof. PICONE nel già citato lavoro [2] ha dato qualche primo risultato in tale ordine di problemi; si tratta però di condizioni *necessarie* per la stabilità o per lo smorzamento, cioè in sostanza di teoremi abeliani. Mi limito qui a riportare il seguente notevole teorema:

Supposto che $F(t)$ sia reale, se l'integrale (5) è assolutamente convergente per $R(s) > 0$, allora si ha

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty}' F(t) \leq \lim_{s \rightarrow 0}' [sf(s)] \leq \lim_{s \rightarrow 0}'' [sf(s)] \leq \lim_{t \rightarrow +\infty}'' F(t).$$

Dalle (19) si può già ricavare qualcosa per i problemi che stiamo esaminando. Per esempio la $F(t)$ non è certo stabile se per $s \rightarrow 0$ la $sf(s)$ non ha finiti il minimo ed il massimo limite; la $F(t)$ non può smorzarsi se $sf(s)$ non è infinitesima per $s \rightarrow 0$. Inoltre da (19) segue pure che, se esiste il $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$, esso deve necessariamente coincidere con $\lim_{s \rightarrow 0} [sf(s)]$. Per esempio, ritornando a considerare la (18), quando si sapesse a priori che la $U(x, t)$ ha un valore di regime, si potrebbe dire senz'altro che esso vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sinh(1-x)\sqrt{s}}{s \sinh \sqrt{s} + k\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}} = \frac{1-x}{k}.$$

Ma, ovviamente, questi risultati di carattere abeliano non sono sufficienti per le applicazioni. A questo punto devo parlare delle ricerche di AMERIO il quale ha dato numerosi teoremi tauberiani utilissimi in pratica e che, a differenza di molti altri dati precedentemente da vari Autori, hanno il pregio di essere teoremi tauberiani *puri*, nel senso detto al § 1. Cercherò ora di dare un'idea di tali teoremi; devo necessariamente limitarmi ad alcuni di essi, rimandando per gli altri alla memoria [3] di AMERIO.

Come ho già detto, alla base di ogni ricerca tauberiana sta una appropriata formula d'inversione della trasformazione considerata. Per la trasformazione di LAPLACE (5) sussiste, come è noto, la formula d'inversione, detta di RIEMANN

$$(20) \quad F(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st} f(s) ds,$$

ove k è un qualsiasi numero reale maggiore dell'ascissa di convergenza dell'integrale (5). Ma la (20) non serve allo scopo perchè essa vale soltanto sotto opportune ipotesi per la $F(t)$, dalle quali si deve prescindere se si vuole conquistare un teorema tauberiano puro. Perciò, per prima cosa, AMERIO [2] ha dato una generalizzazione della (20) valida con il minimo indispensabile di ipotesi sulla $F(t)$, vale a dire: 1°) sommabilità in ogni intervallo finito $(0, T)$; 2°) esistenza della trasformata $f(s)$ in un certo semipiano $R(s) > \alpha$. Il teorema d'inversione di AMERIO è il seguente: nelle condizioni dette, per quasi tutti i valori di t di $(0, +\infty)$, risulta

$$(21) \quad F(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{st} f(s) \left(1 + \frac{s^2}{\lambda^2}\right)^n ds,$$

con $k > \alpha$, n intero positivo.

Lasciando per un momento da parte la (21), ricordiamo ora che, accanto al predetto semipiano di convergenza $R(s) > \alpha$, la trasformata $f(s)$ ammette anche un semipiano di olomorfia; senza scapito di generalità si può supporre che quest'ultimo sia definito da $R(s) > 0$ ⁽³⁾ e ciò implica $\alpha \geq 0$.

Supposto dunque che $f(s)$ sia olomorfa nel semipiano $R(s) > 0$ e posto $s = x + iy$, ritorniamo alla (21) che, come si è detto, sussiste con un $k > \alpha \geq 0$. Si tratta di vedere, sotto quali ulteriori condizioni per la $f(s)$, essa possa scriversi con $k = 0$, in modo da far diventare il secondo membro un integrale del tipo di FOURIER (con fattore di convergenza).

