Somma di generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione e equazioni di evoluzione in spazi di Banach.

G. Da Prato (Pisa) (*)

Summary. - *Conditions of existence of $(A+B)^{-1}$, A et B infinitesimal generators of class (C_0) semi-groups.*

Siano A e B generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione [20] in uno spazio di Banach X tali cioè che:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda \qquad \|R(\lambda, B)\| \leq 1/\lambda \qquad \lambda > 0 \tag{1}$$

essendo $R(\lambda, A)$ e $R(\lambda, B)$ i risolventi rispettivamente di A e di B.

Nella prima parte di questo lavoro proviamo (Teoremi [1.I] e [1.II]) che se vale la condizione:

$$\|B^2R(\lambda, A)B^{-2}\| \leq 1/(\lambda - \omega) \qquad \lambda > \omega, \qquad \omega \text{ reale} \tag{2}$$

allora $A+B$ è prechiuso e la sua minima estensione chiusa $\widetilde{A+B}$ è ancora generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazione tale che:

$$\|R(\lambda, \widetilde{A+B})\| \leq 1/\lambda \qquad \lambda > 0. \tag{3}$$

Inoltre l'equazione

$$\lambda u - Au - Bu = v \qquad \lambda > 0 \tag{4}$$

con $v \in X$ ha una e una sola soluzione «debole» (cioè tale che esiste una sussessione $\{u_n\}$ in $D_A \cap D_B$ convergente a u con $v_n = \lambda u_n - Au_n - Bu_n$ convergente a v).

Il Teorema [1.III] dà condizioni che assicurano l'esistenza di una soluzione «forte», cioè appartenente a $D_A \cap D_B$, dell'equazione (4).

Osserviamo che il metodo delle perturbazioni tratta un problema formalmente analogo ma in ipotesi (A generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0 [20] $D_A \subset D_B$) completamente diverse dalle nostre [12].

(*) Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.. I principali risultati di questo lavoro sono stati annunciati in [2].

Nel § 2 applichiamo i risultati su esposti allo studio delle equazioni di evoluzione inomogenee nel tempo; più precisamente sia Y uno spazio di Banach, $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ una famiglia di operatori lineari chiusi in Y, generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione, X lo spazio di Banach delle funzioni a valori vettoriali $L^p(\boldsymbol{R}_+, Y)$ $(C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y))$ (¹), A l'operatore di derivazione su X:

$$(Au)(t) = -u'(t) \tag{5}$$

con dominio $H_0^{1,p}(\boldsymbol{R}_+, Y)$ $(C_0^1(\boldsymbol{R}_+, Y))$ (¹) B l'operatore in X

$$(Bu)(t) = B(t)u(t) \tag{6}$$

l'equazione (4) equivale allora al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \lambda u(t) + u'(t) - B(t)u(t) = v(t) \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

e la (2) a condizioni di regolarità in t di $B(t)$ (Teoremi [2.I] e [2.II]).

Da notare che in generale i domini di A e B non sono, in questo caso, comparabili e che quindi il problema (7) non si può affrontare con il metodo delle perturbazioni.

Il problema (7) è stato trattato per esteso da LIONS [7] nel caso che X e Y siano spazi di Hilbert e da vari autori tra cui KATO [8], [9], [10], TANABE [15], [16], [17], [18], YOSIDA [20] quando X è $C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ (e con $B(t)$ generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione e di semigruppi analitici) mentre non sembra studiato in $L^p(\boldsymbol{R}_+, Y)$.

Osserviamo inoltre che anche se $X = C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ (con $B(t)$ generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione, che è il caso qui studiato) le nostre condizioni sono differenti da quelle in [8], [9], [20]; in particolare non richiedono la derivabilità in t del risolvente $R(\lambda, B(t))$ o di analoghe funzioni di $B(t)$.

Nel § 3 abbiamo studiato il problema:

$$\begin{cases} \lambda u(t) + u'(t) - B(t)u(t) = v(t) \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \tag{8}$$

con $B(t)$ e $v(t)$ funzioni periodiche di periodo 2π in t (Teoremi [3.I], [3.II]).

I risultati ottenuti ci sembrano nuovi.

Con il metodo su esposto si possono studiare molti altri problemi; ciò faremo in un successivo lavoro dove tratteremo anche le applicazioni agli operatori differenziali.

(¹) Per la definizione di tali spazi vedi il § 2.

§ **1.** In questo paragrafo X rappresenta uno spazio di Banach reale o complesso con norma $\| \|$, A e B due operatori lineari chiusi con dominio rispettivamente D_A e D_B.

Proveremo dapprima il seguente Teorema:

TEOREMA [1.I]. - *Siano A e B operatori lineari chiusi in X con domini densi in X tali che:*

(A) $\rho(A)$ $(\rho(B))$ *contiene una semiretta* $\lambda > \omega_A$ $(\lambda > \omega_B)$ *di* R [2]

(B) *Valgono le maggiorazioni* [3]

$$\begin{cases} \|R(\lambda, A)\| \leq 1/(\lambda - \omega_A) & \forall\lambda > \omega_A \\ \|R(\lambda, B)\| \leq 1/(\lambda - \omega_B) & \forall\lambda > \omega_B \end{cases} \tag{1.1}$$

(C) *Esistono due numeri reali* ω *e* μ *con* $\mu > \omega_B$ *tali che se* $x \in D_{B^2}$ [4] $R(\lambda, A)x \in D_{B^2}$ $\forall\lambda > \omega$, *inoltre l'immagine di* $(\mu - B)^2 R(\lambda, A) \cdot R^2(\mu, B)$ *è densa in X e risulta:*

$$\|(\mu - B)^2 R(\lambda, A) R^2(\mu, B)\| \leq 1/(\lambda - \omega). \tag{1.2}$$

Allora $D_A \cap D_B$ *è denso in X e* $A + B$ *con dominio* $D_A \cap D_B$ *è prechiuso e, detta* $\overline{A + B}$ *la sua minima estensione chiusa,* $\rho(\overline{A + B})$ *contiene la semiretta* $\lambda > \omega_A + \omega_B$ *e si ha:*

$$\|R(\lambda, \overline{A + B})\| \leq 1/(\lambda - \omega_A - \omega_B) \qquad \forall\lambda > \omega_A + \omega_B. \tag{1.3}$$

DIMOSTRAZIONE. - Seguendo YOSIDA [19] poniamo [5]:

$$\begin{cases} A_n = n^2 R(n, A) - n \\ B_n = n^2 R(n, B) - n \end{cases} \qquad n \in N. \tag{1.4}$$

Nel corso della dimostrazione, che suddivideremo in lemmi e proposizioni, mostreremo successivamente che $\lambda - A_n - B_m$ è invertibile, che esiste il

---

(2) R è l'insieme dei numeri reali, R_+ $(\bar{R}_+)$ è l'insieme dei numeri reali positivi (non negativi). Se C è un operatore lineare in X, $\rho(C)$ è l'insieme risolvente e se $\lambda \in \rho(C)$ $R(\lambda, C)$ il risolvente di C [6].

(3) Cioè A e B sono generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione [20].

(4) N è l'insieme dei numeri naturali, se $n \in N$ si è posto:

$$D_{B^n} = \{x \in X;\ x \in D_B,\ Bx \in D_B \dots B^{n-1}x \in D_B\}.$$

(5) Se q è un numero reale e I l'operatore identità su X, scriveremo per semplicità, q invece di qI.

$\lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n + B_m) = R(\lambda, \overline{A + B_m})$ e che esiste il $\lim_{m\to\infty} R(\lambda, \overline{A + B_m})$ e coincide con il risolvente $R(\lambda, \overline{A + B})$ dell'operatore $\overline{A + B}$ cercato.

La prima parte del lemma seguente è nota [19], ne diamo comunque la dimostrazione per completezza.

LEMMA [1.I]. - *Risulta:*

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_n y = Ay & \forall y \in D_A \\ \lim_{n\to\infty} By = By & \forall y \in D_B . \end{cases}$$

Inoltre $\forall k \in \boldsymbol{N}$, D_{A^k}, D_{B^k} *e* $D_A \cap B_B$ *sono densi in* X.

DIMOSTRAZIONE. - Dimostriamo la prima delle (1.5); basterè provare:

$$(1.6) \qquad \lim_{n\to\infty} A_n A^{-1} x = x \qquad \forall x \in X$$

infatti se $y \in D_A$, posto $x = Ay$ da (1.6) segue (1.5).

