# Tracce su rette coordinate di un certo spazio funzionale (*).

Ermanno Lanconelli (a Bologna)

**Sommario.** - *Sia* $P(s, \sigma)=s^{2n}+\sigma^{2n}+s^{2m}\sigma^{2m}$ *con* $m$ *ed* $n$ *numeri naturali tali che* $m<n<2m$. *Posto* $k(P)=\{(0, 0), (n, 0), (0, n), (m, m)\}$, *si considera lo spazio* $K(P, p)=\left\{u : R^2 \rightarrow C;\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^h\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k u \in L_p(R^2)\ \text{per}\ (h, k)\in k(P)\right\}$, $1<p<\infty$, *e se ne caratterizzano le tracce su rette coordinate.*

## 1. - Notazioni e definizioni. Alcune premesse.

Con $x$ indichiamo il punto di $R$ (spazio euclideo reale 1-dimensionale) e con $(x, y)=z$ il punto $R^2$; $C$ è il campo dei numeri complessi, $Z$ ed $N$ rispettivamente gli insiemi dei numeri interi e naturali. Inoltre

$$R^+=\{x;\ x\in R,\ x>0\},$$

$$R^+_y=\{(x, y);\ x\in R,\ y\in R^+\}.$$

Poniamo

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_y=\frac{\partial}{\partial y},$$

$$D=(D_x, D_y), \qquad D^\alpha=(D_x^{\alpha_1}, D_y^{\alpha_2}),$$

essendo $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_i\in Z$, $\alpha_i\geq 0$; poniamo $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$.

Se $u\in L_1(R^2)$, poniamo

$$\tilde{u}(s, \sigma)=\int_{R^2} e^{i(sx+\sigma y)}u(x, y)dxdy, \qquad \widehat{u}(x, y)=\int_{R^2} e^{-i(xs+y\sigma)}u(s, \sigma)dsd\sigma,$$

ed analogamente per $u\in L_1(R)$.

Con $S(R^2)$ indichiamo lo spazio delle funzioni di classe $C^\infty(R^2)$ a decrescenza rapida su $R^2$; analogo significato per $S(R)$.

Riportiamo infine le definizioni di spazio di Sobolev e di spazio di Besov ([1]).

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 2 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1966-67.

Se $\alpha \in R^+$, $0 < \alpha < 1$, poniamo formalmente

$$\| f;\ \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha}(R) \|^p = \int_{R_y^+} \frac{|f(x+y) - f(x)|^p}{y^{1+p\alpha}}\, dx dy$$

e

$$\| f;\ \overset{\circ}{B}{}_p^{1}(R) \|^p = \int_{R_y^+} \frac{|f(x+y) - 2f(x) + f(x-y)|^p}{y^{1+p}}\, dx dy.$$

Per $r \in N$ sia

$$W_p^r(R) = \{ f : R \to C;\ f \in L_p(R),\ D_x^r f \in L_p(R) \}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

la derivata indicata essendo intesa nel senso delle distribuzioni. Con la norma

$$\| f;\ W_p^r(R) \| = \| f;\ L_p(R) \| + \| D_x^r f;\ L_p(R) \|,$$

$W_p^r(R)$ (spazio di SOBOLEV di ordine $r$) è uno spazio di BANACH. Si pone poi $W_p^0(R) = L_p(R)$.

Se $r$ è un numero reale positivo tale che $r = \bar{r} + \alpha$, con $\bar{r} \in Z$ e $0 < \alpha < 1$, poniamo $(1 \leq p < \infty)$:

$$W_p^r(R) = \{ f : R \to C;\ f \in W_p^{\bar{r}}(R),\ \| D_x^{\bar{r}} f;\ \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha}(R) \| < +\infty \}.$$

Con la norma

$$\| f;\ W_p^r(R) \| = \| f;\ W_p^{\bar{r}}(R) \| + \| D_x^{\bar{r}} f;\ \overset{\circ}{W}{}_p^{\alpha}(R) \|,$$

$W_p^r(R)$ diventa uno spazio di BANACH.

Sia ora $r = (r_1, r_2)$, $r_i \in N$; poniamo $(1 \leq p < \infty)$

$$W_p^{(r_1, r_2)}(R^2) = \{ f : R^2 \to C;\ f \in L_p(R^2),\ D_x^{r_1} f \in L_p(R^2),\ D_y^{r_2} f \in L_p(R^2) \}.$$

Con la norma

$$\| f;\ W_p^{(r_1, r_2)}(R^2) \| = \| f;\ L_p(R^2) \| + \| D_x^{r_1} f;\ L_p(R^2) \| + \| D_y^{r_2} f;\ L_p(R^2) \|,$$

$W_p^{(r_1, r_2)}(R^2)$ risulta uno spazio di BANACH.

Lo spazio di BESOV $B_p^r(R)$ coincide per definizione con $W_p^r(R)$ se $r$ non è intero, mentre per $r \in N$ è

$$B_p^r(R) = \{ f : R \to C;\ f \in W_p^{r-1}(R),\ \| D_x^{r-1} f;\ \overset{\circ}{B}{}_p^{1}(R) \| < +\infty \}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

che risulta uno spazio di BANACH con la norma

$$\|f;\ B_p^r(R)\| = \|f;\ W_p^{r-1}(R)\| + \|D_x^{r-1}f;\ \mathring{B}_p^1(R)\|.$$

Siano ora $m,\ n \in N$ tali che $m < n < 2m$; poniamo

$$P(s,\ \sigma) = s^{2n} + \sigma^{2n} + s^{2m}\sigma^{2m}$$

e

$$\|u;\ H_P\|^2 = \int_{R^2} (1 + P(s,\ \sigma))\,|\tilde{u}(s,\ \sigma)|^2\, ds d\sigma. \tag{1}$$

La chiusura di $S(R^2)$ rispetto alla norma (1), è uno spazio di HILBERT, che in [2] è stato indicato con $H_P$, e del quale è stata data una caratterizzazione delle tracce su rette caratteristiche, e non, per il polinomio $P$.

Poniamo ora

$$k(P) = \{(0,\ 0),\ (n,\ 0),\ (0,\ n),\ (m,\ m)\}$$

e

$$\bar{k}(P) = \left\{(\alpha_1,\ \alpha_2);\ \alpha_i \in Z,\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \frac{n-m}{m} \leq n,\ \alpha_2 + \alpha_1 \frac{n-m}{m} \leq n\right\}$$

(si osservi che $\bar{k}(P) = Z^2 \cap \mathrm{co}\,(k(P))$ essendo $\mathrm{co}\,(k(P))$ la chiusura convessa di $k(P)$ in $R^2$).

Per l'identità di PARSEVAL, se $u \in S(R^2)$, si ha

$$\sum_{\alpha \in k(P)} \|D^\alpha u;\ L_2(R^2)\|^2 = (2\pi)^{-2}\, \|u;\ H_P\|^2;$$

pertanto, posto

$$\|u;\ k(P,\ 2)\| = \sum_{\bar{\alpha} \in k(P)} \|D^\alpha u;\ L_2(R^2)\|, \tag{2}$$

$H_p$ si può considerare come la chiusura di $S(R^2)$ rispetto alla norma (2).

Questa caratterizzazione dello spazio $H_P$ suggerisce la seguente generalizzazione dal caso $p = 2$ al caso $p \neq 2$.

DEFINIZIONE. - *Indicando con $D_x$, $D_y$ le derivate nel senso delle distribuzioni, poniamo per $1 < p < \infty$,*

$$K(P,\ p) = \{u : R^2 \longrightarrow C;\ D^\alpha u \in L_p(R^2)\ \forall \alpha \in k(P)\}$$

e

$$\|u;\ K(P,\ p)\| = \sum_{\alpha \in k(P)} \|D^\alpha u;\ L_p(R^2)\|. \tag{3}$$

Vale la seguente

PROPOSIZIONE I. - (*a*) $u \in K(P, p) \Leftrightarrow D^\alpha u \in L_p(R^2)$, $\forall \alpha \in \bar{k}(P)$.

*Inoltre esiste una costante* $C > 0$ *non dipendente da* $u$, *tale che*

$$C^{-1} \| u ; \; K(P, p) \| \leq \sum_{\alpha \in \bar{k}(P)} \| D^\alpha u ; \; L_p(R^2) \| \leq C \| u ; \; K(P, p) \|$$

(b) $C_0^\infty(R^2)$ *è denso in* $K(P, p)$

(c) $K(P, p)$ *è completo rispetto alla norma definita da* (3).

Rinviamo alla fine del presente paragrafo la dimostrazione di questa proposizione.

Dalla (b) segue intanto che $S(R^2)$ è denso in $K(P, p)$. Poichè $K(P, p)$ è completo, e poichè, per $p = 2$, le norme (3) ed (1) sono equivalenti, riuscirà $K(P, 2) = H_P$.

Posto

$$Q(s, \sigma) = (s^{2(n-m)} + \sigma^{2m})(s^{2m} + \sigma^{2(n-m)}),$$

riesce $k(P) \subset k(Q) \subset \bar{k}(P)$, pertanto per la (a), $K(Q, p) = K(P, p)$.

Il polinomio $Q$ è prodotto dai due polinomi quasi-ellittici, ma non è quasi-ellittico essendo $\dfrac{n-m}{m} \neq \dfrac{m}{n-m}$.

Lo spazio $K(Q, p)$ può considerarsi come una generalizzazione dello spazio $W_p^{(r_1, r_2)}(R^2)$, in quanto quest'ultimo coincide con $K(Q_1, p)$, dove $Q_1 = s^{2r_1} + \sigma^{2r_2}$, è un polimonio quasi-ellittico. Se $r_1 = r_2$, $Q_1$ risulta ellittico e le tracce di $K(Q_1, p)$ sono state caratterizzate in termini di classi di BESOV ([1]).

Caratterizzazioni dello stesso tipo, per spazi generalizzanti lo spazio $W_p^{(r_1, r_2)}(R^2)$, sono state date in ([3]).

Nel presente lavoro si dimostra che un risultato analogo vale per lo spazio $K(P, p)$.

Rileviamo infine che le tecniche utilizzate nella presente nota, sono applicabili al caso in cui $Q$ sia il prodotto di un numero finito qualunque di polinomi quasi-ellittici.