Facciamo le seguenti ipotesi, che designeremo complessivamente con (A):

- A_1) per quasi tutti gli y esiste finito il $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x + iy) = f(iy)$ e risulta funzione di y sommabile in ogni intervallo finito dell'asse y ;
 A_2) si ha, per ogni $h > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{-h}^h |f(x + iy) - f(iy)| dy = 0;$$

A_3) è possibile trovare un intero positivo m ed una successione crescente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ di numeri positivi, avente per limite $+\infty$, in modo che siano finiti i valori $f(\pm i\lambda_n)$ e che si abbia inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x \pm i\lambda_n)}{\lambda_n^m} = 0,$$

uniformemente rispetto a x variabile in un intervallo $(0, k)$ con $k > \alpha$.

⁽³⁾ Se fosse definito da $R(s) > \beta$, basterebbe porre $s = s' + \beta$ e considerare la $f(s' + \beta)$ come trasformata della $e^{-\beta t} F(t)$.

In tali ipotesi, AMERIO ha dimostrato che la (21) può essere sostituita dalla

$$(22) \quad F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{iyt} f(iy) \left(1 - \frac{y^2}{\lambda_n^2}\right)^m dy,$$

ottenuta formalmente dalla (21) ponendo $s = iy$, $n = m$ e facendo percorrere a λ la successione $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$.

Ecco ora alcuni dei teoremi tauberiani, relativi allo smorzamento della $F(t)$, che si possono dedurre dalla (22):

I) Se per la $f(s)$ valgono le ipotesi (A) ed è inoltre $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)| dy < +\infty$, allora risulta $F(t) \rightarrow 0$ (per $t \rightarrow +\infty$);

II) Se per la $f(s)$ valgono le ipotesi (A) ed inoltre esiste un $a > 0$ tale che $f(iy)$ risulti a variazione limitata in $(-\infty, -a)$ ed in $(a, +\infty)$ allora si ha $F(t) \rightarrow 0$ (per $t \rightarrow +\infty$);

III) Se per la $f(s)$ valgono le ipotesi del teor. II e se inoltre in $(-a, a)$ si può porre

$$f(iy) = \frac{\varphi(y)}{|y - b_1|^{\mu_1} \dots |y - b_r|^{\mu_r}} \quad \text{con} \quad -a < b_1 < \dots < b_r < a; \quad 0 \leq \mu_k < 1, \\ (k = 1, 2, \dots, r),$$

con $\varphi(y)$ a variazione limitata in $(-a, a)$, allora, indicato con $\rho < 1$ il massimo fra gli esponenti $\mu_1, \dots, \mu_r$, si ha $F(t) = O(1/t^{1-\rho})$ (per $t \rightarrow +\infty$).

Mostriamo un'applicazione di questi teoremi, riprendendo in considerazione la $U(x, t)$ che ha come trasformata la funzione (18). Scrivendo

$$u(x, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\sinh(1-x)\sqrt{s}}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} + k \cosh \sqrt{s}},$$

si vede che $u(x, s)$ è funzione meromorfa di s coi poli nel punto $s=0$ e negli zeri della funzione intera $\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} + k \cosh \sqrt{s}$. Si prova facilmente che tali zeri sono reali e negativi, onde, fissato $\sigma > 0$ e minore del minimo modulo di essi, si può dire che la funzione $u(x, s) - \frac{1-x}{ks}$ è olomorfa nel semipiano $R(s) > -\sigma$ e quindi che

$$v(x, s) = u(x, s - \sigma) - \frac{1-x}{k(s - \sigma)}$$

è olomorfa nel semipiano $R(s) > 0$. Si constata senza difficoltà che questa $v(x, s)$ verifica tutte le ipotesi del teor. II di cui sopra e perciò si può dire che la sua antitrasformata, la quale coincide con

$$e^{\sigma t} \left[U(x, t) - \frac{1-x}{k} \right],$$

è infinitesima per $t \rightarrow +\infty$. Non solo è provato che $U(x, t)$ ha il previsto valore di regime $\frac{1-x}{k}$, ma si è anche ottenuto che $U(x, t) = \frac{1-x}{k} + o(e^{-\sigma t})$.

Non starò a dilungarmi sugli altri risultati di AMERIO, che fra l'altro, ha anche studiato il caso in cui venga meno la seconda parte dell'ipotesi A_1 , perchè la $f(s)$ presenta dei poli di 1° ordine sull'asse immaginario.