Poniamo:

$$(1.7) \qquad T_n = A_n A^{-1} - 1.$$

Usando la definizione (1.4) e la prima identità del risolvente [6], si trova:

$$(1.8) \qquad T_n = nR(n, A) - 1.$$

In virtù di (1.1) l'insieme numerico $\{\| T_n \|, n \in N\}$ è limitato superiormente cosicchè, dato che D_A è denso in X, basta provare:

$$(1.9) \qquad \lim_{n\to\infty} T_n y = 0 \qquad \forall x \in D_A .$$

Sia allora $y \in D_A$ e $x = Ay$, applicando ancora la prima identità del risolvente si trova:

$$(1.10) \qquad T_n y = T_n A^{-1} x = R(n, A) Ax = R(n, A) y$$

e la (1.9) segue allora da (1.1).

Proviamo ora l'ultima parte del lemma, procediamo per induzione supponendo che D_{A^k}, $k \in N$, sia denso in X.

Sia $x' \in X'$ [6] tale che:

$$(1.11) \qquad < z,\ x' > = 0 \qquad \forall z \in D_A .$$

Osserviamo che $nR(n,\ A)y \in D_{A^{k+1}}$ $\forall n \in N,\ y \in D_{A^k}$; inoltre da (1.9) segue:

$$(1.12) \qquad \lim_{n \to \infty} nR(n,\ A)y = y$$

e quindi, da (1.11)

$$(1.13) \qquad < y,\ x' > = \lim_{n \to \infty} < x',\ nR(n,\ A)y > = 0 \qquad \forall y \in D_A$$

poichè D_A è denso in X per ipotesi ciò implica $x' = 0$ cosicchè $D_{A^{k+1}}$ è denso in X.

Sia infine $x' \in X'$ tale che

$$(1.14) \qquad < z,\ x' > = 0 \qquad \forall z \in D_A \cap D_B$$

e $y \in D_{B^2}$ cosicchè per ipotesi $nR(n,\ A)y \in D_{B^2} \cap D_A$.

Da (1.14) e (1.12) segue:

$$(1.15) \qquad < y,\ x' > = \lim_{n \to \infty} < nR(n,\ A)y,\ x' > = 0 \qquad \forall y \in D_{B^2}$$

poichè D_{B^2} è denso in X ciò implica $x' = 0$, quindi $D_A \cap D_B$ è denso in X.

LEMMA [1.II]. - *Posto:*

$$(1.16) \qquad \varkappa_{mn} = \frac{mn(\omega_A + \omega_B) - (m+n)\omega_A\omega_B}{(n - \omega_A)(m - \omega_B)} \qquad n,\ m \in N,\ \ n > \omega_A,\ \ m > \omega_B$$

allora $\rho(A_n + B_m)$ *contiene la semiretta* $\lambda > \varkappa_{mn}$ *e si ha:*

$$(1.17) \qquad \| R(\lambda,\ A_n + B_m) \| \leq 1/(\lambda - \varkappa_{mn}) \qquad \forall \lambda > \varkappa_{mn} .$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\lambda > \varkappa_{mn}$, allora posto:

$$(1.18) \qquad T_{mn} = \frac{1}{\lambda + m + n} \{ n^2 R(n,\ A) + m^2 R(m,\ B) \}$$

---

[6] X' denota il duale forte di X; se $x \in X,\ x' \in X'$, $< x,\ x' >$ rappresentata la dualità tra X e X'.

si ha $\|T_{mn}\| < 1$ in virtù di (1.1), cosicchè esiste $(1 - T_{mn})^{-1}$ [6]; la tesi segue allora dall'identità di immediata verifica:

$$R(\lambda,\ A_n + B_m) = (\lambda + m + n)^{-1}(1 - T_{mn})^{-1}. \tag{1.19}$$

LEMMA [1.III]. - *Per ogni $m \in N$ $A + B_m$ (con dominio D_A) è chiuso ed esiste $\lambda_m \in \boldsymbol{R}$ tale che $\rho(A + B_m)$ contiene la semiretta $\lambda > \lambda_m$ e si ha inoltre*:

$$R(\lambda,\ A + B_m) = R(\lambda,\ A)\sum_{k=0}^{\infty}(B_m R(\lambda,\ A))^k. \tag{1.20}$$

DIMOSTRAZIONE. - Se $\lambda > \lambda_m = \omega_A + \|B_m\|$ si ha $\|B_m R(\lambda,\ A)\| < 1$ cosicchè esiste $(1 - B_m R(\lambda,\ A))^{-1}$; poniamo

$$T_\lambda = R(\lambda,\ A)(1 - B_m R(\lambda,\ A))^{-1} \tag{1.21}$$

e proviamo che risulta:

$$T_\lambda = R(\lambda,\ A + B_m) \tag{1.22}$$

Infatti se $x \in X$, $\lambda > \lambda_m$, allora $T_\lambda x = R(\lambda,\ A)(1 - B_m R(\lambda,\ A))^{-1}x \in D_A$ e si ha:

$$(\lambda - A)T_\lambda x = (1 - B_m R(\lambda,\ A))^{-1}x \tag{1.23}$$

da cui

$$(\lambda - A - B_m)T_\lambda x = x \qquad \forall x \in X \tag{1.24}$$

Infine sia $y \in D_A$, si ha:

$$T_\lambda(\lambda - A)y = R(\lambda,\ A)\sum_{k=0}^{\infty}(B_m R(\lambda,\ A))^k(\lambda - A)y = R(\lambda,\ A)(\lambda - A)y +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(B_m R(\lambda,\ A))^k(\lambda - A)y = y + T_\lambda B_m y,$$

da cui

$$T_\lambda(\lambda - A - B_m)y = y \qquad \forall y \in D_A \tag{1.25}$$

cosicchè segue (1.22) e la tesi.

LEMMA [1.IV]. - *Se $\lambda > \lambda_m = \omega_A + \|B_m\|$ si ha:*

$$\lim_{n \to \infty} R(\lambda,\ A_n + B_m)x = R(\lambda,\ A + B_m)x \qquad \forall x \in X. \tag{1.26}$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $x \in X$, $\lambda > \lambda_m$, usando la seconda identità del risolvente [6] si ha:

$$R(\lambda, A_n + B_m)x - R(\lambda, A + B_m)x = R(\lambda, A_n + B_m)(A - A_n)R(\lambda, A + B_m)x \tag{1.27}$$

posto $y = R(\lambda, A + B_m)x$ si ha da (1.17)

$$\| R(\lambda, A_n + B_m)x - R(\lambda, A + B_m)x \| \leq \frac{1}{\lambda - \varkappa_{mn}} \| Ay - A_n y \| \tag{1.28}$$

PROPOSIZIONE [1.I]. - *Posto:*

$$\varkappa_m = \frac{m(\omega_A + \omega_B) - \omega_A \omega_B}{m - \omega_B} \qquad \forall m \in \boldsymbol{N}, \ m > \omega_B \tag{1.29}$$

$\rho(A + B_m)$ *contiene la semiretta* $\lambda > \varkappa_m$ *e risulta:*

$$R(\lambda, A + B_m)x = \lim_{n \to \infty} R(\lambda, A_n + B_m)x \qquad \forall x \in X \tag{1.30}$$

$$\| R(\lambda, A + B_m) \| \leq 1/(\lambda - \varkappa_m) \qquad \forall \lambda > \varkappa_m . \tag{1.31}$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\lambda_0 > \lambda_m = \omega_A + \| B_m \|$, $x \in X$, dal Lemma [1.IV] segue:

$$\| R(\lambda_0, A + B_m)x \| = \lim_{n \to \infty} \| R(\lambda_0, A_n + B_m)x \| \tag{1.32}$$

e dal Lemma [1.II]

$$\| R(\lambda_0, A + B_m)x \| \leq \lim_{n \to \infty} (\lambda - \varkappa_{mn})^{-1} \| x \| = (\lambda - \varkappa_m)^{-1} \| x \| \tag{1.33}$$

da cui

$$\| R(\lambda_0, A + B_m) \| \leq 1/(\lambda - \varkappa_m) \tag{1.34}$$

Consideriamo ora la serie:

$$S_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R^{k+1}(\lambda_0, A + B_m)(\lambda - \lambda_0)^k \tag{1.35}$$

da (1.34) segue che tale serie è convergente se $|\lambda - \lambda_0| / |\lambda_0 - \varkappa_m| < 1$ quindi se $\varkappa_m < \lambda \leq \lambda_0$ si ha:

$$S_\lambda = R(\lambda, A + B_m). \tag{1.36}$$

Risulta così provato che $\rho(A + B_m)$ contiene la semiretta $\lambda > \lambda_m$, infine la (1.30) si prova come la (1.26) e la (1.31) come la (1.34).