*Dimostriamo ora la proposizione I*

(a) $u \in K(P, p) \Rightarrow u \in W_p^{(n, n)}(R^2)$; pertanto esiste una costante $C_1 > 0$, non dipendente da $u$, tale che

$$\| D_x^h u ; \; L_p(R^2) \| \leq C_1 \| u ; \; W_p^{(n, n)}(R^2) \| \leq C_1 \| u ; \; K(P, p) \| \tag{4}$$

$$\forall h \in N, \qquad h \leq n.$$

Allora

$$\| D_x^m u;\ W_p^{(n-m,\, m)}(R^2) \| \leq (C_1 + 1) \| u;\ K(P,\ p) \|;$$

per il teorema 1 di [4], si ha perciò

$$\| D_x^{h'+m} D_y^k u;\ L_p(R^2) \| \leq C_2 \| D_x^m u;\ W_p^{(n-m,\, m)}(R^2) \| \leq C_2(C_1 + 1) \| u;\ K(P,\ p) \|,$$

per ogni coppia di interi non negativi $(h',\ k)$ tali che $\dfrac{h'}{n-m} + \dfrac{k}{m} \leq 1$, ossia $(h' + m) + k\dfrac{n-m}{m} \leq n$ ($C_2$ è una costante che non dipende da $u$).

Ragionando analogamente per $D_y^m u$ e raccogliendo, abbiamo

$$\| D_x^h D_y^k u;\ L_p(R^2) \| \leq C_3 \| u;\ K(P,\ p) \|, \tag{4'}$$

$\forall (h,\ k) \in \bar{k}(P)$ con $h \geq m$ oppure $k \geq m$. D'altra parte, se $(h,\ k) \in \bar{k}(P)$ e $h,\ k < m$ sarà, per (4) e (4')

$$\| D_x^h u;\ W_p^{(m-h,\, m)}(R^2) \| \leq (C_1 + 2C_3) \| u;\ K(P,\ p) \|$$

da cui, per il teorema 1 di [4],

$$\| D_x^h D_y^k u;\ L_p(R^2) \| \leq C_4 \| u;\ K(P,\ p) \|.$$

Questo completa la dimostrazione.

(b) Sia $J_\varepsilon$ l'operatore definito formalmente da

$$(J_\varepsilon u)(z) = \int_{R^2} u(\zeta) j_\varepsilon(z - \zeta) d\zeta, \qquad \varepsilon \in R^+,$$

dove $j_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2} j\left(\dfrac{z}{\varepsilon}\right)$, essendo $j \in C_0^\infty(R^2)$, $j(t) \geq 0$, $\displaystyle\int_{R^2} j(t) dt = 1$.

$J_\varepsilon$ applica $L_p(R^2)$ in $C^\infty(R^2)$, e gode delle seguenti proprietà (vedere ad es. [5], pag. 3):

I) $\| J_\varepsilon u;\ L_p(R^2) \| \leq \| u;\ L_p(R^2) \|$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| J_\varepsilon u - u;\ L_p(R^2) \| = 0$.

II) $D^\alpha J_\varepsilon u = J_\varepsilon D^\alpha u$, $D^\alpha$ essendo intesa nel senso delle distribuzioni.

III) $J_\varepsilon u \in C_0^\infty(R^2)$ se $u \in L_p(R^2)$ è a supporto compatto.

Allora, sia $\{ u_q;\ q \in N \} \subset K(P,\ p)$ una successione fondamentale; ne segue che, per ogni $\alpha \in k(P)$, $\{ D^\alpha u_q;\ q \in N \}$ è fondamentale in $L_p(R^2)$; quindi esiste

$u_\alpha \in L_p(R^2)$ tale che $\lim\limits_{q\to\infty} \| D^\alpha u_q - u_\alpha;\ L_p(R^2)\| = 0$. Di qui, se $\psi \in C_0^\infty(R^2)$, si ha:

$$\int_{R^2} \psi J_\varepsilon D^\alpha u_q d\mu = \int_{R^2} \psi D^\alpha J_\varepsilon u_q d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^2} D^\alpha \psi J_\varepsilon u_q d\mu,$$

da cui, passando al limite per $q \to \infty$ e posto $u = u_{(0,0)}$,

$$\int_{R^2} \psi J_\varepsilon u_\alpha d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^2} D^\alpha \psi J_\varepsilon u d\mu$$

e, per $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{R^2} \psi u_\alpha d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^2} D^\alpha \psi u d\mu.$$

Dunque $D^\alpha u = u_\alpha$, per cui $u \in K(P, p)$ e $\lim\limits_{q\to\infty} \| u_q - u;\ K(P, p)\| = 0$,

(c) Sia $e \in C_0^\infty(R^2)$, $e(z) = 1$ per $\|z;\ R^2\| \leq 1$, $e(z) = 0$ per $\|z;\ R^2\| \geq 2$, $0 \leq e(z) \leq 1$. Poniamo $e^\gamma(z) = D^\gamma e(z)$, $e_q(z) = e(z/q)$, $e_q^\gamma(z) = e^\gamma(z/q)$.

Sia ora $u \in K(P, p)$; la successione $\{u_q = ue_q;\ q \in N\}$ converge ad $u$ nella metrica di $K(P, p)$. Infatti se $\alpha \in k(P)$ si ha, per certe costanti $C^\alpha_{\beta,\gamma}$,

$$\| D^\alpha u_q - D^\alpha u;\ L_p(R^2)\| = \| D^\alpha(u(e_q - 1));\ L_p(R^2)\| \leq$$
$$\leq \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C^\alpha_{\beta,\gamma} \| D^\beta u D^\gamma(e_\gamma - 1);\ L_p(R^2)\|.$$

Ma ora $D^\gamma(e_q - 1) = q^{-|\gamma|} e_q^\gamma$, mentre $(e_q - 1)(z) = 0$ per $\|z;\ R^2\| \leq q$. Per questo e per la (a), possiamo affermare che esiste una costante $C$, per cui riesce:

$$\| D^\alpha u_q - D^\alpha u;\ L_p(R^2)\| \leq Cq^{-1} \| u;\ K(P, p)\| + \left[ \int_{\|z;\ R^2\| \geq q} | D^\alpha u|^p d\mu \right]^{1/p}$$

e quindi $\lim\limits_{q\to\infty} \| D^\alpha u_q - D^\alpha u;\ L_p(R^2)\| = 0$.

Questo prova che $\{u_q;\ q \in N\}$ converge, in $K(P, p)$, alla $u$. D'altra parte, essendo $u_q(z) = 0$ per $\|z;\ R^2\| \geq q$, $J_{1/q} u_q \in C_0^\infty(R^2)$ ed inoltre, $\forall \alpha \in k(P)$, riesce:

$$\| D^\alpha u - D^\alpha J_{1/q} u_q;\ L_p(R^2)\| \leq \| D^\alpha u - J_{1/q} D^\alpha u;\ L_p(R^2)\| +$$
$$+ \| J_{1/q} D^\alpha u - J_{1/q} D^\alpha u_q;\ L_p(R^2)\| \leq \| D^\alpha u - J_{1/q} D^\alpha u;\ L_p(R^2)\| +$$
$$+ \| D^\alpha u - D^\alpha u_q;\ L_p(R^2)\|$$

ciò prova che $\lim\limits_{q\to\infty} J_{\frac{1}{q}} u_q = u$ in $K(P, p)$; quindi $C_0^\infty(R^2)$ è denso in $K(P, p)$.

**2. - Costruzione di una soluzione formale di un certo problema al contorno.**

Consideriamo l'operatore differenziale

$$Q(iD_x,\ iD_y) = [(-1)^m D_x^{2m} + (-1)^{n-m} D_y^{2(n-m)}][(-1)^{n-m} D_x^{2(n-m)} + (-1)^m D_y^{2m}]$$

e costruiamo una soluzione formale $u$ del problema

$$(5) \qquad \begin{aligned} &Q(iD_x,\ iD_y)u(x,\ y) = 0 \quad \text{per} \quad y > 0, \\ &D_y^j u\,|_{y=0} = \varphi_j \quad \text{per} \quad 0 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

L'equazione $Q(s,\ i\lambda) = 0$ ha $2m$ radici del tipo $\lambda_j = b_j\,|s|^{\frac{n-m}{m}}$, dove le $b_j$ sono le radici dell'equazione $b^{2m} = (-1)^{m+1}$, e $2(n-m)$ radici del tipo $\lambda_j = c_j\,|s|^{\frac{m}{n-m}}$ dove le $c_j$ sono le radici dell'equazione $c^{2(n-m)} = (-1)^{n-m+1}$.

Vi sono poi $m$ valori di $j$ per cui $Re(b_j) < 0$ ed altri $m$ per cui $Re(b_j) > 0$; analogamente $Re(c_j) < 0$ per $(n-m)$ valori di $j$ e $Re(c_j) > 0$ per i restanti.

Osserviamo infine che le radici della suddetta equazione sono tutte nulle per $s = 0$ e ve ne sono ancora di multiple al più per $|s| = 1$.

Indichiamo ora con $\lambda_j = \varepsilon_j\,|s|^{\frac{n-m}{m}}$ $1 \leq j \leq m$, $\lambda_j = \varepsilon_j\,|s|^{\frac{m}{n-m}}$ $m+1 \leq j \leq n$, le radici a parte reale negativa dell'equazione $Q(s,\ i\lambda) = 0$.

Con $V(s)$ indichiamo il determinante di VANDERMONDE di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e con $V_j(s,\ y)$ il determinante ottenuto da $V(s)$ sostituendo in esso la riga di posto $j+1$ con $(\exp \lambda_1 y, \ldots, \exp \lambda_n y)$. La funzione

$$(6) \qquad u(x,\ y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_R e^{-isx} \tilde{\varphi}_j(s) \frac{V_j(s,\ y)}{V(s)}\, ds$$

è soluzione formale del problema (5). In maniera ancora formale, da (6) si ottiene:

$$(6') \qquad u(x,\ y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} G_j(x,\ y) * \varphi_j(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} u_j(x,\ y),$$

dove il simbolo $*$ indica la convoluzione, e dove si è posto

$$(7) \qquad G_j(x,\ y) = \int_R e^{-isx} \frac{V_j(s,\ y)}{V(s)}\, ds.$$

Derivando formalmente il nucleo (7), si ottiene

$$(8) \qquad D_x^h D_y^k G_j(x,\ y) = \int_R e^{-isx} \frac{V_{jk}(s,\ y)}{V(s)} (-is)^h\, ds$$

essendo $V_{jk}$ il determinante che si ottiene da $V(s)$ sostituendo alla riga $j+1$-esima la riga $(\lambda_1^k \exp \lambda_1 y, \ldots, \lambda_n^k \exp \lambda_n y)$.

