Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche.

Memoria di BRUNO PINI (a Cagliari).

Sunto. - Si definiscono e si caratterizzano le funzioni che, relativamente alle soluzioni dell'equazione $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y = 0$, sono le analoghe delle funzioni superarmoniche e subarmoniche; di esse si stabiliscono alcune proprietà dalle quali si trae poi partito per caratterizzare le soluzioni dell'equazione anzidetta. Lo stesso è successivamente fatto in relazione all'equazione $\partial^4 u / \partial x^4 + 2\partial^3 u / \partial x^2 \partial y + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$.

Com'è noto, una funzione $u(P)$, ad esempio continua in un campo A dello spazio euclideo ad n dimensioni, si dice *super-armonica* (*sub-armonica*) se, comunque si fissi un dominio D contenuto in A per il quale esista la soluzione del problema ordinario di DIRICHLET $\Delta v = 0$ in $D - \mathcal{F}D$ e $v = u$ su $\mathcal{F}D$, riesce $u \geq v$ ($u \leq v$) in ogni punto di D . Tali funzioni sono caratterizzate dal segno del Δu , quando di questo si può parlare, e, in generale, dal segno del

$$\max_{r \rightarrow 0} \lim [\mu_0(u, P, r) - u(P)]/r^2 \quad (\min_{r \rightarrow 0} \lim [\mu_0(u, P, r) - u(P)]/r^2),$$

intendendosi con $\mu_0(u, P, r)$ la media dei valori di u sulla ipersuperficie sferica di centro P e raggio r ⁽¹⁾. I risultati conseguiti per le funzioni super-armoniche (sub-armoniche) sono stati parzialmente estesi alle funzioni *super-armoniche* (*sub-armoniche*) d'ordine p ⁽²⁾, cioè alle funzioni $u(P)$ tali che, per ogni dominio D per cui esiste la soluzione del problema di RIQUIER $\Delta^p v = 0$ in $D - \mathcal{F}D$ e $\Delta^i v = \Delta^i u$ su $\mathcal{F}D$ per $i = 0, 1, \dots, p-1$, riesce $u \geq v$ ($u \leq v$) in ogni punto di D .

Una trattazione del tipo di quella svolta per le funzioni super-armoniche (sub-armoniche) può presumibilmente farsi in relazione alle funzioni appartenenti a una certa classe le quali siano caratterizzate dal soddisfare una certa proprietà di media del tipo

$$u(P) = \int_{s(P)} K(P, Q) u(Q) dQ$$

⁽¹⁾ Cfr. p. es. T. RADÓ, *Subharmonic functions*, «Ergebnisse der Mathematik», Berlin 1925 e New York 1949.

⁽²⁾ M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, «Actualités scientifiques et industrielles», n. 331, Paris 1936.

ove $s(P)$ sia una ipersuperficie chiusa contenente P nel suo interno, o alla quale P eventualmente appartenga, e $K(P, Q)$ una funzione mai negativa tale che

$$1 = \int_{s(P)} K(P, Q) dQ.$$

Nella presente Nota consideriamo le soluzioni dell'equazione

$$(1) \quad \mathfrak{M}(u) = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y = 0$$

e le funzioni che per esse sono le analoghe delle super-armoniche (sub-armoniche), estendendo a quelle alcune proprietà di queste. Servendoci poi di tali proprietà caratterizziamo le soluzioni di (1) mediante certi operatori che estendono al caso in esame l'operatore di BLASCHKE ⁽³⁾ per le funzioni armoniche.

I risultati conseguiti in relazione all'equazione (1) vengono poi estesi in relazione alle soluzioni dell'equazione iterata

$$(2) \quad \mathfrak{M}^2(u) = \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(u)) = \partial^4 u / \partial x^4 + 2\partial^3 u / \partial x^2 \partial y + \partial^2 u / \partial y^2.$$

L'estensione al caso di più di due variabili e di operatori iterati d'ordine superiore al secondo non deve presentare alcuna difficoltà.

I. - **Maggioranti e minoranti delle soluzioni di $\mathfrak{M}(u) = 0$.**

1. In tutto il seguito con la locuzione *dominio normale* intenderemo un dominio del tipo $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, $a \leq y \leq b$ con $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a \leq y \leq b$, essendo $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ due funzioni continue con le derivate prime. Se D è un siffatto dominio e (x, y) un suo punto, con D_y intenderemo il prodotto di D per il semipiano $\eta \geq y$ e con S_y il prodotto di $\mathfrak{F}D$ per $\eta \geq y$ se $y > a$, mentre con S intenderemo la $\mathfrak{F}D$ privata della porzione di caratteristica $y = a$, $\chi_1(a) < x < \chi_2(a)$.