LEMMA [1.V]. - *Esiste un operatore lineare chiuso $\bar{A}$ con dominio denso in X tale che:*

$$R(\lambda, \bar{A}) = (\mu - B)^2 R(\lambda, A) R^2(\mu, B) \qquad \forall \lambda > \omega. \tag{1.37}$$

DIMOSTRAZIONE. - Poniamo:

$$F(\lambda) = (\mu - B)^2 R(\lambda, A) R^2(\mu, B). \tag{1.38}$$

Siano λ, $\lambda' > \omega$, si ha:

$$F(\lambda) - F(\lambda') = (\mu - B)^2 (R)\lambda, A) - R(\lambda', A)) R^2(\mu, B) \tag{1.39}$$

e, dalla prima identità del risolvente, segue

$$\begin{aligned} F(\lambda) - F(\lambda') &= (\lambda' - \lambda)(\mu - B)^2 R(\lambda, A) R(\lambda', A) R^2(\mu, B) = \\ &= (\lambda' - \lambda)(\mu - B)^2 R(\lambda, A) R^2(\mu, B)(\mu - B)^2 R(\lambda', A) R^2(\mu, B) = (\lambda' - \lambda) F(\lambda) F(\lambda') \end{aligned} \tag{1.40}$$

cioè F è un pseudo-risolvente; la tesi segue dal fatto che $F(\lambda)$ è invertibile ([6] Teorema 5.8.3).

LEMMA [1. VI]. - *Posto:*

$$\bar{\varkappa}_{mn} = \frac{mn(\omega + \omega_B) - (m + n)\omega\omega_B}{(n - \omega)(m - \omega_B)}, \qquad m, n \in N, \ n > \omega, \ m > \omega_B \tag{1.41}$$

$$\bar{A}_n = n^2(n, \bar{A}) - n. \tag{1.42}$$

Allora $\rho(\bar{A}_n + B_m)$ contiene la semiretta $\lambda > \bar{\varkappa}_{mn}$ e si ha:

$$\| R(\lambda, \bar{A}_n + B_m) \| \leq 1/(\lambda - \bar{\varkappa}_{mn}). \tag{1.43}$$

Inoltre se $x \in D_{B^2}$, $R(\lambda, A_n + B_m)x \in D_{B^2}$ e si ha:

$$R(\lambda, \bar{A}_n + B_m) = (\mu - B)^2 R(\lambda, A_n + B_m) R^2(\mu, B), \qquad \lambda > \omega. \tag{1.44}$$

DIMOSTRAZIONE. - La prima parte si prova come il Lemma [1.II], proviamo (1.44) posto:

$$\bar{T}_{mn} = (\lambda + m + n)^{-1}(n^2 R(n, \bar{A}) + m^2 R(m, B)) \qquad \lambda > \varkappa_{mn} \tag{1.45}$$

si prova facilmente per induzione che se $y \in D_{B^2}$, $T^h_{mn} y \in D_{B^2}$ $\forall h \in \boldsymbol{N}$ e che risulta:

$$\bar{T}^h_{mn} = (\mu - B)^2 T^h_{mn} R^2(\mu, B). \tag{1.46}$$

Dal Lemma [1.II] applicato ad $\bar{A}$ segue allora:

$$R(\lambda, \bar{A}_n + B_m) = (\lambda + m + n)^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} (\mu - B)^2 T_{mn}^h R^2(\mu, B). \tag{1.47}$$

Sia ora $x \in X$, $y = R^2(\mu, B)x$ e poniamo:

$$y_s = (\lambda + m + n)^{-1} T_{mn}^h y. \tag{1.48}$$

Dal Lemma [1.II] segue che [7]

$$y_s \to R(\lambda, A_n + B_m) R^2(\mu, B)x \tag{1.49}$$

e da (1.47) che $y_s \in D_{B^2}$ e risulta:

$$(\mu - B)^2 y_s \to R(\lambda, \bar{A}_n + B_m)x. \tag{1.50}$$

Poichè $(\mu - B)^2$ è chiuso ([3] pag. 602) $R(\lambda, A_n + B_m)y \in D_{B^2}$ e si ha:

$$(\mu - B)^2 R(\lambda, A_n + B_m)y = R(\lambda, \bar{A}_n + B_m)x \tag{1.51}$$

da cui la (1.44).

LEMMA [1.VII]. - *Posto:*

$$\bar{\varkappa}_m = \frac{m(\omega + \omega_B) - \omega\omega_B}{m - \omega_B}, \qquad m \in N, \qquad m > \omega_B \tag{1.52}$$

allora $\rho(\bar{A} + B_m)$ *contiene la semiretta* $\lambda > \bar{\varkappa}_m$ *e si ha:*

$$R(\lambda, \bar{A} + B_m)x = \lim_{n \to \infty} R(\lambda, \bar{A}_n + B_m)x \qquad \forall x \in X, \ \lambda > \bar{\varkappa}_m \tag{1.53}$$

$$\| R(\lambda, \bar{A} + B_m) \| \leq 1/(\lambda - \bar{\varkappa}_m) \qquad \forall \lambda > \bar{\varkappa}_m. \tag{1.54}$$

Inoltre se $\lambda > \omega$ *e* $x \in D_{B^2}$ *allora* $R(\lambda, A + B_m)x \in D_{B^2}$ *e si ha:*

$$R(\lambda, \bar{A} + B_m) = (\mu - B)^2 R(\lambda, A + B_m) R^2(\mu, B) \qquad \forall \lambda > \varkappa_m \cup \bar{\varkappa}_m \ [8]. \tag{1.55}$$

DIMOSTRAZIONE. - La prima parte si prova come la proposizione [1.I], proviamo (1.55).

---

(7) La freccia indica la convergenza forte in X.

(8) Se $a, b \in R$ si è posto $a \cup b \begin{cases} = a & \text{se } a \geq a \\ = b & \text{se } b \geq a. \end{cases}$

Sia $x \in X$, $\lambda > \varkappa_m \cup \bar{\varkappa}_m$, $y = R^2(\mu, B)x$ e poniamo:

$$\bar{y}_n = R(\lambda, A_n + B_m)y \tag{1.56}$$

dalla Proposizione [1.I] segue

$$\bar{y}_n \to R(\lambda, A + B_m)y \tag{1.57}$$

Inoltre dal Lemma [1.VI] si ha che $\bar{y}_n \in D_{B^2}$ e risulta:

$$(\mu - B)^2\bar{y}_n = R(\lambda, \bar{A}_n + B_m)x \tag{1.58}$$

cosicchè da (1.53) segue

$$(\mu - B)^2\bar{y}_n \to R(\lambda, \bar{A} + B_m)x. \tag{1.59}$$

Poichè $(\mu - B)^2$ è chiuso $R(\lambda, A + B_m)y \in D_{B^2}$ e si ha:

$$(\mu - B)^2 R(\lambda, A + B_m)y = R(\lambda, \bar{A} + B_m)x \tag{1.60}$$

da cui la (1.54).

LEMMA [1.VIII]. - *Esiste il limite:*

$$\lim_{m \to \infty} R(\lambda, A + B_m)x \qquad \forall x \in X,\ \lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega \tag{1.61}$$

e posto per ogni $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$

$$F(\lambda)x = \lim_{m \to \infty} R(\lambda, A + B_m)x \tag{1.62}$$

$F(\lambda)$ *è un operatore continuo in* X *tale che:*

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)\lambda,\ \mu > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega \tag{1.63}$$

$$\| F(\lambda) \| \leq 1/(\lambda - \omega_A - \omega_B) \tag{1.64}$$

$$F(\lambda)(\lambda - A - B)x = x \qquad \forall x \in D_A \cap D_B. \tag{1.65}$$

Inoltre se $y \in D_{B^2}$ *e* $\lambda > \omega \cup (\omega_A + \omega_B)$ *si ha:*

$$\lim_{m \to \infty} (\lambda - A - B)R(\lambda, A + B_m)y = y, \tag{1.66}$$

Infine si ha:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F(\lambda)x = x \qquad \forall x \in X. \tag{1.67}$$

