Contributo alla geometria infinitesimale diretta delle curve piane.

Memoria di GIOVANNI ZIN (a Torino).

Sunto. - *Si introduce il concetto di ampiezza di un arco $\widehat{AB}$ di una curva semplice C quale oscillazione di una determinazione continua $\alpha(P_1, P_2)$ dell'anomalia di una secante orientata P_1P_2, essendo P_1 e P_2 punti di $\widehat{AB}$ con $P_1 < P_2$. Si definisce poi l'angolosità di C in un suo punto P quale limite dell'ampiezza di un arco $\widehat{P_1P_2}$, al quale P risulta interno, per $\left.\begin{matrix}P_1\\P_2\end{matrix}\right\} \to P$. Si definiscono punti lipschitziani di C quelli in cui l'angolosità di C è $< \pi$. Si esamina la relazione fra angolosità e paratingente. Infine si stabilisce l'esistenza di curve semplici, rettificabili e prive di punti lipschitziani.*

I. Un teorema sull'anomalia di una secante a una curva semplice [1].

1. Sia C una curva semplice e aperta di equazioni parametriche

$$x = x(s) \qquad y = y(s)$$

con $x(s)$ e $y(s)$ funzioni definite e continue in un intervallo (a, b). Si supponga, ciò che non nuoce alla generalità, $a < b$. Siano P_1 e P_2 due punti di C e s_1 e s_2 i valori ad essi corrispondenti del parametro s. Si supporrà $P_1 < P_2$, cioè $s_1 < s_2$. L'anomalia della secante orientata P_1P_2 risulta, al variare di P_1 e P_2, una funzione $\alpha(s_1, s_2)$ delle variabili s_1 e s_2, definita, a meno di multipli di 2π, in corrispondenza di ogni coppia (s_1, s_2) soddisfacente alle condizioni

$$a \leq s_1 < s_2 \leq b. \tag{1}$$

Evidentemente, nel piano delle variabili s_1, s_2, l'insieme dei punti soddisfacenti alle (1), che nel seguito sarà indicato con T, costituisce un triangolo, privato di parte del contorno (in tale piano gli assi s_1, s_2 si supporranno ortogonali).

È tuttavia possibile, come ora sarà dimostrato, togliere l'accennata indeterminazione della funzione $\alpha(s_1, s_2)$ imponendo ad essa di risultare una funzione continua nell'insieme definito dalle (1) e di ridursi, in corrispondenza del punto (a, b), a una determinazione assegnata dell'anomalia della secante corrispondente.

---

[1] Ci siamo risoluti a dedicare qualche pagina alla dimostrazione che segue perchè le trattazioni a cui ci saremmo potuti richiamare non ci sono sembrate soddisfacenti. Si confrontino ad esempio i teoremi generali dati da W. F. OSGOOD a pag. 36 e 156 della 1ª ed. (1907) del suo *Lehrbuch der Funktionentheorie* ed il quasi totale rimaneggiamento da essi subito nelle successive edizioni (si veda ad es. la 5ª ed., 1928) senza alcun offettivo guadagno in chiarezza e precisione.

Sia (s_1^0, s_2^0) un punto di T e si consideri in tale insieme la poligonale γ_0 costituita da due soli segmenti rettilinei. Sia (a, b) il primo estremo e (s_1^0, s_2^0) il secondo estremo della poligonale γ_0. Inoltre γ_0 abbia quale unico vertice il punto (a, s_2^0).

Quali equazioni parametriche della curva γ_0 si possono assumere le seguenti

$$(2) \qquad s_1 = s_1^0(t) \qquad\qquad s_2 = s_2^0(t) \qquad\qquad 0 \leq t \leq 2$$

essendo

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} s_1^0(t) = a & s_2^0(t) = t(s_2^0 - b) + b & \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ s_1^0(t) = (t-1)(s_1^0 - a) + a & s_2^0(t) = s_2^0 & \text{per} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{array}$$

Al variare di t da 0 a 2 il punto $(s_1(t), s_2(t))$ varia in T percorrendo la curva γ_0 dal primo estremo (a, b) al secondo estremo (s_1^0, s_2^0). Evidentemente ad ogni valore t dell'intervallo $(0, 2)$ corrisponde una secante P_1P_2, essendo P_1 e P_2 i punti di C corrispondenti ai valori $s_1^0(t)$ e $s_2^0(t)$ del parametro s. Poichè le funzioni $x(s)$ e $y(s)$, che figurano nelle equazioni parametriche di C, sono continue nell'intervallo $a \leq s \leq b$, la distanza fra i detti punti P_1 e P_2 è una funzione continua di t in $0 \leq t \leq 2$. Inoltre, poichè è sempre $s_1^0(t) < s_2^0(t)$, tale distanza non si annulla mai. Anche il seno ed il coseno dell'anomalia della secante P_1P_2 (che non dipendono dalla determinazione di questa) sono perciò in $0 \leq t \leq 2$ funzioni continue di t. Esiste perciò, ed è unica [2], una

---

[2] Se $u(t)$ e $v(t)$ sono due funzioni della variabile t, definite e continue nell'intervallo chiuso (p, q) ed ivi soddisfacenti alla condizione $u^2 + v^2 = 1$, esiste in (p, q) una funzione $\alpha(t)$ ivi continua e soddisfacente alle condizioni sen $\alpha(t) = u(t)$, $\cos \alpha(t) = v(t)$. Questa affermazione rappresenta il caso unidimensionale del teorema che abbiamo in vista. Ne diamo qui una breve giustificazione per le medesime ragioni indicate nella nota [1].

