Sulla teoria dei controlli lineari negli spazi di Orlicz di funzioni a valori vettoriali.

GIUSEPPE PULVIRENTI - GIUSEPPE SANTAGATI (Catania) (*)

Sunto. - *Come nell'introduzione.*

Introduzione.

Siano: U, X due spazi di Banach e $\mathfrak{L}(X, X)$, $\mathfrak{L}(U, X)$ rispettivamente l'insieme degli operatori lineari (non necessariamente continui) da X in X e lo spazio degli operatori lineari e continui da U in X ; T un numero positivo ed A, B, c tre funzioni

$$A: t \longrightarrow A(t), \quad B: t \longrightarrow B(t), \quad c: t \longrightarrow c(t)$$

definite q.o. in $[0, T]$ a valori in $\mathfrak{L}(X, X)$, $\mathfrak{L}(U, X)$ ed X rispettivamente; V e W due sottoinsiemi di X ed $\mathfrak{M}$ un sottoinsieme di uno spazio lineare $\mathfrak{B}$ di funzioni a valori in U definite q.o. in $[0, T]$.

Conformemente a quanto fatto in casi analoghi (cfr. ad es. R. CONTI [9], [10], G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]) diremo che il *Problema (P)* ha soluzione (u, v) in $\mathfrak{M} \times V$ se esistono $u \in \mathfrak{M}$, $v \in V$ in modo che vi sia almeno una soluzione (in un senso opportuno) $x(t, u, v)$ dell'equazione:

$$(E) \quad \frac{dx}{dt} - A(t)x = B(t)u(t) + c(t),$$

con $x(0, u, v) = v$, per la quale si abbia $x(T, u, v) \in W$. Il problema (P) è un problema di *controllabilità*. Infatti, secondo la terminologia della teoria dei *controlli* dire che il problema (P) ha soluzioni in $\mathfrak{M} \times V$ vuol dire che esistono un controllo $u \in \mathfrak{M}$ (*controllo permanente*) ed uno stato iniziale, $v \in V$ (*controllo iniziale*), del sistema materiale il cui stato $x(t, u, v)$ si evolve al variare del tempo t in $[0, T]$ secondo la legge descritta dall'equazione (E) ,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Raggruppamenti di ricerca Matematica del C. N. R.

Il paragrafo 1 ed il n. 3.1 sono dovuti a G. PULVIRENTI, il § 2 ed i numeri 3.2, 3.3, 3.4, a G. SANTAGATI.

per i quali lo stato $x(t, u, v)$ raggiunge l'insieme W (*obiettivo*) al tempo T (cioè vi è controllabilità in $\mathcal{U} \times V$).

Il problema (P) è stato, in particolare, studiato nel caso in cui $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme di uno spazio di tipo L^p (cfr. ad es. H. A. ANTOSIEWICZ [1], R. CONTI [7], [8], [9], [10]) e nel caso in cui $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme di uno spazio del tipo di Orlicz di funzioni a valori nello spazio euclideo ad m dimensioni (cfr. G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]).

Nel presente lavoro ci occupiamo dello studio del problema (P) nel caso in cui $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme di uno spazio del tipo di Orlicz di funzioni a valori in U , supponendo U spazio di Hilbert.

La teoria degli spazi di Orlicz di funzioni a valori in uno spazio astratto è nota nelle linee generali (cfr. ad es. N. DINCULEANU [13]; per una trattazione sistematica della teoria degli spazi di Orlicz di funzioni a valori reali cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19]); noi abbiamo, però, preferito trattare, nel paragrafo 1, dopo aver richiamato alcune nozioni preliminari, tale teoria nel caso in cui lo spazio U dei valori è di Hilbert, dando un assetto opportuno ai risultati ottenuti e fornendo alcuni complementi, utili allo studio della teoria dei controlli successivamente fatto. In tal modo abbiamo, altresì, evitato di dover fare ipotesi di separabilità su U , dalla quale, o da qualcosa di analogo, non si prescinde in N. DINCULEANU [13] nello stabilire alcuni fondamentali risultati, come ad esempio il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (cfr. anche N. DINCULEANU [14], S. BOCHNER-A. E. TAYLOR [4]). Oltre ad una norma del tipo di Orlicz, abituale in questi spazi, abbiamo introdotto una norma del tipo di Luxemburg che ci è stata utile sia nella valutazione della norma dei funzionali lineari e continui, sia nello studio della teoria dei controlli.

Nel paragrafo 2 abbiamo, poi, tradotto il problema (P) in altri ad esso equivalenti ed abbiamo stabilito teoremi di controllabilità, considerando come insieme $\mathcal{U}$ dei controlli permanenti sia una sfera di uno spazio di Orlicz (ottenendo condizioni necessarie e sufficienti di controllabilità espresse da certe disuguaglianze involventi la norma di Luxemburg di certi dati, oppure condizioni necessarie o sufficienti espresse da disuguaglianze involventi la norma di Orlicz di essi), sia l'immagine inversa di una sfera di uno spazio ad esso isomorfo (ottenendo in questo caso, condizioni caratteristiche di controllabilità espresse da disuguaglianze involventi la norma di Orlicz dei suddetti dati). È stato preso in esame sia il caso di spazi di Orlicz riflessivi che il caso di spazi di Orlicz non riflessivi immergibili in spazi riflessivi (ottenendo, così, risultati di natura un po' diversa rispetto agli analoghi di G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]).

Nel paragrafo 3, infine, abbiamo studiato alcuni problemi di ottimizzazione (problema del tempo minimo, della minima distanza, iniziale e finale, problema del minimo sforzo) stabilendo teoremi di esistenza di controllo ottimo e relativi

principi di massimo (in forme diverse a secondo dell'uso della norma di Orlicz o di Luxemburg). I principi di massimo sono stati ottenuti, sviluppando una recente idea di R. CONTI (cfr. R. CONTI [11], [12]), in ipotesi su X più generali di quelle di solito adottate in casi analoghi (cfr. ad es. R. CONTI [10], G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]).

§ 1. - Spazi di Orlicz di funzioni a valori vettoriali.

1.1. - La classe $L_M(0, T; U)$ e gli spazi $L^M(0, T; U)$ (di Orlicz), $L^{(M)}(0, T; U)$ (di Luxemburg).

Denotata con R la retta numerica, consideriamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1.1.1. - Una funzione $M(r)$ definita in $R^{(1)}$ è detta *N-funzione* se ha la rappresentazione:

$$M(r) = \int_0^{|r|} p(t) dt \quad \forall r \in R,$$

dove $p(t)$ è una funzione positiva per $t > 0$, continua a destra per $t \geq 0$, non decrescente e soddisfacente le condizioni:

$$p(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty.$$

DEFINIZIONE 1.1.2. - Dicesi *funzione complementare* di una *N-funzione* $M(r)$ la *N-funzione*:

$$N(s) = \int_0^{|s|} q(t) dt \quad \forall s \in R,$$

dove:

$$q(t) = \sup \{ \tau : p(\tau) \leq t \} \quad \forall t \in R^+,$$

con $R^+ = \{z : z \in R, z \geq 0\}$.

Nel seguito, con $M(r)$ ed $N(s)$ denoteremo sempre *N-funzioni complementari* l'una dell'altra.

DEFINIZIONE 1.1.3. - Si dice che la *N-funzione* $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -

(1) Qui e nel seguito omettendo di indicare l'insieme dei valori di una funzione intendiamo trattarsi di una funzione a valori reali.

condizione se esistono $k > 0$, $r_0 \geq 0$ tali che

$$M(2r) \leq k M(r) \quad \forall r \geq r_0.$$

DEFINIZIONE 1.1.4. - Diremo che la N -funzione $M(r)$ soddisfa l'ipotesi (α) se esistono $c > 1$ e $r_0 \geq 0$ tali che:

$$M(r) \leq \frac{1}{2c} M(cr) \quad \forall r \geq r_0.$$

È noto che l'ipotesi (α) sulla N -funzione $M(r)$ è condizione caratteristica per la Δ_2 -condizione relativamente alla N -funzione $N(s)$.

Sia ora U uno spazio di Hilbert reale ⁽²⁾ e $(\cdot, \cdot)_U$ il prodotto scalare tra due elementi di U . Poniamo la seguente:

DEFINIZIONE 1.1.5. - Se $M(r)$ è una N -funzione, denotiamo con $L_M(0, T; U)$ l'insieme (classe di Orlicz) di tutte le funzioni $u(t)$ a valori in U , fortemente misurabili in $[0, T]$ tali che:

$$\rho(u, U; M) = \int_0^T M(\|u(t)\|_U) dt < +\infty \text{ } ^{(3)}.$$

Per semplicità poniamo $L_M(0, T; R) = L_M(0, T)$ e $\rho(u, R; M) = \rho(u; M)$.

Se $u(t)$ è una funzione a valori in U , fortemente misurabile in $[0, T]$ ed $|u|_U$ la funzione:

$$|u|_U: t \rightarrow \|u(t)\|_U, \quad t \text{ q.o. in } [0, T],$$

dalla Definizione 1.1.5 si ha, ovviamente, il

TEOREMA 1.1.1. - Condizione necessaria e sufficiente affinché sia $u \in L_M(0, T; U)$ è che sia $|u|_U \in L_M(0, T)$.

Si ha, allora, che ogni funzione $u(t)$ a valori in U fortemente misurabile e limitata in $[0, T]$ appartiene alla classe $L_M(0, T; U)$ e che ogni funzione di $L_M(0, T; U)$ è sommabile in $[0, T]$.

⁽²⁾ Per semplicità, tutti gli spazi di Banach considerati nel presente lavoro sono supposti lineari rispetto al corpo reale. Se X è uno spazio di Banach, denotiamo, come di consueto, con θ_X l'elemento nullo, con X' e X'' , rispettivamente, il duale e il bidual (forte) di X ; se F è un funzionale lineare e continuo su X , con $\|F\|_{X'}$ denotiamo la norma di F , cioè:

$$\|F\|_{X'} = \sup \{ | \langle y, F \rangle | : \|y\|_X \leq 1 \}.$$

⁽³⁾ Ovviamente conveniamo che due tali funzioni che siano equivalenti (la misura essendo quella di Lebesgue) si considerino come un unico elemento di $L_M(0, T; U)$. Osservazioni del genere, in casi analoghi, saranno sottintese nel seguito.

DEFINIZIONE 1.1.6. - Diciamo spazio di Orlicz (di funzioni a valori in U) e lo denotiamo con $L^M(0, T; U)$, lo spazio di Banach delle funzioni $u(t)$ a valori in U , fortemente misurabili in $[0, T]$, tali che

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt < \infty \quad \forall v \in L_N(0, T; U')$$

con la norma

$$(1.1.1) \quad \|u\|_{L^M_U} = \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(v, U'; N) \leq 1 \right\}.$$

Per semplicità poniamo $L^M(0, T; R) = L^M(0, T)$ e $\|u\|_{L^M_R} = \|u\|_{L^M}$.

Si ha:

TEOREMA 1.1.2. - Condizione necessaria e sufficiente affinché sia $u \in L^M(0, T; U)$ è che sia $|u|_U \in L^M(0, T)$.

DIMOSTRAZIONE. - Per provare la necessità della condizione, risultando l'applicazione $|u|_U$ misurabile in $[0, T]$, basta dimostrare che per ogni $w \equiv w(t) \in L_N(0, T)$ si ha:

$$\int_0^T \|u(t)\|_U w(t) dt < \infty.$$

A tale scopo, detta $\mathcal{J}$ la congruenza tra gli spazi U ed U' esistente in virtù del noto teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui sugli spazi di Hilbert, risulta quasi ovunque in $[0, T]$:

$$\langle z, \mathcal{J}u(t) \rangle = (z, u(t))_U \quad \forall z \in U$$

nonchè

$$\|\mathcal{J}u(t)\|_{U'} = \|u(t)\|_U;$$

inoltre, essendo l'applicazione lineare $\mathcal{J}$ fortemente continua in U ed $u(t)$ fortemente misurabile in $[0, T]$, la funzione $\mathcal{J}u(t)$ a valori in U' risulta fortemente misurabile in $[0, T]$. Posto:

$$(1.1.2) \quad G_1 = \{t: t \in [0, T], \|u(t)\|_U \neq 0\}, \quad G_2 = [0, T] - G_1$$

e

$$(1.1.3) \quad v(t) = \begin{cases} \frac{w(t)}{\|u(t)\|_U} \mathcal{J}u(t) & \text{q.o. in } G_1 \\ \Theta_{U'} & \text{q.o. in } G_2, \end{cases}$$

la funzione $v(t)$ a valori in U' così definita è fortemente misurabile in $[0, T]$ e si ha

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \|u(t)\|_U w(t) \quad \text{q.o. in } [0, T]$$

nonchè

$$\|v(t)\|_{U'} \leq |w(t)| \quad \text{q.o. in } [0, T].$$

Da ciò segue che:

$$(1.1.4) \quad \rho(v, U'; N) \leq \rho(w; N) < +\infty,$$

il che prova che $v \equiv v(t) \in L_N(0, T; U')$ ed inoltre:

$$(1.1.5) \quad \int_0^T \|u(t)\|_U w(t) dt = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt < \infty.$$

La sufficienza della condizione segue, poi, osservando che dalla relazione

$$|\langle u(t), v(t) \rangle| \leq \|u(t)\|_U \|v(t)\|_{U'} \quad \text{q.o. in } [0, T] \text{ e } \forall v \in L_N(0, T; U'),$$

essendo $\langle u(t), v(t) \rangle$ una funzione misurabile in $[0, T]$, in virtù del Teorema 1.1.1, si ha

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt < \infty.$$

Il teorema è, così, dimostrato.