DIMOSTRAZIONE. - Cominciamo col dimostrare l'esistenza del limite (1.61) per $x \in D_{B^2}$; siano $m, m' \in \boldsymbol{N}$, applicando la seconda identità del risolvente si ha:

$$R(\lambda, A + B_m)x - R(\lambda, A + B_{m'})x = R(\lambda, A + B_m)(B_{m'} - B_m)R(\lambda, A + B_{m'})x \tag{1.68}$$

inoltre da (1.4) usando la prima identità del risolvente si ottiene:

$$B_{m'} - B_m = (m - m')B^2R(m, B)R(m', B). \tag{1.69}$$

Posto $z = (\mu - B)^2x$, sostituendo (1.69) in (1.68) e ricordando (1.55) si ottiene:

$$\begin{gathered} R(\lambda, A + B_m)x - R(\lambda, A + B_{m'})x = (m - m')R(\lambda, A + B_m)R(m, B)R(m', B)B^2 \\ R^2(\mu, B)R(\lambda, \bar{A} + B_{m'})z = (m' - m)R(\lambda, A + B_m)R(m, B)R(m', B)(\mu R(\mu, B) - 1)^2 \\ R(\lambda, \bar{A} + B_{m'})z. \end{gathered} \tag{1.70}$$

Tenendo conto di (1.1), (1.31), (1.54) si prova che esiste un numero positivo N tale che:

$$\| R(\lambda, A + B_m)x - R(\lambda, A + B_{m'})x \| \leq N |m - m'|/(mm') \tag{1.71}$$

cosicchè l'esistenza del limite (1.62) è provata per $x \in D_{B^2}$; ma, in virtù di (1.31) e del fatto che D_{B^2} è denso in X (Lemma [1.I]) ne segue che tale limite esiste per ogni $x \in X$ e per il Teorema di Banach-Steinhaus si ha che $F(\lambda)$ è un operatore continuo in X.

La (1.63) si ottiene per verifica diretta, la (1.64) dalla (1.31), proviamo (1.65); se $x \in D_A \cap D_B$ si ha:

$$F(\lambda)(\lambda - A - B)x = x + \lim_{m \to \infty} R(\lambda, A + B_m)(B_m - B)x \tag{1.72}$$

dal Lemma [1.I] segue allora la (1.65).

Sia ora $y \in D_{B^2}$, $x = (\mu - B)^2y$, $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$; allora $R(\lambda, A + B_m)y = R(\lambda, A + B_m)R^2(\mu, B)x \in D_A \cap D_B$ e risulta:

$$(\lambda - A - B)R(\lambda, A + B_m)y = y + (B_m - B)R(\lambda, A + B_m)y. \tag{1.73}$$

Sostituendo in (1.73) l'identità

$$(B_m - B)B^{-2} = R(m, B) \tag{1.74}$$

e tenendo conto di (1.55) si ottiene

$$(\lambda - A - B)R(\lambda, A + B_m)y = R(m, B)(\mu R(\mu, B) - 1)^2 R(\lambda, \bar{A} + B_m)x \tag{1.75}$$

da cui, in virtù di (1.1) e (1.54), segue (1.66).

Infine se λ_0, $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$ si ha da (1.63)

$$\lambda F(\lambda)F(\lambda_0) = \lambda_0 F(\lambda)F(\lambda_0) - F(\lambda_0) - F(\lambda) \tag{1.76}$$

da cui

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F(\lambda)F(\lambda_0) = F(\lambda_0). \tag{1.77}$$

Ma da (1.65) segue che $F(\lambda_0)(X)$ contiene $D_A \cap D_B$ (che è denso in X in virtù del Lemma [1.I]), allora tenendo conto di (1.64) si ha la tesi.

PROPOSIZIONE [1.II]. - *Esiste un operatore lineare chiuso $\overline{A+B}$ in X tale che $\rho(\overline{A+B})$ contiene la semiretta $\lambda > \omega_A + \omega_B$ e si ha:*

$$R(\lambda, \overline{A+B}) = F(\lambda) \qquad \forall \lambda > \omega \cup (\omega_A + \omega_B) \tag{1.78}$$

$$\| R(\lambda, \overline{A+B}) \| \leq 1/(\lambda - \omega_A - \omega_B) \qquad \forall \lambda > \omega_A + \omega_B. \tag{1.79}$$

Inoltre $A+B$ è prechiuso e $\overline{A+B}$ è la minima estensione chiusa di $A+B$.

DIMOSTRAZIONE. - Da (1.63) segue intanto che $F(\lambda)$ è uno pseudo-risolvente cosicchè [6] è una funzione analitica di λ e si ha:

$$F^{(k)}(\lambda) = (-1)^k k!\, F^{k+1}(\lambda) \ (^9) \qquad \lambda > \omega \cup (\omega_A + \omega_B). \tag{1.80}$$

Per provare che $F(\lambda)$ è il risolvente di un operatore chiuso $\overline{A+B}$ basta provare che il nucleo di $F(\lambda)$ è $\{0\}$ [6]. Sia allora $\lambda_0 > \omega_A + \omega_B$ e $x \in X$ tale che $F(\lambda_0)x = 0$; da (1.80) si ha $F^{(k)}(\lambda_0) = 0$ e quindi, per un noto teorema sulle funzioni analitiche si ha:

$$F(\lambda)x = 0 \qquad \forall \lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega \tag{1.81}$$

da (1.67) segue allora $x = 0$.

---

(9) $F^{(k)}(\lambda_0)$ denota $\left(\dfrac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k}\right)_{\lambda=\lambda_0}$.

Quindi esiste un operatore lineare chiuso $\overline{A+B}$ verificante (1.78) e (1.79) per $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$; ma in virtù di (1.79) si ha, con ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione della Proposizione [1.I], che $\rho(\overline{A+B})$ contiene la semiretta $\lambda > \omega_A + \omega_B$ e vale (1.80).

Proviamo ora che $A+B$ è prechiuso; sia $\{x_n\}$ una successione in $D_A \cap D_B$ tale che:

$$x_n \to 0, \qquad (A+B)x_n \to y \tag{1.82}$$

se $\lambda > \omega_A + \omega_B$ si ha

$$(\lambda - A - B)x_n \to y \tag{1.83}$$

da cui

$$x_n = R(\lambda, \overline{A+B})x_n \to F(\lambda)y = 0 \tag{1.84}$$

il che implica $y = 0$.

Proviamo infine che se $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$, $\lambda - \overline{A+B}$ è la minima estensione chiusa di $\lambda - A - B$ il che implica evidentemente la tesi.

Osserviamo dapprima che $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ è denso in X, infatti se $x' \in X'$ è tale che

$$< (\lambda - A - B)z, x' > = 0 \qquad \forall z \in D_A \cap D_B \tag{1.85}$$

da (1.66) segue:

$$< y, x' > = 0 \qquad \forall y \in D_{B^2} \tag{1.86}$$

e poichè D_{B^2} è denso in X (Lemma [1.I]) si ha $x' = 0$.

Sia allora $x \in D_{\overline{A+B}}$, $y = (\lambda - \overline{A+B})x$ e $\{y_n\}$ una successione in $(\lambda - - A - B)(D_A \cap D_B)$ convergente a y.

Posto $x_n = R(\lambda, \overline{A+B})y_n$ si ha per ipotesi $x_n \in D_A \cap D_B$ e inoltre:

$$\begin{cases} x_n = R(\lambda, A+B)y_n \to R(\lambda, \overline{A+B})y = x \\ (\lambda - A - B)x_n \to y \end{cases} \tag{1.87}$$

ciò implica che x appartiene al dominio della minima estensione chiusa di $\lambda - A - B$, che indichiamo con $\widehat{\lambda - A - B}$, e si ha $\widehat{\lambda - A - B}x = y = (\lambda - \overline{A+B})x$; viceversa se $x \in D_{\widehat{\lambda - A - B}}$, posto $y = \widehat{\lambda - A - B}x$ esiste una successione $\{x_n\}$ in $D_A \cap D_B$ tale che:

$$x_n \to x, \qquad (\lambda - A - B)x_n \to y. \tag{1.88}$$

Ne segue, ricordando (1.65), $x_n \to R(\lambda, \overline{A+B})y$ cosicchè $x \in D_{\overline{A+B}}$ e si ha:

$$(\lambda - \overline{A+B})x = y = \widetilde{\lambda - A - B}x \tag{1.89}$$

Quindi il Teorema [1.I] è completamente dimostrato.

Vogliamo ora applicare il Teorema [1.I) allo studio dell'equazione $\lambda u - Au - Bu = v$, per questo poniamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE [1.I]. - *Diremo che $x \in X$ è una soluzione debole dell'equazione*

$$\lambda x - Ax - Bx = y \qquad y \in X \tag{1.90}$$

se esiste una successione $\{x_n\}$ in $D_A \cap D_B$ convergente a x e tale che $y_n = \lambda x_n - Ax_n - Bx_n$ converge a y.