Fissati $x \in R$, $y \in R^+$, l'integrale che figura nella (8) è assolutamente convergente per ogni coppia di interi non negativi $(h, k)$; pertanto la (7) ha un senso non solo formale e, di più, $G_j \in C^\infty(R_y^+)$.

## 3. - Valutazione dei nuclei $G_j$ e delle loro derivate per $0 < y \leq 1$.

Premettiamo alcuni lemmi

LEMMA 1. - *Sia data una funzione* $\varphi : R \longrightarrow C$ *tale che, per un* $\alpha \in R$, $0 \leq \alpha < 1$, *verifichi le seguenti ipotesi:*

(a) $\displaystyle\int_R \frac{\varphi(\sigma)}{1+|\sigma|^\alpha} d\sigma < +\infty$;

(b) $\varphi \in C^2(R - \{0\})$;

(c) $|D_\sigma^l \varphi(\sigma)| \leq M |\sigma|^{-l}$ *per* $l \in Z$, $0 \leq l \leq 2$; $M \in R^+$.

*Allora:*

$$\left| \int_R e^{-it} \frac{\varphi(t/z)}{|t|^\alpha} dt \right| \leq C_\alpha M \qquad \forall z \in R, \ z \neq 0,$$

*essendo* $C_\alpha$ *una costante che dipende solo da* $\alpha$.

DIMOSTRAZIONE.

$$\int_R e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha} dt = \left( \int_{|t|\leq 1} + \int_{|t|>1} \right) e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha} dt.$$

Ora

$$\left| \int_{|t|\leq 1} e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha}\, dt \right| \leq 2M \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{2M}{1-\alpha}.$$

D'altra parte

$$\left| \int_{|t|\geq 1} e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha} dt \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_{1\leq|t|\leq n} e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha}\, dt \right|.$$

È

$$I_n^+ = \int_1^n e^{-it}\varphi(t/z)t^{-\alpha}dt = -\int_1^n \varphi(t/z)t^{-\alpha}D^2e^{-it}dt =$$

$$= [e^{-it}D_t(\varphi(t/z)t^{-\alpha}) - D_te^{-it}\varphi(t/z)t^{-\alpha}]_1^n - \int_1^n D_t^2\left(\frac{\varphi(t/z)}{t^\alpha}\right)e^{-it}dt.$$

Onde, posto $\varphi^{(l)}(\tau) = D_\tau^l\varphi(\tau)$

$$|I_n^+| \leq 4\left\{M + \sum_{l=0}^{2} z^{-l}\int_1^n |\varphi^{(l)}(t/z)t^{-\alpha-2+l}dt\right\} \leq 4M\left\{1 + 3\int_1^n t^{-\alpha-2}dt\right\} \leq 16M.$$

Analogamente

$$|I_n^-| = \left|\int_{-n}^{1} e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha}\,dt\right| \leq 16M.$$

Raccogliendo

$$\left|\int_{|t|\geq 1} e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^{-\alpha}\,dt\right| \leq 32M.$$

Questo completa la dimostrazione.

COROLLARIO. - *Sia* $\Phi : R \longrightarrow C$ *tale che, per* $\alpha \in R$, $-1 < \alpha \leq 0$, *riesca:*

I) $\Phi \in L_1(R)$, $\|\Phi;\ L_1(R)\| \leq M$.

II) $\varphi(\sigma) = |\sigma|^{-\alpha}\,\Phi(\sigma) \Rightarrow |\varphi(\sigma)| \leq M$, $\varphi \in C^2(R - \{0\})$.

III) $|D_\sigma^l\varphi(\sigma)| \leq M\,|\sigma|^{-l}$, $0 \leq l \leq 2$.

*Allora*

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq C_\alpha M\,\frac{1}{(1+|z|)^{1+\alpha}} \qquad \forall z \in R$$

*essendo* $C_\alpha$ *una costante che dipende solo da* $\alpha$.

DIMOSTRAZIONE. - Supposto $z > 0$ e posto $\sigma z = t$,

$$\widehat{\Phi}(z) = \int_R e^{-i\sigma z}\,|\sigma|^\alpha\,\varphi(\sigma)d\sigma = z^{-1-\alpha}\int_R e^{-it}\varphi(t/z)\,|t|^\alpha\,dt,$$

onde, per il lemma 1

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq C^1_{\alpha}, \quad M\,|z|^{-1-\alpha},$$

che vale ovviamente anche per $z < 0$. D'altra parte $|\widehat{\Phi}(z)| \leq \|\Phi;\ L_1(R)\| \leq M$ e quindi

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq C_\alpha M \frac{1}{(1+|z|)^{1+\alpha}}.$$

LEMMA 2. - *Sia* $\Phi : R \to C$ *e, per un* $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, *poniamo* $\varphi(\sigma) = |\sigma|^{-\alpha}\Phi(\sigma)$ *e* $\varphi_l(\sigma) = \sigma^l D^l\varphi(\sigma)$. *Se sono soddisfatte le seguenti ipotesi*

I) $\Phi \in L_1(R)$, $\|\Phi;\ L_1(R)\| \leq M$.

II) $\varphi \in C^{[\alpha]+3}(R - \{0\})$, $|D^l_\sigma\varphi(\sigma)| \leq M\,|\sigma|^{-l}$ $0 \leq l \leq [\alpha]+3$.

III) $\varphi_l \in L_1(R)$ *per* $0 \leq l \leq [\alpha]+1$.

*Allora*

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq C_\alpha M \frac{1}{(1+|z|)^{1+\alpha}} \qquad \forall z \in R, \tag{9}$$

*dove* $C_\alpha$ *dipende solo da* $\alpha$ $([\alpha] = \max\{l;\ l \in Z,\ l < \alpha\})$.

DIMOSTRAZIONE. - Per $\sigma \neq 0$ riesce

$$D^{[\alpha]+1}_\sigma(|\sigma|^\alpha\,\varphi(\sigma)) = \sum_{l=0}^{[\alpha]+1} C_{\alpha,\,l} D^l_\sigma\varphi(\sigma)\,|\sigma|^{l+\alpha-[\alpha]-1}\,(\operatorname{seg}\sigma),$$

essendo $C_{\alpha,\,l}$ opportune costanti e $\operatorname{seg}\sigma = \dfrac{\sigma}{|\sigma|}$ per $\sigma \neq 0$, $\operatorname{seg}\sigma = 1$ per $\sigma = 0$.

Allora $|D^{[\alpha]+1}_\sigma\Phi(\sigma)| \leq \left(\sum_{l=0}^{[\alpha]+1} C_{\alpha l}\cdot M\right)|\sigma|^{\alpha-[\alpha]-1}$ ed inoltre $D^{[\alpha]+1}_\sigma\Phi(\sigma) = \sum_{l=0}^{[\alpha]+1} C_{\alpha l}\varphi_l(\sigma)\cdot$ $\cdot\,|\sigma|^{\alpha-[\alpha]-1}\operatorname{seg}\sigma$; queste due relazioni ci assicurano, unitamente alla I), che $\Phi \in W^{[\alpha]+1}_1(R)$. Allora $\lim_{|\sigma|\to\infty} D^l\Phi(\sigma) = 0$ per $0 \leq l \leq [\alpha]$. Supposto $z > 0$ ed integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(z) &= \left(\frac{-i}{z}\right)^{[\alpha]+1}\int_R e^{-i\sigma z} D^{[\alpha]+1}_\sigma\Phi(\sigma)d\sigma = \\
&= \left(\frac{-i}{z}\right)^{[\alpha]+1}\sum_{l=0}^{[\alpha]+1} C_{\alpha l}\int_R e^{-i\sigma z} D^l_\sigma\varphi(\sigma)\,|\sigma|^{l+\alpha-[\alpha]-1}\operatorname{seg}\sigma\,d\sigma = \\
&= \left(\frac{-i}{z}\right)^{[\alpha]+1}\sum_{l=0}^{[\alpha]+1} C_{\alpha l}\int_R e^{-i\sigma z}\varphi_l(\sigma)\,|\sigma|^{\alpha-[\alpha]-1}\operatorname{seg}\sigma\,d\sigma = \\
&= \sum_{l=0}^{[\alpha]+1}\frac{(-i)^{[\alpha]+1}}{z^{1+\alpha}}\int_R e^{-it}\varphi_l(t/z)\,|t|^{\alpha-[\alpha]-1}\operatorname{seg}\sigma\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Ma ora $0 \leq [\alpha] + 1 - \alpha < 1$, $(\text{seg}\,\sigma)\varphi_l \in L_1(R)$, $(\text{seg}\,\sigma)\varphi_l \in C^{[\alpha]+3-l}(R - \{0\} \subseteq C^2(R - \{0\})$, ed infine $|D^{l_1}\varphi_l(\sigma)| = |D^{l_1}\sigma^l D^l\varphi(\sigma)| \leq C'_\alpha M |\sigma|^{-l_1}$, $0 \leq l_1 \leq 2$ ($C'_\alpha$ è una costante che dipende solo da $\alpha$). Per il lemma 1 riesce allora

$$|\widehat{\Phi}(z)| \leq C''_\alpha M |z|^{-1-\alpha}, \tag{9'}$$

che vale ovviamente anche per $z < 0$.

D'altronde $|\widehat{\Phi}(z)| \leq \|\Phi;\ L_1(R)\|$, è ciò, unitamente alla (9') prova la (9).

Osserviamo che per $-1 < \alpha \leq 0$, le ipotesi per cui vale il lemma 2 coincidono formalmente con quelle del corollario del lemma 1.