Diremo poi che una funzione $u(P)$ è della classe $C^{(n)}$ in A se è ivi continua insieme alle sue derivate dei primi n ordini; diremo invece che è della classe $K^{(n)}$ se è continua insieme alle derivate che figurano in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^2, \dots, \mathfrak{M}^n$.

Indichiamo con

$$(3) \quad U(Q, P) = \begin{cases} (\eta - y)^{-1/2} \exp [-(\xi - x)^2 / 4(\eta - y)] & \text{per } \eta > y \\ 0 & \text{per } \eta \leq y \end{cases}$$

($P = (x, y)$, $Q = (\xi, \eta)$) la soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

⁽³⁾ W. BLASCHKE, *Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials*, « Leipziger Berichte », 68 (1916).

Fissato P , e un numero positivo r , indichiamo poi con $\mathcal{C}(P, r)$ la curva

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = x + \sqrt{2}r \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} \\ \eta = y + r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

che è una linea di livello della (3), e con $\mathfrak{D}(P, r)$ il dominio che ha $\mathcal{C}(P, r)$ per completa frontiera.

Sia D un dominio normale. Fissato un punto $T(\sigma, \tau)$ di $D - S$, sia $V(Q, T)$ la soluzione di $\mathfrak{L}(V) = \partial^2 V / \partial \xi^2 - \partial V / \partial \eta = 0$, che coincide con $U(Q, T)$ sulle porzioni laterali e inferiore della $\mathfrak{F}D_\tau$; indichiamo poi con $G_i(Q, T)$ la funzione di GREEN relativa al dominio D :

$$(5) \quad G_i = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(U - V).$$

Allora, se $u(P)$ è della classe $K^{(1)}$ in un campo A e D è un dominio normale appartenente ad A , si ha

$$(6) \quad u(T) = \int_{S_\tau} \left(u \frac{\partial G_i}{\partial \xi} d\eta + u G_i d\xi \right) + \iint_{D_\tau} G_i \mathfrak{N}(u) dQ$$

(intendendo che S_τ sia percorso positivamente). Nelle stesse ipotesi sulla $u(P)$, fissato un punto P di A e un numero positivo r tale che $\mathfrak{D}(P, r) \subset A$, dalla (6), prendendo $D \equiv \mathfrak{D}_\tau(P, r) - \mathfrak{D}_{y+r^2-\varepsilon}(P, r)$, per $T \rightarrow P$ dall'interno di $\mathfrak{D}(P, r)$ ed $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha

$$(7) \quad \begin{aligned} u(P) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^r \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} \mathfrak{N}(u) d\rho d\theta, \end{aligned}$$

notando che $V \rightarrow 1/r$ poichè $U(Q, T) = 1/r$ su $\mathcal{C}(P, r)$ (*). Posto

$$(8) \quad \mu_n(u, P, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta$$

(*) Prendendo ad esempio $T = (x, \tau)$, la $V(Q, T)$ si mantiene limitata per $T \rightarrow P$ mentre

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta + U d\xi \right|_{\mathcal{C}(P, r)} = \sqrt{2} \left(\frac{\tau - y}{2\varepsilon} \lg \frac{r^2}{\varepsilon + \tau - y} + \frac{1}{2} \right) \exp \left(-\frac{\tau - y}{2\varepsilon} \lg \frac{r^2}{\varepsilon + \tau - y} \right) \frac{|dz|}{\sqrt{\varepsilon \lg \frac{r^2}{\varepsilon + \tau - y}}}$$

avendo posto $\varepsilon = r^2 \sin^2 \theta - (\tau - y)$, onde

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \xi} d\eta + U d\xi \right|_{\mathcal{C}(P, r)} \sim \frac{|dz|}{\sqrt{\varepsilon |\lg \varepsilon|}}.$$

si ha che:

a) Una soluzione regolare di $\mathfrak{N}(u) = 0$ in un campo A , verifica la

$$(9) \quad u(P) = \mu_0(u, P, r)$$

in ogni punto P di A e per ogni r ammissibile (tale cioè che $\mathfrak{D}(P, r) \subset A$).