Si divida (p, q) in un certo numero n di intervalli (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, t_n), essendo $t_0 = p$, $t_n = q$, tali che in ciascuno di essi l'oscillazione di entrambe le funzioni $u(t)$ e $v(t)$ sia minore di $\sqrt{2}$.

La determinazione $\alpha(t_i)$ venga scelta sotto la condizione $|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| < \pi$, ciò che consente, fissata che sia la determinazione $\alpha(t_0)$ la scelta di ogni altra determinazione $\alpha(t_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Inoltre per ogni t dell'intervallo (t_i, t_{i+1}) la determinazione $\alpha(t)$ sia scelta sotto la condizione $|\alpha(t) - \alpha(t_i)| < \pi$. Tali scelte sono invero possibili. Infatti, per $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, si ha:

$$|u(t) - u(t_i)| < \sqrt{2} \qquad |v(t) - v(t_i)| < \sqrt{2}$$

da cui, quadrando e sommando membro a membro,

$$u^2(t) + v^2(t) + u^2(t_i) + v^2(t_i) - 2[u(t)u(t_i) + v(t)v(t_i)] < 4.$$

Ma è $u^2(t) + v^2(t) = u^2(t_i) + v^2(t_i) = 1$, $u(t) = \text{sen}\,\alpha(t)$, $v(t) = \cos \alpha(t)$, $u(t_i) = \text{sen}\,\alpha(t_i)$, $v(t_i) = \cos \alpha(t_i)$ e perciò $2 - 2\cos[\alpha(t) - \alpha(t_i)] < 4$ ossia

$$\cos[\alpha(t) - \alpha(t_i)] > -1$$

Pertanto per $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ è sempre $|\alpha(t) - \alpha(t_i)| \neq \pi$, ciò che consente la scelta della determinazione $\alpha(t)$ in modo che sia $|\alpha(t) - \alpha(t_i)| < \pi$ per ogni t dell'intervallo chiuso (t_i, t_{i+1}). In tal modo si riesce a definire una funzione $\alpha(t)$ continua in ogni intervallo chiuso (t_i, t_{i+1}) e quindi una funzione $\alpha(t)$ continua nell'intervallo chiuso (p, q). Evidente-funzione $\alpha^0(t)$ definita nell'intervallo $0 \leq t \leq 2$, ivi continua, uguale per ogni t di $(0, 2)$ a una determinazione dell'anomalia della secante orientata P_1P_2 e riducentesi per $t = 0$ a una determinazione assegnata $\alpha(a, b)$ dell'anomalia della secante corrispondente al punto (a, b) dell'insieme T. Si porrà allora $\alpha(s_1^0, s_2^0) = \alpha^0(2)$.

Si dispone così di un procedimento atto a scegliere la determinazione dell'anomalia della secante corrispondente a un qualunque punto (s_1^0, s_2^0) di T.

Si dimostrerà ora che la funzione $\alpha(s_1, s_2)$ definita in T con il procedimento ora descritto è ivi continua.

Si scelga a tale scopo in T un punto (s_1^0, s_2^0) e successivamente un h tale che sia $0 < h < s_2^0 - s_1^0$. Si consideri il triangolo T_h definito dalle limitazioni

$$a \leq s_1 < s_2 \leq b, \qquad s_2 - s_1 \geq h.$$

Evidentemente T_h è contenuto in T, contiene il punto (s_1^0, s_2^0) ed è un insieme chiuso. Poichè le funzioni $\operatorname{sen} \alpha(s_1, s_2)$ e $\cos \alpha(s_1, s_2)$ sono in T continue e poichè T_h è insieme chiuso, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, è possibile determinare un δ tale che in ogni quadrato di lato minore di δ e tutto appartenente a T_h le oscillazioni di entrambe le funzioni $\operatorname{sen} \alpha(s_1, s_2)$ e $\cos \alpha(s_1, s_2)$ siano minori di ε. Nel seguito si supporrà $\varepsilon < \sqrt{2}$ e $\delta < \frac{1}{2}(s_2^0 - s_1^0 - h)$.

Sia ora (s_1', s_2') un altro punto di T_h scelto con la condizione

$$|\, s_1' - s_1^0 \,| < \delta \qquad |\, s_2' - s_2^0 \,| < \delta. \tag{4}$$

Per scegliere la determinazione $\alpha(s_1', s_2')$ si introduca, conformemente al procedimento esposto, la poligonale γ' di equazioni parametriche

$$s_1 = s_1'(t) \qquad s_2 = s_2'(t) \qquad 0 \leq t \leq 2 \tag{5}$$

essendo $s_1'(t)$ e $s_2'(t)$ funzioni definite in modo analogo alle (3):

$$\begin{matrix} s_1'(t) = a & s_2'(t) = t(s_2' - b) + b & \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ s_1'(t) = (t-1)(s_1' - a) + a & s_2'(t) = s_2' & \text{per} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{matrix} \tag{6}$$

La determinazione $\alpha(s_1', s_2')$ verrà allora scelta imponendo alla funzione $\alpha(s_1'(t), s_2'(t))$ di risultare continua in $(0, 2)$ e ridursi per $t = 0$ alla determinazione $\alpha(a, b)$ sopra fissata. Tale funzione continua di t sarà brevemente indicata con $\alpha'(t)$. Si ha così $\alpha'(0) = \alpha(a, b)$, $\alpha'(2) = \alpha(s_1', s_2')$. Si tratta ora di confrontare le due determinazioni $\alpha(s_1^0, s_2^0)$ e $\alpha(s_1', s_2')$.