Possiamoora esprimere i risultati del Teorema [1.I] nella forma seguente:

TEOREMA [1.II]. - *Siano A e B operatori lineari chiusi in X con domini densi in X, verificanti le ipotesi (A), (B), (C) del Teorema* [1.I].

Allora se $\lambda > \omega_A + \omega_B$ l'equazione (1.90) *ammette una e una sola soluzione debole x; tale soluzione verifica inoltre la maggiorazione:*

$$\|x\| \leq 1/(\lambda - \omega_A - \omega_B)^{-1} \|y\|. \tag{1.91}$$

Proviamo ora il seguente Teorema di regolarizzazione:

TEOREMA [1.III]. - *Se oltre alle ipotesi (A) e (B) del teorema* [1.I] *vale la seguente:*

(C') *Esistono due numeri reali ω e μ con $\mu > \omega_B$ tali che se $\lambda > \omega$ e $x \in D_{B^k}$ $R(\lambda, A)x \in D_{B^k}$; inoltre l'immagine di $(\mu - B)^k R(\lambda, A) R^k(\mu, B)$ è densa in X e risulta:*

$$\|(\mu - B)^k R(\lambda, A) R^k(\mu, B)\| \leq 1/(\lambda - \omega) \qquad \forall \lambda > \omega \qquad k = 1, 2, 3 \tag{1.92}$$

allora se $y \in D_B$ esiste uno e un solo elemento $x \in D_A \cap D_B$ tale che $\lambda x - Ax - Bx = y$.

DIMOSTRAZIONE. - Procedendo come per il Lemma [1.IV] si trova che esiste un operatore lineare chiuso $\tilde{A}$ tale che:

$$R(\lambda, \tilde{A}) = (\mu - B) R(\lambda, A) R(\mu, B) \qquad \lambda > \omega \tag{1.93}$$

$$\| R(\lambda, \tilde{A})\| \leq 1/(\lambda - \omega) \qquad \lambda > \omega \tag{1.94}$$

$$R(\lambda, \tilde{A} + B_m) = (\mu - B) R(\lambda, A + B_m) R(\mu, B). \tag{1.95}$$

Allora, applicando il Teorema [1.I] agli operatori $\tilde{A}$ e B si trova che esiste il limite:

$$\lim_{m \to \infty} R(\lambda, \tilde{A} + B_m)x \qquad \forall x \in X \tag{1.96}$$

che indicheremo con $\tilde{F}(\lambda)x$.

Sia ora $\lambda > (\omega_A + \omega_B) \cup \omega$, $y \in D_B$, $z = (\mu - B)y$, e poniamo:

$$\begin{cases} x_m = R(\lambda, A + B_m)y \\ y_m = R(\lambda, \tilde{A} + B_m)z \end{cases} \tag{1.97}$$

Si ha:

$$\begin{cases} x_m \to R(\lambda, \overline{A + B})y \\ Bx_m = BR(\mu, B)y_m \to BR(\mu, B)\tilde{F}(\lambda)z \end{cases} \tag{1.98}$$

Poichè B è chiuso ciò implica $R(\lambda, \overline{A + B})y \in D_B$ e

$$BR(\lambda, \overline{A + B})y = BR(\mu, B)\tilde{F}(\lambda)z. \tag{1.99}$$

Inoltre dalla Proposizione [1.I] segue che $R(\lambda, A + B_m)y \in D_A$ e si ha

$$AR(\lambda, A + B_m)y = -y + \lambda R(\lambda, A + B_m)y - B_m R(\mu, B)R(\lambda, \tilde{A} + B_m)z.$$

Dato che $B_m R(\mu, B) \to BR(\mu, B)$ in virtù del Lemma [1.I] si ha:

$$x_m = R(\lambda, A + B_m)y \to R(\lambda, \overline{A + B})y$$

$$Ax_m \to -y + \lambda R(\lambda, \overline{A + B})y - BR(\mu, B)\tilde{F}(\lambda)z. \tag{1.100}$$

Poichè A è chiuso ciò implica $R(\lambda, \overline{A + B})y \in D_A$ e si ha:

$$AR(\lambda, \overline{A + B})y = -y + \lambda R(\lambda, \overline{A + B})y - BR(\mu, B)\tilde{F}(\lambda)z \tag{1.101}$$

Allora da (1.99) e (1.101) posto $x = R(\lambda, \overline{A + B})y$ si deduce che $x \in D_A \cap D_B$ e risulta:

$$\lambda x - Ax - Bx = y \tag{1.102}$$

e quindi la tesi.

Il seguente Corollario riguarda il caso in cui A e B commutano.

COROLLARIO [1.I]. - *Siano A e B operatori lineari chiusi con domini densi in X tali che:*

(A) $\rho(A)$ $(\rho(B))$ *contiene una semiretta* $\lambda > \omega_A$ $(\lambda > \omega_B)$ *di* $\boldsymbol{R}$

(B) *Esiste nn numero positivo M tale che valgono le maggiorazioni:*

$$\left\{\begin{array}{ll} \| R^k(\lambda, A)\| \leq M/(\lambda - \omega_A)^k & \forall \lambda > \omega_A \\ \| R^k(\lambda, B)\| \leq M/(\lambda - \omega_B)^k & \forall \lambda > \omega_B \end{array}\right. \tag{1.103}$$

($\bar{\mathrm{C}}$) *Risulta:*

$$[R(\lambda, A), R(\mu, B)] = R(\lambda, A)R(\mu, B) - R(\mu, B)R(\lambda, A) = 0 \qquad \forall \lambda > \omega_A, \ \mu > \omega_B \ \text{([10])}. \tag{1.104}$$

Allora $D_A \cap D_B$ è denso in X e $A + B$ con dominio $D_A \cap D_B$ è prechiuso e, detta $\overline{A + B}$ la sua minima estensione chiusa, $\rho(\overline{A + B})$ contiene la semiretta $\lambda > \omega_A + \omega_B$ e si ha:

$$\| R^k(\lambda, \overline{A + B})\| \leq M^2/(\lambda - \omega_A - \omega_B)^k \qquad \forall \lambda > \omega_A + \omega_B. \tag{1.105}$$

Inoltre l'equazione $\lambda x - Ax - Bx = y$ con $y \in X$ ammette una e una sola soluzione debole x in X e se $y \in D_A \cup D_B$ allora $x \in D_A \cap D_B$.

DIMOSTRAZIONE. - Se $M = 1$ basta osservare che le ipotesi (C) e (C′) sono automaticamente soddisfatte e applicare i Teoremi [1.I], [1.II], [1.III].

Se $M > 1$, con i simboli del Lemma [1.II], si ha:

$$\| T^h_{mn} \| \leq \frac{M^2}{(\lambda + m + n)^k} \left\{ \frac{n^2}{n - \omega_A} + \frac{m^2}{m - \omega_B} \right\}^k$$

da (1.106) segue che la serie $\sum_{h=0}^{k} T^h_{mn} = (1 - T_{mn})^{-1}$ è convergente e inoltre:

$$\| R(\lambda, A_n + B_m)\| \leq M^2/(\lambda - \varkappa_{mn}). \tag{1.107}$$

Basta ora procedere come nella dimostrazione del Teorema [1.I], [1.II] e [1.III] e si ha la tesi.

OSSERVAZIONE. - Il Corollario [1.I] può anche dedursi del Teorema di HILLE-YOSIDA [6] da notare che nel corso di tutte le dimostrazioni non abbiamo mai usato tale Teorema ma che lo abbiamo sostanzialmente ridimostrato.

§ 2. - In questo paragrafo Y è uno spazio di Banach con norma $|\ |$, $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni su $\boldsymbol{R}_+$ a supporto compatto a valori in Y indefinitamente differenziabili.

([10]) È evidentemente sufficiente che l'identità (1.104) sia verificata per un certo $\lambda > \omega_A$ e per un certo $\mu > \omega_B$.

Per ogni $s \in \boldsymbol{R}_+$ T_s è l'operatore di traslazione a sinistra in $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^+;\ Y)$.

$$(T_s u)(t) \begin{cases} = 0 & \text{se } t \leq s \\ = u(t-s) & \text{se } t \geq s \end{cases} \qquad u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+;\ Y) \tag{2.1}$$

$L^p(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$, $p > 1$ è il completamento di $C_0(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_p = \left(\int_0^\infty |u(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \tag{2.2}$$

È noto [1] che ogni elemento di $L^p(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$ può essere identificato a una funzione a valori in Y definita quasi ovunque su $\boldsymbol{R}_+$.