Altri notevoli teoremi ha dato AMERIO in un lavoro successivo [5]; tali teoremi sono destinati a riconoscere se $f(s)$ è la trasformata di LAPLACE di una $F(t)$ dotata di un certo numero di derivate. Ha pure dato una generalizzazione del cosiddetto *teorema dello sviluppo di Heaviside* e vari sviluppi asintotici per la funzione $F(t)$.

Fra i risultati contenuti nell'ultimo lavoro citato, ci limitiamo a segnalarne uno, di grande utilità pratica, e che ha trovato posto nel libro di DOETSCH [1]:

Se $f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)$ sono delle trasformate di Laplace provenienti da integrali assolutamente convergenti e se $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ è una funzione olomorfa delle n variabili complesse $z_1, z_2, \dots, z_n$, nulla per $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$, allora anche la funzione $\varphi[f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)]$ è una trasformata di Laplace.

Infine, per quanto riguarda la trasformazione (6), detta anche trasformazione *bilatera* di LAPLACE, si può dire che essa ha minor importanza nelle applicazioni e perciò non starò ad illustrare i pochi studi fatti su di essa.

§ 4. - Ricerche sul teorema del prodotto integrale relativo alla trasformazione di Laplace.

Vengo ora a parlare di una mia ricerca di carattere abeliano (vedi GHIZZETTI [4]) a proposito del cosiddetto *teorema del prodotto integrale* per la trasformazione di LAPLACE, il quale formalmente si enuncia così: definito come prodotto integrale $F(t) * G(t)$ di due funzioni $F(t), G(t)$ la funzione $\int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau$, sussiste la formula

$$(23) \quad \int_0^{+\infty} e^{-st} [F(t) * G(t)] dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \cdot \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t) dt.$$

Posto $e^{-st} F(t) = \varphi(t)$, $e^{-st} G(t) = \psi(t)$, si riconosce subito che si ha $e^{-st} [F(t) * G(t)] = \varphi(t) * \psi(t)$, onde la (23) può sostituirsi con l'altra

$$(24) \quad \int_0^{+\infty} \varphi(t) * \psi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \cdot \int_0^{+\infty} \psi(t) dt,$$

che è analoga a quella che esprime il noto teorema di moltiplicazione delle serie (secondo il procedimento di CAUCHY) e che si scrive

$$(25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n a_{n-\nu} b_{\nu} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

AMERIO [1] ha dimostrato che la (23) o (24) sussiste certamente se, dei due integrali a secondo membro, uno è convergente e l'altro assolutamente convergente [è l'analogo del teorema di MERTENS per la (25)].

Ho cercato di assicurare la validità della (23) o (24) togliendo l'ipotesi dell'assoluta convergenza. Ricordo che per le serie esiste un teorema di HARDY [1] il quale afferma che la (25) è vera se le due serie a secondo membro sono convergenti e se si ha inoltre $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Un teorema analogo si stabilisce senza difficoltà per la (24) e si trova che:

La (24) è certamente valida se i due integrali a secondo membro sono convergenti, avendosi inoltre $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, $\psi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ (per $t \rightarrow +\infty$).

Si noti che le ipotesi di questo enunciato non richiedono l'assoluta convergenza di alcuno dei due integrali considerati.

Per quanto riguarda la (23) si può dunque affermare:

Se per un certo valore s_0 del parametro s , i due integrali di Laplace di $F(t)$, $G(t)$ riescono convergenti e se si ha inoltre $F(t) = O\left(\frac{e^{s_0 t}}{t}\right)$, $G(t) = O\left(\frac{e^{s_0 t}}{t}\right)$ per $t \rightarrow +\infty$, allora per $s = s_0$ vale il teorema del prodotto integrale espresso dalla (23).

È da notare che, se valgono le ipotesi di questo teorema, i due integrali di LAPLACE considerati riescono assolutamente convergenti per $R(s) > R(s_0)$. Ne deriva che la possibilità di applicare il teorema in questione in un punto s_0 implica, per ciascuno degli integrali di LAPLACE considerati, l'esistenza di un semipiano di assoluta convergenza. Ed allora si vede facilmente che il teorema stesso potrà essere utile (nel senso che potrà non essere sufficiente il teorema di AMERIO) soltanto se questi due semipiani coincidono e se si considera un punto s_0 della comune retta limite.