Dalle (3) e (6), in forza delle (4), si deduce:

$$|\, s_1^0(t) - s_1'(t) \,| < \delta \qquad |\, s_2^0(t) - s_2'(t) \,| < \delta$$

---

mente vi è un unico modo di costruire una siffatta funzione $\alpha(t)$, quando ad essa si imponga di ridursi per $t = p$, ad una determinazione $\alpha(p)$ assegnata. Infatti se esistesse un'altra funzione $\bar{\alpha}(t)$ dotata delle stesse proprietà della $\alpha(t)$, la differenza $\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)$ dovrebbe essere in (p, q) continua, uguale a multipli interi di 2π e nulla in $t = p$, ciò che impone $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t)$.

per ogni t dell'intervallo $(0, 2)$. Perciò si ha per ogni t di $(0, 2)$

$$|\operatorname{sen}\alpha^0(t) - \operatorname{sen}\alpha'(t)| < \varepsilon \qquad |\cos\alpha^0(t) - \cos\alpha'(t)| < \varepsilon$$

Da queste quadrando e sommando membro a membro si deduce:

$$\cos[\alpha^0(t) - \alpha'(t)] > 1 - \varepsilon^2 > -1 \qquad (0 \leq t \leq 2) \tag{7}$$

e quindi, in particolare,

$$\cos[\alpha^0(2) - \alpha'(2)] > 1 - \varepsilon^2 > -1.$$

Poichè è $\alpha_0(0) - \alpha'(0) = \alpha(a, b) - \alpha(a, b) = 0$ e poichè la funzione $|\alpha^0(t) - \alpha'(t)|$ è continua in $0 \leq t \leq 2$, se fosse $|\alpha^0(2) - \alpha'(2)| \geq \pi$ esisterebbe in $(0, 2)$ un valore $\bar{t}$ per il quale sarebbe $|\alpha_0(\bar{t}) - \alpha'(\bar{t})| = \pi$ e quindi $\cos[\alpha^0(\bar{t}) - \alpha'(\bar{t})] = -1$, contrariamente alla (7). È perciò $|\alpha^0(2) - \alpha'(2)| < \pi$. Posto allora $1 - \varepsilon^2 = \cos\eta$, con $0 < \eta < \pi$, si ha $|\alpha^0(2) - \alpha'(2)| < \eta$, ossia

$$|\alpha(s_1^0, s_2^0) - \alpha(s_1', s_2')| < \eta$$

dove η, per l'arbitrarietà di ε, è una quantità piccola a piacere.

Resta così dimostrata la continuità della funzione $\alpha(s_1, s_2)$, definita con il procedimento sopra esposto, in un qualunque punto (s_1^0, s_2^0) di T e quindi in tutto T.

2. Evidentemente aggiungendo alla funzione $\alpha(s_1\ s_2)$, di cui ora è stata stabilita l'esistenza, un conveniente multiplo intero (positivo, negativo o nullo) di 2π è possibile ottenere una nuova funzione $\bar{\alpha}(s_1, s_2)$ la quale sia in T continua, uguale in ogni punto (s_1, s_2) di T a una determinazione dell'anomalia della corrispondente secante P_1P_2 e si riduca, in un punto (s_1^0, s_2^0) dell'insieme T_* a una determinazione assegnata dell'anomalia della secante $P_1^0P_2^0$ corrispondente alla coppia (s_1^0, s_2^0).

Evidentemente se due funzioni $\alpha(s_1, s_2)$ e $\bar{\alpha}(s_1, s_2)$ definite in T sono ivi continue e uguali in ogni punto (s_1, s_2) a una determinazione dell'anomalia della secante (s_1, s_2) esse differiscono per una costante pari a un multiplo intero (positivo, nullo o negativo) di 2π. Infatti la differenza $\alpha(s_1, s_2) - \bar{\alpha}(s_1, s_2)$, può assumere soltanto valori multipli interi di 2π. Ma essa è pure funzione continua in T e perciò la differenza è un multiplo costante di 2π. Ne consegue ancora che se le due funzioni $\alpha(s_1, s_2)$ e $\bar{\alpha}(s_1. s_2)$ coincidono in un punto (s_1^0, s_2^0) di T, esse coincidono in tutto T.

Allo scopo di raccogliere i risultati conseguiti in un enunciato indipendente dalla particolare rappresentazione parametrica della curva C, si introduca l'insieme I delle coppie ordinate (P_1, P_2) di punti di C soddisfacenti alla condizione $P_1 < P_2$.

È immediato osservare che una funzione $\alpha(P_1, P_2)$ definita in I può essere riguardata quale funzione $\alpha(s_1. s_2)$ definita nell'insieme T e che, se $\alpha(P_1, P_2)$ è continua in I, $\alpha(s_1, s_2)$ è continua in T e viceversa.