$C_0^k(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$, $k-1 \in N$, è completamento di $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_{0,k} = \operatorname{Sup}\{|u^{(h)}(t)|,\ t \in \boldsymbol{R}_+,\ h = 0, \ldots, k\} \tag{2.3}$$

$H_0^{1,p}(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$ è il completamento di $C_0^\infty(R_+;\ Y)$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p \ (^{11}) \tag{2.4}$$

È noto [3] che $H_0^{1,p}(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ può essere identificato allo spazio vettoriale delle funzioni continue su $\boldsymbol{R}_+$ a valori in Y aventi limite uguale a 0 per $t \to 0$ tali che la loro derivata nel senso delle distribuzioni vettoriali appartiene a $L^p(\boldsymbol{R}_+;\ Y)$.

Il seguente Lemma è ben noto:

LEMMA [2.I]. - *Vale la disuguaglianza:*

$$|u(t) - u(s)| \leq |t-s|^{1-1/p} \|u\|_{1,p} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+,\ Y). \tag{2.5}$$

DIMOSTRAZIONE. - Segue facilmente, usando la disuguaglianza di Hölder, dalla relazione:

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\xi)\, d\xi \qquad \forall t,\ s \in \boldsymbol{R}_+,\ u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+,\ Y). \tag{2.6}$$

Nel seguito X (con norma $\|\ \|$) denota $C_0^0(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ ovvero $L^p(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$

LEMMA [2.II]. - *Per ogni $s \in \boldsymbol{R}_+$, T_s è prolungabile a un operatore continuo su X e risulta:*

$$\|T_s\| = 1. \tag{2.7}$$

Inoltre $s \to T_s$ è un semigruppo di contrazione in X.

(11) u' denota $\dfrac{du}{dt}$.

DIMOSTRAZIONE. - La (2.7) si prova per verifica diretta, quindi per dimostrare che $s \to T_s$ è un semigruppo di contrazione basta provare che:

$$\lim_{s' \to s} T_{s'}u = T_s u \qquad \forall u \in C_0^\infty(R_+,\ Y). \tag{2.8}$$

Se $X = C_0^0(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ ciò segue dalla continuità uniforme di u; supponiamo allora $X = L^p(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ si ha, se $s' > s$, $\Delta s = s' - s$

$$\| T_{s'}u - T_s u \|_p^p = \int_0^{\Delta s} |u(t)|^p\, dt + \int_{\Delta s}^{\infty} |u(t - \Delta s) - u(t)|^p\, dt. \tag{2.9}$$

Se k è un numero maggiore di Δs e tale che $[0,\ k]$ contenga il supporto di u, si ha da (2.5):

$$\| (T_{s'} - T_s)u \|_p^p \leq \Delta s \, \| u \|_0^p + \Delta s^{p-1}(k - \Delta s) \, \| u \|_{1,p}^p \tag{2.10}$$

e quindi la tesi.

LEMMA [2.III]. - *Sia A il generatore infinitesimale di $s \to T_s$ in X; vale allora la maggiorazione:*

$$\| R(\lambda,\ A) \| \leq 1/\lambda \qquad \forall \lambda > 0 \tag{2.11}$$

Inoltre se $X = C_0^0(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ il dominio di A è:

$$D_A = C_0^1(\boldsymbol{R}_+,\ Y) \tag{2.12}$$

e si ha:

$$(Au)(t) = -u'(t) \qquad \forall u \in D_A,\ \ t \in \boldsymbol{R}_+ \tag{2.13}$$

se $X = L^p(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ il dominio di A è:

$$D_A = H_p^{1,p}(\boldsymbol{R}_+,\ Y) \tag{2.14}$$

e si ha:

$$(Au)(t) = -u'(t) \qquad \forall u \in D_A, \tag{2.15}$$

t quasi ovunque in $\boldsymbol{R}_+$ [12],

[12] La derivata è intesa nel senso delle distribuzioni a valori vettoriali [13].

DIMOSTRAZIONE. - Sia $X \in C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ (se $X = L^p(\boldsymbol{R}_+, Y)$ basta ripetere la stessa dimostrazione): la (2.11) segue dal fatto che $s \to T_s$ è un semigruppo di contrazione [6], inoltre è evidente che $C_0(\boldsymbol{R}_+, Y) \subset D_A$ e risulta:

$$(2.15) \qquad Au = -u' \qquad \forall u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$$

Inoltre $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$ è un sottospazio invariante di $R(\lambda, A)$ essendo:

$$(2.16) \qquad R(\lambda, A)u(t) = \int_0^s e^{-\lambda s} u(t-s)ds \qquad \forall u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$$

in virtù del Teorema di HILLE-YOSIDA [6].

Sia $\lambda > 0$, $R(\lambda, A)$ è un'applicazione continua di $C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ in $C_0^1(\boldsymbol{R}_+, Y)$ essendo

$$(2.17) \quad \| R(\lambda\ A)u \|_1 = \| R(\lambda, A)u \|_0 + \| AR(\lambda, A)u \|_0 \leq (2 + 1/\lambda) \| u \|_0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$$

Inoltre $R(\lambda, A)$, come applicazione di $C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ in $C_0^1(\boldsymbol{R}_+, Y)$, ha inversa continua essendo:

$$(2.18) \qquad \| \lambda v - Av \|_0 = \| \lambda v + v' \|_0 \leq (\lambda + 1) \| v \|_1 \qquad \forall v \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y).$$

Quindi, dato che $R(\lambda, A)$ applica $C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ su D_A e che $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$ è denso in $C_0^1(\boldsymbol{R}_+, Y)$ si ha la tesi.

LEMMA [2.IV]. - *Sia* $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi con domini densi in* Y *tale che:*

(A) *Per ogni* $t \geq 0$ $\rho(B(t))$ *contiene la semiretta* $\lambda \geq 0$ *e si ha:*

$$(2.19) \qquad | R(\lambda, B(t)) | \leq 1/\lambda \quad se\ \lambda > 0$$

(B) *Per ogni* $\lambda > 0$ *l'applicazione:*

$$(2.20) \qquad t \to R(\lambda, B(t))$$

di $\boldsymbol{R}_+$ *in* $\mathfrak{L}(Y, Y)$ [13] *è continua.*

---

[13] $\mathfrak{L}(Y, Y)$ denota l'algebra di Banach degli operatori lineari continui su Y munita della norma usuale $|T| = \sup\limits_{\substack{x \in Y \\ |x|=1}} |Tx|$, $\forall T \in \mathfrak{L}(Y, Y)$.

(C) *Esiste un numero positivo K tale che se $\tau \leq t$, $D_{B^2(\tau)} \subset D_{B^2(t)}$ e si ha:*

$$|B^2(t)B^{-2}(\tau) - 1| \leq K|t-\tau|. \tag{2.21}$$

Allora posto:

$$D_B = \{u \in X;\ u(t) \in D_{B(t)}\ \ \forall t \in \boldsymbol{R}_+,\ B(t)u(t) \in X\}\ ([14]) \tag{2.22}$$
$$(Bu)(t) = B(t)u(t) \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}_+$$

B è un operatore chiuso con dominio denso in X tale che:

$$\|R(\lambda, B)\| \leq 1/\lambda \qquad \lambda \geq 0. \tag{2.23}$$

Inoltre per ogni $u \in D_{B^2}$ e $\lambda > K$ $R(\lambda, A)u \in D_{B^2}$ e si ha:

$$\|B^2R(\lambda, A)B^{-2}\| \leq 1/(\lambda - K) \qquad \lambda > K \tag{2.24}$$

DIMOSTRAZIONE. - Proviamo dapprima le seguenti disuguaglianze:

$$|B^2(t)B^{-2}(t-\tau)| \leq e^{K\tau} \qquad \forall t \geq \tau \tag{2.25}$$

$$|B^2(t)B^{-2}(\tau) - B^2(t)B^{-2}(\tau')| \leq Ke^{K(t-\tau)}|\tau - \tau'| \qquad \forall t \geq \tau \geq \tau' \tag{2.26}$$

$$|B^2(t)B^{-2}(\tau) - B^2(t')B^{-2}(\tau)| \leq Ke^{K(t'-\tau)}|t - t'| \qquad \forall t \geq t' \geq \tau. \tag{2.27}$$

La (2.25) segue dalla (2.21) essendo:

$$|B^2(t)B^{-2}(t-\tau)| \leq |B^2(t)B^{-2}(t-\tau) - 1| + 1 \leq 1 + K\tau \leq e^{K\tau}. \tag{2.28}$$

Se $\tau > \tau'$ si ha inoltre:

$$B^2(t)B^{-2}(\tau) - B^2(t)B^{-2}(\tau') = B^2(t)B^{-2}(\tau)(1 - B^2(\tau)B^{-2}(\tau')) \tag{2.29}$$

da cui, usando (2.21) e (2.25) segue (2.26).
Infine essendo:

$$B^2(t)B^{-2}(\tau) - B^2(t')B^{-2}(\tau) = (B^2(t)B^{-2}(t') - 1)B^2(t')B^{-2}(\tau) \tag{2.30}$$

segue (2.27).