Ma le questioni più interessanti nascono quando, in luogo della (24), si consideri più generalmente la

$$(26) \quad \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) * \varphi_2(t) * \dots * \varphi_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt \cdot \int_0^{+\infty} \varphi_2(t) dt \cdot \dots \cdot \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt.$$

Come vedremo, questa sussiste ancora nell'ipotesi che gli integrali a secondo membro siano convergenti e che si abbia $\varphi_i(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ (per $t \rightarrow +\infty$; $i = 1, 2, \dots, n$), ma la relativa dimostrazione non può ottenersi con ripetuta appli-

cazione del teorema dianzi enunciato a proposito della (24), perchè dalle ipotesi di questo non segue affatto che sia $\varphi(t) * \psi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, ma soltanto che $\varphi(t) * \psi(t) = O\left(\frac{\log t}{t}\right)$.

La difficoltà si supera in modo analogo a quello seguito da HARDY e LITTLEWOOD [1] nel caso delle serie e cioè introducendo per una data $\varphi(t)$ il concetto di *integrabilità d'ordine* $\alpha > -1$. Si dice che $\varphi(t)$ è in $(0, +\infty)$ integrabile d'ordine $\alpha > -1$ se esiste determinato e finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^\alpha \varphi(\tau) d\tau,$$

che si indicherà col simbolo

$$^{(\alpha)} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Si dimostra che l'integrabilità di ordine α implica quella di ordine $\beta > \alpha$, con lo stesso valore dell'integrale; in particolare, tenuto conto che per $\alpha = 0$ si ha l'integrabilità in senso ordinario, possiamo scrivere;

$$(27) \quad ^{(\alpha)} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt, \quad (\text{per } -1 < \alpha \leq 0).$$

Inoltre se le funzioni $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ sono rispettivamente integrabili degli ordini $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, il loro prodotto integrale risulta integrabile di ordine $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n - 1$, risultando:

$$^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n - 1)} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) * \dots * \varphi_n(t) dt = ^{(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt \cdot \dots \cdot ^{(\alpha_n)} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt,$$

ed, in virtù di (27), questa si riduce alla (26) non appena si supponga

$$(28) \quad -1 < \alpha_1 \leq 0, \dots, -1 < \alpha_n \leq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n + n - 1 \leq 0.$$

Infine si dimostra che, se $\varphi(t)$ è integrabile in senso ordinario e se $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ (per $t \rightarrow +\infty$), allora, comunque si fissi α con $-1 < \alpha \leq 0$, essa è pure integrabile di ordine α .

Dopo ciò, per ottenere la (26) nelle condizioni volute, basta osservare che, per l'enunciato precedente, le $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ risultano tutte integrabili di ordine $-1 + \frac{1}{n}$ e che con $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = -1 + \frac{1}{n}$ le (28) sono soddisfatte.

Per maggiori particolari si veda anche GHIZZETTI [5].

§ 5. - Ricerche sui coefficienti di Fourier di una funzione.

Già al § 1 si è accennato alla trasformazione di una funzione F nella successione $\{c_n\}$ dei suoi coefficienti di FOURIER rispetto ad un dato sistema di funzioni (ortogonali o no). Aggiungiamo ora che, se il considerato sistema è *completo*, la successione $\{c_n\}$ individua la F (a meno di una funzione quasi ovunque nulla) e perciò le proprietà della F si devono poter leggere sulla predetta successione. Nasce così un vastissimo programma di ricerche (vedi PICONE [4], n. 3) che, in proseguimento di quelle classiche fatte in casi particolari da CARATHÉODORY, FEJÉR, HAUSSDORFF, TOEPLITZ, ..., permettano di arrivare a teoremi traducendo le proprietà della successione $\{c_n\}$ in proprietà (di integrabilità, di continuità, di derivabilità, di analiticità, di limitatezza, ...) della funzione F .

Si potranno cercare per le $\{c_n\}$ delle condizioni *necessarie* per il sussistere di una certa proprietà della F , cioè dei teoremi di tipo abeliano, oppure (e ciò sarà assai più utile per le applicazioni) delle condizioni *sufficienti*, vale a dire dei teoremi tauberiani.

Accennerò ora a quello che, presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, si è fatto a proposito dei coefficienti di FOURIER propriamente detti delle funzioni di una variabile. Non parlerò invece delle analoghe ricerche relative ai *momenti* di una tal funzione, avendo già avuto occasione di parlarne in altra sede (vedi GHIZZETTI [2]).