I risultati precedentemente stabiliti possono allora essere raccolti nel seguente teorema:

Sia C una curva semplice, aperta, appartenente a un piano nel quale siano scelti un' orientazione quale origine degli angoli e il verso positivo delle rotazioni. Scelto su C un verso positivo di percorso, sia I l'insieme delle coppie ordinate (P_1, P_2) di punti di C soddisfacenti alla condizione $P_1 < P_2$. Esiste allora in I, ed è unica, una funzione $\alpha(P_1, P_2)$ dotata delle seguenti proprietà:

1) in corrispondenza di ogni coppia (P_1, P_2) di I la funzione $\alpha(P_1, P_2)$ è uguale a una determinazione dell'anomalia della secante orientata P_1P_2;

2) la funzione $\alpha(P_1, P_2)$ è in I continua;

3) la funzione $\alpha(P_1, P_2)$ si riduce in corrispondenza della coppia (P_1^0, P_2^0) di I a una determinazione assegnata dell'anomalia della secante orientata $P_1^0P_2^0$.

Inoltre ogni altra funzione $\bar{\alpha}(P_1, P_2)$ definita in I ed avente a comune con la $\alpha(P_1, P_2)$ le proprietà 1) e 2) differisce dalla $\alpha(P_1, P_2)$ di un multiplo intero costante (positivo, nullo o negativo) di 2π.

2. Ampiezza di una curva semplice e aperta.

1. Sia C una curva piana, semplice, aperta e sia stabilito su di essa un verso positivo. Sia I l' insieme delle coppie ordinate (P_1, P_2) di punti di C scelte sotto la condizione $P_1 < P_2$. Sia $\alpha(P_1, P_2)$ una funzione definita in I, ivi continua e uguale in corrispondenza di ogni coppia (P_1, P_2) di I a una determinazione dell' anomalia della secante orientata P_1P_2.

Per *ampiezza della curva* C si intenderà l' oscillazione della funzione $\alpha(P_1, P_2)$ in I, cioè la differenza fra il limite superiore e il limite inferiore della funzione $\alpha(P_1, P_2)$ in I.

Il teorema del paragrafo precedente illustra l' indipendenza dell' ampiezza di una curva dalla particolare funzione $\alpha(P_1, P_2)$ adottata. Si osservi ancora che l' ampiezza di una curva non muta cambiando il verso positivo della curva ed è altresì indipendente dall' origine degli angoli nel piano e dal verso positivo delle rotazioni.

All' oscillazione della funzione $\alpha(P_1, P_2)$ in I è stata riserbata l' espressione di *ampiezza della curva* C perchè, come si verifica facilmente, nel caso in cui C sia un arco di circonferenza l' oscillazione della detta funzione uguaglia l' ampiezza del corrispondente angolo al centro.

Dalla definizione discende che l' ampiezza di una curva non può essere negativa. Essa può essere nulla (caso del segmento rettilineo), positiva, o anche infinita. Quale esempio di curva dotata di ampiezza infinita si consideri la curva di equazioni parametriche

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{per} \quad t = 0$$
$$x = t \cos \log t, \quad y = t \operatorname{sen} \log t \quad \text{per} \quad 0 < t \leq 1$$

coincidente con la spirale $\rho = e^{\theta}$, con $\theta \leq 0$, cui si aggreghi come punto iniziale l'origine. Evidentemente tale curva è semplice, aperta, rettificabile e dotata di ampiezza infinita.

2. Si osservi che *l'ampiezza di un arco di C non supera l'ampiezza di C.*

Infatti l'ampiezza di un arco di C è l'oscillazione della funzione $\alpha(P_1, P_2)$ in un sottoinsieme dell'insieme in cui essa è definita.

3. Angolosità di una curva semplice in un punto di essa.

1. Sia C una curva semplice, non importa se aperta o chiusa, e sia P un punto di C, interno a C se trattasi di curva aperta. Esista inoltre un arco $\widehat{A_0B_0}$ di C, a cui P sia interno, dotato di ampiezza finita.

È allora finito, e non negativo, l'estremo inferiore β delle ampiezze degli archi $\widehat{A'B'}$ di C ai quali P è interno; tale estremo inferiore sarà detto *angolosità della curva C in P.*

Si può anche considerare l'angolosità di C in P come il limite dell'ampiezza di un arco $\widehat{A'B'}$, avente P quale punto interno, al tendere di $\widehat{A'B'}$ a P. Infatti detto β l'estremo inferiore delle ampiezze degli archi $\widehat{A'B'}$ di C ai quali P è interno e scelto un ε positivo arbitrario, esiste in C un arco $\widehat{A_1B_1}$ al quale P è interno e la cui ampiezza è $\geq \beta$ e $\leq \beta + \varepsilon$. Inoltre per essere β estremo inferiore e per la proprietà del § 2, n. 2 ogni arco $\widehat{A'B'}$ di C appartenente ad $\widehat{A_1B_1}$ e contenente P quale punto interno ha ampiezza $\geq \beta$ e $\leq \beta + \varepsilon$.

In particolare, si potrà calcolare l'angolosità di C in P come limite delle ampiezze di una successione $\widehat{A_nB_n}$ di archi di C, aventi P all'interno e tendenti a P.