Ovviamente, se $u(t)$ è una funzione a valori in U fortemente misurabile e limitata in $[0, T]$, $u \equiv u(t) \in L^M(0, T; U)$, e se $u \equiv u(t) \in L^M(0, T; U)$, $u(t)$ è sommabile in $[0, T]$.

TEOREMA 1.1.3. - Se $u \in L^M(0, T; U)$ si ha:

$$(1.1.6) \quad \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(v, U'; N) \leq 1 \right\} = \|u\|_U \|u\|_{L^M}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Cominciamo con l'osservare che, essendo:

$$\left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| \leq \int_0^T \|u(t)\|_U \|v(t)\|_{U'} dt \quad \forall v \in L_N(0, T; U'), \quad \rho(v, U'; N) \leq 1,$$

e risultando $|v|_{U'} \in L_N(0, T)$ e $\rho(|v|_{U'}; N) \leq 1$, si ha:

$$\sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(v, U'; N) \leq 1 \right\} \leq \|u\|_{L^M}.$$

Per provare il teorema basta, allora, far vedere che risulta:

$$(1.1.7) \quad \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(v, U'; N) \leq 1 \right\} \geq \|u\|_{L^M}.$$

Per dimostrare la (1.1.7) denotati con X e Y gli insiemi numerici descritti,

rispettivamente, da $\left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right|$ al variare di v in $L_N(0, T; U')$ con $\rho(v, U'; N) \leq 1$ e da $\left| \int_0^T \|u(t)\|_U w(t) dt \right|$ al variare di w in $L_N(0, T)$ con $\rho(w; N) \leq 1$, sarà sufficiente provare che:

$$(1.1.8) \quad Y \subseteq X.$$

A tale scopo, sia $\left| \int_0^T \|u(t)\|_U w(t) dt \right| \in Y$; definita, quindi, mediante la (1.1.3) la funzione $v(t)$ a valori in U' fortemente misurabile in $[0, T]$, la (1.1.8) segue, allora, dalle (1.1.4) e (1.1.5).

Il teorema è così dimostrato.

In generale due spazi di Orlicz $L^{M_1}(0, T; U)$ e $L^{M_2}(0, T; U)$ generati da due differenti N -funzioni $M_1(r)$ e $M_2(r)$ sono differenti; come esempio basta considerare spazi $L^p(0, T; U)$ con $p > 1$ (che possono riguardarsi come spazi di Orlicz, di funzioni a valori in U , generati dalle N -funzioni $\frac{|r|^p}{p}$) per valori di p distinti.

Condizioni di inclusione e coincidenza tra due spazi di Orlicz, mediante disuguaglianze involventi le N -funzioni generanti gli spazi o le norme in essi, possono darsi con i seguenti teoremi:

TEOREMA 1.1.4. - *Se $M_1(r)$ ed $M_2(r)$ sono due N -funzioni, condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia:*

$$(1.1.9) \quad L^{M_1}(0, T; U) \subseteq L^{M_2}(0, T; U)$$

è che esistano due costanti positive a, r_0 tali che

$$M_2(r) \leq M_1(ar) \quad \forall r \geq r_0.$$

DIMOSTRAZIONE. - La necessità della condizione sarà acquisita, in virtù del Theorem 13.1 di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], una volta provato che dalla (1.1.9) segue che:

$$(1.1.10) \quad L^{M_1}(0, T) \subseteq L^{M_2}(0, T).$$

A tale scopo sia $w \equiv w(t) \in L^{M_1}(0, T)$ e sia $\bar{u} \in U$ con $\|\bar{u}\|_U = 1$; la funzione a valori in U $u(t) = \bar{u}w(t)$ è fortemente misurabile in $[0, T]$ e tale che $|u|_U \in L^{M_1}(0, T)$. Allora, facendo uso del Teorema 1.1.2 si ha che $u \in L^{M_1}(0, T; U)$ e, per la (1.1.9), $u \in L^{M_2}(0, T; U)$ per cui $|u|_U \in L^{M_2}(0, T)$ e quindi $w \equiv w(t) \in L^{M_2}(0, T)$.

La sufficienza della condizione segue, poi, subito utilizzando ancora il Theorem 13.1 di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] e il Teorema 1.1.2.

COROLLARIO 1.1.1. - Se $M_1(r)$ ed $M_2(r)$ sono due N -funzioni condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia:

$$L^{M_1}(0, T; U) = L^{M_2}(0, T; U)$$

è che esistano tre costanti positive a, b, r_0 tali che:

$$(1.1.11) \quad M_1(ar) \leq M_2(r) \leq M_1(br) \quad \forall r \geq r_0.$$

TEOREMA 1.1.5. - Se $L^{M_1}(0, T; U) \subseteq L^{M_2}(0, T; U)$, esiste una costante $q > 0$ tale che:

$$\|u\|_{L_U^{M_2}} \leq q \|u\|_{L_U^{M_1}} \quad \forall u \in L^{M_1}(0, T; U).$$

DIMOSTRAZIONE. - L'asserto segue subito in virtù dei Teoremi 1.1.2, 1.1.3 e del Theorem 13.3 di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], ricordando che se $L^{M_1}(0, T; U) \subseteq L^{M_2}(0, T; U)$ vale la (1.1.10).

OSSERVAZIONE 1.1.1. - Dal Teorema 1.1.5 segue che se le due N -funzioni $M_1(r)$ ed $M_2(r)$ soddisfano la condizione espressa dalla (1.1.11), le norme degli spazi $L^{M_1}(0, T; U)$ e $L^{M_2}(0, T; U)$ sono equivalenti.

Una norma equivalente a quella definita dalla (1.1.1), che ci sarà utile appresso, è la seguente (del tipo di Luxemburg; per il caso scalare cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], § 9, n. 7):

$$(1.1.12) \quad \|u\|_{L_U^{(M)}} = \inf \left\{ k: k > 0, \rho\left(\frac{|u|_U}{k}; M\right) \leq 1 \right\}.$$

Lo spazio di Banach che così si genera sarà denotato con $L^{(M)}(0, T; U)$ (omettendo, come al solito, di indicare U nel caso particolare in cui $U = R$). Che la (1.1.12) definisca effettivamente una norma segue dal fatto che, in virtù del Teorema 1.1.2, si ha

$$(1.1.13) \quad \|u\|_{L_U^{(M)}} = \| |u|_U \|_{L^{(M)}}.$$

Inoltre, dal Teorema 1.1.3, dalla (1.1.13) e dalla (9.24) di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] ne viene che

$$(1.1.14) \quad \|u\|_{L_U^{(M)}} \leq \|u\|_{L_U^M} \leq 2 \|u\|_{L_U^{(M)}}.$$

Utile, pure, ci sarà la seguente:

DEFINIZIONE 1.1.7. - Diciamo che una successione di funzioni $\{u_n(t)\}$, $u_n \equiv u_n(t) \in L^M(0, T; U)$, $n = 1, 2, \dots$, è convergente in media alla funzione $u(t)$, $u \equiv u(t) \in L^M(0, T; U)$, se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T M(\|u_n(t) - u(t)\|_U) dt = 0.$$

In virtù del Teorema 1.1.3 e di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], § 9, n. 6, si ha:

TEOREMA 1.1.6. - La convergenza in norma di una successione di elementi di $L^M(0, T; U)$ ne implica la convergenza in media (ma non viceversa). Se la N -funzione $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -condizione allora convergenza in norma e convergenza in media sono equivalenti.

1.2. - Lo spazio $E_M(0, T; U)$. Relazioni tra $E_M(0, T; U)$, $L_M(0, T; U)$, $L^M(0, T; U)$.

Poniamo la seguente:

DEFINIZIONE 1.2.1. - Denotiamo con $E_M(0, T; U)$ la chiusura in $L^M(0, T; U)$ dell'insieme costituito dalle funzioni e valori in U fortemente misurabili e limitate in $[0, T]$.

Evidentemente $E_M(0, T; U)$ è uno spazio di Banach (con la norma indotta da $L^M(0, T; U)$). Poniamo, al solito, per semplicità $E_M(0, T; R) = E_M(0, T)$.

Utile ci sarà il seguente:

TEOREMA 1.2.1. - Condizione necessaria e sufficiente affinché sia $u \in E_M(0, T; U)$ è che sia $|u|_U \in E_M(0, T)$.

DIMOSTRAZIONE. - La condizione è necessaria. Infatti, essendo $u \equiv u(t) \in E_M(0, T; U)$ esiste una successione $\{u_n(t)\}$ di funzioni a valori in U fortemente misurabili e limitate in $[0, T]$ per la quale si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^M_U} = 0;$$

essendo:

$$|\|u(t)\|_U - \|u_n(t)\|_U| \leq \|u(t) - u_n(t)\|_U \quad \text{q.o. in } [0, T]$$

nonchè:

$$\|\|u\|_U - \|u_n\|_U\|_{L^M} \leq \| \|u - u_n\|_U \|_{L^M} = \|u - u_n\|_{L^M_U},$$

si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \|u\|_U - \|u_n\|_U \|_{L^M} = 0.$$

L'asserto segue, allora, osservando che la successione $\{\|u_n(t)\|_U\}$ è costituita da funzioni misurabili e limitate in $[0, T]$.

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè $\|u\|_U \in E_M(0, T)$, esiste una successione $\{w_n(t)\}$ di funzioni misurabili e limitate in $[0, T]$ per la quale risulta

$$(1.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - \|u\|_U\|_{L^M} = 0.$$

Posto, per ogni n intero positivo (utilizzando le notazioni (1.1.2)):

$$u_n \equiv u_n(t) = \begin{cases} \frac{w_n(t)}{\|u(t)\|_U} u(t) & \text{q.o. in } G_1 \\ \Theta_U & \text{q.o. in } G_2, \end{cases}$$

la successione $\{u_n(t)\}$ è costituita da funzioni a valori in U , fortemente misurabili in $[0, T]$ ed ivi limitate (quindi $u_n \in L^M(0, T; U)$, $n = 1, 2, \dots$) e risulta:

$$\|u_n(t) - u(t)\|_U \leq |w_n(t) - \|u\|_U| \quad \text{q.o. in } [0, T], \quad n = 1, 2, \dots$$

Pertanto si ha:

$$\|u_n - u\|_{L^M_U} \leq \|w_n - \|u\|_U\|_{L^M}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

da cui, per la (1.2.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^M_U} = 0$$

il che prova che $u \in E_M(0, T; U)$.

Il teorema è, così, dimostrato.

In base ai Teoremi 1.2.1, 1.1.1, 1.1.2 e a M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] §§ 9 e 10 si ha il seguente:

TEOREMA 1.2.2. - *Valgono le seguenti relazioni di inclusione:*

$$E_M(0, T; U) \subseteq L_M(0, T; U) \subseteq L^M(0, T; U).$$

Se la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione si ha:

$$E_M(0, T; U) = L_M(0, T; U) = L^M(0, T; U).$$

Dimostriamo, inoltre, che:

TEOREMA 1.2.3. - *Se la N -funzione $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -condizione e se $u \in E_M(0, T; U) (= L^M(0, T; U))$, esiste una successione $\{u_n(t)\}$ di funzioni a valori in U costanti a tratti in $[0, T]$ ⁽⁴⁾ tale che:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^M_U} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. - Per la definizione stessa di $E_M(0, T; U)$ basta, ovviamente, dimostrare il teorema nel caso in cui $u(t)$ è fortemente misurabile e limitata in $[0, T]$. A tale scopo osserviamo che (cfr. ad es. C. BAIocchi [2], Teorema 2.2) esiste, in tal caso, una successione $\{u_n(t)\}$ di funzioni a valori in U , costanti a tratti in $[0, T]$, ivi q.o. convergente ad $u(t)$ e tale che

$$\|u_n(t)\|_U \leq \|u(t)\|_U \leq \text{cost.} \quad \text{q.o. in } [0, T], \quad n = 1, 2, \dots$$

Si ha, allora,

$$M(\|u_n(t) - u(t)\|_U) \leq \text{cost.} \quad \text{q.o. in } [0, T], \quad n = 1, 2, \dots;$$

quindi, per la continuità di $M(r)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T M(\|u_n(t) - u(t)\|_U) dt = 0,$$

cioè la successione $\{u_n(t)\}$ converge in media ad $u(t)$; l'asserto segue, allora, dal Teorema 1.1.6.

⁽⁴⁾ Una funzione $u(t)$ a valori in U definita (quasi ovunque) in $[0, T]$ la diremo ivi costante a tratti se si può decomporre $[0, T]$ in un numero finito di parti misurabili su ognuna delle quali la funzione sia costante.

1.3. - Teoremi di rappresentazione dei funzionali lineari e continui e risultati di isomorfismo negli spazi di Orlicz. Riflessività dello spazio $L^M(0, T; U)$ (e dello spazio $L^{(M)}(0, T; U)$).