Esaminiamo ora

$$D_x^h D_y^k G_j(x,\ y) = \int_R e^{-isx}(-\,is)^h \frac{V_{jk}(s,\ y)}{V(s)}\, ds.$$

Posto

$$s = \sigma y^{-\alpha_1}, \qquad z = xy^{-\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{n-m}{m} = \alpha_2^{-1}, \qquad \delta = \alpha_2 - \alpha_1 \tag{10}$$

e

$$\mu_l = \begin{cases} \varepsilon_l |\sigma|^{\alpha_1} y^{\delta\alpha_1} & \text{per } 1 \leq l \leq m \\ \varepsilon_l |\sigma|^{\alpha_2} & \text{per } m+1 \leq l \leq n \end{cases}, \tag{11}$$

si ha

$$D_x^h D_y^k G_j(x,\ y) = y^{-(h+1)\alpha_1 - k + j} \int_R e^{-i\sigma z}(-\,i\sigma)^h \frac{V_{jk}(\mu)}{V(\mu)}\, d\sigma;$$

$V(\mu)$ è il determinante di VANDERMONDE di $\mu_1, \ldots, \mu_n$ e $V_{jk}(\mu)$ si ottiene da questi sostituendo la riga $(\mu_1^j, \ldots, \mu_n^j)$ con $(\mu_1^k \exp \mu_1, \ldots, \mu_n^k \exp \mu_n)$.

Sia ora $e \in C_0^\infty(R)$, $e(\sigma) = 1$ per $|\sigma| \leq 2$, $e(\sigma) = 0$ per $|\sigma| \geq 3$, $0 \leq e(\sigma) \leq 1$, $e(\sigma) = e(-\,\sigma)$.

$$D_x^h D_y^k G_j(x,\ y) = y^{-(h+1)\alpha_1 - k + j}\left[\int_R e^{-i\sigma z} e(\sigma)(-\,i\sigma)^h \frac{V_{jk}(\mu)}{V(\mu)}\, d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_R e^{-i\sigma z}(1 - e(\sigma))(-\,i\sigma)^h \frac{V_{jk}(\mu)}{V(\mu)}\, d\sigma\right] = y^{-(h+1)\alpha_1 - k + j}[M(x,\ y) + N(x,\ y)].$$

Consideriamo dapprima il nucleo $M$. Sviluppando gli esponenziali che figurano in $V_{jk}(\mu)$, si ottiene

$$\frac{V_{jk}}{V} = \frac{\theta(j-k)}{(j-k)!} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{\mathfrak{V}_{jr}(\mu)}{V(\mu)} \frac{1}{(r-k)!}.$$

$\theta(t) = 0$ per $t < 0$, $\theta(t) = 1$ per $t \geq 0$; $\mathcal{V}_{jr}$ si ottiene da $V$ sostituendo la riga di posto $j+1$ con $(\mu_1^r, \ldots, \mu_n^r)$. Il determinante $\mathcal{V}_{jr}$ è divisibile per tutte le differenze a due a due delle $\mu_l$ e, pertanto, sarà divisibile per $V(\mu)$; poniamo allora

$$\mathcal{L}_{jr}(\mu) = \frac{\mathcal{V}_{jr}(\mu)}{V(\mu)}.$$

Evidentemente $\mathcal{L}_{jr}$ sarà una funzione omogenea delle $\mu_l$ e precisamente

$$\mathcal{L}_{jr}(\mu) = (-1)^{n-1-j} \sum_{l=0}^{j} \mu_{n-l} S_{n-1-j}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-1}) L^{r-n}(\mu_1, \ldots, \mu_{n-l}), \tag{12}$$

essendo $S_{n-1-j}$ la somma dei prodotti ad $n-1-j$ ad $n-1-j$ delle quantità indicate, $S_0 = 1$ e $L^{r-n}(\mu_1, \ldots, \mu_i) = \sum_{|\alpha|=r-n} \mu^\alpha$, $\mu^\alpha = \mu_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \mu_i^{\alpha_i}$ (¹).

Ricordando la struttura delle $\mu_l$, con calcoli elementari si prova che, per certe costanti $C_{jrqt}$, riesce:

$$\mathcal{L}_{jr}(\mu) = \sum_{q=q_0}^{q_1} \sum_{t=0}^{r-n} C_{jrqt} |\sigma|^{(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta} y^{(q+t)\delta\alpha_1}; \tag{13}$$

$$q_0 = \max(0, m-j), \qquad q_1 = \min(m, n-j), \tag{13'}$$

mentre per $|\sigma| \leq A$ $(A \in R^+)$, $0 < y \leq 1$,

$$\sum_{l=0}^{j} |\mu_{n-l}| S_{n-1-j}(|\mu_1|, \ldots, |\mu_{n-l}|) \leq C_A y^{q_0\delta\alpha_1} \tag{14}$$

Ora fissato $r_0$ in modo opportuno $((r_0 - n)\alpha_1 - (n-j)\alpha_2 + q_0\delta > 0)$, si ha

$$\begin{aligned} M(x, y) = &\int_R e^{-i\sigma x} e(\sigma)(-i\sigma)^h \frac{\theta(j-k)}{(j-k)!} d\sigma + \sum_{r=n}^{r_0} \sum_{q=q_0}^{q_1} \sum_{t=0}^{r-n} C_{jrqt} y^{(q+t)\delta\alpha_1} \cdot \\ &\cdot \int_R e^{-i\sigma x} e(\sigma)(-i\sigma)^h |\sigma|^{(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta} d\sigma + \\ &+ \int_R \left( \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{jr}(\mu)}{(r-k)!} \right) e(\sigma)(-i\sigma)^h e^{-i\sigma x} d\sigma = (M_0 + \Sigma M_{jrqt} + M_{r_0})(x, y). \end{aligned} \tag{15}$$

(¹) La (12) è classica; vedere, ad esempio, il capitolo 33 della monografia di E. PASCAL «*I determinanti*» (Hoepli, Milano, 1897) ed i lavori relativi ivi citati.

Ma $M_0(x, y) = \dfrac{\theta(j-k)}{(j-k)!}\widehat{(e(\sigma)(-i\sigma)^h)}$ e poichè $e \in C_0^\infty(R)$, riesce

$$|M_0(x, y)| \leq C_{l,h}\theta(j-k)\frac{1}{(1+|z|)^l} \qquad \forall l \in R,\ z = xy^{-\alpha_1}, \tag{16}$$

essendo $C_{l,h}$ una costante che dipende solo dalle variabili indicate.

Inoltre, posto $\Phi(\sigma) = |\sigma|^{(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta+h}\operatorname{seg}(\sigma^h)e(\sigma)$, è

$$M_{jrqt}(x, y) = (-i)^h C_{jrqt}y^{(q+t)\delta\alpha_1}\widehat{\Phi}(z)$$

e quindi, per il lemma 2,

$$|M_{jrqt}(x, y)| \leq B_r\frac{y^{(q+t)\delta\alpha_1}}{(1+|z|)^{1+h+(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta}}, \qquad z = xy^{-\alpha_1}. \tag{17}$$

Resta infine da valutare $M_{r_0}$.

Poniamo

$$\psi(\sigma) = \left(\sum_{r=r_0+1}^{\infty}\frac{\mathcal{L}_{jr}(\mu)}{(r-k)!}\right)e(\sigma)(-i\sigma)^h = \psi_1(\sigma)e(\sigma)(-i\sigma)^h,$$

e mostriamo che $\psi$ verifica le ipotesi del lemma 2, con $\alpha = h + (n-j)\alpha_2 - q_0\delta$.

Se $l \in Z$, $l \geq 0$, $\sigma \neq 0$, dalla (13) si trae

$$|D_\sigma^l\mathcal{L}_{jr}(\mu)| \leq \frac{(mr)!}{(mr-l)!}|\sigma|^{-l}\Sigma|C_{jrqt}||\sigma|^{(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta}y^{(q+t)\delta\alpha_1} \leq$$

$$\leq \frac{(mr)!}{(mr-l)!}|\sigma|^{-l}\mathcal{L}_{jr}(|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|),$$

da cui, per $|\sigma| \leq A$, per la (12) e per la (14)

$$|D_\sigma^l\mathcal{L}_{jr}(\mu)| \leq C_A y^{q_0\delta\alpha_1}\frac{(mr)!}{(mr-l)!}\sum_{l=0}^{j}L^{r-n}(|\mu_1|, \ldots, |\mu_{n-l-1})|\sigma|^{-l} \leq$$

$$\leq C_A y^{q_0\delta\alpha_1}\frac{(mr)!}{(mr-l)!}n(|\mu_1| + \ldots + |\mu_n|)^{r-n}|\sigma|^{-l} \leq$$

$$\leq nC_A y^{q_0\delta\alpha_1}\frac{(mr)!}{(mr-l)!}|\sigma|^{(r-n)\alpha_1-l}(|\nu_1| + \ldots + |\nu_n|^{r-n},$$

essendo $\nu_l = \mu_l|\sigma|^{-\alpha_1}$.

Queste maggiorazioni provano che la serie $\psi_1$, su ogni intervallo compatto di $R - \{0\}$, è derivabile termine a termine infinite volte, ed inoltre, per $|\sigma| \leq 3$

$$|D_\sigma^l\psi_1(\sigma)| \leq C_l' y^{q_0\delta\alpha_1}|\sigma|^{(r_0-n)\alpha_1-l} \qquad \forall l \in Z,\ l \geq 0; \tag{18}$$

allora, posto $\alpha = (n-j)\alpha_2 - q_0\delta + h$, $F(\sigma) = |\sigma|^{-\alpha}\psi(\sigma)$, $F_l(\sigma) = \sigma^l D_\sigma^l F(\sigma)$, riesce

I) $\psi \in L_1(R)$ e $\|\psi;\ L_1(R)\| \leq C' y^{q_0\delta\alpha_1}$.

II) $F \in C^\infty(R - \{0\})$ ed inoltre, per la (18),

$$|D_\sigma^l F(\sigma)| = \left|\sum_{a+b=0}^{l} C_{a,b}\, |\sigma|^{-(n-j)\alpha_2+q_0\delta-a} D_\sigma^b \psi_1(\sigma) D^{l-(a+b)} e(\sigma)\right| \leq$$

$$\leq C_l'' y^{q_0\delta\alpha_1} |\sigma|^{-(n-j)\alpha_2+q_0\delta-l+(r_0-n)\alpha_1} e(\sigma) \leq$$

$$\leq C_l''' y^{q_0\delta\alpha_1} |\sigma|^{-l} e(\sigma).$$

III) $F_l \in L_1(R)$ $\forall l \in Z$, $l \geq 0$ in quanto $F_l \in C^\infty(R - \{0\})$ e $|F_l(\sigma)| \leq C_l'' e(\sigma)$.