([14]) Se $X = L^p(\boldsymbol{R}_+, X)$ occorre sostituire a $t \in \boldsymbol{R}_+$, per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}_+$.

Definiamo ora un operatore $G(\lambda)$ in X *ponendo*:

$$(G(\lambda)u)(t) = R(\lambda,\ B(t))u(t). \tag{2.31}$$

Tale definizione ha senso in quanto $t \to R(\lambda,\ B(t))$ è un'applicazione continua e limitata di $\bar{\boldsymbol{R}}_+$ in $\mathcal{L}(Y,\ Y)$ in virtù di (2.19), (2.20).

Si prova facilmente, per verifica diretta, che

$$R(\lambda,\ B) = G(\lambda) \qquad \forall \lambda > 0 \tag{2.32}$$

e che vale (2.23).

Proviamo ora che D_B è denso in X; cominciamo con l'osservare che se Z è un sottospazio vettoriale di Y denso in Y l'insieme:

$$W = \{u \in X;\ u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)u_k,\ \varphi_k(t) \in C_0^\infty(R_+),\ u_k \in Z,\ k = 1, 2, \dots, n,\ n \in \boldsymbol{N}\} \tag{2.33}$$

è denso in X [5].

Posto allora $Z = D_{B^2(0)} = \bigcap_{t \in \bar{R}_+} D_{B^2(t)}$, dato che $D_{B^2(0)}$ è denso in Y come risulta dal Lemma [1.I] (con Y al posto di X e $B(0)$ al posto di B), si ha che W è denso in X.

D'altra parte $W \subset D_B$; infatti se $v \in W$ e

$$v = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k u_k, \qquad \varphi_k \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+), \qquad u_k \in Z, \qquad k = 1, \dots, n \tag{2.34}$$

si ha:

$$(Bv)(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) B^{-1}(t) B^2(t) B^{-2}(0)(B^2(0)u_k) \tag{2.35}$$

cosicchè $Bv \in C_0^0(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ dato che $B^{-1}(t)$ è continuo in t per ipotesi e $B^2(t)B^{-2}(0)$ è continuo in t in virtù di (2.27).

Quindi D_B è denso in X, resta da provare la (2.24).

Sia $u \in X$ si ha [15]

$$(T_s B^{-2} u)(t) = \begin{cases} B^{-2}(t-s)u(t-s) & \text{se } t \geq s \\ 0 & \text{se } t \leq s \end{cases} \tag{2.36}$$

Ne segue che $T_s B^{-2} u \in D_{B^2}$ risulta

$$(B^2 T_s B^{-2} u)(t) = \begin{cases} B^2(t) B^{-2}(t-s) u(t-s) & \text{se } t \geq s \\ 0 & \text{se } t \leq s \end{cases} \tag{2.37}$$

---

[15] $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni reali su $\boldsymbol{R}_+$ a supporto compatto indefinitamente differenziabili.

Poniamo allora:

$$\Gamma_s = B^2 T_s B^{-2} \qquad \forall s \in \overline{\boldsymbol{R}}_+. \tag{2.38}$$

Se $t \geq s$ si ha:

$$|\Gamma_s u(t)| = |B^2(t)B^{-2}(t-s)u(t-s)| \leq |B^2(t)B^{-2}(t-s)|\,|u(t-s)| \leq e^{Ks}|u(t-s)| \tag{2.39}$$

in virtù di (2.25)

$$\|\Gamma_s\| \leq e^{Ks} \qquad \forall s \in \overline{\boldsymbol{R}}_+. \tag{2.40}$$

Proviamo ora che l'applicazione $s \to \Gamma_s u$, $u \in X$, è fortemente continua; in virtù di (2.40) si può supporre $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+, Y)$.

Supponiamo $X = L^p(\boldsymbol{R}_+, Y)$ (se $X = C_0^0(\boldsymbol{R}_+, Y)$ la dimostrazione è del tutto analoga); se $s > s'$ si ha:

$$(\Gamma_{s'}u - \Gamma_s u)(t) \begin{cases} = 0 \quad \text{se } t \leq s \\ = -B^2(t)B^{-2}(t-s)u(t-s) \quad \text{se } s \leq t \leq s' \\ = B^2(t)B^{-2}(t-s')u(t-s') - B^2(t)B^{-2}(t-s)u(t-s) \quad \text{se } t \geq s. \end{cases} \tag{2.41}$$

Si ha allora:

$$\|\Gamma_{s'}u - \Gamma_s u\|_p^p \leq \int_s^{s'} |B^2(t)B^{-2}(t-s)|^p\,|u(t-s)|^p\,dt + \tag{2.42}$$

$$+ \int_{s'}^\infty |B^2(t)B^{-2}(t-s')u(t-s') - B^2(t)B^{-2}(t-s)u(t-s)|^p\,dt \leq$$

$$\leq \int_s^{s'} |B^2(t)B^{-2}(t-s)|^p\,|u(t-s)|^p\,dt + 2^{p-1}\int_{s'}^\infty |B^2(t)B^{-2}(t-s') - B^2(t)B^{-2}(t-s)|^p$$

$$|u(t-s')|^p\,dt + 2^{p-1}\int_{s'}^\infty |B^2(t)B^{-2}(t-s)|^p\,|u(t-s') - u(t-s)|^p\,dt.$$

Usando le disuguaglianze (2.25), (2.26) si ottiene:

$$\|\Gamma_{s'}u - \Gamma_s u\|_p^p \leq e^{Ksp}\int_0^{s'-s} |u(t)|^p\,dt + 2^{p-1}Ke^{s'K}(s'-s)\|u\|_p^p + 2^{p-1}e^{Ksp}\|(T_{s'} - T_s)u\|_p^p. \tag{2.43}$$

Quindi dal Lemma [2.II] segue la continuità forte dell'applicazione $s \to \Gamma_s$.

Si ha ora se $u \in X$:

$$R(\lambda,\ A)B^{-2}u = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s B^{-2} u ds \tag{2.44}$$

poichè $\Gamma_s u$ è continua in s e B^2 è chiuso ne segue:

$$B^2 R(\lambda,\ A)B^{-2}u = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \Gamma_s u ds \tag{2.45}$$

e dalla (2.40) segue la tesi.

Dai Teoremi [1.II] e [1.III] applicati agli operatori A e B definiti rispettivamente dai Lemmi [2.III] e [2.IV] seguono ora i Teoremi

TEOREMA [2.I]. - *Sia* $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi con domini densi in* Y *verificante le ipotesi* (A), (B), (C) *del Lemma* [2.IV].

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{du}{dt} - B(t)u = f \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0 \tag{2.46}$$

con $f \in X$, *ammette una e una sola soluzione debole in* X.

TEOREMA [2.II]. - *Sia* $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi con domini densi in* Y *verificante oltre alle ipotesi* (A) e (B) *del Lemma* [2.IV] *la seguente:*

(D) *Esiste un numero positivo* K *tale che se* $\tau \leq t$, $D_{B^k(\tau)} \subset D_{B^k(t)}$ *e si ha:*

$$|B^k(t)B^{-k}(\tau) - 1| \leq K|t-\tau| \qquad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.47}$$

Allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{du}{dt} - B(t)u = f \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq T,\ \ T \in \boldsymbol{R}_+ \tag{2.48}$$

con $f(t) \in D_{B(t)}$ $\forall t \in \boldsymbol{R}_+$ *(per quasi tutti i* t *di* $\boldsymbol{R}_+$*) e* $f \in C_0^0(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ $(f \in L^p(\boldsymbol{R}_+,\ Y))$ *ammette una e una sola soluzione* u *appartenente a* $D_B \cap C_0^1(]0,\ T[;\ Y)$ $(D_B \cap H^{1,p}(]0,\ T[;\ Y))$ [16].

[16] $C_0^1(]0,\ T[;\ Y)$ $(H^{1,p}(]0,\ T[,\ Y))$ è la restrizione a $]0,\ T[$ delle funzioni di $C_0^1(\boldsymbol{R}_+,\ Y)$ $(H_0^{1,p}(\boldsymbol{R}_+,\ Y))$.