Le prime ricerche sono del CESARI, il quale si è anzitutto occupato delle condizioni *sufficienti* affinché una data serie trigonometrica

$$(29) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sia la serie di FOURIER di una funzione $f(x)$ sommabile in $(0, 2\pi)$ (vedi CESARI [1], [2]). In precedenza tali condizioni erano già state date da SZIDON sotto la forma

$$(30) \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| \log n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta b_n| \log n < +\infty,$$

e da KOLMOGOROFF sotto quest'altra

$$(31) \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^2 a_n| n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^2 b_n| n \log n < +\infty.$$

Nelle (30), (31) i simboli Δa_n , $\Delta^2 a_n$ denotano le differenze prime e seconde della successione $\{a_n\}$:

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Il CESARI, servendosi delle *differenze di ordine* σ , con σ arbitrario numero reale positivo, che per una qualsiasi successione *limitata* $\{a_n\}$ sono definite dalla formula

$$\Delta^\sigma a_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\sigma}{k} a_{n+k},$$

ha potuto dare le cercate condizioni sufficienti sotto l'una o l'altra delle due forme seguenti:

$$(32) \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma b_n| < +\infty, \quad (\text{per } 0 < \sigma < 1),$$

$$(33) \quad a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma b_n| n^{\sigma-1} \log n < +\infty, \\ (\text{per } \sigma > 1).$$

È chiaro che il teorema (33) costituisce un'estensione del teorema (31) di KOLMOGOROFF e che il risultato (30) di SZIDON (relativo a $\sigma = 1$) sta, per così dire, in mezzo ai due teoremi (32), (33) di CESARI.

Successivamente il CESARI ha cercato delle condizioni sufficienti affinché la (29) rappresenti una funzione dotata di derivate fino ad un certo ordine. Ecco uno dei teoremi ottenuti: *se* $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ *e se, per certi due interi* $p \geq 0$, $r \geq 0$, *si ha* $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{p+r+1} a_n| n^p < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{p+r+1} b_n| n^p < +\infty$, *allora la (29) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso di* $0 - 2\pi$ *verso una* $f(x)$ *dotata in* $0 - 2\pi$ *di derivate continue fino all'ordine* p *incluso*. Analoghi teoremi ha dato il CESARI quando, anziché alla convergenza ordinaria, ci si riferisca alla sommabilità secondo CESARO (d'ordine abbastanza elevato) della (29). Tutti questi studi del CESARI che, come si è visto, fanno intervenire le differenze delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, sono poi stati ampiamente estesi dal CESARI stesso, facendo ricorso ad una notevole generalizzazione del concetto di differenze, suggeritagli dall'« *algebra delle successioni* » di MAMBRIANI. Per mancanza di tempo non posso dare ulteriori indicazioni su queste ricerche, che sono alquanto delicate e minute; rimando perciò senz'altro a CESARI [5]. Così pure devo limitarmi ad un semplice cenno su di un'altra notevole ricerca del CESARI [6] sulle condizioni sufficienti affinché la (29) rappresenti una funzione analitica.

Occorre osservare che nei tre lavori [4], [5], [6] del CESARI, dianzi citati, si parla di serie trigonometriche, le quali in generale non sono serie di FOURIER. Perciò i teoremi in essi ottenuti non hanno spiccatamente quel carattere tauberiano di cui intendevo parlare; però lo acquistano quando siano accompagnati da un qualche teorema (come quelli espressi dalle (30), (31), (32), (33); si veda anche il n. 18 di CESARI [5]) che assicuri essere $\{a_n, b_n\}$ la successione dei coefficienti di FOURIER di una funzione somma-

bile. Possiamo dunque dire che, con le sue ricerche, il CESARI ha conquistato notevoli teoremi tauberiani per i coefficienti di FOURIER di una funzione sommabile, o continua, o continua con un certo numero di derivate, o analitica.

Passo ora ad esporre, con qualche dettaglio, una mia ricerca (vedi GHIZZETTI [3]) relativa alle condizioni *necessarie e sufficienti* per i coefficienti di FOURIER di una funzione $f(x)$ reale i cui valori appartengano tutti ad un intervallo prefissato. Senza scapito di generalità si può supporre che tale intervallo sia $(0, 1)$; tratteremo dunque delle $f(x)$ verificanti la limitazione

$$(34) \quad 0 \leq f(x) \leq 1;$$

naturalmente basta richiedere che questa sia soddisfatta quasi ovunque.