Per il lemma 2 riesce perciò

$$|Mr_0(x,\ y)| \leq C r_0 \frac{y^{q_0\delta\alpha_1}}{(1+|z|)^{1+h+(n-j)\alpha_2-q_0\delta}}, \qquad z = xy^{-\alpha_1}. \tag{19}$$

Valutiamo ora il nucleo $N$. Sviluppando il determinante $V_{jk}(\mu)$ secondo i termini della riga di posto $j+1$, ed indicando con $v_{jr}$ il complemento algebrico di $\mu_r^k \exp(\mu_r)$, si ottiene

$$N(x,\ y) = \sum_{r=1}^{n} \int_R e^{-i\sigma z}(1 - e(\sigma))(-i\sigma)^h \mu_r^k \exp(\mu_r) \frac{v_{jr}}{V(\mu)}\, d\sigma.$$

Ma ora

$$v_{jr} = \pm S_{n-1-j}(\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_n) V(\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_n),$$

onde

$$\frac{v_{jr}}{V(\mu)} = \pm \frac{S_{n-1-1}(\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_n)}{\prod\limits_{l=1,\, l\neq r}^{n} (\mu_l - \mu_r)}.$$

Ricordando le espressioni delle $\mu_l$, con calcoli elementari si ottiene (per certe costanti $C_{qr}$, $a_l$ e $b_l$, $|a_l| = |b_l| = 1$)

$$N(x,\ y) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{q=q_0'}^{q_1'} y^{(q-m+1+k)\delta\alpha_1} \int_R e^{-i\sigma z}(-i\sigma)^h (1 - e(\sigma)) \exp(\varepsilon_r |\sigma|^{\alpha_1} y^{\delta\alpha_1}) \cdot$$

$$\cdot g_1(\sigma,\ y^{\alpha_1}) |\sigma|^{(k-j)\alpha_2-(q-m+1+k)\delta} d\sigma + \sum_{r=m+1}^{n} \sum_{q=q_0}^{q_1''} y^{q\delta\alpha_1} \int_R e^{-i\sigma z}(-i\sigma)^h (1 - e(\sigma)) \exp(\varepsilon_r |\sigma|^{\alpha_2}) \cdot$$

$$\cdot g_2(\sigma,\ y^{\alpha_1}) |\sigma|^{(k-j)\alpha_2-q\delta} = N_1(x,\ y) + N_2(x,\ y),$$

dove

$$g_1(\sigma,\ y^{\alpha_1}) = |\sigma|^{(n-m)\delta}\left[\prod_1^{n-m}(y^{\delta\alpha_1} + a_l|\sigma|^\delta)\right]^{-1},$$

mentre $g_2$ si ottiene da $g_1$ sostituendo $n-m$ con $m$ ed $a_l$ con $b_l$; inoltre

$$q_0' = \max(0,\ m-1-j), \qquad q_1' = \min(m-1,\ n-1-j), \qquad q_1'' = \min(m,\ n-1-j). \tag{21}$$

Gli integrali che compaiono in $N_2$, si valutano immediatamente; indicando infatti con $e^{-i\sigma z}\psi_{qr}(\sigma, y)$ le funzioni integrande, si ha che $\psi_{qr}$ verifica le ipotesi richieste dal lemma 2, $\forall \alpha \in R^+$ (si osservi che $\psi_{qr} = 0$ per $|\sigma| \leq 2$).

Allora

$$|N_2(x,\ y)| \leq C_l' \sum_{q=q_0}^{q_1''} \frac{y^{q\delta\alpha_1}}{(1+|z|)^l}, \qquad \forall l \in N,$$

da cui $(0 < y \leq 1)$

$$|N_2(x,\ y)| \leq C_l \frac{y^{q_0\delta\alpha_1}}{(1+|z|)^l}, \qquad \forall l \in N;\ z = xy^{-\alpha_1}. \tag{22}$$

Restano infine da valutare gli integrali che figurano in $N_1$. Indichiamo

$$N_1(x,\ y) = \sum_r \sum_q y^{(q-m+1+k)\delta\alpha_1} I_{\beta(q)},$$

$$\beta(q) = h + (k-j)\alpha_2 - (q-m+1+k)\delta.$$

Se indichiamo poi con $\psi_{qr}(\sigma, y)e^{-i\sigma z}$ le funzioni integrande, riesce

$$|D_\sigma^l \psi_{qr}(\sigma,\ y)| \leq C_l'(1+|\sigma|)^{\beta(q)-l}, \qquad \forall l \in N. \tag{23}$$

Scegliamo ora un numero naturale $l$, tale che $\beta(q) - l < -1$, ed eseguiamo in $I_{\beta(q)}$, $l$ integrazioni per parti, supponendo $z \neq 0$.

$$|I_{\beta(q)}| = |z|^{-l}\left|\int_R e^{-i\sigma z} D_\sigma^l \psi_{qr}(\sigma,\ y)\, d\sigma\right| \leq C_l''|z|^{-l}, \tag{24}$$

che, per $|z| \geq 1$, si può ovviamente ritenere vera per ogni $l \in R^+$.

D'altra parte, se $\beta(q) < -1$

$$|I_{\beta(q)}| \leq \|\psi_{qr}(\cdot,\ y);\ L_1(R)\| \leq C_{\beta(q)}. \tag{25}$$

Se invece $\beta(q) = -1$, si ha

$$|I_{-1}| \leq 2 \int_1^{+\infty} \sigma^{-1} |\exp(\varepsilon_r \sigma^{\alpha_1} y^{\delta\alpha_1})| \, d\sigma =$$

$$= 2 \int_{y^\delta}^{+\infty} t^{-1} |\exp(\varepsilon_r t^{\alpha_1})| \, dt \leq C_1' \{1 + |\lg y^\delta|\}.$$

D'altra parte, posto, per $z > 0$, $\psi(t, y, z) = (1 - e(t/z)) \exp(\varepsilon_r |t|^{\alpha_1} y^{\delta\alpha_1}/z^{\alpha_1}) \operatorname{seg}(\sigma^h) \cdot$ $\cdot\, g_1(t, yz^{1/\alpha_1}) |t|^{-1}$, ed osservato che $(1 - e(t/z)) = 0$ per $|t| \leq |z|$, riesce

$$I_{-1} = \int_{|t| \geq z} e^{-it} \psi(t, y, z) dt,$$

da cui, osservato che $|D_t^i \psi| \leq C_1'' t^{-1-i}$ per $i = 0, 1$, e $\min(z, 1) \geq \dfrac{z}{1+z}$,

$$|I_{-1}| \leq \left| \int_{\min(z,1) \leq |t| \leq 1} [\cdot] dt \right| + \left| \int_{|t| \geq 1} [\cdot] dt \right| \leq$$

$$\leq C_1'' \left\{ \int_{z/(1+z)}^1 t^{-1} dt + |\psi(1, z, y)| + \int_{|t| \geq 1} |D_t \psi(t, z, y)| \, dt \right\} \leq C_1''' \left\{ 1 + \left| \lg \frac{z}{1+z} \right| \right\}.$$

Perciò, qualunque sia $z$,

$$|I_{-1}| \leq C_1 \left\{ 1 + \left| \lg\left( y^\delta + \frac{|z|}{1+|z|} \right) \right| \right\}. \tag{26}$$

Se, infine, $\beta(q) > -1$, posto $\sigma y^\delta = s$, $z_1 = z/y^\delta$, $\psi(\sigma, y) = (1 - e(s/y^\delta)) \exp(\varepsilon_r |s|^{\alpha_1}) \cdot$ $\cdot\, g_1(s, y^{\alpha_2/\alpha_1}) |s|^{\beta(q)} \operatorname{seg}(\sigma^h)$, si ha

$$I_{\beta(q)} = y^{-(\beta(q)+1)\delta} \int_R e^{-isz_1} \psi(s, y) ds,$$

e $\psi$, per ogni $y$ fissata, verifica le ipotesi del lemma 2 con $\alpha = \beta(q)$.
Infatti

I) $\|\psi(\cdot, y); L_1(R)\| \leq C'_{\beta(q)}$, dove $C'_{\beta(q)}$ dipende solo da $\beta(q)$ in quanto $Re(\varepsilon_r) < 0$ e $\beta(q) > -1$.

II) Se $F(s, y) = |s|^{-\beta(q)} \psi(s, y)$, si ha che $F \in C^\infty(R)$ e che

$$|D_s^l F(s, y)| \leq C_l (1 + |s|)^{l\alpha_1} \exp(\varepsilon_r |s|^{\alpha_1}) |s|^{-l}, \qquad \forall l \in N$$

e quindi

$$(27)\qquad |D_s^l F(s,\ y)| \leq C_l' \, |s|^{-l}, \qquad \forall l \in N.$$

III) Se $F_l(s,\ y) = s^l D_s^l F(s,\ y)$, dalla (27) scende immediatamente che $F_l(\cdot,\ y) \in L_1(R)$. Allora

$$|I_{\beta(q)}| \leq C_{\beta(q)} \frac{y^{-(1+\beta(q))\delta}}{(1+|z_1|)^{1+\beta(q)}} \qquad z_1 = xy^{-\alpha_2}.$$

Raccogliendo, per le (25), (26), (28), (24), riesce

$$|I_{\beta(q)}| \leq C_{l,\beta(q)} \frac{K_{\beta(q)}}{(1+|z|)^l}, \qquad \forall l \in N,$$

essendo

$$(29)\qquad K_{\beta(q)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta(q) < -1 \\ 1 + \left|\lg\left(y^\delta + \dfrac{|z|}{1+|z|}\right)\right| & \text{se } \beta(q) = -1 \\ (y^\delta + |z|)^{-(1+\beta(q))} & \text{se } \beta(q) > -1. \end{cases}$$

In definitiva

$$|N_1(x,\ y)| \leq C_{hkl}' \sum_{q=q_0'}^{q_1'} y^{(q-m+1+k)\delta\alpha_1} \frac{K_{\beta(q)}}{(1+|z|)^l}, \qquad \forall l \in N.$$

Ma, per $(y^\delta + |z|) \leq 1$, se $\beta' \leq \beta''$, $K_{\beta'} \leq (\text{cost.}) K_{\beta''}$; d'altra parte, per $(y^\delta + |z|) \geq 1$, $K_\beta \leq$ cost., perciò osservato che $\beta(q)$ è crescente con $q$, sarà

$$(30)\qquad |N_1(x,\ y)| \leq C_{hkl} \frac{y^{(q_0'-m+1+k)\delta\alpha_1}}{(1+|z|)^l} K_{\beta(q_0')}, \qquad \forall l \in N,$$

$$\beta(q_0') = h + (k-j)\alpha_2 - (q_0' - m + 1 + k)\delta, \qquad z = xy^{-\alpha_1}.$$

Riassumendo

$$D_x^h D_y^k G_j(x,\ y) =$$

$$(31)\qquad = y^{-(h+1)\alpha_1+j-k} \left\{ M_0(x,\ y) + \sum_{r=n}^{r_0} \sum_{q=q_0}^{q_1} \sum_{t=0}^{r-n} M_{jrqt}(x,\ y) + M_{r_0}(x,\ y) + N_2(x,\ y) \right\} +$$

$$+ \, y^{-(h+1)\alpha_1+j-k} N_1(x,\ y).$$

I nuclei $M$ sono definiti dalla (15), mentre gli $N$ dalla (20).