Quando ogni arco di C contenente al suo interno P abbia ampiezza infinita si dirà che *C ha in P angolosità infinita.*

Quando si adotti per C, o per un arco $\widehat{A_0B_0}$ di C avente all'interno P, una rappresentazione parametrica.

$$x = x(s) \qquad y = y(s)$$

e si definisca, in conformità del teorema del § 1, la funzione $\alpha(s_1, s_2)$ come una delle determinazioni continue dell'anomalia della secante $P(s_1)P(s_2)$, l'angolosità di C in $P(s)$ appare come l'estremo inferiore β delle oscillazioni di $\alpha(s_1, s_2)$ in una famiglia di intorni (triangolari) del tipo

$$s - h < s_1 < s_2 < s + k$$

del punto (s, s) (evidentemente il punto (s, s) non appartiene al campo di definizione di $\alpha(s_1, s_2)$ ma ne è punto di accumulazione). Poichè tali intorni possono avere diametro piccolo a piacere, β coincide con l'estremo inferiore delle oscillazioni di $\alpha(s_1, s_2)$ in *tutti* gli intorni di detto punto; l'angolosità di C in $P(s)$ coincide dunque con ciò che chiamasi [3] l' oscillazione di $\alpha(s_1, s_2$ in (s, s).

La definizione di angolosità di una curva semplice C in un punto P di essa si estende facilmente al caso in cui si considerino solo i punti precedenti o quelli seguenti P nel verso fissato: si otterranno così *l'angolosità a destra e a sinistra di P*. La prima sarà l'estremo inferiore delle ampiezze degli archi $\widehat{PB'}$, con B' seguente P e potrà pure definirsi come il limite dell'ampiezza dell'arco $\widehat{PB'}$, essendo B' un punto seguente P che tende a P. La seconda si definirà in modo analogo.

Evidentemente se C è aperta, al primo estremo e al secondo estremo di C sono applicabili, rispettivamente, soltanto le definizioni di angolosità a destra e a sinistra.

Le angolosità di C a destra del primo estremo $(s = a)$ e a sinistra del secondo $(s = b)$ sono evidentemente le oscillazioni di $\alpha(s_1, s_2)$ in (a, a) e (b, b) rispettivamente.

Dalla definizione di angolosità di una curva in un punto di essa discende pure la proposizione:

Se P è un punto interno a un arco $\widehat{A_0B_0}$ di una curva semplice C, l'angolosità di C in P non supera l'ampiezza di $\widehat{A_0B_0}$.

2. Ecco ora alcuni esempi, facili a giustificare, di valori assunti dall'angolosità di una curva in un punto di essa.

a) Una curva continua, semplice, dotata di tangente variabile con continuità ha in ogni suo punto angolosità nulla.

b) Una poligonale semplice ha in ogni suo vertice angolosità pari all'ampiezza (misurata positivamente) dell'angolo convesso formato dai due lati consecutivi aventi a comune il vertice considerato e orientati secondo uno stesso verso di percorso della poligonale. L'angolosità di una poligonale è perciò in ogni vertice minore di π e maggiore di zero, mentre è nulla in ogni altro punto della poligonale.

c) Se una curva semplice C è costituita da un numero finito di archi regolari (per arco regolare si intende un arco dotato in ogni suo punto, estremi compresi, di tangente variabile con continuità) tali che due archi consecutivi abbiano nel punto a comune tangenti distinte, l'angolosità di C è in ogni suo punto minore di π.

d) Quale esempio di curva dotata di un punto nel quale l'angolosità è infinita, si consideri l'insieme di tutti i punti le cui coordinate polari ρ, θ

---

(3) Vedasi ad esempio M. PICONE, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Vol. I, Parte Prima Catania, 1923, pag. 84.

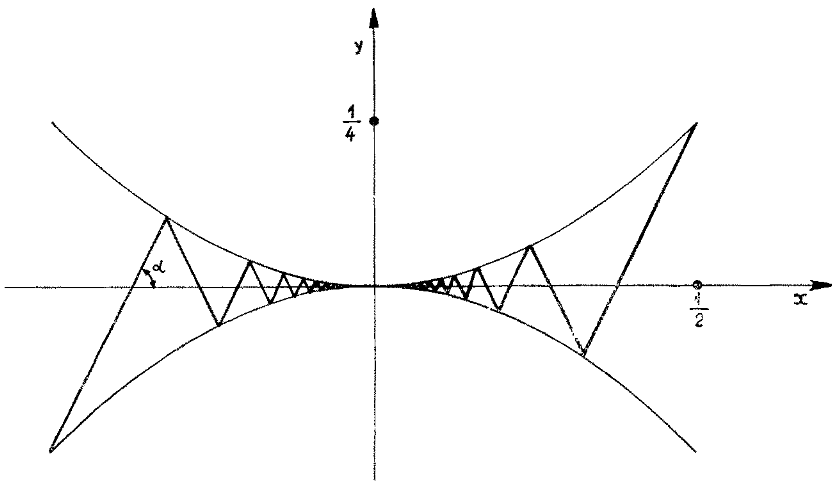
soddisfano a una qualunque delle tre seguenti relazioni:

1ª	$\rho = e^{\theta}$	$\pi \geq \theta > -\infty$
2ª	$\rho = 0$	
3ª	$\rho = e^{\theta - \pi}$	$-\infty < \theta \leq 0.$

In quanto all'ordinamento di tali punti si può ad esempio supporre che il punto $\rho = 0$ segua tutti i punti soddisfacenti alla condizione 1ª e preceda tutti quelli soddisfacenti alla condizione 3ª; i punti della condizione 1ª si supporranno ordinati per θ variabile da π a $-\infty$ e quelli della condizione 3ª per θ variabile da $-\infty$ a 0. Il primo estremo della curva è perciò il punto $\rho = e^{\pi}$, $\theta = \pi$; il secondo estremo è il punto $\rho = e^{-\pi}$, $\theta = 0$.