In questo studio conviene considerare come coefficienti di FOURIER della $f(x)$ i numeri (reali o complessi):

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ed è chiaro anzitutto che fra le condizioni cercate deve figurare la seguente: $0 \leq c_0 \leq 1$. Per esprimere le altre, cominciamo con l'associare alla data successione

$$(35) \quad c_0, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$$

un'altra successione (bilatera) di numeri reali o complessi

$$(36) \quad \dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots,$$

definiti dalle formule seguenti:

$$(37) \quad \begin{cases} s_0 = 2 \operatorname{sen} \pi c_0, \\ e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k} = 1 - ie^{\pi i c_0} \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k, \\ s_{-k} = \bar{s}_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

È facile persuadersi che dalla seconda delle (37) segue che ogni s_k , ($k = 1, 2, \dots$), è una ben determinata funzione dei primi $k + 1$ coefficienti $c_0, c_1, \dots, c_k$.

Costruita la successione (36), deduciamo poi da essa una nuova successione

$$(38) \quad D_0, D_1, D_2, \dots, D_k, \dots,$$

ponendo

$$(39) \quad D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_{-2} & s_{-1} & s_0 & \dots & s_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-k} & s_{-k+1} & s_{-k+2} & \dots & s_0 \end{vmatrix}.$$

Si osservi che la (38) è formata di numeri reali perchè, in virtù della terza delle (37), D_k è un determinante hermitiano; inoltre D_k dipende soltanto dai primi $k + 1$ coefficienti $c_0, c_1, \dots, c_k$.

Ciò posto si può enunciare quanto segue: *condizione necessaria e sufficiente perchè la (35) sia la successione dei coefficienti di Fourier di una $f(x)$ verificante la (34) è che sia $0 \leq c_0 \leq 1$ e che, costruita la corrispondente successione (38), si presenti uno dei seguenti tre casi:*

- I) $D_0 = D_1 = D_2 = \dots = 0$;
- II) $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$; $D_n = D_{n+1} = D_{n+2} = \dots = 0$
(per un certo intero $n \geq 1$);
- III) $D_0 > 0, D_1 > 0, D_2 > 0, \dots$.

Ma si può andare oltre e precisare completamente quale sia il significato dei tre casi sopra menzionati. Per far ciò occorrono alcune premesse.

Dati n intervalli $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$, con

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < \xi_1 + 2\pi,$$

chiameremo *funzione rettangolare di ordine n* la funzione periodica (col periodo 2π) che vale 1 nei predetti intervalli e zero altrove. Si dimostra che, dati n numeri $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ (con $0 < c_0 < 1$) tali che i corrispondenti determinanti $D_0, D_1, \dots, D_{n-1}$ siano tutti positivi, esistono ∞^1 funzioni rettangolari di ordine n che abbiano come primi n coefficienti di FOURIER gli n numeri assegnati $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$. Per tali funzioni, gli ulteriori coefficienti $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$ sono poi tali da far risultare $D_n = D_{n+1} = D_{n+2} = \dots = 0$. Assegnato ad arbitrio un numero reale λ , fra le predette ∞^1 funzioni rettangolari di ordine n , ne esiste una ed una sola, che indicheremo con

$$(40) \quad \varphi_n(x; c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, \lambda),$$

tale da aversi $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \lambda$.

Ciò premesso, possiamo completare il nostro precedente enunciato nel modo seguente: *nel caso I) si ha $f(x) \equiv 0$ (se $c_0 = 0$) oppure $f(x) \equiv 1$ (se $c_0 = 1$); nel caso II) la $f(x)$ coincide con la funzione rettangolare di ordine n espressa dalla (40) ove si ponga*

$$\lambda = \arg \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-n+2} & s_{-n+3} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \quad (4);$$

nel caso III) la $f(x)$ non è una funzione rettangolare di alcun ordine.

(4) Si dimostra che questo determinante è diverso da zero.