Reciprocamente: una funzione $u(P)$ continua in A è ivi soluzione regolare di $\mathfrak{N}(u) = 0$ se per ogni punto P di A e per ogni r ammissibile vale la (9).

La dimostrazione è pressochè immediata se si suppone che u sia in A della classe $K^{(1)}$ ⁽⁵⁾.

Nella sola ipotesi della continuità di u , la proposizione enunciata riesce una conseguenza di quanto sarà provato al n. 3.

A caratterizzare le soluzioni di $\mathfrak{N}(u) = 0$, anzichè usare la formola di media periferica (9), si può usare la formola di media superficiale

$$(9') \quad u(P) = \mu_1(u, P, r)$$

con

$$(10) \quad \mu_1(u, P, r) = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \rho \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\rho d\theta = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho \mu_0(u, P, \rho) d\rho.$$

Si ha che:

a') Una soluzione regolare di $\mathfrak{N}(u) = 0$ in un campo A , verifica la (9') in ogni punto P di A e per ogni r ammissibile.

Reciprocamente: una funzione $u(P)$ continua in A è ivi soluzione di $\mathfrak{N}(u) = 0$ se per ogni punto P di A e per ogni valore ammissibile di r sussiste la (9').

2. Assegnata nel campo A una funzione continua $v(P)$ e fissato in A un dominio normale D , diremo associata della v rispetto a D la funzione u tale che $\mathfrak{N}(u) = 0$ in $D - S$ e $u = v$ su S . Ciò posto, chiameremo $\mathfrak{N}$ -prevalente ($\mathfrak{N}$ -subvalente) in A una funzione $v(P)$ continua in A tale che, comunque si scelga in A un dominio normale D , detta $u(P)$ la funzione associata della v rispetto a D , riesce $v \geq u$ ($v \leq u$), in tutto D .

Si ha che:

b) Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione v della classe $K^{(1)}$ in A sia ivi $\mathfrak{N}$ -prevalente ($\mathfrak{N}$ -subvalente) è che in ogni punto di A sia

$$(11) \quad \mathfrak{N}(v) \leq 0 \quad (\mathfrak{N}(v) \geq 0).$$

⁽⁵⁾ B. PINI, *Sulle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*, « Annali di Mat. pura e appl. », (4), XXXII (1951).

Consideriamo un dominio normale D interno ad A e sia u la funzione associata. Dalla (6) si ha

$$v(P) - u(P) = \int_{D_y} \int G_1(Q, P) \mathfrak{M}(v(Q)) dQ,$$

onde l'affermazione è conseguenza del fatto che $G_1 \leq 0$. Per provare ciò basta osservare che in $D_{y+\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon < b-y$), G_1 è soluzione regolare di $\mathfrak{L}(G_1) = 0$ onde il suo massimo e il suo minimo sono raggiunti in punti della porzioni laterali e inferiore di $\mathcal{F}D_{y+\varepsilon}$.

Sulle prime è $G_1 = 0$; sulla seconda è $U > 0$ mentre $0 < V < m(\varepsilon)$ con $m(\varepsilon) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$; pertanto il $\max G_1$ su D_y è zero.

Segue che:

c) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $v(P)$ della classe $K^{(1)}$ in A sia ivi $\mathfrak{M}$ -prevalente ($\mathfrak{M}$ -subvalente) è che, per ogni punto P di A e per tutti i valori ammissibili di r , sia*

$$(12) \quad v(P) \geq \mu_0(v, P, r) \quad (v(P) \leq \mu_0(v, P, r)).$$

Questa proposizione segue immediatamente dalla b) e da (7).

Analogamente, sostituendo la media superficiale a quella periferica:

c') *Condizione necessaria e sufficiente affinché $v(P)$ della classe $K^{(1)}$ in A sia ivi $\mathfrak{M}$ -prevalente ($\mathfrak{M}$ -subvalente) è che sia*

$$(12') \quad v(P) \geq \mu_1(v, P, r) \quad (v(P) \leq \mu_1(v, P, r))$$

per tutti i punti P di A e per tutti gli r ammissibili.

Queste due ultime proposizioni sussistono anche nella sola ipotesi di continuità della $v(P)$ come risulta dalle seguenti d) e d'):

d) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$ continua in A sia ivi $\mathfrak{M}$ -prevalente ($\mathfrak{M}$ -subvalente) è che per ogni punto P di A la media $\mu_0(v, P, r)$ sia funzione non crescente (non decrescente) di r .*

Supposta v della classe $K^{(1)}$, dalla (7) si ha

$$\frac{d}{dr} \mu_0(v, P, r) = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} \mathfrak{M}(v) d\rho d\theta;$$

di qui segue la necessità della condizione in base alla b).