La curva così definita è continua, semplice, aperta ed ha nel punto $\rho = 0$ angolosità infinita.

e) Se in un punto di una curva semplice, l'angolosità è nulla, la curva è evidentemente dotata in quel punto di tangente. Non vale l'inverso, anzi non è difficile costruire curve dotate in uno stesso punto di tangente e di angolosità avente un valore prefissato ad arbitrio. Ad esempio la curva dise-



gnata in figura è nell'origine $x = y = 0$ dotata di tangente e di angolosità $2\alpha > 0$. Essa è costituita da un insieme di infiniti segmenti rettilinei e dal punto $x = y = 0$. Ogni segmento rettilineo ha un estremo sulla parabola $y = x^2$ e l'altro estremo sulla parabola $y = -x^2$. La curva ha il primo estremo nel punto $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$ e il secondo estremo nel punto $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$. Ogni segmento rettilineo considerato orientato secondo il verso positivo di percorso della curva (cioè il verso che porta dal primo al secondo estremo della curva) forma con l'asse orientato della x o l'angolo $+\alpha$ o l'angolo $-\alpha$, essendo $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Arco lipschitziano e punto lipschitziano di una curva semplice.

1. Si supponga che un arco $\widehat{A_0 B_0}$ della curva semplice C sia tale che rispetto a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali ξ, η esso possa essere rappresentato dall'equazione

$$\eta = f(\xi) \qquad a_0 \leq \xi \leq b_0 .$$

Poichè per due punti P_1 e P_2 di un tale arco la retta $P_1 P_2$ non è mai perpendicolare all'asse ξ, si ottiene una determinazione continua dell'anomalia di $P_1 P_2$ assumendo

$$\alpha(\xi_1 , \xi_2) = \text{arc tang} \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$$

con il noto significato elementare della funzione arco tangente.

Poichè gli estremi superiore e inferiore del rapporto incrementale relativo a due punti di $\widehat{A_0 B_0}$ coincide, per un noto teorema del DINI ([4]), con gli estremi corrispondenti di un qualunque numero derivato, segue che l'ampiezza dell'arco $\widehat{A_0 B_0}$ è l'oscillazione di un qualunque numero derivato in (a_0 , b_0).

Ne segue che l'angolosità in un punto $P(\xi)$ interno ad $\widehat{A_0 B_0}$ è data dall'oscillazione in ξ di un qualunque numero derivato (da non confondere con la differenza tra un numero derivato superiore ed uno inferiore).

Comunque l'angolosità in $P(\xi)$ è in questo caso sempre $\leq \pi$.

Sia in particolare $f(\xi)$ lipschitziana in (a_0 , b_0). I valori del rapporto incrementale essendo allora limitati, l'ampiezza dell'arco è $< \pi$; a più forte ragione l'angolosità in un punto qualunque P interno ad $\widehat{A_0 B_0}$ è $< \pi$.

2. Viceversa sia C una curva semplice e P un suo punto, diverso dagli estremi se C è aperta, nel quale l'angolosità β di C sia $< \pi$. Scelto allora un ε soddisfacente alla condizione $0 < \varepsilon < \pi - \beta$, per quanto detto al § 3, n. 1, esiste un arco $\widehat{AB}$ di C dotato di ampiezza minore di $\beta + \varepsilon$ e tale che il punto P appartenga ad esso, pur tuttavia essendo diverso da entrambi gli estremi A e B.

Si può sempre supporre che il verso di percorso dell'arco $\widehat{AB}$ da A a B coincida con il verso positivo di C.

Si consideri allora l'insieme I delle coppie ordinate (P_1 , P_2) di punti dell'arco $\widehat{AB}$ soddisfacenti alla condizione $P_1 \prec P_2$ e si introduca, ciò che è consentito dal teorema del § 1, una funzione $\alpha(P_1 , P_2)$ definita in I, ivi continua ed uguale, in corrispondenza di ogni coppia (P_1 , P_2) di I, a una determinazione dell'anomalia della secante orientata $P_1 P_2$. Siano rispettivamente α'' e α' gli estremi superiore e inferiore della funzione $\alpha(P_1 , P_2)$ in I, ciò che, per quanto detto sopra, implica $\alpha'' - \alpha' < \beta + \varepsilon$.

([4]) U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*, Pisa, 1878, pagg. 193-94.

Si consideri una retta orientata r di anomalia $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha'' + \alpha')$. Allora per ogni coppia (P_1, P_2) di I si ha:

$$\alpha(P_1, P_2) - \gamma \leq \alpha'' - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha'' - \alpha') < \frac{1}{2}(\beta + \varepsilon) < \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha(P_1, P_2) - \gamma \geq \alpha' - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') > -\frac{1}{2}(\beta + \varepsilon) > -\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto introdotto il numero positivo $M = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\beta + \varepsilon)$ si ha

$$|\operatorname{tang}[\alpha(P_1, P_2) - \gamma]| < M. \tag{8}$$

Da ciò si deduce che una perpendicolare alla retta r può tagliare l'arco $\widehat{AB}$ in un solo punto al più. Se allora si sceglie un sistema di assi ortogonali ξ, η tali che l'asse ξ coincida con la retta r, l'arco $\widehat{AB}$ può, rispetto a tale sistema di assi, essere rappresentato da un'equazione $\eta = f(\xi)$, essendo $f(\xi)$ funzione definita in un intervallo (ξ_1, ξ_2) della variabile ξ, dove ξ_1 e ξ_2 denotano le ascisse rispettive degli estremi A e B in tale sistema di coordinate. Dalla (8) inoltre si deduce che in (ξ_1, ξ_2) la $f(\xi)$ è lipschitziana.