Essendo:

$$\begin{aligned} | \langle u(t), v(t) \rangle | &\leq \| u(t) \|_U \| v(t) \|_{U'} \quad \text{q.o. in } [0, T], \\ \forall u \in L^M(0, T; U), \quad \forall v \in L^N(0, T; U'), \end{aligned}$$

per i Teoremi 1.1.2, 1.1.3, per la (1.1.13) nonché per il Theorem 9.3 e le (9.26), (9.27) di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], si ha:

TEOREMA 1.3.1. - *Se $u \in L^M(0, T; U)$ e $v \in L^N(0, T; U')$, si hanno le seguenti disuguaglianze (del tipo di Hölder):*

$$(1.3.1) \quad \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| \leq \| u \|_{L^M_U} \| v \|_{L^N_{U'}},$$

$$(1.3.2) \quad \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| \leq \| u \|_{L^M_U} \| v \|_{L^{(N)}_{U'}},$$

$$(1.3.3) \quad \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| \leq \| u \|_{L^{(M)}_U} \| v \|_{L^N_{U'}}.$$

Si ha inoltre:

TEOREMA 1.3.2. - *Se $v \in L^N(0, T; U')$, l'applicazione*

$$(1.3.4) \quad F: u \mapsto \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt, \quad u \in L^M(0, T; U),$$

è un funzionale lineare e continuo su $L^M(0, T; U)$ ⁽⁵⁾.

Valgono le seguenti relazioni:

$$(1.3.5) \quad \| F \|_{(L^M_U)'} \leq \| v \|_{L^N_{U'}} \leq 2 \| F \|_{(L^M_U)'},$$

$$(1.3.6) \quad \| F \|_{(L^M_U)'} = \| v \|_{L^{(N)}_{U'}},$$

$$(1.3.7) \quad \| F \|_{(L^{(M)}_U)'} = \| v \|_{L^N_{U'}},$$

⁽⁵⁾ O ciò che è lo stesso su $L^{(M)}(0, T; U)$.

$$(1.3.8) \quad \frac{1}{2} \|F\|_{(L_U^M)'} \leq \|v\|_{L_{U'}^N} \leq \|F\|_{(L_U^M)'}$$

DIMOSTRAZIONE. - Che l'applicazione (1.3.4) sia un funzionale lineare e continuo su $L^M(0, T; U)$ segue dal Teorema 1.3.1.

Dimostriamo, allora, le (1.3.5)-(1.3.8).

La prima disuguaglianza della (1.3.5) segue subito dalla (1.3.1) e la seconda del fatto che se $u \in L^M(0, T; U)$ si ha (cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], (9.12)):

$$\|u\|_{L_U^M} = \|u\|_{U'} \leq \rho(u, U; M) + 1,$$

per cui, essendo U riflessivo, si ha ⁽⁶⁾:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_{U'}^N} &= \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(u, U; M) \leq 1 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \|u\|_{L_U^M} \leq 2 \right\} = 2 \|F\|_{(L_U^M)'}. \end{aligned}$$

Dimostriamo, ora, la (1.3.6); per ciò, in virtù della (1.3.2), basta provare che:

$$(1.3.9) \quad \|F\|_{(L_U^M)'} \geq \|v\|_{L_{U'}^N}.$$

A tale scopo, cominciamo col notare che, per il Teorema 1.1.2 e per M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] Theorem 9.3 e (14.9), l'applicazione

$$w \rightarrow \int_0^T \|v(t)\|_{U'} w(t) dt, \quad w \in L^M(0, T)$$

⁽⁶⁾ Per la riflessività di U è immediato constatare che lo spazio $L^N(0, T; U')$ è costituito dalle funzioni $v(t)$ a valori in U' , fortemente misurabili in $[0, T]$ tali che

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt < \infty \quad \forall u \in L^M(0, T; U)$$

ed inoltre si ha:

$$\|v\|_{L_{U'}^N} = \sup \left\{ \left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right| : \rho(u, U; M) \leq 1 \right\}.$$

è un funzionale lineare e continuo su $L^M(0, T)$ per il quale risulta:

$$\sup \left\{ \left| \int_0^T \|v(t)\|_{U'} w(t) dt \right| : \|w\|_{L^M} \leq 1 \right\} = \|v\|_{L_{U'}^N}.$$

Detto, allora, X' l'insieme numerico descritto da $\left| \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \right|$ al variare di u in $L^M(0, T; U)$ con $\|u\|_{L_U^M} \leq 1$ ed Y' l'insieme numerico descritto da $\left| \int_0^T \|v(t)\|_{U'} w(t) dt \right|$ al variare di w in $L^M(0, T)$ con $\|w\|_{L^M} \leq 1$, la (1.3.9) resterà acquisita non appena provato che

$$(1.3.10) \quad Y' \subseteq X'.$$

La (1.3.10) si dimostra con procedimento analogo a quello seguito in un caso del genere durante la dimostrazione del Teorema 1.1.2. Infatti, utilizzando le stesse notazioni ivi usate, se $\left| \int_0^T \|v(t)\|_{U'} w(t) dt \right| \in Y'$ (sicchè $w \in L^M(0, T)$ e $\|w\|_{L^M} \leq 1$), posto:

$$G'_1 = \{t : t \in [0, T], \|v(t)\|_{U'} \neq 0\}, \quad G'_2 = [0, T] - G'_1,$$

e

$$u(t) = \begin{cases} \frac{w(t)}{\|v(t)\|_{U'}} \mathcal{J}^{-1} v(t) & \text{q.o. in } G'_1 \\ \Theta_U & \text{q.o. in } G'_2, \end{cases}$$

si ha che $u \in L^M(0, T; U)$ ed inoltre

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \|v(t)\|_{U'} w(t) \quad \text{q.o. in } [0, T]$$

e

$$\|u\|_{L_U^M} \leq \|w\|_{L^M} \leq 1,$$

per cui $\left| \int_0^T \|v(t)\|_{U'} w(t) dt \right| \in X'$.

La (1.3.7), per quanto osservato in ⁽⁶⁾, segue dal fatto che, per M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] Theorem 9.5, l'insieme dei punti $u \in$

$\in L^M(0, T; U)$ per cui $\|u\|_{L^M_U} \leq 1$ è uguale all'insieme dei punti $u \in L^M(0, T; U)$ per cui $\rho(u, U; M) \leq 1$.

La (1.3.8), infine, segue dalle (1.3.5), (1.3.6) e (1.3.7).

Il teorema è così dimostrato.

Dal Theorem 14.1 di M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] segue che la (1.3.4) non è la forma generale dei funzionali lineari e continui su $L^M(0, T; U)$; perchè ciò accada supporremo, conformemente a quanto fatto nel caso di funzioni a valori in uno spazio euclideo ad una dimensione (cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], § 14, n. 2) o ad m dimensioni (cfr. G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21], Teorema 1.4.2) e di funzioni a valori in uno spazio verificante ipotesi di separabilità (cfr. N. DINULEANU [13]), che la N -funzione $M(r)$ verifichi la Δ_2 -condizione.

Si ha, infatti, il seguente:

TEOREMA 1.3.3. - *Se la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione, per ogni funzionale lineare e continuo F su $L^M(0, T; U)$ esiste uno ed un solo elemento $v \in L^N(0, T; U)$ tale che:*

$$(1.3.11) \quad \langle u, F \rangle = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \quad \forall u \in L^M(0, T; U)$$

ed inoltre valgono le (1.3.5)-(1.3.8).

DIMOSTRAZIONE. - Sia F un funzionale lineare e continuo su $L^M(0, T; U)$ e Φ la funzione, a valori in U' , definita, nell'insieme $\mathcal{L}_{[0, T]}$ delle parti misurabili di $[0, T]$, ponendo per ogni $E \in \mathcal{L}_{[0, T]}$:

$$\langle u, \Phi(E) \rangle = \langle u_E, F \rangle \quad \forall u \in U,$$

dove $u_E \equiv u_E(t) = u\chi(t; E)$, $\chi(t; E)$ essendo la funzione caratteristica dell'insieme E . Che la Φ sia a valori in U' segue subito osservando che, per ogni $E \in \mathcal{L}_{[0, T]}$, $\Phi(E)$ è un funzionale su U ovviamente lineare, nonchè continuo poichè:

$$|\langle u, \Phi(E) \rangle| \leq \|F\|_{(L^M_U)'} \|u_E\|_U \leq \text{cost.} \|u\|_U \quad \forall u \in U.$$

La Φ è, ovviamente, finitamente additiva in $\mathcal{L}_{[0, T]}$; si ha, inoltre, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni $E \in \mathcal{L}_{[0, T]}$ con $\text{mis } E < \eta$, risulta $\|\Phi(E)\|_{U'} < \varepsilon$; infatti, essendo:

$$|\langle u, \Phi(E) \rangle| \leq \|F\|_{(L^M_U)'} \|u_E\|_U = \|F\|_{(L^M_U)'} \|u\|_U \chi(\cdot; E) \|_{L^M} \\ \forall E \in \mathcal{L}_{[0, T]}, \quad \forall u \in U,$$

si ha

$$\|\Phi(E)\|_{U'} \leq \|F\|_{(L^M_U)'} \chi(\cdot; E) \|_{L^M} \quad \forall E \in \mathcal{L}_{[0, T]}$$

e quindi l'asserto in virtù della proprietà di assoluta continuità della norma di Orlicz (cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], § 10, n. 6). La Φ risulta, allora, con ragionamento abituale, numerabilmente additiva in $\mathcal{L}_{[0, T]}$; essa è altresì nulla sugli insiemi di $\mathcal{L}_{[0, T]}$ di misura nulla ed è quindi assolutamente continua in $\mathcal{L}_{[0, T]}$. Proviamo, infine, che la Φ è a variazione finita in $\mathcal{L}_{[0, T]}$ ⁽⁷⁾; a tale scopo basta (cfr. ad es. N. DINICULEANU [14], § 4, Prop. 4) far vedere che Φ è a semi-variazione finita in $\mathcal{L}_{[0, T]}$ ⁽⁸⁾. Quest'ultima affermazione segue subito osservando che, assegnato comunque $E \in \mathcal{L}_{[0, T]}$, per ogni decomposizione $\{E_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ di E in un numero finito di parti misurabili, due a due disgiunte, e per ogni famiglia finita $\{u_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ di elementi di U con $\|u_i\|_U \leq 1$, risulta:

$$\begin{aligned} |\sum_i \langle u_i, \Phi(E_i) \rangle| &= |\sum_i \langle (u_i)_{E_i}, F \rangle| = \\ &= |\langle \sum_i (u_i)_{E_i}, F \rangle| \leq \|F\|_{(L^M_U)'} \|\sum_i (u_i)_{E_i}\|_U \|_{L^M} \leq \text{cost.} \end{aligned}$$

Per quanto provato, in virtù di una generalizzazione di un noto teorema di Radon-Nikodym (cfr. G. BAIocchi [3], Teoremi 4.4 e 5.4), esiste $v \equiv v(t) \in L^1(0, T; U')$ tale che:

$$\Phi(E) = \int_E v(t) dt \quad \forall E \in \mathcal{L}_{[0, T]}.$$

Sia, poi, $u(t)$ una funzione a valori in U , costante a tratti in $[0, T]$, assumendo i valori $u_1, u_2, \dots, u_m$ rispettivamente sugli insiemi misurabili $E_1, E_2, \dots, E_m$ costituenti una decomposizione di $[0, T]$, tale cioè che:

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i \chi(t; E_i) \quad \text{q.o. in } [0, T];$$

(7) Cioè:

$$V\Phi(E) = \sup_i \|\Phi(E_i)\|_{U'} < +\infty \quad \forall E \in \mathcal{L}_{[0, T]},$$

l'estremo superiore essendo calcolato al variare di $\{E_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ nella classe di tutte le decomposizioni di E in un numero finito di parti misurabili, due a due disgiunte.

(8) Cioè:

$$\tilde{V}\Phi(E) = \sup_i |\sum_i \langle u_i, \Phi(E_i) \rangle| < +\infty \quad \forall E \in \mathcal{L}_{[0, T]},$$

l'estremo superiore essendo calcolato al variare di $\{E_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ nella classe di tutte le decomposizioni di E in un numero finito di parti misurabili, due a due disgiunte, e al variare di $\{u_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ nella classe di tutte le famiglie finite di elementi di U con $\|u_i\|_U \leq 1$.

si ha, allora, tenendo anche presente un noto risultato sulle trasformazioni lineari chiuse (cfr. ad es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 3.7.12):

$$\begin{aligned} \langle u, F \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle u_i \chi(\cdot; E_i), F \rangle = \sum_{i=1}^m \langle u_i, \int_{E_i} v(t) dt \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{E_i} \langle u_i, v(t) \rangle dt = \sum_{i=1}^m \int_{E_i} \langle u(t), v(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni $u \equiv u(t)$, $u(t)$ a valori in U , costante a tratti in $[0, T]$, si ha:

$$(1.3.12) \quad \langle u, F \rangle = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt.$$

Proviamo, ora, che $v \equiv v(t) \in L^N(0, T; U')$, cioè, per la riflessività di U (cfr. ⁽⁹⁾), che:

$$\int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt < \infty \quad \forall u \in L_M(0, T; U).$$

A tale scopo, osserviamo che se $u \equiv u(t) \in L_M(0, T; U)$, esiste (cfr. C. BAIocchi [2], Teorema 2.2) una successione $\{u_n(t)\}$ di funzioni a valori in U , costanti a tratti in $[0, T]$, ivi q.o. convergente ad $u(t)$ e tale che:

$$(1.3.13) \quad \|u_n(t)\|_U \leq \|u(t)\|_U^* \quad \text{q.o. in } [0, T], \quad n = 1, 2, \dots$$

Risultando, inoltre, la successione $\{|\langle u_n(t), v(t) \rangle|\}$ di funzioni misurabili in $[0, T]$ ivi q.o. convergente alla funzione $|\langle u(t), v(t) \rangle|$, posto:

$$\tilde{u}_n(t) = u_n(t) \operatorname{sign.} \langle u_n(t), v(t) \rangle \quad \text{q.o. in } [0, T],$$

per un teorema di Fatou ⁽⁹⁾ nonchè per le (1.3.12) e (1.3.13) si ha che:

⁽⁹⁾ Cioè il teorema: «Se $\{f_n(t)\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative convergente q.o. in $[0, T]$ alla funzione $f(t)$, si ha

$$\int_0^T f(t) dt \leq \sup_n \int_0^T f_n(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T | \langle u(t), v(t) \rangle | dt &\leq \sup_n \int_0^T | \langle u_n(t), v(t) \rangle | dt = \sup_n \int_0^T \langle \tilde{u}_n(t), v(t) \rangle dt = \\ &= \sup_n \langle u_n, F \rangle \leq \sup_n \| F \|_{(L^M_U)'} \| u_n \|_U \leq \| F \|_{(L^M_U)'} \| u \|_{L^M_U}. \end{aligned}$$

La (1.3.11) è, così, acquisita per ogni $u \equiv u(t) \in L^M(0, T; U)$, $u(t)$ costante a tratti in $[0, T]$; per il Teorema 1.2.3 essa è, allora, valida per ogni $u \in L^M(0, T; U)$.