Le (16), (17), (19), (22), (30), forniscono valutazioni dei nuclei indicati; per le notazioni usate vedere poi le (10), (11), (13'), (21), (29).

4. - **Tracce dello spazio $K(P, p)$**

Posto $\Omega = R \times \{y;\ y \in R,\ 0 < y \leq 1\}$ ed

$$\omega(j) = n - \left(j + \frac{1}{p}\right)\frac{n-m}{m} \qquad \text{per } 0 \leq j \leq m-1,$$

$$\omega(j) = \left(n - j - \frac{1}{p}\right)\frac{m}{n-m} \qquad \text{per } m \leq j \leq n-1,$$

valgono i seguenti teoremi

TEOREMA 1. - *Se $u$ è la funzione definita da (6′), se $\varphi_j \in S(R)$, $0 \leq j \leq n-1$, esiste una costante $C_1$ non dipendente dalle $\varphi_j$, per cui*

$$\sum_{\alpha \in \bar{K}(P)} \| D^\alpha u;\ L_p(\Omega) \| \leq C_1 \sum_{j=0}^{n-1} \| \varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R) \|.$$

TEOREMA 2. - *Se $u \in S(R^2)$, posto $\varphi_j(x) = D_y^j u(x, 0)$, $0 \leq j \leq n-1$, esiste una costante $C_2$ non dipendente da $u$ tale che*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| \varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R) \| \leq C_2 \| u;\ K(P, p) \|.$$

Rinviamo la dimostrazione di questi teoremi alla fine del presente paragrafo. Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA 3. - *L'applicazione $T : S(R^2) \longrightarrow S^n(R)$ definita da*

$$T(u) = (u|_{y=0}, \ldots, D_y^{n-1} u|_{y=0}),$$

*si prolunga con continuità, in un omomorfismo di $K(P, p)$ su $\prod_{j=0}^{n-1} B_p^{\omega(j)}(R)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Dal teorema 2 scende immediatamente che $T$ è continua se si prende su $S(R^2)$ ed $S^n(R)$ rispettivamente, la relativizzazione della topologia di $K(P, p)$ e di $\prod_{j=0}^{n-1} B_p^{\omega(j)}(R)$.

Sia ora $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) \in S^n(R)$, ed indichiamo con $u$ la funzione definita da (6′) (o da (6); in queste ipotesi le due coincidono); allora $u \in C^\infty(\bar{R}_y^+)$ e prolungando la $u$ ponendo

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{2m} \nu_l u(x, -ly) \qquad \text{per } y < 0$$

essendo

$$\sum_{l=0}^{2m} \nu_l(-l)^j = 0, \qquad 0 \leq j \leq 2m,$$

riesce $u \in C^{2m}(R^2)$. Sia ora $e \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq e(y) \leq 1$, $e(y) = 1$ per $|y| \leq \frac{1}{2}$, $e(y) = 0$ per $|y| \geq 1$, e poniamo $u^*(x, y) = u(x, y)e(y)$. Evidentemente $u^* \in C^{2m}(R^2)$, $D_y^j u^*|_{y=0} = \varphi_j$, $0 \leq j \leq n-1$, e, per il teorema 1

$$\| u^*;\ K(P,\ p) \| \leq C_1' \sum_{j=0}^{n-1} \| \varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R) \|.$$

Ciò completa la dimostrazione in quanto $S(R)$ è denso in $B_p^r(R)$, $\forall r \in R^+$. Mostriamo ora alcuni lemmi

LEMMA 3. - *Siano $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, numeri reali positivi con $\alpha\beta = 1$; sia $p \in R$, $p > 1$. Poniamo, per $x$, $y > 0$,*

$$T(x,\ y^\alpha) = x^{1/p+\gamma}[(y^\alpha + x)]^{-\left(\frac{1}{p}\beta+1+\gamma\right)},$$

$$T_1(x,\ y^\alpha) = (y^\alpha + x)^{-1},$$

$$T_2(x,\ y^\alpha) = (y^\alpha + x^{1+\frac{1}{p}(\beta-1)}y^{\alpha\frac{1-\beta}{p}})^{-1}.$$

*Allora*

$$T(x,\ y^\alpha) \leq \begin{cases} y^{\frac{\alpha-1}{p}} T_1(x,\ y^\alpha) & \text{se } \alpha \leq 1, \\ 2y^{\frac{\alpha-1}{p}} T_2(x,\ y^\alpha) & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. - Se $\alpha \leq 1$ si ha

$$T(x,\ y^\alpha) \leq y^{-\alpha+\frac{\alpha-1}{p}}\left(1 + \frac{x}{y^\alpha}\right)^{-1-\frac{\beta-1}{p}} \leq y^{\frac{\alpha-1}{p}}(y^\alpha + x)^{-1} = y^{\frac{\alpha-1}{p}} T_1(x,\ y^\alpha)$$

mentre per $\alpha \geq 1$

$$T(x,\ y^\alpha) \leq y^{-\alpha+\frac{\alpha-1}{p}}\left(1 + \frac{x}{y^\alpha}\right)^{-\left(1+\frac{\beta-1}{p}\right)} \leq 2y^{-\alpha+\frac{\alpha-1}{p}}\left[1 + \left(\frac{x}{y^\alpha}\right)^{1+\frac{\beta-1}{p}}\right]^{-1} = 2y^{\frac{\alpha-1}{p}} T_2(x,\ y^\alpha).$$

LEMMA. - *Se $1 < p < \infty$, la trasformazione definita formalmente come segue*

$$T(f)(y) = \int_{R^+} T(x,\ y^\alpha) f(x) dx,$$

*è, da, $L_p(R^+)$ in sè, lineare e continua.*

DIMOSTRAZIONE. - La linearità di $T$ è ovvia; mostriamo che è limitata. Se $f \in L_p(R^+)$, per il lemma 3, si ha ($i = 1$ per $\alpha \leq 1$, $i = 2$ per $\alpha \geq 1$):

$$\int_{R^+} |T(f)(y)|^p dy \leq \int_{R^+} (T(|f|)(y))^p dy =$$

$$= \int_{R^+} \Big[ \int_{R^+} T(x, y^\alpha) |f(x)| dx \Big]^p dy \leq 2 \int_{R^+} y^{\alpha-1} \Big[ \int_{R^+} T_i(x, y^\alpha) |f(x)| dx \Big]^p dy =$$

$$= 2\alpha^{-1} \int_{R^+} \Big[ \int_{R^+} T_i(x, y) |f(x)| dx \Big]^p dy.$$

Ma i nuclei $T_i$ sono funzioni omogenee di grado $-1$, non negative e tali che

$$\int_{R^+} T_i(x, 1) x^{-\frac{1}{p}} dx < +\infty, \qquad \int_{R^+} T_i(1, y) y^{-\frac{1}{p'}} dy < +\infty,$$

dove $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$.

Allora (si veda ad es. il teorema 319 di [6])

$$\| T(f); L_p(R^+) \| \leq C_{\alpha p} \| f; L_p(R^+) \|$$

dove $C_{\alpha p}$ dipende solo da $p$ e da $\alpha$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. - Sia $u$ la funzione definita da (6) (o da (6')); sarà:

$$D_x^h D_y^k u(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_R \varphi_j(\xi) D_x^h D_y^k G_j(x - \xi, y) d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} D_x^h D_y^k u_j(x, y).$$

Per la (31)

$$D_x^h D_y^k u_j(x, y) = y^{-(h+1)\alpha_1 - k + j} \Big\{ \int_R \varphi_j(\xi) M_0(x - \xi, y) d\xi +$$

$$+ \Sigma \int_R \varphi_j(\xi) M_{j_1 q_l}(x - \xi, y) d\xi + \int_R \varphi_j(\xi) [M_{r_0}(x - \xi, y) + N_2(x - \xi, y)] d\xi +$$

$$+ \int_R \varphi_j(\xi) N_1(x - \xi, y) d\xi \Big\}$$

(si sono omessi gli indici di sommazione per brevità).

Analizziamo per i primi termini contenenti i nuclei $M_{jrqt}$, $M_{r_0}$, $N_2$; poniamo brevemente

$$v(x,\ y) = y^{-(h+1)\alpha_1-k+j}\int_R \varphi_j(\xi)M(x-\xi,\ y)d\xi,$$

dove al posto di $M$ deve immaginarsi, volta per volta, $M_{jrqt}$, $M_{r_0}$, $N_2$.

Poniamo $\rho' = (r-j)\alpha_2 - (q+t)\delta - \frac{1}{p}\alpha_2$ (per $M_{r_0}$ ed $N_2$, si ponga $r = n$, $t = 0$, $q = q_0$), e distinguiamo i casi in cui $\rho'$ è negativo, nullo o positivo.