Per la sufficienza basta osservare che dall'essere $\mu_0(v, P, \rho) \geq \mu_0(v, P, r)$ ($\mu_0(v, P, \rho) \leq \mu_0(v, P, r)$) per $r > \rho$, segue al limite per $\rho \rightarrow 0$, $v(P) \geq \mu_0(v, P, r)$ ($v(P) \leq \mu_0(v, P, r)$) con che si ricade nella c).

Mostriamo ora la necessità della condizione nell'ipotesi che v , supposta soltanto continua, sia per esempio $\mathfrak{M}$ -prevalente. Sia $r_1 > r_2 > 0$; indichiamo con T un punto interno a $\mathfrak{D}(P, r_2)$, per esempio $T = (x, \tau)$. Consideriamo i domini $\mathfrak{D}_\tau(P, r_1) - \mathfrak{D}_{y+r_1^2-\varepsilon}(P, r_1)$ e $\mathfrak{D}_\tau(P, r_2) - \mathfrak{D}_{y+r_2^2-\varepsilon}(P, r_2)$, con ε sufficientemente piccolo, e indichiamo brevemente con $S_{1\varepsilon}$ ed $S_{2\varepsilon}$ le corrispondenti porzioni S di frontiera. Detta $u(P)$ la funzione associata della v rispetto al dominio $\mathfrak{D}_\tau(P, r_1) - \mathfrak{D}_{y+r_1^2-\varepsilon}(P, r_1)$, si ha per la (6)

$$\int_{S_{1\varepsilon}} \left(v \frac{\partial G_1'}{\partial \xi} d\eta + v G_1' d\xi \right) = \int_{S_{2\varepsilon}} \left(u \frac{\partial G_1''}{\partial \xi} d\eta + u G_1'' d\xi \right)$$

indicando con G_1' e G_1'' le funzioni di GREEN corrispondenti ai due domini.

Facciamo ora tendere T a P dall'interno di $\mathfrak{D}(P, r_2)$. Detti $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ i tratti rettilinei (percorsi positivamente) di $S_{1\varepsilon}$ ed $S_{2\varepsilon}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1 P B_1} v \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \int_{A_1 B_1} v G_1' d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_2 P B_2} u \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \\ &- \int_{A_2 B_2} u G_1'' d\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_2 P B_2} v \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \int_{A_2 B_2} v G_1'' d\xi \end{aligned}$$

tenendo presente che $v \geq u$ e che $G_1 \leq 0$. Di qui, per $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha infine

$$\mu_0(v, P, r_1) \leq \mu_0(v, P, r_2).$$

La sufficienza, nel caso che $v(P)$ si supponga soltanto continua, segue dal successivo n. 3.

d') *Condizione necessaria e sufficiente affinché $v(P)$ continua in A sia ivi $\mathfrak{M}$ -prevalente ($\mathfrak{M}$ -subvalente) è che la media superficiale $\mu_1(v, P, r)$ in ogni punto P di A sia funzione non crescente (non decrescente) di r .*

La sufficienza si prova come in d) se v è della classe $K^{(1)}$; se v è solo continua, essa segue dal successivo n. 3. La necessità, per esempio nel caso che v sia $\mathfrak{M}$ -prevalente, segue da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \mu_1(v, P, r) &= 2 \left[\frac{\mu_0(v, P, r)}{r} - \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho \mu_0(v, P, \rho) d\rho \right] \leq \\ &\leq \frac{2}{r} \left[\mu_0(v, P, r) - \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho \mu_0(v, P, \rho) d\rho \right] = 0. \end{aligned}$$

3 Se $v(P)$ è una funzione della classe $K^{(1)}$ in A , in ogni punto P di A si ha

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{3}[\mu_0(v, P, r) - v(P)]}{r^2} = \mathfrak{N}(v(P))$$

$$(13') \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6\sqrt{3}[\mu_1(v, P, r) - v(P)]}{r^2} = \mathfrak{N}(v(P)).$$

Pertanto se sulla v si fa ad esempio la sola ipotesi della continuità, gli operatori indicati nei primi membri di (13) e (13') riescono delle generalizzazioni dell'operatore $\mathfrak{N}$, così come gli operatori di BLASCHKE e di PRIVALOFF costituiscono delle generalizzazioni del laplaciano.