3. Le considerazioni ora svolte suggeriscono le seguenti definizioni:

Un arco $\widehat{AB}$ di una curva semplice C si dirà lipschitziano se esiste un sistema di assi ortogonali ξ, η tali che ([5]), *dette ξ_1 e ξ_2 le ascisse rispettive degli estremi A e B, l'arco $\widehat{AB}$ possa essere rappresentato da un'equazione $\eta = f(\xi)$, con $f(\xi)$ definita in (ξ_1, ξ_2) ed ivi lipschitziana.*

Un punto P di una curva semplice C si dirà lipschitziano se esiste un arco lipschitziano di C al quale P è interno.

E si ha allora il teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto di una curva semplice C sia lipschtziano è che in esso l'angolosità di C sia minore di π.*

Ne segue che: *Se l'angolosità di una curva semplice C in un punto P è $< \pi$, esiste un arco $\widehat{AB}$ di C, contenente P nell'interno, e in ogni punto del quale l'angolosità di C è ancora $< \pi$.*

4. *Una curva semplice e chiusa C costituita tutta da punti lipschitziani è rettificabile* ([6]).

([5]) La considerazione di assi ortogonali non costituisce limitazione alcuna. Infatti se rispetto a un sistema di assi cartesiani ξ', η' non ortogonali, una curva C è rappresentabile mediante un'equazione $\eta' = g(\xi')$, con $g(\xi')$ funzione lipschitziana di ξ', si può facilmente verificare che rispetto al sistema di assi ortogonali ξ, η, scelto in modo che gli assi η e η' coincidano. la curva C è rappresentabile mediante un'equazione $\eta = f(\xi)$, con $f(\xi)$ ancora lipschitziana.

([6]) Tale proposizione, espressa in termini di paratingente, si trova stabilita nella *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* di G. BOULIGAND, Paris, 1932, pagg. 79-80.

Ciò perchè in tal caso ogni punto di C risulta interno a un arco lipschitziano. Da una immediata estensione del lemma di PINCHERLE–BOREL alle curve chiuse, consegue che C è ricopribile con un numero finito di archi lipschitziani. Poichè un arco lipschitziano è rettificabile, l'asserto risulta evidente.

5. Angolosità e paratingente. Esistenza di curve rettificabili prive di punti lipschitziani.

1. Il concetto di angolosità di una curva introdotto al § 3 è in stretta relazione con il concetto di paratingente dovuto a BOULIGAND (7).

Secondo BOULIGAND la definizione di paratingente è la seguente:

Si dirà che una retta RS passante per un punto di accumulazione P di un insieme E di punti appartiene al paratingente di E in P se si può trovare una successione di segmenti P_iQ_i (non nulli) le cui estremità appartengano a E, tendano verso P e le cui rette sostegni tendano verso la retta RS.

Si consideri pertanto una curva semplice C e su di essa un punto P nel quale l'angolosità di C sia minore di π. Poichè la curva è un insieme di punti, in base alla definizione or ora esposta, si può considerare il paratingente di C in P. Non sarà allora difficile al lettore constatare che il paratingente di C in P consta di due angoli opposti al vertice, aventi ciascuno ampiezza uguale all'angolosità di C in P.

Tuttavia la relazione che esiste fra angolosità e paratingente nel caso in cui essa sia $< \pi$, più non si riscontra nel caso di angolosità maggiori. Ciò perchè quando l'angolosità di una curva in un punto è $\geq \pi$, il paratingente risulta indipendente dal valore dell'angolosità ed è sempre costituito da tutte le rette del piano passanti per quel punto.

La considerazione dell'angolosità offre per ciò, nel caso generale, una analisi più accurata del comportamento di una curva nell'intorno di un punto, di quanto non venga offerto dalla considerazione del paratingente.

2 È noto che una curva rettificabile è dotata di tangente quasi dappertutto (teorema di LEBESGUE). Viene spontaneo da ciò chiedersi se una curva semplice e rettificabile abbia quasi dappertutto angolosità nulla. Ora ciò non è sempre vero, come appare da un esempio di curva illustrato nell'opera di BOULIGAND (8). Tale curva, che è semplice, rettificabile e aperta, è dotata di un insieme di punti in ognuno dei quali il paratingente della curva ricopre due angoli opposti al vertice di comune ampiezza $\frac{\pi}{4}$, essendo il detto insieme non rinchiudibile in una successione di archi di lunghezza totale arbitrariamente piccola.

(7) G. BOULIGAND, l. c., pag. 72.
(8) G. BOULIGAND, l. c., pagg. 189-191.

Ma esistono curve rettificabili di struttura molto più complessa di quella illustrata da BOULIGAND. Anzi ora, alla luce di un esempio, sarà dimostrato che *esistono curve semplici, rettificabili e tali che nessuno dei loro punti è lipschitziano.*

Si consideri a tale scopo la funzione periodica $f(x)$ definita nell' intervallo $(-\infty, +\infty)$ della variabile x dalle relazioni

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{x(1-x)} \qquad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = f(x+1) \qquad \text{per} \quad -\infty < x < +\infty$$

Con ciò nel piano degli assi ortogonali x, y l'equazione $y = f(x)$ rappresenta, per $0 \leq x \leq 1$, un semicerchio di diametro unitario e parallelo all'asse x, essendo il semicerchio tangente a tale asse nel punto $x = \frac{1}{2}$ e giacente nel semipiano $y \geq 0$.