Assegnato il funzionale F , la $v(t)$ ad esso corrispondente è unica; infatti se, risultando:

$$\int_0^T \langle u(t), v_1(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(t), v_2(t) \rangle dt \quad \forall u \in L^M(0, T; U)$$

con $v_1, v_2 \in L^N(0, T; U)$, fosse di misura positiva l'insieme $G'' = \{t: t \in [0, T], \|v_1(t) - v_2(t)\|_{U'} \neq 0\}$, posto, usando, ancora, le stesse notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 1.1.2:

$$\bar{u} \equiv \bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{J}^{-1}(v_1(t) - v_2(t))}{\|v_1(t) - v_2(t)\|_{U'}} & \text{q.o. in } G'' \\ \Theta_U & \text{q.o. in } [0, T] - G'', \end{cases}$$

si avrebbe $\bar{u} \in L^M(0, T; U)$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle \bar{u}(t), v_1(t) - v_2(t) \rangle dt = \\ &= \int_{G''} \frac{1}{\|v_1(t) - v_2(t)\|_{U'}} \langle \mathfrak{J}^{-1}(v_1(t) - v_2(t)), v_1(t) - v_2(t) \rangle dt = \int_{G''} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{U'} dt \end{aligned}$$

ciò che è assurdo.

La validità delle (1.3.5)-(1.3.8) seguendo dal Teorema 1.3.2, il teorema in esame è dimostrato.

OSSERVAZIONE 1.3.1. - Dal teorema precedente segue che, se la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione, gli spazi $(L^M(0, T; U))'$ e $L^N(0, T; U)$ sono, per la (1.3.5), isomorfi algebricamente e topologicamente; tale isomorfismo non è, in generale, una isometria (cfr. M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTYCKII [19], § 14, n. 1). Lo stesso dicasi, in virtù della (1.3.8), per gli spazi $(L^M(0, T; U))'$ e $L^N(0, T; U')$. Dalle (1.3.6) e (1.3.7) segue, infine, che

vi è congruenza tra gli spazi $(L^M(0, T; U))'$ e $L^{(N)}(0, T; U')$ nonché tra gli spazi $(L^{(M)}(0, T; U))'$ e $L^N(0, T; U')$.

Utile, pure, ci sarà il seguente:

TEOREMA 1.3.4 - *Se la N -funzione $M(r)$ soddisfa l'ipotesi (α) , per ogni funzionale lineare e continuo Z su $L^N(0, T; U')$ esiste uno ed un solo elemento $u \in L^M(0, T; U)$ tale che:*

$$(1.3.14) \quad \langle v, Z \rangle = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle dt \quad \forall v \in L^N(0, T; U')$$

ed inoltre si ha:

$$(1.3.15) \quad \|Z\|_{(L_{U'}^N)'} \leq \|u\|_{L_U^M} \leq 2 \|Z\|_{(L_{U'}^N)'},$$

$$(1.3.16) \quad \|Z\|_{(L_{U'}^N)'} = \|u\|_{L_U^{(M)}},$$

$$(1.3.17) \quad \|Z\|_{(L_{U'}^{(N)})'} = \|u\|_{L_U^M},$$

$$(1.3.18) \quad \frac{1}{2} \|Z\|_{(L_{U'}^{(N)})'} \leq \|u\|_{L_U^{(M)}} \leq \|Z\|_{(L_{U'}^{(N)})'}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Poichè la N -funzione $M(r)$ soddisfa l'ipotesi (α) , la N -funzione $N(s)$ verifica la Δ_2 -condizione; quindi, per il Teorema 1.3.3, esiste uno ed un solo elemento $z \in L^M(0, T; U'')$ tale che:

$$\langle v, Z \rangle = \int_0^T \langle v(t), z(t) \rangle dt \quad \forall v \in L^N(0, T; U')$$

e si hanno le relazioni analoghe alle (1.3.5)-(1.3.8). Per la riflessività di U , in corrispondenza di z esiste, allora, $u \in L^M(0, T; U)$ tale che vale la (1.3.14). La u è, altresì, unica e si ha:

$$\|z\|_{L_{U''}^M} = \|u\|_{L_U^M},$$

$$\|z\|_{L_{U''}^{(M)}} = \|u\|_{L_U^{(M)}};$$

quindi si hanno, pure, le (1.3.15)-(1.3.18).

OSSERVAZIONE 1.3.2. - Analogamente a quanto constatato nell'Osservazione 1.3.1, se la N -funzione $M(r)$ soddisfa l'ipotesi (α) , risultano isomorfi algebricamente e topologicamente gli spazi $(L^N(0, T; U'))'$ e $L^M(0, T; U)$ nonché gli spazi $(L^{(N)}(0, T; U'))'$ e $L^{(M)}(0, T; U)$. Risultano, inoltre, congruenti

gli spazi $(L^N(0, T; U'))'$ e $L^{(M)}(0, T; U)$ nonchè gli spazi $(L^{(N)}(0, T; U'))'$ e $L^M(0, T; U)$.

Dai Teoremi 1.3.3, 1.3.4 e dall'Osservazione 1.3.1 si ha, poi, il seguente

TEOREMA 1.3.5. - *Se la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , lo spazio $L^M(0, T; U)$ (nonchè $L^{(M)}(0, T; U)$) è riflessivo.*

OSSERVAZIONE 1.3.3. - Esempi di N -funzioni generanti spazi di Orlicz dei vari tipi da noi considerati sono riportati, ad esempio, in M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19] ed in G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21].

§ 2. - Il problema della controllabilità.

2.1. - Traduzione del problema (P) in altri equivalenti.

Conformemente a quanto accade nella maggior parte delle applicazioni, noi considereremo controlli permanenti $u(t)$ non necessariamente continui e quindi riguarderemo l'equazione (E) non in senso classico. Anzi, supposto che:

i) *Esista l'operatore di evoluzione (o funzione di Green) associato ad A , cioè esista una funzione:*

$$G : (t, \tau) \longrightarrow G(t, \tau)$$

definita per $0 \leq \tau \leq t \leq T$, a valori nello spazio $\mathfrak{L}(X, X)$ degli operatori lineari e continui di X in sè, fortemente continua in (t, τ) , fortemente assolutamente continua in t e tale che

$$G(t, \tau)G(\tau, \vartheta) = G(t, \vartheta) \quad 0 \leq \vartheta \leq \tau \leq t \leq T,$$

$$G(t, t) = I_{\mathfrak{L}(X, X)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (I_{\mathfrak{L}(X, X)} \text{ identità di } \mathfrak{L}(X, X)),$$

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t} = A(t)G(t, \tau),$$

dove $\frac{\partial}{\partial t}$ denota la derivata forte e, per ogni $\tau \in [0, T]$, l'uguaglianza vale q.o. in $[\tau, T]$ ⁽¹⁰⁾,

le ipotesi che noi faremo saranno atte ad assicurare, assegnati $v \in V$ e $u \in \mathfrak{B}$,

⁽¹⁰⁾ Per condizioni sufficienti che assicurano l'ipotesi i) cfr. T. KATO [17], J. KISYNSKI [18], E. T. POULSEN [20].

l'integrabilità (secondo Bochner) per ogni $t \in [0, T]$ di $G(t, \tau)B(\tau)u(\tau)$, $G(t, \tau)c(\tau)$ in $[0, t]$ e diremo soluzione della (E), $x(t, u, v)$, soddisfacente alla condizione iniziale $x(0, u, v) = v$, la funzione definita in $[0, T]$ a valori in X :

$$(2.1.1) \quad t \rightarrow x(t, u, v) = G(t, 0)v + \int_0^t G(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t G(t, \tau)c(\tau)d\tau \quad (^{11}).$$

Denotate, allora, con Γ_T e Λ_T le applicazioni lineari:

$$\Gamma_T : x \rightarrow G(T, 0)x,$$

$$\Lambda_T : u \rightarrow \int_0^T G(T, t)B(t)u(t)dt,$$

da X in se la prima e da $\mathcal{B}$ in X la seconda, la risolubilità del problema (P) è equivalente al verificarsi della relazione:

$$(2.1.2) \quad \Theta_X \in S = \left\{ \int_0^T G(T, t)c(t)dt \right\} - W + \Gamma_T V + \Lambda_T \mathcal{L}.$$

Se S è un insieme limitato e convesso, considerata la sua *funzione supporto*:

$$h_S : x' \rightarrow h_S(x') = \sup \{ \langle x, x' \rangle : x \in S \}, \quad x' \in X',$$

per il teorema di separazione in senso stretto (cfr. ad es. N. DUNFORD-J. T. SCHWARTZ [15], Cap. V, n. 2, Theorem 10), si ha

$$(2.1.3) \quad (\Theta_X \in \bar{S}) \Leftrightarrow (h_S(x') \geq 0 \quad \forall x' \in X').$$

Quindi, dalle (2.1.2) e (2.1.3), segue che se S è anche chiuso, la condizione

$$(2.1.4) \quad h_S(x') \geq 0 \quad \forall x' \in X'$$

è caratteristica per la risolubilità del problema (P).

La (2.1.4) è stata utilizzata come condizione di controllabilità in parecchi lavori, nei quali sono state poste delle ipotesi sui dati che assicurano la chiusura dell'insieme S : per esempio considerando (cfr. H. A. ANTOSIEWICZ [1],

(¹¹) È noto che, sotto opportune ipotesi (cfr. ad es. i lavori citati in (¹⁰)), la (2.1.1) è dotata di derivata forte e verifica la (E) q.o. in $[0, T]$.

R. CONTI [7], [8], [9], [10]) come insieme $\mathcal{M}$ una sfera dello spazio delle funzioni a valori in U di potenza p ($p > 1$) sommabile oppure (cfr. G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]) una sfera di uno spazio del tipo di Orlicz di funzioni a valori in uno spazio euclideo ad m dimensioni. Nello stesso ordine di idee consideriamo, ora, spazi del tipo di Orlicz di funzioni a valori in uno spazio di Hilbert U , cioè studiamo il caso $\mathfrak{B} = L^M(0, T; U)$ (il caso $\mathfrak{B} = L^{(M)}(0, T; U)$ essendo perfettamente analogo).

2.2. - Alcune proprietà delle applicazioni Γ_T e Λ_T .

In aggiunta all'ipotesi i), consideriamo le seguenti altre ipotesi sui dati:

- ii) X sia uno spazio di Banach riflessivo,
- iii) U sia uno spazio di Hilbert,
- iv) B sia fortemente misurabile in $[0, T]$ e tale che per l'applicazione:

$$|B|_{\mathfrak{L}(U, X)} : t \longrightarrow \|B(t)\|_{\mathfrak{L}(U, X)}, \quad t \text{ q.o. in } [0, T]$$

risulti $|B|_{\mathfrak{L}(U, X)} \in L^N(0, T)$,

- v) si abbia $c \in L^1(0, T; X)$,
- vi) V sia un sottoinsieme di X chiuso, limitato e convesso,
- vii) W sia un sottoinsieme di X chiuso, limitato e convesso.

Ciò posto, cominciamo con l'osservare che, se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e v), come già accennato nel numero precedente, per ogni $u \in L^M(0, T; U)$ e per ogni $t \in [0, T]$ le funzioni a valori in X :

$$(2.2.1) \quad \tau \longrightarrow G(t, \tau)B(\tau)u(\tau), \quad \tau \text{ q.o. in } [0, t]$$

e

$$(2.2.2) \quad \tau \longrightarrow G(t, \tau)c(\tau), \quad \tau \text{ q.o. in } [0, t],$$

sono integrabili (secondo Bochner) in $[0, t]$; invero, le applicazioni (2.2.1) e (2.2.2) sono fortemente misurabili in $[0, t]$ ⁽¹²⁾ e si ha:

$$\|G(t, \tau)B(\tau)u(\tau)\|_X \leq \text{cost.} \|B(\tau)\|_{\mathfrak{L}(U, X)} \|u(\tau)\|_U, \quad \tau \text{ q.o. in } [0, t]$$

⁽¹²⁾ Infatti, per la forte misurabilità di $B(t)$ ed $u(t)$ in $[0, T]$, esistono due successioni $\{B_n(t)\}$ e $\{u_n(t)\}$ di funzioni costanti a tratti in $[0, T]$ a valori in $\mathfrak{L}(U, X)$ e U rispettivamente convergenti q.o. in $[0, T]$, la prima verso $B(t)$ e la seconda verso $u(t)$; si ha, inoltre, che

e

$$\|G(t, \tau)c(\tau)\|_X \leq \text{cost.} \|c(\tau)\|_X, \quad \tau \text{ q.o. in } [0, t];$$

l'affermazione fatta segue, allora (cfr. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 3.7.4), tenendo presente che $\|B(\tau)\|_{\mathcal{L}(U, X)} \|u(\tau)\|_U$ risulta sommabile in $[0, T]$ essendo $\|B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \in L^N(0, T)$ e $\|u\|_U \in L^M(0, T)$ (Teorema 1.1.2 e M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], Theorem 9.3).