DIMOSTRAZIONE. - Gli operatori A e B verficano le ipotesi del Teorema [1.III] con $\mu = 0$, $\omega_A = 0$, $\omega_B = 0$, $\omega = K$; quindi se $\bar{\lambda} > K$ il problema:

$$(\lambda + \bar{\lambda})\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dt} - B\bar{u} = fe^{-\bar{\lambda}t}, \qquad \bar{u}(0) = 0 \tag{2.49}$$

ammette una e una sola soluzione $\bar{u} \in D_B \cap D_A$; allora $u(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{u}(t)$ verifica le proprietà richieste.

§ 3. - In questo paragrafo Y è uno spazio di Banach con norma $|\ |$, $C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ è lo spazio vettoriale delle funzioni su R periodiche di periodo 2π a valori in Y indefinitamente differenziabili.

Per ogni $s \in \boldsymbol{R}$ T_s è l'operatore di traslazione a sinistra in $C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, Y)$:

$$(T_s u)(t) = u(t - s) \qquad \forall u \in C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, Y) \tag{3.1}$$

$L^p_\#(\boldsymbol{R}, Y)$, $p > 1$, è il completamento di $C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ rispetto alla norma: [17]

$$\| u \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |u(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{3.2}$$

$C^k_\#(\boldsymbol{R}, Y)$, $k - 1 \in \boldsymbol{N}$, è il completamento di $C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ rispetto alla norma:

$$\| u_k \| = \operatorname{Sup} \{ |u^{(h)}(t)|, \ t \in \boldsymbol{R}, \ h = 0, 1, \dots, k \} \tag{3.3}$$

$H^{1,p}_\#(R, Y)$ è il completamento di $C^\infty_\#(R, Y)$ rispetto alla norma:

$$\| u \|^{1,p} = \| u \|_p + \| u' \|_p . \tag{3.4}$$

Nel seguito X rappresenta $L^p_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ o $C^0_\#(\boldsymbol{R}, Y)$.

Procedendo come nel § 2 si prova il lemma:

LEMMA [3.I]. - *Per ogni $s \in R$, T_s è prolungabile a un operatore continuo su X e risulta:*

$$\| T_s \| = 1. \tag{3.5}$$

Inoltre $s \to T_s$ è un gruppo di classe c_0 [20] *e, detto A il suo generatore infinitesimale vale la maggiorazione:*

$$\| R(\lambda, A) \| \leq 1/\lambda \qquad \forall \lambda > 0. \tag{3.6}$$

---

(17) $L^p_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ è evidentemente isomorfo a $L^p([0, 2\pi]; Y)$.

Inoltre se $X = C^0_{\#}(R, Y)$ *il dominio di* A *è:*

$$D_A = C^1_{\#}(\boldsymbol{R}, Y) \tag{3.7}$$

e si ha:

$$(Au)(t) = u'(t) \qquad \forall u \in D_A, \ t \in \boldsymbol{R}_+ \tag{3.8}$$

se $X = L^p(R, Y)$ *il dominio di* A *è:*

$$D_A = H^{1,p}_{\#}(\boldsymbol{R}, Y) \tag{3.9}$$

e si ha:

$$(Au)(t) = -u'(t) \qquad \forall u \in D_A \ t \text{ quasi ovunque in } \boldsymbol{R} \ (^{12}) \tag{3.10}$$

Procedendo come nel § 2 si ottengono inoltre i Teoremi:

TEOREMA [3.I] - *Sia* $\{B(t)\}_{t \in R}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi con domini densi in* Y *tali che:*

(A) $B(t + 2\pi) = B(t) \ \forall t \in \boldsymbol{R}$

(B) *Per ogni* $t \in \boldsymbol{R}$ $\rho(B(t))$ *contiene la semiretta* $\lambda \geq 0$ *e si ha:*

$$|R(\lambda, B(t))| \leq 1/\lambda \qquad \text{se } \lambda > 0 \tag{3.11}$$

(C) *Per ogni* $\lambda > 0$ *l'applicazione*

$$t \to R(\lambda, B(t)) \tag{3.12}$$

di $\overline{R}_+$ *in* $\mathfrak{L}(Y, Y)$ [13] *è continua.*

(D) *Per ogni* $t, \tau \in \boldsymbol{R}$ *si ha* $D_{B^2(t)} = D_{B^2(\tau)}$ *e esiste un numero positivo* K *tale che:*

$$|B^2(t)B^{-2}(\tau) - 1| \leq K|t - \tau|. \tag{3.13}$$

Allora il problema

$$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{du}{dt} - B(t)u = f \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \tag{3.14}$$

con $f \in X$, *ammette una e una sola soluzione debole in* X.

TEOREMA [3.II]. - *Sia* $\{B(t)\}_{t\in R}$ *una famiglia di operatori lineari chiusi aventi tutti lo stesso dominio* D_B *denso in* Y *verificanti oltre alle ipotesi* (A), (B), (C) *del Teorema* [3.I] *la seguente:*

(E) *Se* $t,\ \tau \in \boldsymbol{R}$ $D_{B^k(t)} = D_{B^k(\tau)} = D_k$ *e esiste un numero positivo* K *tale che:*

$$|R^k(\mu, B(t))R^{-k}(\mu, B(\tau)) - 1| \leq \omega |t-\tau| \qquad \forall \mu \geq 0 \qquad k = 1, 2, 3. \tag{3.15}$$

Allora il problema:

$$\begin{cases} \lambda u + \dfrac{du}{dt} - B(t)u = f \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} \qquad \lambda \geq 0 \tag{3.16}$$

con $f \in C^0_\#(\boldsymbol{R}, D_B)$ $(f \in L^p_\#(\boldsymbol{R}, D_B))$ [18] *ammette una e una sola soluzione* u *appartenente a* $C^0_\#(\boldsymbol{R}, D_B) \cap C^1_\#(\boldsymbol{R}, Y)$ $(L^p_\#(\boldsymbol{R}, D_B) \cap H^{1,p}(\boldsymbol{R}, Y))$.

DIMOSTRAZIONE. - Basta applicare il Teorema [1.III] con $B - K - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ al posto di B, con A definito dal Lemma [3.1], con $\omega_B = 0$, $\omega_B = -K - \varepsilon$, $\omega = K$.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, Intégration, Chap. 6, Hermann, Paris.

[2] G. DA PRATO, *Equations operationelles dans les espaces de Banach et applications*, C.R., Acad. Sc. Paris (1968).

[3] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators I*, Interscience (1958).

[4] P. GRISVARD, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1967).

[5] A. GROTHENDIEK, *Leçon sur les espaces vectoriel tapologiques*, Sao Paulo (1958).

[6] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pubbl. Vol. XXXI.

[7] J. I. LIONS, *Equations Différentielles Opérationelles*, Springer-Verlag (1961).

[8] T. KATO, *Integration of the equations of evolution in a Banach space*, J. Math. Soc. of Japan 5, (1953), p. 228-234.

[9] — —. *On linear differential equations in Banach Spaces*, Comm. Pure and appl. Math. **9**, (1956), 479-486.

[10] — —, *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*, Nagoya, Math. J. **19** (1961), 93-125.

---

[18] $C^0_\#(\boldsymbol{R}, D_B)$ $(L^p_\#(\boldsymbol{R}_+, D_B))$ è il completamento di $C^\infty_\#(\boldsymbol{R}, D_B)$ (spazio vettoriale delle funzioni su $\boldsymbol{R}$ periodiche di periodo 2π a valori nello spazio di Banach D_B munito della norma del grafico) rispetto alla norma (3.3) ((3.2)) (con la norma in D_B al posto della norma in Y).

[11] T. KATO - H. TANABE, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J. **14** (1962), 107-133.

[12] R. S. PHILLIPS, *Perturbation theory for semi-groups of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 199-221.

[13] L. SCHWARTZ, *Distributions à valeurs vactorielles*, Ann. Inst. Fourier (1954).

[14] P. E. SOBOLEVSKI, *Parabolic type equations in Banach spaces*, Trudy Moscow Math. **10** (1961), 297-350.

[15] H. TANABE, *Evolution equations of parabolic type*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 610-613.

[16] — —, *On the equations of evolution in Banach spaces*, Osaka Math. J. **12** (1960), 365-613.

[17] — —, *A class of the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Math. J. **11** (1959), 121-145.

[18] — —, *Remarks on the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Math. J. **12** (1960), 145-166.

[19] K. YOSIDA, *On the differentiably and the representation of oneparameter semi-groups of linear operators*, J. Math. Soc. Japan (1948), 15-21.

[20] — —, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1965).