La precedente ricerca sui coefficienti di FOURIER di una $f(x)$ verificante la (34) si può estendere al caso dei coefficienti rispetto ad un altro sistema completo, ortogonale o no (per esempio, al caso dei *momenti*; vedi GHIZZETTI [2]). La difficoltà essenziale è quella di costruire la funzione rettangolare (40) della quale sono assegnati i primi n coefficienti e di trovare sotto quali condizioni per questi ultimi la costruzione è possibile. Fatto ciò, le forme di ragionamento da me usate per stabilire sia la necessità che la sufficienza delle condizioni I) o II) o III) possono estendersi senza alcuna difficoltà.

Recentemente il Dott. F. S. ROSSI [1], in un lavoro in corso di stampa, ha risolto il problema nel caso dei *polinomi di Legendre* $P_m(x)$, riducendolo a quello da me considerato per mezzo della nota formula

$$P_m(\cos t) = \sum_{h=0}^m \alpha_h \alpha_{m-h} e^{-i(m-2h)t} \quad \text{con} \quad \alpha_r = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}.$$

Credo che valga la pena di studiare altri casi, per esempio quelli relativi ai *polinomi di Laguerre* o di *Hermite*. Interessanti sarebbero anche le estensioni a funzioni di più variabili.

Come ho già detto, alla base di queste ricerche sta la costruzione delle funzioni rettangolari nelle condizioni dette. Per dare un'idea della natura di un tale problema, concluderò dicendo che nel caso di FOURIER da me considerato, tutto dipende dal seguente teorema di algebra, già notevole di per sé: *assegnata una successione bilatera (36) di numeri reali o complessi, con $s_{-k} = \bar{s}_k$, se tali numeri verificano le condizioni*

$$(41) \quad D_0 > 0, \quad D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0,$$

$$(42) \quad D_n = 0,$$

allora la seguente equazione algebrica di grado n :

$$(43) \quad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ s_0 & s & s_2 & \dots & s_n \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-n+1} & s_{-n+2} & s_{-n+3} & \dots & s_1 \end{vmatrix} = 0$$

ha tutte le sue radici di modulo 1 e tutte distinte.

In precedenza era già noto quest'altro teorema ⁽⁵⁾: se in luogo della (42) vale la $D_n > 0$, allora la (43) ha tutte le radici di modulo minore di 1 (senza però poter affermare che siano distinte). Quale è la relazione fra questi due teoremi? Dal secondo, con un passaggio al limite, si deduce ovviamente che le radici di (43) non possono, nell'ipotesi (42), avere modulo superiore a 1.

⁽⁵⁾ Vedi p. es. G. PÖLYA e G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II, Berlin 1925, p. 116 e 320-322.

Ma si vede facilmente che la (42) assicura che, se la (43) ha una radice α , ha contemporaneamente la radice $1/\bar{\alpha}$. Da questi due fatti risulta che se $D_n = 0$ le radici della nostra equazione devono necessariamente avere tutte modulo 1 perchè, se ne esistesse una α con $|\alpha| < 1$, la $1/\bar{\alpha}$ avrebbe modulo > 1 il che, come si è visto, non può accadere. Questo però non spiega che nel caso $D_n = 0$ le radici siano distinte; ciò si consegue attraverso un altro ragionamento fondato sull'impiego di certe forme hermitiane.

BIBLIOGRAFIA

AMERIO L.:

- [1] *Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Accad. Lincei », s. 6^a, vol. XXV, pp. 205-213, (1937).
- [2] *Sull'inversione della trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Accad. Scienze Napoli », s. 4^a, vol. X, pp. 232-259, (1939-40).
- [3] *Alcuni teoremi tauberiani per la trasformazione di Laplace*, « Annali di Matematica », s. IV, tomo XX, pp. 159-193, (1941).
- [4] *Sulla trasformazione doppia di Laplace*, « Memorie Accad. Italia », vol. XII, fasc. 14, pp. 707-780, (1941); (INAC, s. II, n. 114).
- [5] *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Istituto Lombardo », s. 3^a, vol. LXXVI, pp. 191-216, (1942-43); (INAC, s. II, n. 154).