Si ha, inoltre, ovviamente che:

TEOREMA 2.2.1. - *Se è verificata l'ipotesi i), l'applicazione lineare Γ_T , da X in $sè$, è fortemente continua.*

Dal teorema precedente segue (cfr. N. BOURBAKI [6], Prop. 6, p. 103):

COROLLARIO 2.2.1. - *Se è verificata l'ipotesi i) l'applicazione lineare Γ_T , da X in $sè$, è debolmente continua.*

Proviamo, poi, il seguente:

TEOREMA 2.2.2. - *Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv), l'applicazione lineare Λ_T , da $L^M(0, T; U)$ in X , è fortemente continua.*

DIMOSTRAZIONE. - L'asserto segue subito dal fatto che la funzione a valori in X :

$$t \mapsto G(T, t)B(t)u(t), \quad t \text{ q.o. in } [0, T],$$

è, per quanto sopra osservato, integrabile secondo Bochner in $[0, T]$ ed inoltre si ha (cfr. anche il Teorema 1.1.3):

$$\left\| \int_0^T G(T, t)B(t)u(t)dt \right\|_X \leq \text{cost.} \| \|B\|_{\mathcal{L}(U, X)} \|u\|_{L^M_U} \quad \forall u \in L^M(0, T; U).$$

Analogamente al corollario precedente si ha:

COROLLARIO 2.2.2. - *Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv), l'applicazione lineare Λ_T , da $L^M(0, T; U)$ in X , è debolmente continua.*

$\{B_n(t)u_n(t)\}$ è una successione di funzioni a valori in X , costanti a tratti in $[0, T]$, e risulta:

$$\|B_n(t)u_n(t) - B(t)u(t)\|_X \leq \|B_n(t) - B(t)\|_{\mathcal{L}(U, X)} \|u_n(t)\|_U + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(U, X)} \|u_n(t) - u(t)\|_U \quad \text{q.o. in } [0, T];$$

quindi $B(t)u(t)$ è fortemente misurabile in $[0, T]$. Analogamente segue che, per ogni $t \in [0, T]$, sono fortemente misurabili in $[0, t]$ $G(t, \tau)B(\tau)u(\tau)$ e $G(t, \tau)c(\tau)$.

2.3. - Teoremi di chiusura e di controllabilità.

Come osservato alla fine del n. 2.1 ci interessa stabilire dei teoremi di chiusura per l'insieme S (definito nella (2.1.2)). A tale scopo, per precisare l'insieme $\mathfrak{A} \subseteq L^M(0, T; U)$, poniamo

$$\Sigma_{M,\rho} = \{u : u \in L^M(0, T; U), \|u\|_{L^M_U} \leq \rho, \rho > 0\},$$

$$\Sigma'_{N,\rho} = \{v' : v' \in (L^N(0, T; U'))', \|v'\|_{(L^N_U)'} \leq \rho, \rho > 0\},$$

$$\Sigma'_{(N),\rho} = \{v' : v' \in (L^{(N)}(0, T; U'))', \|v'\|_{(L^{(N)}_U)'} \leq \rho, \rho > 0\}$$

e, supposto che la N -funzione $M(r)$ verifichi l'ipotesi (α) e detta $\mathfrak{F}$ l'applicazione lineare che (Osservazione 1.3.2) stabilisce isomorfismo algebrico e topologico tra $L^M(0, T; U)$ e $(L^N(0, T; U'))'$ e congruenza tra $L^M(0, T; U)$ e $(L^{(N)}(0, T; U'))'$,

$$I_{M,\rho} = \mathfrak{F}^{-1}\Sigma'_{N,\rho}.$$

Si hanno, allora, i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.3.1. - *Se sono verificate le ipotesi i), ii), vi), l'insieme $\Gamma_T V$ è un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X .*

DIMOSTRAZIONE. - Poichè V è un sottoinsieme di X convesso e (fortemente) chiuso, esso risulta (cfr. ad es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 2.9.3) debolmente chiuso; d'altra parte V è limitato ed X è riflessivo, quindi V è (cfr. ad es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 2.10.3) debolmente compatto. Essendo poi (Corollario 2.2.1) l'applicazione Γ_T debolmente continua, $\Gamma_T V$ è debolmente compatto. Risultando $\Gamma_T V$ ovviamente convesso, l'asserto è acquisito.

TEOREMA 2.3.2. - *Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e se inoltre la N -funzione $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , l'insieme $\Delta_T \Sigma_{M,\rho}$ è un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X .*

DIMOSTRAZIONE. - Poichè lo spazio $L^M(0, T; U)$ è (Teorema 1.3.5) riflessivo, la sfera $\Sigma_{M,\rho}$ risulta (cfr. ad es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 2.10.3) debolmente compatta. Essendo poi (Corollario 2.2.2) l'applicazione Δ_T debolmente continua, $\Delta_T \Sigma_{M,\rho}$ è debolmente compatto. La convessità di $\Delta_T \Sigma_{M,\rho}$ è ovvia.

TEOREMA 2.3.3. - *Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e se inoltre la N -funzione $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , l'insieme $\Delta_T I_{M,\rho}$ è un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X .*

DIMOSTRAZIONE. - La dimostrazione si consegue con ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione del teorema precedente, dopo aver osservato che, risultando $\Sigma'_{N,\rho}$ un sottoinsieme di $(L^N(0, T; U'))'$ debolmente compatto e l'applicazione $\mathfrak{F}^{-1}$ debolmente continua, l'insieme $I_{M,\rho}$ è un sottoinsieme debolmente compatto di $L^M(0, T; U)$.

Esaminato, così, nei Teoremi 2.3.2 e 2.3.3, il caso in cui $L^M(0, T; U)$ è riflessivo, vediamo, ora, di dare qualche risultato inerente al caso non riflessivo. A tale scopo cominciamo con l'osservare che:

LEMMA 2.3.1. - *Sia valida l'ipotesi iii) e siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per cui risulti:*

$$(2.3.1) \quad \tilde{M}(r) \leq M(ar) \quad \forall r \geq r_0.$$

Allora $\Sigma_{M,\rho}$ è un sottoinsieme debolmente compatto di $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$.

DIMOSTRAZIONE. - Dalla (2.3.1), in virtù del Teorema 1.1.4, segue che

$$L^M(0, T; U) \subseteq L^{\tilde{M}}(0, T; U)$$

e quindi $\Sigma_{M,\rho}$ è un sottoinsieme limitato (cfr. Teorema 1.1.5) di $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$. Esso è inoltre chiuso; infatti, detto $v \in L^{\tilde{M}}(0, T; U)$ un suo punto di accumulazione, denotiamo con $\{u_k\}$ una successione di punti di $\Sigma_{M,\rho}$ tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v\|_{L^{\tilde{M}}_U} = 0.$$

Risulta, allora (Teorema 1.1.3),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_k(t) - v(t)\|_U |w(t)| dt = 0$$

per ogni $w \equiv w(t) \in L_N(0, T)$ e tale che $\rho(w; N) \leq 1$. Dunque la successione $\{u_k(t)\}$ converge in media di ordine uno⁽¹³⁾ e quindi (cfr. ad es. N. DUNFORD-J. T. SCHWARTZ [15], Theorem 6, p. 122) in misura in $[0, T]$ alla $v(t)$; per cui (cfr. ad es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 3.5.1) esiste una successione $\{u_{k_n}(t)\}$ da essa estratta convergente q.o. in $[0, T]$ a $v(t)$. Avendosi, poi,

(13) Infatti, per la continuità di $N(s)$ e poichè $N(o) = 0$, esistono funzioni $w(t)$ costanti in $[0, T]$ per le quali $\rho(w; N) \leq 1$.

per ogni n intero positivo:

$$\|u_{k_n}\|_{L^M_U} = \| |u_{k_n}|_U \|_{L^M} \leq \rho,$$

risulta:

$$\int_0^T \|u_{k_n}(t)\|_U |w(t)| dt \leq \rho, \quad \rho(w; N) \leq 1$$

e quindi, per un teorema di Fatou⁽¹⁴⁾:

$$\int_0^T \|v(t)\|_U |w(t)| dt \leq \rho, \quad \rho(w; N) \leq 1.$$

Da ciò e da M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII [19], p. 7, formula (1.4), segue che $v \in L^M(0, T; U)$; inoltre si ha $\|v\|_{L^M_U} \leq \rho$ e quindi $v \in \Sigma_{M, \rho}$ cioè $\Sigma_{M, \rho}$ è chiuso. Essendo, poi, $\Sigma_{M, \rho}$ anche convesso esso è pure un sottoinsieme debolmente chiuso di $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$. Per la riflessività di $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$, $\Sigma_{M, \rho}$ è, quindi, un suo sottoinsieme debolmente compatto.

Proviamo, allora, il seguente

TEOREMA 2.3.4. - *Siano valide le ipotesi i), iii) e siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti positive α ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); inoltre:*

iv) B sia fortemente misurabile in $[0, T]$ e tale che $|B|_{\mathcal{Q}(U, X)} \in L^{\tilde{N}}(0, T)$.*

Allora $\Lambda_T \Sigma_{M, \rho}$ è un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X .

DIMOSTRAZIONE. - L'asserto segue dal fatto che l'applicazione lineare Λ_T , da $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$ in X , è, per il Corollario 2.2.2, debolmente continua e $\Sigma_{M, \rho}$ è, per il Lemma 2.3.1, un sottoinsieme di $L^{\tilde{M}}(0, T; U)$ debolmente compatto.

Poichè la somma diretta di un numero finito di insiemi, dello spazio di Banach riflessivo X , convessi, limitati e debolmente compatti è un sottoinsieme di X convesso, limitato e (debolmente chiuso e quindi) chiuso, si hanno i seguenti risultati:

TEOREMA 2.3.5. - *Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti positive α ed r_0*

⁽¹⁴⁾ Cfr. (9).

per le quali risulti valida la (2.3.1); siano, inoltre, verificate le ipotesi i)-iii), iv*), v)-vii). Allora l'insieme:

$$S_p = \left\{ \int_0^T G(T, t)c(t)dt \right\} - W + \Gamma_T V + \Lambda_T \Sigma_{M,p}$$

è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .

COROLLARIO 2.3.1. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), l'insieme S_p è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .

TEOREMA 2.3.6. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), l'insieme:

$$S'_p = \left\{ \int_0^T G(T, t)c(t)dt \right\} - W + \Gamma_T V + \Lambda_T I_{M,p}$$

è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .

Infine, per quanto osservato nel n. 2.1, si hanno allora i seguenti teoremi di controllabilità:

TEOREMA 2.3.7. - Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); siano, inoltre, verificate le ipotesi i)-iii), iv*), v)-vii). Condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $\Sigma_{M,p} \times V$ è che si abbia:

$$(2.3.2) \quad h_{S_p}(x') \geq 0 \quad \forall x' \in X'.$$

COROLLARIO 2.3.2. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $\Sigma_{M,p} \times V$ è che sia valida la (2.3.2).

TEOREMA 2.3.8. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $I_{M,p} \times V$ è che si abbia:

$$(2.3.3) \quad h_{S'_p}(x') \geq 0 \quad \forall x' \in X'.$$

OSSERVAZIONE 2.3.1. - Se $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ sono due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti po-

sitive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1), l'ipotesi iv*) sulla B è, in generale, più forte della iv); tale restrizione può essere evitata ad esempio nel caso in cui U ed X sono spazi euclidei, facendo uso di un noto teorema di L. Alaoglu (cfr. G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21], Teorema 2.4.1).

2.4. - Funzioni supporto di $\Lambda_T \Sigma_{M,\rho}$ e $\Lambda_T I_{M,\rho}$; conseguenti teoremi di controllabilità.