($a$) $\rho' < 0$. Per la disuguaglianza di HÖLDER si ha:

$$|v(x,\ y)|^p \leq y^{-p((h+1)\alpha_1+k-j)}\int_R |\varphi_j(\xi)|^p\,|M(x-\xi,\ y)|\,d\xi\left(\int_R |M(t,\ y)|\,dt\right)^{p-1}$$

da cui, integrando in $x$,

$$\int_R |v(x,\ y)|^p\,dx \leq \|\varphi_j;\ L_p(R)\|^p\, y^{-p((h+1)\alpha_1+k-j)}\left(\int_R |M(t,\ y)|\,dt\right)^p.$$

Ma, per (17) (o per (19), o per (22)),

$$\int_R |M(t,\ y)|\,dt \leq Cy^{\alpha_1+(q+t)\delta\alpha_1},$$

e poichè

$$(h+1)\alpha_1 + k - j - \alpha_1 - (q+t)\delta\alpha_1 \leq \rho'\alpha_1 + \frac{1}{p} < \frac{1}{p},$$

sarà

$$\|v;\ L_p(\Omega)\| \leq C'\|\varphi_j;\ L_p(R)\| \leq C''\|\varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R)\|. \tag{32}$$

($b$) $\rho' = 0$. Osservato che $(r-j)\alpha_2 - (q+t)\delta > 0$, riesce

$$\int_R M(x-\xi,\ y)d\xi = 0,$$

da cui:

$$v(x,\ y) = y^{-(h+1)\alpha_1+k-j}\int_R [\varphi_j(\xi) - \varphi_j(x)]M(x-\xi,\ y)d\xi.$$

Di qui, scelto $\alpha \in R^+$, $\alpha < \min\left(\omega(j),\ \frac{1}{p}\alpha_2,\ 1\right)$, si ricava

$$|v(x,\ y)|^p \leq y^{-p((h+1)\alpha_1+k-j)}\ .$$
$$\cdot \int_R \frac{|\varphi_j(x+t)-\varphi_j(x)|^p}{|t|^{1+p\alpha}}\,dt \cdot \left(\int_R |t|^{\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)}|M(t,\ y)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{p-1}.$$

Ma

$$\int_R |t|^{\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)}|M(t,\ y)|^{\frac{p}{p-1}}dt \leq Cy^{\frac{p}{p-1}(q+t)\delta\alpha_1}\int_R \frac{|t|^{\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)}}{\left(1+\frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{\left(1+\frac{1}{p}\alpha_2\right)\frac{p}{p-1}}}\,dt \leq$$

$$\leq Cy^{\frac{p}{p-1}\left((q+t)\delta\alpha_1+\frac{\alpha_1}{p}+\alpha\alpha_1\right)} \cdot \int_R \frac{1}{\left(1+\frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{1+\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{p}\alpha_2-\alpha\right)}} = C'y^{\frac{p}{p-1}\left((q+t)\delta\alpha_1+\frac{\alpha_1}{p}+\alpha\alpha_1\right)+\alpha_1},$$

e poichè $(h\alpha_1+k\leq n)$

$$-p\Big((h+1)\alpha_1+k-j\Big)+p\left((q+t)\delta\alpha_1+\frac{\alpha_1}{p}+\alpha\alpha_1\right)+(p-1)\alpha_1\geq p\left(-\frac{1}{p}+\alpha\alpha_1\right)>-1,$$

si ottiene

$$\|v;\ L_p(\Omega)\| \leq C''\|\varphi_j;\ B_p^\alpha(R)\|.$$

Ma, essendo $\alpha < \omega(j)$, $B_p^{\omega(j)}(R)$ è immerso in $B_p^\alpha(R)$. In definitiva

$$\|v;\ L_p(\Omega)\| \leq C'''\|\varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R)\|. \tag{32'}$$

(*c*) $\rho'>0$. Poniamo $\rho=\min(\omega(j),\ \rho')=\bar{\rho}+\alpha$ con $\bar{\rho}\in Z$, $0<\alpha\leq 1$; supponiamo dapprima $\alpha<1$.

Se indichiamo con $M^*$ la funzione che si ottiene ponendo nella espressione di $M_{jrqt}$ (o di $M_{r_0}$, $N_2$; vedi (15), (20)), $h-\bar{\rho}-1$ al posto di $h$, si ricava:

$$M(x-\xi,\ y)=(-1)^{\bar{\rho}+1}y^{(\bar{\rho}+1)\alpha_1}D_\xi^{\bar{\rho}+1}M^*(x-\xi,\ y).$$

Quindi, osservato che

$$\rho \geq \left(n-j-\frac{1}{p}\right)\alpha_2-(q+t)\delta$$

e che

$$\int_R D_x^{\bar\rho}\varphi_j(x) D_\xi M^*(x-\xi,\ y)d\xi = 0,$$

$$|v(x,\ y)| = y^{-(h+1)\alpha_1-k+j+(\bar\rho+1)\alpha_1}\left|\int_R [D_x^{\bar\rho}\varphi_j(x) - D_\xi^{\bar\rho}\varphi_j(\xi)] D_\xi M^*(x-\xi,\ y)d\xi\right| \leq$$

$$\leq y^{n-k-h\alpha_1-\left(\frac{1}{p}+\alpha\alpha_1\right)-(q+t)\delta\alpha_1}\int_R \frac{|\Delta_1 D_x^{\bar\rho}\varphi_j|}{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}}|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}|D_t M^*(-t,\ y)|\,dt$$

$$(\Delta_1 f = f(x+t) - f(x)).$$

Per la (17) (o la (19) o la (22))

$$|D_t M^*(-t,\ y)| \leq y^{-\alpha_1+(q+t)\delta\alpha_1}\left(1+\frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{-(h-\bar\rho+1+(r-j)\alpha_2-(q+t)\delta)} \leq$$

$$\leq Cy^{-\alpha_1+(q+t)\delta\alpha_1}\left(1+\frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{-\left(1+\frac{1}{p}\alpha_2+\alpha\right)} = Cy^{\frac{1}{p}+\alpha\alpha_1+(q+t)\delta\alpha_1}(y^{\alpha_1}+|t|)^{-\left(1+\frac{1}{p}\alpha_2+\alpha\right)}$$

Osservato che $(h,\ k)\in\bar{k}(P) \Rightarrow n-k-h\alpha_1 \geq 0$, riesce $(0<y\leq 1)$

$$|v(x,\ y)| \leq C\int_R \frac{|\Delta_1 D_x^{\bar\rho}\varphi_j|}{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}}\,\frac{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}}{(y^{\alpha_1}+|t|)^{1+\frac{1}{p}\alpha_2+\alpha}}\,dt$$

e, per il lemma 4,

$$\int_0^1 |v(x,\ y)|^p\,dy \leq C'\int_R \frac{|\Delta_1 D_x^{\bar\rho}\varphi_j|^p}{|t|^{1+p\alpha}}\,dt,$$

da cui, integrando in $x$,

$$\|v;\ L_p(\Omega)\| \leq C'\|\varphi_j;\ B_p^\rho(R)\|.$$

Ma $\rho\leq\omega(j)$ e quindi $B_p^{\omega(j)}(R)$ è immerso in $B_p^\rho(R)$. Pertanto

$$\|v;\ L_p(\Omega)\| \leq C''\|\varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R)\|. \tag{33}$$

Se invece $\alpha = 1 (\rho = \bar{\rho} + 1)$, si ha

$$v(x, y) = y^{-(h+1)\alpha_1 + j - k + (\bar{\rho}+1)\alpha_1} \cdot \int_R [- D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j(x) + D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j(x - t)] D_t M^*(t, y) dt,$$

ed anche

$$v(x, y) = y^{-(h+1)\alpha_1 + j - k + (\bar{\rho}+1)\alpha_1} \cdot \int_R [- D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j(x) + D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j(x + t)] D_{(-t)} M^*(- t, y) dt.$$

Ora, se $h - \bar{\rho}$ è pari, $D_{(-t)} M^*(- t, y) = D_t M^*(t, y)$; perciò

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^{-(h+1)\alpha_1 + j - k + (\bar{\rho}+1)\alpha_1} \cdot \int_R \frac{\Delta_2 \varphi_j}{|t|^{\frac{1}{p}+1}} |t|^{\frac{1}{p}+1} D_t M^*(t, y) dt$$

$$(\Delta_2 f = f(x + t) - 2f(x) + f(x - t)).$$

Di qui, procedendo come sopra, si ricava

$$|v(x, y)| \leq C \int_R \frac{|\Delta_2 D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j|}{|t|^{\frac{1}{p}+1}} \cdot \frac{|t|^{\frac{1}{p}+1}}{(y^{\alpha_1} + |t|)^{1+\frac{1}{p}\alpha_2+1}} dt.$$

Pertanto, anche attualmente, vale la (33).

Resta infine da considerare il caso in cui $h - \bar{\rho}$ sia dispari.

Se indichiamo con $M_1^*$ la funzione che si ottiene ponendo nella espressione di $D_\xi M^*$, $|\sigma|^{h-\bar{\rho}}$ al posto di $\sigma^{h-\bar{\rho}}$, per la funzione

$$v_1(x, y) = y^{-(h+1)\alpha_1 - k + j + \bar{\rho}\alpha_1} \int_R \varphi_j(\xi) M_1^*(x - \xi, y) d\xi,$$

si possono ripetere i ragionamenti fatti per $v$ nel caso $h - \bar{\rho}$ pari, in quanto $M_1^*(- t, y) = M_1^*(t, y)$. Pertanto

$$\| v_1 ; L_p(\Omega) \| \leq C_1'' \| \varphi_j ; B_p^{\omega(j)} \|.$$

D'altra parte, se $\tilde{v}_1(\sigma, y)$ indica la trasformata parziale di FOURIER di $v_1(x, y)$, abbiamo

$$\tilde{v}(\sigma, y) = \Phi(\sigma) \tilde{v}_1(\sigma, y),$$

essendo $\Phi(\sigma) = \operatorname{seg} \sigma$. Poichè $\Phi$ è un moltiplicatore di classe $M_p^p$ ([7]), riuscirà:

$$\int_R |v(x, y)|^p \, dx \leq A \int_R |v_1(x, y)|^p \, dx,$$

essendo $A$ una costante che dipende solo da $p$. Possiamo quindi concludere che la (33) vale anche in questo caso.

Questo completa l'analisi della funzione $v$.

Ragionamenti del tutto analoghi ai precedenti si possono ripetere per valutare il termine contenente il nucleo $M_0$; in questo caso si sceglierà $\rho' = h - \frac{1}{p} \alpha_2$.