Poniamo

$$\max_{r \rightarrow 0} \lim \frac{3\sqrt{3}[\mu_n(v, P, r) - v(P)]}{r^2} = \mathfrak{N}_n''(v, P)$$

$$\min_{r \rightarrow 0} \lim \frac{3\sqrt{3}[\mu_n(v, P, r) - v(P)]}{r^2} = \mathfrak{N}_n'(v, P).$$

Si ha:

e) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, continua in A , sia ivi $\mathfrak{N}$ -prevalente ($\mathfrak{N}$ -subvalente) è che sia $\mathfrak{N}_0''(v, P) \leq 0$ ($\mathfrak{N}_0'(v, P) \geq 0$) in ogni punto P di A .*

La necessità segue dai risultati del n. 2. Proviamo la sufficienza, per esempio nel primo caso (nel secondo si ragiona in modo analogo). Supponiamo dapprima che sia sempre $\mathfrak{N}_0''(v, P) < 0$. Allora v è $\mathfrak{N}$ -prevalente. Se ciò non fosse, esisterebbe un dominio normale D in A tale che, detta u la funzione associata della v rispetto a D , in $D - S$ vi sarebbero dei punti ove $v < u$; sia P_0 un punto ove $v - u$ raggiunge il suo minimo; sarà allora $v(P_0) - u(P_0) \leq \mu_0(v - u, P_0, r)$ per tutti gli r abbastanza piccoli e quindi

$$0 \leq \mathfrak{N}_0''(v - u, P_0) = \mathfrak{N}_0''(v, P_0) - \mathfrak{N}_0''(u, P_0) = \mathfrak{N}_0''(v, P_0)$$

il che contraddice l'ipotesi. Supposto poi che sia $\mathfrak{N}_0''(v, P) \leq 0$ in ogni punto P di A , nell'ipotesi che A sia limitato, oppure riferendoci a un arbitrario dominio limitato contenuto in A nel caso che questo non sia limitato, consideriamo la successione di funzioni

$$v_n(P) = v(P) - x^2/2n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Allora, trovandoci nelle condizioni in cui ci si era posti prima, si può affermare che le v_n sono tutte $\mathfrak{N}$ -prevalenti. Fissato ad arbitrio in A un dominio normale D , detta $u_n(P)$ la funzione associata della $v_n(P)$ rispetto a D , poichè la successione delle funzioni $v_n(P)$ converge uniformemente a $v(P)$, la successione $u_n(P)$ convergerà alla funzione u associata della v rispetto a D ; pertanto dall'essere $v_n \geq u_n$ per ogni n , segue $v \geq u$.

In modo del tutto simile, posto

$$(14) \quad \max \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6\sqrt[3]{\mu_1(v, P, r) - v(P)}}{r^2} = \mathfrak{N}_1''(v, P)$$

$$(14') \quad \min \lim_{r \rightarrow 0} \frac{6\sqrt[3]{\mu_1(v, P, r) - v(P)}}{r^2} = \mathfrak{N}_1'(v, P),$$

si ha che:

e') *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, continua in A , sia ivi $\mathfrak{N}$ -prevalente ($\mathfrak{N}$ -subvalente) è che sia $\mathfrak{N}''(v, P) \leq 0$ ($\mathfrak{N}_1'(v, P) \geq 0$) in ogni punto P di A .*

Infine da e) e da e') si deduce che:

f) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, continua in A , sia ivi soluzione (regolare) di $\mathfrak{N}(v) = 0$, è che in ogni punto P di A sia*

$$(15) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0(v, P, r) - v(P)}{r} = 0 \quad \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_1(v, P, r) - v(P)}{r^2} = 0 \right)^{(6)}.$$

II. - Maggioranti e minoranti delle soluzioni di $\mathfrak{N}^2(u) = 0$.

4. Se $u(P)$ e $v(P)$ sono due funzioni della classe $K^{(2)}$ in A e Δ è un dominio appartenente ad A , sussiste la formola di reciprocità

$$(16) \quad \int_{\Delta} [v \mathfrak{N}^2(u) - u \mathfrak{N}^2(v)] dQ = \\ = \int_{\partial \Delta} \left\{ v \frac{\partial \mathfrak{N}(u)}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \mathfrak{N}(u) + \frac{\partial u}{\partial \xi} \mathfrak{L}(v) - u \frac{\partial \mathfrak{L}(v)}{\partial \xi} \right\} d\eta - [u \mathfrak{L}(v) + v \mathfrak{N}(u)] d\xi \Big|.$$