Osservato che:

$$h_{S_\rho}(x') = h_{\int_0^T G(T, t) c(t) dt}(x') + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + h_{\Lambda_T \Sigma_{M,\rho}}(x') \quad \forall x' \in X'$$

e

$$h_{S'_\rho}(x') = h_{\int_0^T G(T, t) c(t) dt}(x') + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + h_{\Lambda_T I_{M,\rho}}(x') \quad \forall x' \in X',$$

allo scopo di pervenire a condizioni di controllabilità mediante la norma di $B'Gx' \equiv B'(t)G'(T, t)x'$, dove B' e G' sono gli operatori coniugati di B e G rispettivamente, diamo delle espressioni esplicite o delle valutazioni di:

$$\begin{aligned} h_{\Lambda_T \Sigma_{M,\rho}}(x') &= \sup \left\{ \left\langle \int_0^T G(T, t) B(t) u(t) dt, x' \right\rangle : u \in \Sigma_{M,\rho} \right\} = \\ &= \rho \sup \left\{ \int_0^T \langle u(t), B'(t) G'(T, t) x' \rangle dt : \|u\|_{L_U^M} \leq 1 \right\} \quad \forall x' \in X' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_{\Lambda_T I_{M,\rho}}(x') &= \sup \left\{ \left\langle \int_0^T G(T, t) B(t) u(t) dt, x' \right\rangle : u \in I_{M,\rho} \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_0^T \langle u(t), B'(t) G'(T, t) x' \rangle dt : u \in I_{M,\rho} \right\} \quad \forall x' \in X'. \end{aligned}$$

Dimostriamo, allora, i seguenti risultati:

TEOREMA 2.4.1. - Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni verificanti l'ipotesi (α), con $\tilde{M}(r)$ soddisfacente la Δ_2 -condizione, e tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); siano, inoltre, verificate le ipotesi i), iii), iv*). Si ha allora:

$$(2.4.1) \quad h_{\Lambda_T \Sigma_{M,\rho}}(x') = \rho \|B'Gx'\|_{L_U^{(N)}} \quad \forall x' \in X'.$$

DIMOSTRAZIONE. - Per il Teorema 2.3.4 l'insieme $\Lambda_T \Sigma_{M, \rho}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X ; esso è inoltre simmetrico rispetto all'origine. In virtù dell'Osservazione 1.3.2, lo spazio $L^M(0, T; U)$ è congruente allo spazio $(L^{(N)}(0, T; U'))'$; denotato con v' l'elemento corrispondente ad $u \in L^M(0, T; U)$ in tale congruenza, poniamo:

$$\tilde{\Lambda}_T v' = \Lambda_T u;$$

si è, così, definita una applicazione lineare e continua $\tilde{\Lambda}_T$ da $(L^{(N)}(0, T; U'))'$ in X per la quale si ha:

$$(2.4.2) \quad \langle \tilde{\Lambda}_T v', x' \rangle = \int_0^T \langle u(t), B'(t)G'(T, t)x' \rangle dt$$

$$\forall v' \in (L^{(N)}(0, T; U'))', \quad \forall x' \in X'$$

nonchè

$$\Lambda_T \Sigma_{M, \rho} = \tilde{\Lambda}_T \Sigma'_{(N), \rho}.$$

Conseguentemente:

$$(2.4.3) \quad h_{\Lambda_T \Sigma_{M, \rho}}(x') = h_{\tilde{\Lambda}_T \Sigma'_{(N), \rho}}(x') = \rho \sup \{ |\langle \tilde{\Lambda}_T v', x' \rangle| : \|v'\|_{(L^{(N)}(0, T; U'))'} \leq 1 \}.$$

Posto, per ogni $x' \in X'$:

$$(2.4.4) \quad G_{x'}(v) = \langle \tilde{\Lambda}_T v', x' \rangle \quad \forall v' \in (L^{(N)}(0, T; U'))',$$

tenendo presente la (2.4.2) e risultando $B'G'x' \in L^{(N)}(0, T; U')^{(15)}$, si ha che $v' \rightarrow G_{x'}(v)$ è un funzionale lineare e continuo su $(L^{(N)}(0, T; U'))'$ e precisamente (Teorema 1.3.4) $G_{x'} \in (L^{(N)}(0, T; U'))''_0$ ⁽¹⁶⁾ nonchè:

$$(2.4.5) \quad \|G_{x'}\|_{(L^{(N)}(0, T; U'))''_0} = \|B'G'x'\|_{L^{(N)}(0, T; U')} \quad \forall x' \in X'.$$

L'asserto segue, allora, dalle (2.4.3), (2.4.4) e (2.4.5).

Dal teorema precedente e dalla (1.1.14) segue:

⁽¹⁵⁾ È facile, infatti, verificare che $B'(t)G'(T, t)x'$ è una funzione a valori in U' fortemente misurabile in $[0, T]$ e che si ha $\|B'G'x'\|_{U'} \in L^{(N)}(0, T)$.

⁽¹⁶⁾ Se X è uno spazio di Banach, l'espressione $\langle y, y' \rangle$, fissato y in X , dà, al variare di y' in X' , un funzionale lineare e continuo su X' cioè un elemento $y'' \in X''$ per cui si ha

$$(\cdot) \quad \langle y', y'' \rangle = \langle y, y' \rangle \quad \forall y' \in X'.$$

La varietà lineare degli elementi di X'' verificanti la $(\cdot)$ risulta, come è noto, congruente a X e viene, abitualmente, denotata con X_0'' .

TEOREMA 2.4.2. - Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni verificanti l'ipotesi (α) , con $\tilde{M}(r)$ soddisfacente la Δ_2 -condizione, e tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1). Siano, inoltre, verificate le ipotesi i), iii), iv*). Si ha allora:

$$(2.4.6) \quad \frac{\rho}{2} \|B'G'x'\|_{L_{\tilde{U}}^N} \leq h_{\Lambda_T \Sigma_{M,\rho}}(x') \leq \rho \|B'G'x'\|_{L_{\tilde{U}}^N} \quad \forall x' \in X'.$$

Si ha, ovviamente, inoltre:

COROLLARIO 2.4.1. - Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e se inoltre la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , si ha la (2.4.1).

COROLLARIO 2.4.2. - Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e se inoltre la N -funzione $M(r)$ verifica la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , si ha la (2.4.6).

Con procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione del Teorema 2.4.1, in virtù del Teorema 2.3.3 e dell'Osservazione 1.3.2, risultando inoltre $\Lambda_T I_{M,\rho} = \tilde{\Lambda}_T \Sigma'_{N,\rho}$ si ha il seguente:

TEOREMA 2.4.3. - Se sono verificate le ipotesi i), iii), iv) e se inoltre la N -funzione $M(r)$ soddisfa la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , si ha:

$$h_{\Lambda_T I_{M,\rho}}(x') = \rho \|B'G'x'\|_{L_{\tilde{U}}^N} \quad \forall x' \in X'.$$

Si hanno, allora, le seguenti condizioni di controllabilità:

TEOREMA 2.4.4. - Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni verificanti l'ipotesi (α) , con $\tilde{M}(r)$ soddisfacente la Δ_2 -condizione, e tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); siano inoltre verificate le ipotesi i)-iii), iv*), v)-vii). Condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $\Sigma_{M,\rho} \times V$ è che si abbia:

$$(2.4.7) \quad \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + \rho \|B'G'x'\|_{L_{\tilde{U}}^N} \geq 0 \quad \forall x' \in X'.$$

COROLLARIO 2.4.3. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $\Sigma_{M,\rho} \times V$ è che sia valida la (2.4.7).

TEOREMA 2.4.5. - Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni verificanti l'ipotesi (α) , con $\tilde{M}(r)$ soddisfacente la Δ_2 -condizione, e tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); siano inoltre verificate

le ipotesi i)-iii), iv*), v)-vii). Allora la relazione:

$$(2.4.8) \quad \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + \rho \|B'G'x'\|_{L_{UV}^N} \geq 0 \quad \forall x' \in X'$$

è condizione necessaria per la controllabilità in $\Sigma_{M,\rho} \times V$, mentre la relazione:

$$(2.4.9) \quad \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + \frac{\rho}{2} \|B'G'x'\|_{L_{UV}^N} \geq 0 \quad \forall x' \in X'$$

ne è condizione sufficiente.

COROLLARIO 2.4.4. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), la (2.4.8) è condizione necessaria e la (2.4.9) condizione sufficiente per la controllabilità in $\Sigma_{M,\rho} \times V$.

TEOREMA 2.4.6. - Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità in $I_{M,\rho} \times V$ è che si abbia:

$$\int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + h_{-W}(x') + h_{\Gamma_T V}(x') + \rho \|B'G'x'\|_{L_{UV}^N} \geq 0 \quad \forall x' \in X'.$$

§ 3. - Alcuni problemi di ottimizzazione.

3.1. - Il problema del tempo minimo.

In questo numero e nei successivi vengono studiati alcuni problemi di ottimizzazione: precisamente sono acquisiti teoremi di esistenza di controllo ottimo e relativi principi di massimo; le tecniche usate si ispirano sostanzialmente a R. CONTI [10], [11], [12] e a G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21].

Cominciamo, qui, col trattare il problema del tempo minimo. Se $t \in [0, T]$, diciamo che il Problema (P_t) ha soluzione (u, v) (il sistema materiale è controllabile al tempo t) in $\mathcal{U} \times V$ se esistono $u \in \mathcal{U}$, $v \in V$ in modo che si abbia $x(t, u, v) \in W$. Il problema del tempo minimo consiste nel vedere se, nel caso che il problema (P_t) abbia soluzione per qualche $t \in]0, T]$ e detto $\bar{t}$ l'estremo inferiore di tali t , il problema $(P_{\bar{t}})$ ha soluzione $(\bar{u}, \bar{v})$; in caso affermativo, la terna $(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v})$ dicesi soluzione del problema del tempo minimo.

Supponiamo che la N -funzione $M(r)$ verifichi l'ipotesi (α) e che siano

valide le ipotesi i), iii)-v); per ogni $t \in [0, T]$, introdotte le applicazioni lineari:

$$\Gamma_t : x \rightarrow G(t, 0)x, \quad x \in X,$$

$$\Lambda_t : u \rightarrow \int_0^t G(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad u \in L^M(0, T; U),$$

poniamo:

$$S_{\rho, t} = \left\{ \int_0^t G(t, \tau)c(\tau)d\tau \right\} - W + \Gamma_t V + \Lambda_t \Sigma_{M, \rho},$$

$$S'_{\rho, t} = \left\{ \int_0^t G(t, \tau)c(\tau)d\tau \right\} - W + \Gamma_t V + \Lambda_t I_{M, \rho}.$$

Poichè l'insieme delle restrizioni a $[0, t]$ delle $u(t)$ di $\Sigma_{M, \rho}$ coincide con la sfera di centro l'origine e raggio ρ dello spazio $L^M(0, t; U)$ e l'insieme delle restrizioni a $[0, t]$ delle $u(t)$ di $I_{M, \rho}$ coincide con l'immagine inversa in $L^M(0, t; U)$ (nello stesso senso del n. 2.3) della sfera con centro l'origine e raggio ρ dello spazio $(L^N(0, t; U'))'$, per gli insiemi $\Lambda_t \Sigma_{M, \rho}$ e $\Lambda_t I_{M, \rho}$ valgono teoremi analoghi ai Teoremi 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4; in definitiva si ha:

TEOREMA 3.1.1. - *Siano $M(r)$ e $\tilde{M}(r)$ due N -funzioni, con $\tilde{M}(r)$ verificante la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) , tali che esistano due costanti positive a ed r_0 per le quali risulti valida la (2.3.1); siano, inoltre, verificate le ipotesi i)-iii), iv*), v)-vii). Allora, per ogni $t \in [0, T]$, l'insieme $S_{\rho, t}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .*

COROLLARIO 3.1.1 - *Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), per ogni $t \in [0, T]$, l'insieme $S_{\rho, t}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .*

TEOREMA 3.1.2. - *Se $M(r)$ è una N -funzione soddisfacente la Δ_2 -condizione e l'ipotesi (α) e se sono verificate le ipotesi i)-vii), per ogni $t \in [0, T]$, l'insieme $S'_{\rho, t}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di X .*

Posto, allora:

$$(3.1.1) \quad h(t, x') = h_{S_{\rho, t}}(x') = \int_0^t \langle G(t, \tau)c(\tau), x' \rangle d\tau + \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \\ + \sup \{ \langle G(t, 0)v, x' \rangle : v \in V \} + \sup \left\{ \int_0^t \langle G(t, \tau)B(\tau)u(\tau), x' \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \\ \forall (t, x') \in [0, T] \times X'$$

e

$$(3.1.2) \quad h(t, x') = h_{S'_{\rho, t}}(x') = \int_0^t \langle G(t, \tau)c(\tau), x' \rangle d\tau + \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \\ + \sup \{ \langle G(t, 0)v, x' \rangle : v \in V \} + \sup \left\{ \int_0^t \langle G(t, \tau)B(\tau)u(\tau), x' \rangle d\tau : u \in I_{M, \rho} \right\} \\ \forall (t, x') \in [0, T] \times X',$$

si ha:

LEMMA 3.1.1. - *Se sono verificate le ipotesi del Teorema 3.1.1 e la N -funzione $M(r)$ verifica l'ipotesi (α) (in particolare le ipotesi del Corollario 3.1.1) [risp. le ipotesi del Teorema 3.1.2], ogni termine della somma (3.1.1) [risp. (3.1.2)] che definisce la funzione h [risp. la funzione h'] gode delle seguenti proprietà:*

a) *per ogni $t \in [0, T]$ è una funzione positivamente omogenea e convessa in X' nonchè limitata per $\|x'\|_{X'} < 1$ e quindi continua in X' ;*

b) *per ogni $t \in [0, T]$ è una funzione di x' debolmente semicontinua inferiormente in X' ;*

c) *per ogni $x' \in X'$ è una funzione continua in $[0, T]$ uniformemente rispetto ad x' in ogni sottoinsieme limitato di X' .*

DIMOSTRAZIONE. - La a) segue subito da una immediata verifica e da N. BOURBAKI [5], Prop. 2, p. 92.

La b) segue dalla a), da un teorema di Rockafellar⁽¹⁷⁾ e da E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16] Theorem 2.9.3.

La c), infine, si consegue con ragionamento analogo a quello usato in G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21], n. 3.1, tenendo presente la uniforme continuità (e quindi la limitatezza) della G per $0 \leq \tau \leq t \leq T$, la limitatezza di V e di $\Sigma_{M, \rho}$ [risp. di $I_{M, \rho}$ ⁽¹⁸⁾] e l'assoluta continuità della norma di Orlicz.