CESARI L.:

- [1] *Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier*, « Annali Scuola Normale Pisa », s. II, vol. III, pp. 105-134, (1934).
- [2] *Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier*, « Bollettino Unione Mat. Italiana », s. 1^a, vol. XIII, pp. 100-104, (1934).
- [3] *Sur les propriétés des fonctions représentées par les séries trigonométriques*, « Comptes Rendus Académie Sciences de Roumanie », tome II, n° 3, pp. 216-221, (1938).
- [4] *Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche*, « Bollettino Unione Mat. Italiana », s. 1^a, vol. XVII, pp. 105-116, (1938); (INAC, s. II, n. 29).
- [5] *Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche*, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », tomo LXI, pp. 269-295, (1937); (INAC, s. II, n. 32).
- [6] *Sull'analiticità delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche*, « Rendiconti Accademia Scienze Napoli », s. 4^a, vol. VIII, pp. 89-97, (1937-38); (INAC, s. II, n. 33).

DOETSCH G.:

- [1] *Handbuch der Laplace - Transformation*, Band I (Theorie der Laplace - Transformation), « Verlag Birkhäuser », Basel 1950.

FAEDO S.:

- [1] *Sulle trasformate multiple di Laplace*, « Rendiconti Accad. Italia », s. VII, vol. II, fasc. 9, pp. 722-727, (1941); (INAC, s. II, n. 99).

GHIZZETTI A.:

- [1] *Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in n dimensioni*, « Rendiconti di Matem. e sue applicazioni », Roma, s. V, vol. IV, pp. 94-101, (1943); (INAC, s. II, n. 152).
- [2] *Sul problema dei momenti*, « Rendiconti Seminario Mat. Univ. Politecnico Torino », vol. 8°. pp. 93-167, (1948-49); (INAC, s. II, n. 257).

- [3] *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati*, « Annali Scuola Normale Pisa », s. III, vol. IV, pp. 131-156, (1950); (INAC, s. II, n. 279).
- [4] *Sul teorema del prodotto integrale nella teoria della trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Seminario Mat. Univ. Politecnico Torino », vol. 9°, pp. 251-261, (1950); (INAC, s. II, n. 290).
- [5] *Sopra un fondamentale teorema nella teoria della trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Seminario Facoltà Scienze Univ. Cagliari », vol. XXI, pp. 103-115, (1951-52); (INAC, s. II, n. 352).

HARDY G. H.:

- [1] *The multiplication of conditionally convergent series*, « Proceedings London Math. Society », s. 2ª, vol. 6, pp. 410-423, (1908).

HARDY G. H. and LITTLEWOOD J. E.:

- [1] *Contributions to the arithmetic theory of series*, « Proceedings London Math. Society », s. 2ª, vol. 11, p. 411-472, (1913).

MIKUSINSKI I. G.:

- [1] *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone*, « Colloquium mathematicum », vol. II, pp. 138-141, (1951).

MIRANDA C.:

- [1] *Su di un problema al contorno relativo all'equazione del calore*, « Rendiconti Seminario Mat. Univ. Padova », vol. VIII, pp. 1-20, (1937); (INAC, s. II, n. 13).

PICONE M.:

- [1] *Recenti contributi dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione*, « Memorie Accad. Italia », vol. VI, fasc. 12, pp. 643-667, (1935); (INAC, s. I, n. 38).
- [2] *Sulla trasformata di Laplace*, « Rendiconti Accad. Lincei », s. 6ª, vol. XXI, pp. 306-313, (1935); (INAC, s. I, n. 42).
- [3] *Nuove determinazioni per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*, « Rendiconti Accad. Lincei », s. 6ª, vol. XXVIII, pp. 339-348, (1938); (INAC, s. II, n. 41).
- [4] *Sull'opera matematica dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel decorso quarto di secolo della sua esistenza*, « Atti del IV Congresso dell'Unione Mat. Italiana », Taormina, 25-31 ottobre 1951, (in corso di stampa); (INAC, s. II, n. 331).

ROSSI F. S.:

- [1] *Sopra i coefficienti di Legendre di una funzione limitata fra limiti assegnati*, « Annali Scuola Normale Pisa », (in corso di stampa).

SHOHAT J.:

- [1] *Laguerre polynomials and the Laplace transform*, « Duke math. Journal », vol. 6, pp. 615-626, (1940).

TRICOMI F.:

- [1] *Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, I, II, « Rendiconti Accad. Lincei », s. 6ª, vol. XXI, pp. 232-239 e 332-335, (1935).

WIDDER D. W.:

- [1] *An application of Laguerre polynomials*, « Duke math. Journal », vol. 1, pp. 125-136, (1935).