⁽⁶⁾ Si noti che tutte le volte che esiste il primo dei limiti (15), esiste anche il secondo di tali limiti ed è eguale a un mezzo del primo. Infatti, detto λ tale limite, si ha $\mu_0(v, P, r) = v(P) + \lambda r^2 + o(r^2)$, onde

$$\frac{\mu_1(v, P, r) - v(P)}{r^2} = \frac{1}{r^4} \left[2 \int_0^r \mu_0(v, P, \rho) \rho d\rho - r^2 v(P) \right] = \frac{\lambda}{2} + \frac{2}{r^4} \int_0^r \rho o(\rho^2) d\rho \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2}.$$

Fissiamo in V un dominio normale D e sia T un punto di $D - S$. Poniamo

$$(17) \quad G_2(Q, T) = \int \int_{D_{\eta, \tau}} G_1(Q, M) G_1(M, T) dM$$

essendo G_1 la funzione (5) e $D_{\eta, \tau}$ il dominio prodotto di D per la striscia $\tau \leq y \leq \eta$.

G_1 e G_2 si annullano quando il punto Q si trova sulle porzioni laterali e inferiore della $\mathcal{F}D_{\eta, \tau}$. Per un noto risultato di GEVREY si ha poi $\mathcal{L}(G_2) = G_1$.

Se $u(P)$ è in A della classe $K^{(2)}$, applicando la (16) al dominio $D_\tau - \mathfrak{D}(T, \varepsilon)$ e facendo tendere ε a zero, si ha

$$(18) \quad u(T) = \int_{S_\tau} \left\{ \left[\frac{\partial G_2}{\partial \xi} \mathfrak{N}(u) + u \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \right] d\eta + [u G_1 + \mathfrak{N}(u) G_2] d\xi \right\} + \int \int_{D_\tau} G_2 \mathfrak{N}^2(u) d\xi d\eta$$

(ove S_τ s'intende percorsa positivamente). Nelle stesse ipotesi sulla u , se $\mathfrak{D}(P, r)$ appartiene ad A , preso per D il dominio $\mathfrak{D}_\tau(P, r) - \mathfrak{D}_{y+r-\varepsilon}(P, r)$, per $T \rightarrow P$ dall'interno di $\mathfrak{D}(P, r)$ ed $\varepsilon \rightarrow 0$, osservando che $G_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [U(Q, P) - 1/r](\eta - y)$, si ottiene

$$(19) \quad \begin{aligned} u(P) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \\ & - \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\mathfrak{N}(u))_{\mathfrak{C}(P, r)} \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) \frac{\rho^4 \sin^4 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} \mathfrak{N}^2(u) d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Posto

$$(20) \quad \begin{aligned} M_0(u, P, r) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta - \\ & - \frac{r^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\mathfrak{N}(u))_{\mathfrak{C}(P, r)} \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta, \end{aligned}$$

si verifica immediatamente che:

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $u(P)$ della classe $K^{(2)}$ in A sia ivi soluzione di $\mathfrak{N}^2(u) = 0$, è che per ogni punto P di A e per ogni valore (ammissibile) di r sia*

$$(21) \quad u(P) = M_0(u, P, r).$$

Anzichè caratterizzare le soluzioni di $\mathfrak{N}(u) = 0$ mediante la formola di media (21), è possibile farlo con una formola di media ove figurino solo la u ; però questa sarà di tipo superficiale e non più periferico come la precedente.

Dalla formola di reciprocità

$$\int_{\Delta} \int [v\mathfrak{N}(u) - u\mathfrak{L}(v)] dQ = \int_{\mathfrak{F}\Delta} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\eta - uv d\xi \right]$$

prendendo $\mathfrak{D}(P, r)$ al posto di Δ , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}(P, r)} \int [v\mathfrak{N}(u) - u\mathfrak{L}(v)] dQ &= \sqrt{2}r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta + \\ &+ 2\sqrt{2}r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{\mathfrak{C}(P, r)} \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Questa sussiste anche se, essendo u della classe $K^{(1)}$, si pone $v = \lg(1/\sin^2 \theta)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathfrak{N}(u) \rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\rho d\theta = \\ &= \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u [1 + \lg(1/\sin^2 \theta)] \frac{\cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} d\rho d\theta + \\ &+ \frac{r^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta [\lg(1/\sin^2 \theta)]^{3/2} d\theta - 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Integrando la (21) da zero ad r , tenendo presente la formola ora stabilita, si ha