Per i Teoremi 3.1.1, 3.1.2, 2.3.7, 2.3.8 e per il Lemma 3.1.1 si ha, con procedimento abituale (cfr. R. CONTI [10], G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI [21]), il seguente teorema di esistenza:

⁽¹⁷⁾ Tale teorema di R.T. Rockafellar, la cui dimostrazione può trovarsi ad esempio in E. H. ROTHE [22], è il seguente:

«Sia I un sottoinsieme non vuoto, aperto e convesso di uno spazio lineare topologico di Hausdorff H dotato di una topologia $\mathcal{T}$; sia f una funzione definita e convessa in I e limitata in un sottoinsieme aperto non vuoto di I ; sia $\mathcal{T}_1$ un'altra topologia di H tale che per ogni sottoinsieme convesso di H la $\mathcal{T}$ -chiusura coincida con la $\mathcal{T}_1$ -chiusura. Allora f è semicontinua inferiormente in I nella topologia $\mathcal{T}_1$ ».

⁽¹⁸⁾ Si ha infatti:

$$\Sigma_{M, \rho} \subseteq I_{M, \rho} \subseteq \Sigma_{M, 2\rho}.$$

TEOREMA 3.1.3. - Se sono verificate le ipotesi del Teorema 3.1.1 e la N -funzione $M(r)$ verifica l'ipotesi (α) (in particolare le ipotesi del Corollario 3.1.1) [risp. le ipotesi del Teorema 3.1.2] e se il problema (P_t) è risolubile in $\Sigma_{M,\rho} \times V$ [risp. in $I_{M,\rho} \times V$] per qualche $t \in [0, T]$, allora l'insieme dei suddetti t è dotato di minimo.

Denotata, poi, con $\|(B'G'x')_{\bar{t}}\|_{L_{U',\bar{t}}^N}$ [risp. $\|(B'G'x')_{\bar{t}}\|_{L_{U',\bar{t}}^{(N)}}$] la norma del punto $(B'G'x')_{\bar{t}}$ dello spazio $L^N(0, \bar{t}; U')$ [risp. $L^{(N)}(0, \bar{t}; U')$] individuato dalla applicazione $t \rightarrow B'(t)G'(\bar{t}, t)x'$ da $[0, \bar{t}]$ in U' , proviamo il seguente principio di massimo:

TEOREMA 3.1.4. - Siano verificate le ipotesi del Teorema 3.1.1 e la N -funzione $M(r)$ verifichi l'ipotesi (α) (in particolare le ipotesi del Corollario 3.1.1) [risp. le ipotesi del Teorema 3.1.2]; se $(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v})$ è soluzione del problema del tempo minimo con $(\bar{u}, \bar{v}) \in \Sigma_{M,\rho} \times V$ [risp. $(\bar{u}, \bar{v}) \in I_{M,\rho} \times V$], $\bar{t} > 0$, e se è verificata una delle seguenti condizioni:

$C_1)$ X sia di dimensione finita;

$C_2)$ l'applicazione Λ_t sia «su» X per ogni $t \in [0, \bar{t}]$;

$C_3)$ V abbia un punto interno v^0 e l'applicazione Γ_t sia «su» X per ogni $t \in [0, \bar{t}]$;

$C_4)$ W abbia un punto interno w^0 ;

allora esiste $x'_0 \in X'$, $x'_0 \neq \Theta_{X'}$, tale che:

$$(3.1.3) \quad \langle x(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}), -x'_0 \rangle = \sup \{ \langle w, -x'_0 \rangle : w \in W \},$$

$$(3.1.4) \quad \langle \bar{v}, G'(\bar{t}, 0)x'_0 \rangle = \sup \{ \langle v, G'(\bar{t}, 0)x'_0 \rangle : v \in V \},$$

$$(3.1.5) \quad \int_0^{\bar{t}} \langle B(\tau)\bar{u}(\tau), G'(\bar{t}, \tau)x'_0 \rangle d\tau = \rho \|(B'G'x'_0)_{\bar{t}}\|_{L_{U',\bar{t}}^{(N)}}$$

$$\left[\text{risp. } (3.1.5') \int_0^{\bar{t}} \langle B(\tau)\bar{u}(\tau), G'(\bar{t}, \tau)x'_0 \rangle d\tau = \rho \|(B'G'x'_0)_{\bar{t}}\|_{L_{U',\bar{t}}^N} \right].$$

DIMOSTRAZIONE. - Dimostriamo il teorema nel caso in cui $(\bar{u}, \bar{v}) \in \Sigma_{M,\rho} \times V$ la dimostrazione dell'altro caso essendo perfettamente analoga⁽¹⁹⁾.

⁽¹⁹⁾ Avvertenze del genere saranno omesse, nel seguito, in casi analoghi.

Cominciamo col provare che, nelle ipotesi poste, esiste $x'_0 \in X'$, $x'_0 \neq \Theta_{X'}$, tale che:

$$(3.1.6) \quad h(\bar{t}, x'_0) = 0.$$

Sia $\{t_k\}$ una successione di elementi di $[0, \bar{t}]$ convergente a $\bar{t}$; per ogni t_k esiste (Teorema 2.3.7) $x'_k \in X'$, $x'_k \neq \Theta_{X'}$, tale che:

$$(3.1.7) \quad h(t_k, x'_k) < 0.$$

Se è valida l'ipotesi C_1 , la (3.1.6) segue dalla (3.1.7) in virtù delle a) e c) Lemma 3.1.1, con lo stesso ragionamento usato nel caso analogo in $\mathbb{R}$. CONTI [10].

Sia valida l'ipotesi C_2 ; allora (cfr. N. DUNFORD-J. T. SCHWARTZ [15], p. 513 e E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16] Theorem 2.11.6) esiste $m > 0$ tale che, per ogni $x' \in X'$, si ha:

$$m \|x'\|_{X'} \leq \|\Lambda'_{\bar{t}} x'\|_{(L^M_{U, \bar{t}})'}.$$

(dove $\Lambda'_{\bar{t}}$ è l'operatore coniugato di $\Lambda_{\bar{t}}$) e quindi (cfr. ⁽¹⁵⁾ e Teorema 1.3.2):

$$m\rho \|x'\|_{X'} \leq \rho \|(B'G'x')_{\bar{t}}\|_{L^{(N)}_{U', \bar{t}}} = \sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau)B(\tau)u(\tau), x' \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\}.$$

Cosicchè, per ogni intero positivo k , risulta:

$$(3.1.8) \quad m\rho \|x'_k\|_{X'} \leq \sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau)B(\tau)u(\tau), x'_k \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\}.$$

Potendosi prendere x'_k , per la a) del Lemma 3.1.1, in guisa tale che:

$$(3.1.9) \quad \sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau)B(\tau)u(\tau), x'_k \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} = 1,$$

si ha, allora, dalle (3.1.8) e (3.1.9):

$$\|x'_k\|_{X'} \leq \frac{1}{m\rho}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Essendo X riflessivo, la sfera $\|x'\|_{X'} \leq \frac{1}{m\rho}$ è (cfr. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [16], Theorem 2.10.3) debolmente compatta, pertanto si può supporre che la

successione $\{x'_k\}$ converga debolmente ad un punto $x'_0 \in X'$. Si ha allora:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \int_0^{\bar{t}} G(\bar{t}, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, x'_k \right\rangle = \left\langle \int_0^{\bar{t}} G(\bar{t}, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, x'_0 \right\rangle \leq 1 \quad \forall u \in \Sigma_{M, \rho}$$

e quindi:

$$(3.1.10) \quad \sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \left\langle G(\bar{t}, \tau) B(\tau) u(\tau), x'_0 \right\rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \leq 1.$$

Posto:

$$(3.1.11) \quad \delta(t, x') = \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \sup \{ \langle G(t, 0)v, x' \rangle : v \in V \} + \\ + \int_0^t \langle G(t, \tau)c(\tau), x' \rangle d\tau \quad \forall (t, x') \in [0, T] \times X',$$

la (3.1.7) diventa:

$$(3.1.12) \quad 1 + \left[\sup \left\{ \int_0^{t_k} \langle G(t_k, \tau) B(\tau) u(\tau), x'_k \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} - 1 \right] + \delta(t_k, x'_k) < 0.$$

D'altra parte, risultando:

$$\delta(t_k, x'_k) - \delta(\bar{t}, x'_0) = \delta(t_k, x'_k) - \delta(\bar{t}, x'_k) + \delta(\bar{t}, x'_k) - \delta(\bar{t}, x'_0), \quad k = 1, 2, \dots,$$

per le b) e c) del Lemma 3.1.1, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo ν tale che:

$$1 + \delta(\bar{t}, x'_0) < 1 + \delta(t_k, x'_k) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq \nu;$$

per la (3.1.12) si ha allora:

$$1 + \delta(\bar{t}, x'_0) < 1 - \sup \left\{ \int_0^{t_k} \langle G(t_k, \tau) B(\tau) u(\tau), x'_k \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq \nu$$

e quindi, per la c) del Lemma 3.1.1 e la (3.1.9):

$$1 + \delta(\bar{t}, x'_0) \leq 0$$

cioè

$$1 - \sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau) B(\tau) u(\tau), x'_0 \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} + h(\bar{t}, x'_0) \leq 0$$

da cui, per la (3.1.10):

$$h(\bar{t}, x'_0) \leq 0.$$

Risultando inoltre:

$$h(\bar{t}, x') \geq 0 \quad \forall x' \in X',$$

si ha la (3.1.6) (essendo $x'_0 \neq \Theta_{X'}$ in quanto

$$\sup \left\{ \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau) B(\tau) u(\tau), x'_0 \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} = 1).$$

Se è valida l'ipotesi C_3 o l'ipotesi C_4 l'esistenza di $x'_0 \in X'$ con $x'_0 \neq \Theta_{X'}$ verificante la (3.1.6) si dimostra in modo analogo al caso precedente sostituendo il ruolo della funzione δ definita mediante la (3.1.11), rispettivamente, con quello delle funzioni δ_1, δ_2 definite da:

$$\begin{aligned} \delta_1(t, x') = & \sup \{ \langle -n, x' \rangle : n \in W \} + \int_0^t \langle G(t, \tau) c(\tau), x' \rangle d\tau + \\ & + \langle G(t, 0) v^0, x' \rangle + \sup \left\{ \int_0^t \langle G(t, \tau) B(\tau) u(\tau), x' \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \\ & \forall (t, x') \in [0, T] \times X' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta_2(t, x') = & \int_0^t \langle G(t, \tau) c(\tau), x' \rangle d\tau + \langle -n^0, x' \rangle + \sup \{ \langle G(t, 0) v, x' \rangle : v \in V \} + \\ & + \sup \left\{ \int_0^t \langle G(t, \tau) B(\tau) u(\tau), x' \rangle d\tau : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \quad \forall (t, x') \in [0, T] \times X'. \end{aligned}$$

Acquisita, così, la (3.1.6), le relazioni (3.1.3), (3.1.4) e (3.1.5) seguono, allora, dalla (3.1.1), dalla relazione

$$\begin{aligned} & \langle x(\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}), -x'_0 \rangle + \langle \bar{v}, G'(\bar{t}, 0)x'_0 \rangle + \\ & + \int_0^{\bar{t}} \langle B(\tau) \bar{u}(\tau), G'(\bar{t}, \tau)x'_0 \rangle d\tau + \int_0^{\bar{t}} \langle G(\bar{t}, \tau) c(\tau), x'_0 \rangle d\tau = 0 \end{aligned}$$

e dal Teorema 2.4.1.

3.2. - Il problema della minima distanza iniziale.

Assegnato un punto $v_0 \in X$ e l'insieme W , il *problema della minima distanza iniziale* consiste nel vedere se, sotto l'ipotesi che vi sia qualche insieme V per cui il problema (P) (relativo a V e W) abbia soluzione, esistono $\bar{u} \in \mathcal{U}$ e $\bar{v} \in X$ tali che la distanza di $\bar{v}$ da v_0 sia minima. Equivalentemente, posto, per ogni $\sigma \geq 0$, $V_\sigma = \{v_0\} + \sigma X_1$, X_1 sfera unitaria di X , si tratta di indagare sull'esistenza del minimo $\bar{\sigma}$ dei σ per cui il problema (P) con $V = V_\sigma$ è risolubile; l'eventuale terna $(\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{v})$ dicesi soluzione del problema della minima distanza iniziale.