Consideriamo infine

$$w(x, y) = y^{-(h+1)\alpha_1 + j - k} \int_R \varphi_j(\xi) N_1(x - \xi, y) d\xi,$$

e poniamo $\rho = \omega(j) = \bar{\rho} + \alpha$ con $\bar{\rho} \in Z$, $0 < \alpha \leq 1$. Analizziamo, per brevità, solo il caso $\alpha < 1$.

Se $N^*$ ha il corrispondente significato delle $M^*$ considerate di sopra, riesce:

$$w(x, y) = - y^{-(h+1)\alpha_1 + j - k + (\bar{\rho}+1)\alpha_1} \cdot \int_R \frac{\Delta_1 D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j}{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}} |t|^{\frac{1}{p}+\alpha} D_t N^*(-t, y) dt.$$

Ma, per la (30) ($\beta(q_0') = h - \bar{\rho} + (k - j)\alpha_2 - (q_0' - m + 1 + k)\delta$)

$$|D_t N^*(t, y)| \leq \frac{C}{y^{\alpha_1}} \frac{y^{(q_0' - m + 1 + k)\delta\alpha_1}}{\left(1 + \frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{\varepsilon(q_0') + l}} K_{\beta(q_0')},$$

avendo posto $\varepsilon(q_0') = \frac{1}{p} \alpha_1 + \alpha - \beta(q_0')$, $l = 1 + \frac{1}{p} \alpha_1 + \alpha$.

Osservato che $\beta(q_0') = -(n - h - k\alpha_1) + \frac{1}{p} \alpha_1 + \alpha$ per $j \leq m - 1$, $\beta(q_0') = -(n - h - k\alpha_1) - \delta\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \alpha_1 + \alpha$ per $j \geq m$, riuscirà, in ogni caso (vedi (29)),

$$\frac{K_{\beta(q_0')}}{\left(1 + \frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{\varepsilon(q_0') + l}} \leq B' \frac{\left(y^\delta + \frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{\varepsilon(q_0')} + 1}{\left(1 + \frac{|t|}{y^{\alpha_1}}\right)^{\varepsilon(q_0')}} \cdot \frac{1}{\left(y^\delta + \frac{|t|}{h^{\alpha_1}}\right)^{1 + \frac{1}{p}\alpha_1 + \alpha}} \leq B'' \frac{y^{\alpha_1\left(1 + \frac{1}{p}\alpha_1 + \alpha\right)}}{(y^{\alpha_2} + |t|)^{1 + \frac{1}{p}\alpha_1 + \alpha}}.$$

Perciò $(0 < y \leq 1)$

$$|w(x, y)| \leq CB'' \int_R \frac{|\Delta_1 D_x^{\bar{\rho}} \varphi_j|}{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}} \frac{|t|^{\frac{1}{p}+\alpha}}{(y^{\alpha_2} + |t|)^{1+\frac{1}{p}\alpha_1+\alpha}} dt, \tag{34}$$

in quanto

$$-(h+1)\alpha_1 + j - k + (\bar{\rho}+1)\alpha_1 - (q_0' - m + 1 + k)\delta\alpha_1 + \alpha_1\left(1 + \frac{1}{p}\alpha_1 + \alpha\right) - \alpha_1 =$$
$$= -\beta(q_0')\alpha_1 + \alpha_1\left(\frac{1}{p}\alpha_1 + \alpha\right) = \varepsilon(q_0')\alpha_1 \geq 0.$$

Dalla (34), per il lemma 4, si ottiene

$$\|w;\ L_p(\Omega)\| \leq C \|\varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R)\|.$$

Possiamo allora concludere che $(h, k) \in \bar{k}(P)$ implica

$$\|D_x^h D_y^k u_j;\ L_p(\Omega)\| \leq C \|\varphi_j;\ B_p^{\omega(j)}(R)\|.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. – Siano $r_1$ ed $r_2 \in N$; poniamo per $0 \leq j \leq r_2 - 1$,

$$\psi_1(s) = (1 + s^2)^{\frac{r_1}{2}(1-j/r_2)}, \qquad \psi_2(\sigma) = (1 + \sigma^2)^{(r_2-j)/2},$$

e

$$\Phi(s, \sigma) = (1 + s^2)^{r_1/2} + (1 + \sigma^2)^{r_2/2} = \Phi_1(s) + \Phi_2(\sigma),$$
$$F_1(s) = 1 + is^{r_1}, \qquad F_2(\sigma) = 1 + i\sigma^{r_2}, \qquad M_l = \Phi_l F_l^{-1}, \qquad l = 1,\ 2.$$

Se $u \in S(R^2)$, per $0 \leq j \leq r_2 - 1$, si ha:

$$(\psi_1 + \psi_2)\widetilde{D_y^j u} = (-i\sigma)^j(\psi_1 + \psi_2)\tilde{u} = \frac{(-i\sigma)^j(\psi_1 + \psi_2)}{\Phi}\Phi\tilde{u} = (\psi_1' + \psi_2')\cdot(\Phi\tilde{u}).$$

Con calcoli elementari si prova che, per ogni $\alpha \in Z^2$, $|\alpha| \leq 2$, riesce:

$$|\mu^\alpha D^\alpha \psi_l'| \leq M, \qquad \mu = (s, \sigma), \qquad l = 1,\ 2.$$

Allora $\psi_l'$ è un moltiplicatore di classe $M_p^p$ ([7]), e quindi

$$\|D_y^j u;\ L_p^{(r_1 - jr_1/r_2,\ r_2 - j)}(R^2)\| = \sum_{l=1}^{2} \|\widehat{\psi_l \widetilde{D_y^j u}};\ L_p(R^2)\| \leq$$
$$\leq C_1 \sum_{l=1}^{2} \|\widehat{\Phi_l \tilde{u}};\ L_p(R^2)\| = C_1 \|u;\ L_p^{(r_1,\ r_2)}(R^2)\|.$$

Per il teorema 4 di [3], si ha allora:

$$\| D_y^j u|_{y=0};\ B_p^{r_1-\left(j+\frac{1}{p}\right)\frac{r_1}{r_2}}(R)\| \leq C_1' \| u;\ L_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\|.$$

D'altre parte, come si può vedere facilmente, per ogni $\alpha \in Z^2$, $|\alpha| \leq 2$, si ha

$$|\mu^\alpha D^\alpha M_l| \leq A, \qquad l = 1,\ 2, \qquad \mu = (s,\ \sigma),$$

e quindi anche $M_1$ ed $M_2$ sono moltiplicatori di classe $M_p^p$; allora

$$\| u;\ L_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\| = \sum_{l=1}^{2} \| \widehat{M_l F_l \tilde{u}};\ (R^2)\| \leq$$

$$\leq A' \{ \| u + i^{r_1+1} D_x^{r_1} u;\ L_p(R^2)\| + \| u + i^{r_2+1} D_y^{r_2} u;\ L_p(R^2)\| \} \leq$$

$$\leq A'' \| u;\ W_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\|.$$

da cui

$$\| u;\ L_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\| \leq A'' \| u;\ W_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\|.$$

Si ha pertanto

$$\| D_y^j u|_{y=0};\ B_p^{r_1-\left(j+\frac{1}{p}\right)\frac{r_1}{r_2}}(R)\| \leq C_1'' \| u;\ W_p^{(r_1,\, r_2)}(R^2)\|, \qquad 0 \leq j \leq r_2 - 1. \tag{35}$$

Dalla proposizione I-($a$), si trae:

$$\| D_x^m u;\ W_p^{(n-m,\, m)}(R^2)\| \leq C \| u;\ K(P,\ p)\|, \tag{36}$$

$$\| D_y^m u;\ W_p^{(m,\, n-m)}(R^2)\| \leq C \| u;\ K(P,\ p)\|. \tag{37}$$

D'altra parte, se $0 \leq j \leq n-1$, per (35), si ha

$$\| D_y^j u|_{y=0};\ L_p(R)\| \leq \| D_y^j u|_{y=0};\ B_p^{n-j-\frac{1}{p}}(R)\| \leq \tag{38}$$

$$\leq C_1'' \| u;\ W_p^{(n,\, n)}(R^2)\| \leq C_1'' \| u;\ K(P,\ p)\|.$$

Allora, per (35), (36) e (37),

$$\| D_y^j D_x^m u|_{y=0};\ B_p^{n-m-\left(j+\frac{1}{p}\right)\frac{n-m}{m}}(R)\| \leq C_1'' C \| u;\ K(P,\ p)\| \tag{39}$$

per $0 \leq j \leq m-1$,

$$\| D_y^{m+l} u|_{y=0};\ B_p^{m-\left(l+\frac{1}{p}\right)\frac{m}{n-m}}(R)\| \leq C_1'' C \| u;\ K(P,\ p)\| \tag{40}$$

per $0 \leq l \leq n-m-1$.

Dalla (39), per la (38), si trae

$$\| D_y^j u |_{y=0} ; \; B_p^{\omega(j)}(R) \| \leq C_2 \| u ; \; K(P, \, p) \|$$

per $0 \leq j \leq m - 1$, mentre dalla (40), posto $m + l = j$ ed osservato che $m - (j - m)\dfrac{m}{n - m} = (n - j)\dfrac{m}{n - m}$, si ricava

$$\| D_y^j u |_{y=0} ; \; B_p^{\omega(j)}(R) \| \leq C_2 \| u ; \; K(P, \, p) \|$$

per $m \leq j \leq n - 1$.

Ciò completa la dimostrazione.

## BIBLIOGRAFIA


[1] S. M. NIKOLSKI, *Sui teoremi di immersione, di prolungamento e di approssimazione, delle funzioni differenziabili di più variabili*, « Uspehi Mat. Nauk », t. XVI (1961), p. 63, fasc. 5.

[2] B. PINI, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, nota I, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, 37, p. 28-34 (1964); nota II ibidem VIII. 38, p. 1-6 (1965).

[3] P. I. LIZORKIN, *Potenziali di Bessel non isotropici. Teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev* $L_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ *con derivate frazionarie*, « Dok. Akad. Nauk SSSR », t. 170 (1966), p. 508.

[4] L. N. SLOBODETSKII, *Valutazioni delle soluzioni dei sistemi ellittici e parabolici*, « Dokl. Akad. Nuak SSSR », t. 120 (1958) p. 468-471.

[5] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin 1963.

[6] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

[7] S. G. MIHLIN, *Sui moltiplicatori degli integrali di Fourier*, « Dok. Akad. Nauk SSSR », t. 109 (1956), p. 701.