$$\begin{aligned} ru(P) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \frac{\cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} d\rho d\theta - \frac{r^2}{2\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta [\lg(1/\sin^2 \theta)]^{3/2} d\theta + \\ &+ \frac{2r}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Integrando nuovamente da zero ad r ed eseguendo opportune integrazioni per parti e poi nuovamente integrando da zero ad r , si ottiene in

definitiva

$$(22) \quad u(P) = \frac{3}{r^3 \sqrt{2\pi}} \int_{\theta=-\pi/2}^{r\pi/2} \int u \{ 2\rho(r-\rho)[1 + \lg(1/\sin^2 \theta)]^2 - \\ - \rho^2 \lg^2(1/\sin^2 \theta) - r^2 + \rho^2 \} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} d\rho d\theta.$$

Indicando con $M_i(u, P, r)$ il secondo membro, si ha la formola di media
(21') $u(P) = M_i(u, P, r)$

la quale caratterizza, al pari della (21), le soluzioni di $\mathfrak{N}^2(u) = 0$. Precisamente:

a') *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $u(P)$, della classe $K^{(2)}$ in A , sia ivi soluzione di $\mathfrak{N}^2(u) = 0$, è che in ogni punto P di A e per tutti gli r ammissibili valga la (21').*

Dai risultati del successivo n. 6 seguirà poi che:

a'') *Se $u(P)$ è in A una funzione della classe $K^{(1)}$ e se in ogni punto P di A e per tutti gli r ammissibili sussiste la (21) oppure la (21'), allora è $\mathfrak{N}^2(u) = 0$.*

5. Se $v(P)$ è una funzione della classe $K^{(1)}$ in A , fissato un dominio normale D in A , chiameremo *associata* della $v(P)$ rispetto a D la funzione $u(P)$ tale che $\mathfrak{N}^2(u) = 0$ in $D - S$, $u = v$ e $\mathfrak{N}(u) = \mathfrak{N}(v)$ su S .

Diremo poi che una funzione $v(P)$ della classe $K^{(1)}$ in A è ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente) se, fissato ad arbitrio un dominio normale D in A e detta $u(P)$ la funzione associata della $v(P)$, riesce $v(P) \geq u(P)$ ($v(P) \leq u(P)$) in ogni punto P di D .

Si ha che:

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, di classe $K^{(2)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente) è che per ogni punto P di A sia*

$$\mathfrak{N}^2(v) \geq 0 \quad (\mathfrak{N}^2(v) \leq 0).$$

Se D è un dominio normale contenuto in A e $u(P)$ la funzione ivi associata della $v(P)$, dalla (18) segue

$$v(P) - u(P) = \iint_{D_y} G_2(Q, P) \mathfrak{N}^2(v) dQ$$

e quindi l'asserto segue immediatamente dall'osservazione che, in base alla (17), essendo $G_1 \leq 0$, è $G_2 \geq 0$.

Segue che:

c) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $v(P)$, della classe $K^{(2)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente) è che, per ogni punto P di A e per tutti i valori ammissibili di r , sia*

$$(23) \quad v(P) \geq M_o(v, P, r) \quad (v(P) \leq M_o(v, P, r)).$$

Ciò segue dalla formola (19) e dalla precedente proposizione b),

Analogamente:

c') *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $v(P)$, della classe $K^{(2)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente) è che per ogni punto P di A e per tutti i valori ammissibili di r , sia*

$$(23') \quad v(P) \geq M_1(v, P, r) \quad (v(P) \leq M_1(v, P, r)).$$

Le proposizioni c) e c') sono assorbite dalle successive e) ed e').

Premettiamo che:

d) *Se $v(P)$ è in A della classe $K^{(1)}$ e verifica la prima o la seconda delle (23'), allora $\mathfrak{N}(v)$ è $\mathfrak{N}$ -subvalente oppure $\mathfrak{N}$ -prevalente.*

Se $f(P)$ è una funzione definita in A , poniamo

$$\omega^{(1)}(f, P, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} f(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta$$

ogniqualevolta il cerchio di centro P e raggio r appartiene ad A ed $f(P)$ è ivi integrabile. Posto

$$\omega^{(n)}(f, P, r) = \omega(\omega^{(n-1)}(f, Q, r), P, r)$$

(essendo Q un punto variabile sul cerchio di centro P e raggio r) è noto che se f è della classe $C^{(m)}$, $\omega^{(1)}(f, P, r)$ è della classe $C^{(m+1)}$.