Analogamente a quanto osservato per la dimostrazione del Teorema 3.1.3, con lo stesso procedimento usato in R. CONTI [10], [12], in virtù dei Teoremi 2.3.5-2.3.8, si ha il seguente teorema di esistenza;

TEOREMA 3.2.1. - *Se sono verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 (in particolare le ipotesi del Corollario 2.3.1) [risp. le ipotesi del Teorema 2.3.6] ad esclusione della vi) e se il problema (P) ha soluzione per qualche coppia di insiemi V e W , il problema della minima distanza iniziale ammette soluzione in $\Sigma_{M,\rho} \times V$ [risp. in $I_{M,\rho} \times V$] per ogni $v_0 \in X$.*

Proviamo, ora, il seguente *principio di massimo*:

TEOREMA 3.2.2. - *La N -funzione $M(r)$ soddisfi l'ipotesi (x) e siano verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 (in particolare siano valide le ipotesi del Corollario 2.3.1) [risp. siano valide le ipotesi del Teorema 2.3.6] ad esclusione della vi); l'applicazione Γ_T sia « su » X (in particolare sia X di dimensione finita). Se $(\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{v})$ è soluzione del problema della minima distanza iniziale con $\bar{u} \in \Sigma_{M,\rho}$ [risp. $\bar{u} \in I_{M,\rho}$], $\bar{\sigma} > 0$, allora esiste $x'_0 \in X'$, con $x'_0 \neq \Theta_{X'}$, tale che:*

$$(3.2.1) \quad \langle x(T, \bar{u}, \bar{v}), -x'_0 \rangle = \sup \{ \langle w, -x'_0 \rangle : w \in W \}$$

$$(3.2.2) \quad \langle \bar{v} - v_0, G'(T, 0)x'_0 \rangle = \bar{\sigma} \| G'(T, 0)x'_0 \|_{X'}$$

$$(3.2.3) \quad \int_0^T \langle B(t)\bar{u}(t), G'(T, t)x'_0 \rangle dt = \rho \| B'G'x'_0 \|_{L_{U'}^{(N)}}$$

$$\left[\text{risp. (3.2.3')} \int_0^T \langle B(t)\bar{u}(t), G'(T, t)x'_0 \rangle dt = \rho \| B'G'x'_0 \|_{L_{U'}^N} \right].$$

DIMOSTRAZIONE. - Consideriamo, per ogni $\sigma \geq 0$, l'insieme

$$S_\rho^\sigma = \left\{ \int_0^T G(T, t)c(t)dt + G(T, 0)v_0 \right\} - W + \sigma \Gamma_T X_1 + \Lambda_T \Sigma_{M,\rho},$$

la cui funzione supporto è data da

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} h(\sigma, x') = h_{S_\rho^\sigma}(x') = & \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + \\ & + \langle G(T, 0)v_0, x' \rangle + \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \sigma \| G'(T, 0)x' \|_{X'} + \\ & + \sup \left\{ \int_0^T \langle G(T, t)B(t)u(t), x' \rangle dt : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \quad \forall x' \in X' \end{aligned}$$

e poniamo:

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \mathfrak{h}(x') = & \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + \langle G(T, 0)v_0, x' \rangle + \\ & + \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \sup \left\{ \int_0^T \langle G(T, t)B(t)u(t), x' \rangle dt : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \\ & \quad \forall x' \in X'. \end{aligned}$$

Sia $\{\sigma_k\}$ una successione numerica tale che $0 < \sigma_k < \bar{\sigma}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \bar{\sigma}$ e sia $\{x'_k\}$ una successione di elementi di X' , distinti da $\Theta_{X'}$, per cui:

$$(3.2.6) \quad h(\sigma_k, x'_k) < 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Poichè l'applicazione Γ_T è « su » X , esiste $m > 0$ tale che:

$$m \| x' \|_{X'} \leq \| G'(T, 0)x' \|_{X'} \quad \forall x' \in X';$$

si può, quindi, supporre che $\| G'(T, 0)x'_k \|_{X'} = 1$, $k = 1, 2, \dots$, e risulta

$$\| x'_k \|_{X'} \leq \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Per la riflessività di X possiamo supporre che la successione $\{x'_k\}$ converga debolmente ad un punto $x'_0 \in X'$; si ha quindi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G'(T, 0)x'_k = G'(T, 0)x'_0 \quad \text{nella topologia debole di } X'$$

ed allora (cfr. ad es. N. DUNFORD-J. T. SCHWARTZ [15], p. 68)

$$\| G'(T, 0)x'_0 \|_{X'} \leq \lim'_{k \rightarrow \infty} \| G'(T, 0)x'_k \|_{X'}$$

da cui:

$$(3.2.7) \quad \|G'(T, 0)x'_0\|_{X'} \leq 1.$$

Per la b) del Lemma 3.1.1, la funzione $\mathfrak{J}$ definita dalla (3.2.5) è debolmente semicontinua inferiormente in X' ; quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo ν tale che

$$(3.2.8) \quad h(\sigma_k, x'_k) = [\bar{\sigma} + \mathfrak{J}(x'_0)] + (\sigma_k - \bar{\sigma}) + [\mathfrak{J}(x'_k) - \mathfrak{J}(x'_0)] \geq \bar{\sigma} + \mathfrak{J}(x'_0) - \varepsilon \quad \forall k \geq \nu.$$

Dalle (3.2.8) e (3.2.6) segue allora:

$$\bar{\sigma} + \mathfrak{J}(x'_0) \leq 0$$

o ciò che è lo stesso, per le (3.2.4) e (3.2.5):

$$\bar{\sigma}(1 - \|G'(T, 0)x'_0\|_{X'}) + h(\bar{\sigma}, x'_0) \leq 0.$$

In virtù della (3.2.7) e risultando $h(\bar{\sigma}, x'_0) \geq 0$, si ha:

$$(3.2.9) \quad h(\bar{\sigma}, x'_0) = 0$$

e quindi $\|G'(T, 0)x'_0\|_{X'} = 1$, per cui $x'_0 \neq \Theta_{X'}$. Le (3.2.1)-(3.2.3) seguono, allora, dalla (3.2.9), dalla (2.1.1) e dal Teorema 2.4.1.

3.3. - Il problema della minima distanza finale.

Simmetricamente al problema della minima distanza iniziale, assegnato $w_0 \in X$, il *problema della minima distanza finale* consiste nel vedere se esistono $\bar{u} \in \mathfrak{U}$ e $\bar{v} \in V$ tali che il punto $x(T, \bar{u}, \bar{v})$ abbia distanza minima da w_0 . Equivalentemente, considerato, per ogni $\varepsilon \geq 0$, il problema (P) con $W = \{w_0\} + \varepsilon X_1$, si tratta di indagare sull'esistenza del minimo $\bar{\varepsilon}$ dell'insieme numerico degli ε per cui il problema (P) con $W = \{w_0\} + \varepsilon X_1$ è risolubile; se tale minimo esiste, detta $(\bar{u}, \bar{v})$ una soluzione del problema (P) con $W = \{w_0\} + \bar{\varepsilon} X_1$, la terna $(\bar{\varepsilon}, \bar{u}, \bar{v})$ dicesi soluzione del problema della minima distanza finale.

In virtù dei Teoremi 2.3.5-2.3.8, 2.4.1, 2.4.3 e del Lemma 3.1.1, con procedimenti analoghi a quelli usati nel numero precedente sostituendo, in particolare, il ruolo della funzione $\mathfrak{J}$ definita mediante la (3.2.5) con quello della

funzione ϑ_1 definita da

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x') = & \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + \langle -w_0, x' \rangle + \sup \{ \langle G(T, 0)v, x' \rangle : v \in V \} + \\ & + \sup \left\{ \int_0^T \langle G(T, t)B(t)u(t), x' \rangle dt : u \in \Sigma_{M, \rho} \right\} \quad \forall x' \in X', \end{aligned}$$

si ha:

TEOREMA 3.3.1 (di esistenza). - Se sono verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 (in particolare le ipotesi del Corollario 2.3.1) [risp. le ipotesi del Teorema 2.3.6] ad esclusione della vii), il problema della minima distanza finale ammette soluzione in $\Sigma_{M, \rho} \times V$ [risp. in $I_{M, \rho} \times V$] per ogni $w_0 \in X$.

TEOREMA 3.3.2 (Principio di massimo). - La N -funzione $M(r)$ soddisfi la ipotesi (α) e siano verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 (in particolare siano valide le ipotesi del Corollario 2.3.1) [risp. siano valide le ipotesi del Teorema 2.3.6] tranne la vii); se $(\bar{\varepsilon}, \bar{u}, \bar{v})$ è soluzione del problema della minima distanza finale con $(\bar{u}, \bar{v}) \in \Sigma_{M, \rho} \times V$ [risp. $(\bar{u}, \bar{v}) \in I_{M, \rho} \times V$], $\bar{\varepsilon} > 0$, allora esiste $x'_0 \in X'$ con $x'_0 \neq \Theta_{X'}$, tale che:

$$(3.3.1) \quad \langle w_0 - x(T, \bar{u}, \bar{v}), x'_0 \rangle = \bar{\varepsilon}$$

$$(3.3.2) \quad \langle \bar{v}, G'(T, 0)x'_0 \rangle = \sup \{ \langle v, G'(T, 0)x'_0 \rangle : v \in V \}$$

$$(3.3.3) \quad \int_0^T \langle B(t)\bar{u}(t), G'(T, t)x'_0 \rangle dt = \rho \| B'G'x'_0 \|_{L_{U'}^N}$$

$$\left[\text{risp. } (3.3.3') \int_0^T \langle B(t)\bar{u}(t), G'(T, t)x'_0 \rangle dt = \rho \| B'G'x'_0 \|_{L_{U'}^N} \right].$$

3.4. - Il problema del minimo sforzo.

Il problema del minimo sforzo consiste, infine, assegnati V e W , nello studio dell'esistenza di $u \in L^M(0, T; U)$ per cui il problema (P) sia risolubile e $\|u\|_{L_U^M}$ sia minima, o ciò che è lo stesso, posto $\mathcal{Q}l = \Sigma_{M, \rho}$, $\rho \geq 0$, nel vedere di garantire l'esistenza del minimo $\bar{\rho}$ dei numeri ρ per cui il corrispondente problema (P) ha soluzione $(\bar{u}, \bar{v})$; la eventuale terna $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v})$ dicesi soluzione del problema del minimo sforzo.

Ancora con procedimenti analoghi ai precedenti (introducendo la funzione ϑ_2 definita da:

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x') = & \int_0^T \langle G(T, t)c(t), x' \rangle dt + \sup \{ \langle -w, x' \rangle : w \in W \} + \\ & + \sup \{ \langle G(T, 0)v, x' \rangle : v \in V \} \quad \forall x' \in X' \end{aligned}$$

e a quelli usati in R. CONTI [10], per i Teoremi 2.3.5, 2.3.7, e per il Lemma 3.1.1, si ha:

TEOREMA 3.4.1 (*di esistenza*). - *Se sono verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 (in particolare le ipotesi del Corollario 2.3.1) e se esiste $\rho \geq 0$ per cui il problema (P) ha soluzione in $\Sigma_{M, \rho} \times V$, allora esiste la soluzione del problema del minimo sforzo.*

TEOREMA 3.4.2 (*Principio di massimo*). - *Siano verificate le ipotesi del Teorema 2.3.5 e la N -funzione $M(r)$ verifichi l'ipotesi (α) (in particolare le ipotesi del Corollario 2.3.1); se è verificata una delle seguenti condizioni:*

$D_1)$ *l'applicazione Λ_T sia « su » X ;*

$D_2)$ *X sia di dimensione finita;*

e se $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v})$ è soluzione del problema del minimo sforzo con $(\bar{u}, \bar{v}) \in \Sigma_{M, \bar{\rho}} \times V$, $\bar{\rho} > 0$, allora esiste $x'_0 \in X'$, $x'_0 \neq \Theta_{X'}$, tale che:

$$\langle x(T), \bar{u}, \bar{v} \rangle, -x'_0 \rangle = \sup \{ \langle w, -x'_0 \rangle : w \in W \}$$

$$\langle \bar{v}, G'(T, 0)x'_0 \rangle = \sup \{ \langle v, G'(T, 0)x'_0 \rangle : v \in V \}$$

$$\int_0^T \langle B(t)\bar{u}(t), G'(T, t)x'_0 \rangle dt = \bar{\rho} \| B'G'x'_0 \|_{L_{U'}(N)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. A. ANTOSIEWICZ, *Linear control systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 12 (1963), pp. 313-324.
- [2] C. BAIocchi, *Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1963), pp. 239-253.
- [3] — —, *Ulteriori osservazioni sull'integrale di Bochner*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), pp. 283-301.
- [4] S. BOCHNER-E. A. TAYLOR, *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math. 39 (1938), pp. 913-944.

- [5] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Livre V, Ch. I, II, Hermann, Paris (1953).
- [6] — —, *Espaces vectoriels topologiques*, Livre V, Ch. III-V, Hermann, Paris (1955).
- [7] R. CONTI, *Contributions to linear control theory*, Jour. Diff. Equat., 1 (1965), pp. 427-445.
- [8] — —, *Problemi di controllo lineari*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 36 (1966), pp. 21-29.
- [9] — —, *Problems in linear control theory*, in corso di stampa nei Proc. del conv. Equadiff II, Bratislava, Sett. 1966.
- [10] — —, *On some aspects of linear control theory*, in corso di stampa nei Proc. della Conf. on Math. Theory of Control, Los Angeles (30 genn. - 1 feb. 1967).
- [11] — —, *Time-optimal solution of a linear differential equation in Banach spaces*, in corso di stampa.
- [12] — —, *A convex programming problem in Banach spaces and an application*, in corso di stampa.
- [13] N. DINULEANU, *Spatii Orlicz de cimpuri de vectori*, Studii si cercetari matematice, 8 (1957), pp. 343-412.
- [14] — —, *Vector measures*, Inter. series mon. pure appl. mat., 95 (1967).
- [15] N. DUNFORD-J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part I, Interscience (1958).
- [16] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 31 (1957).
- [17] T. KATO, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, A.M.S. Symposia in Appl. Math., 17 (1965), pp. 50-67.
- [18] J. KISYNSKI, *Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits*, Studia Math., 23 (1964), pp. 285-328.
- [19] M. A. KRASNOSEL'SKII-Y. B. RUTICKII, *Convex functions and Orlicz spaces*, Translation from russian, P. Noordhoff, Ltd. Groningen (1961).
- [20] E. T. POULSEN, *Evolutionsgleichungen in Banach-Räumen*, Math. Zeitschr., 90 (1965), pp. 286-309.
- [21] G. PULVIRENTI-G. SANTAGATI, *Controlli lineari negli spazi di Orlicz*, Ann. Mat. pura ed appl., 76 (1967), pp. 165-202.
- [22] E. H. ROTHE, *Weak topology and calculus of variations*, I° ciclo C.I.M.E. 1966, Ed. Cremonese, Roma (1967), pp. 205-237.