Ciò premesso, si consideri la funzione $g(x)$ definita nell' intervallo $(0, 1)$ dalla serie:

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{4} f(2x) + \frac{1}{16} f(4x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} f(2^n x).$$

Evidentemente la serie scritta è uniformemente convergente in $(0, 1)$, in quanto che in tutto l' intervallo $(-\infty, +\infty)$ è sempre $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$. Inoltre, poichè le funzioni $f(2^n x)$ sono continue, la somma $g(x)$ della serie è continua in $(0, 1)$. Pertanto nel piano delle variabili x, y l' equazione $y = g(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ rappresenta una curva C continua, semplice e aperta.

La funzione $g(x)$ altresì in $(0, 1)$ a variazione limitata. Infatti è subito visto che la variazione totale della $f(x)$ in $(0, 1)$ vale 1 e che la variazione totale della $f(2^n x)$ in $(0, 1)$ è 2^n volte la variazione totale della $f(x)$ in $(0, 1)$, cioè 2^n. Perciò la variazione totale in $(0, 1)$ della funzione $\frac{1}{4^n} f(2^n x)$ è $\frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$. Poichè la serie delle variazioni totali $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ delle funzioni $\frac{1}{4^n} f(2^n x)$ è convergente ed ha per somma 2, consegue che la variazione totale della $g(x)$ nell' intervallo $(0, 1)$ è limitata [9], anzi non supera 2. La curva C (teorema di JORDAN) è perciò rettificabile.

Si scelgano ora due interi m' e n' soddisfacenti alle condizioni $n' > 0$, $0 < m' < 2^{n'}$ e si ponga $x_0 = \frac{m'}{2^{n'}}$; senza ledere la generalità si può supporre m' dispari.

---

(9) La cosa segue immediatamente dal teorema dato dal LEBESGUE a pag. 51 delle sue *Leçons sur l'intégration*, I^a ed., Paris, 1904.

Inoltre si ponga $f_n(x) = \frac{1}{4^n} f(2^n x)$, $S_m(x) = \sum_{n=0}^{n=m} f_n(x)$, $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$. Si dimostrerà ora che esiste la derivata a sinistra di x_0 e così pure la derivata a destra di x_0 della funzione $g(x)$ e che tali derivate sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.

Infatti le funzioni $f_n(x)$, allorchè è $n < n'$, sono in x_0 tutte derivabili con derivata finita. Altrettanto perciò dicasi di $S_{n'-1}(x)$. Invece le derivate a sinistra di x_0 delle funzioni $f_n(x)$, allorchè è $n \geq n'$, valgono tutte $+\infty$, mentre le derivate a destra valgono tutte $-\infty$. Scelto allora un M positivo grande a piacere, si può trovare un $h_0 > 0$ tale che per ogni h soddisfacente alla condizione $-h_0 < h < 0$, sia $\frac{f_{n'}(x_0 + h) - f_{n'}(x_0)}{h} > M$. Si osservi ancora che per $n > n'$ ciascuna funzione $f_n(x)$ assume in x_0 il massimo valore da essa assunto in $(0,1)$ (infatti qualunque funzione $f(2^n x)$ non supera mai il valore $\frac{1}{2}$ in $(0, 1)$ ed in x_0 ogni funzione $f(2^n x)$, con $n \geq n'$, assume proprio il valore $\frac{1}{2}$). Perciò i rapporti incrementali $\frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h}$ per $h < 0$ e per $n > n'$ non sono mai negativi. Quindi per $-h_0 < h < 0$ si ha

$$\frac{1}{h}(R_{n'-1}(x_0 + h) - R_{n'-1}(x_0)) = \sum_{n=n'}^{\infty} \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} > M.$$

Perciò il resto $R_{n'-1}(x)$ della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ammette in $x = x_0$ derivata a sinistra $+\infty$. Analogamente si dimostra che esso in x_0 ammette derivata a destra $-\infty$. Poichè la somma parziale $S_{n'-1}(x)$ ammette in x_0 derivata finita, si conclude che la funzione $g(x)$ ammette in x_0 derivata a sinistra $+\infty$ e derivata a destra $-\infty$.

È evidente allora che in ogni punto $x = \frac{m}{2^n}$, con m e n interi soddisfacenti alle condizioni $n > 0$, $0 < m < 2^n$, l'angolosità di C è π. Ma tali punti $x = \frac{m}{2^n}$ costituiscono un insieme denso in $(0, 1)$. Perciò l'ampiezza di un qualunque arco di C è π. Poichè l'angolosità di C in un suo punto P è il limite di una successione di ampiezze di archi contenenti P, da quanto detto consegue che l'angolosità di C in P è π, qualunque sia il punto P di C. Cioè nessun punto di C è lipschitziano.

Evidentemente, con analoghi artifici, o anche introducendo un'opportuna deformazione della curva costruita, si possono ottenere curve chiuse, semplici, rettificabili e non contenenti alcun punto lipschitziano.

Lo scrivente porge i più vivi ringraziamenti al Prof. GUIDO ASCOLI per i preziosi consigli da lui avuti nel corso della stesura del presente lavoro.