Ora se $v(P)$ verifica per esempio la prima delle (23'), si ha per ogni punto P di A e per ogni r ammissibile

$$v(x, y) \geq \frac{3}{r^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(r, \rho, \theta) v(x + \sqrt{2}\rho \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}, y + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho d\theta,$$

ove il significato di $K(r, \rho, \theta)$ si deduce dalla (22). Perciò

$$\omega^{(1)}(v, P, r_1) \geq \frac{3}{r^3 \sqrt{2\pi}} \int \int_{\xi^2 + \eta^2 < r_1^2} \frac{1}{\pi r_1^2} \left(\int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(r, \rho, \theta) v(x + \xi + \sqrt{2}\rho \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}, y + \eta + \rho^2 \sin^2 \theta) d\rho d\theta \right) d\xi d\eta$$

ossia

$$\omega^{(1)}(v, P, r_1) \geq \frac{3}{r^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(r, \rho, \theta) \omega^{(1)}(v, x + \sqrt{2}\rho \sin \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}, y + \rho^2 \sin^2 \theta, r_1) d\rho d\theta.$$

Il procedimento si può iterare. Pertanto in ogni dominio contenuto in A , prendendo r_1 abbastanza piccolo, si riconosce che $\omega^{(2)}(v, P, r_1)$ è una funzione della classe $K^{(2)}$ e, verificando la prima delle (23'), è $\mathfrak{N}^2$ -prevalente. Ne segue che $\mathfrak{N}(\omega^{(2)}(v, P, r_1))$ è $\mathfrak{N}$ -subvalente. Ma, essendo v della classe $K^{(1)}$,

le successioni

$$\omega^{(2)}(v, P, 1/n), \quad \mathfrak{N}(\omega^{(2)}(v, P, 1/n)) = \omega^{(2)}(\mathfrak{N}(v), P, 1/n), \quad n > \bar{n}$$

convergono uniformemente rispettivamente a v e $\mathfrak{N}(v)$ in ogni dominio limitato appartenente ad A ⁽⁷⁾. Pertanto dall'essere

$$\mathfrak{N}(\omega^{(2)}(v, P, 1/n)) \leq \mu_0(\mathfrak{N}(\omega^{(2)}(v, Q, 1/n)), P, r)$$

(dove Q è un punto variabile su $\mathfrak{C}(P, r)$) segue

$$\mathfrak{N}(v(P)) \leq \mu_0(\mathfrak{N}(v), P, r)$$

e questa, in base ai risultati di 1, assicura l'asserto.

Ciò posto, proviamo che:

e) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, di classe $K^{(1)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente), è che la media $M_0(v, P, r)$ in ogni punto P di A sia funzione non crescente (non decrescente) di r .*

Supposto dapprima che $v(P)$ sia di classe $K^{(2)}$, la sufficienza si prova come in 3, d).

La necessità segue dall'osservare che

$$\frac{d}{dr} M_0(v, P, r) = -\frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4 \sin^4 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)}} \mathfrak{N}^2(v) d\rho d\theta.$$

Nel caso che $v(P)$ si supponga solo di classe $K^{(1)}$, la sufficienza segue dal successivo n. 6. Per quanto riguarda la necessità, supposto $v(P)$ per esempio $\mathfrak{N}^2$ -prevalente, ragionando per assurdo, esisterebbero un punto l' e due numeri r_1 ed r_2 , $r_1 > r_2 > 0$, tali che, essendo $\mathfrak{D}(P, r_1)$ contenuto in A , sarebbe

$$M_0(v, P, r_1) > M_0(v, P, r_2).$$

D'altra parte, essendo $\omega^{(2)}(v, P, 1/n)$ $\mathfrak{N}^2$ -prevalente (per $n > \bar{n}$), sarebbe

$$M_0(\omega^{(2)}(v, Q, 1/n), P, r_1) \leq M_0(\omega^{(2)}(v, Q, 1/n), P, r_2)$$

ciò che, per la convergenza uniforme di $\omega^{(2)}(v, P, 1/n)$ a v per $n \rightarrow \infty$, contraddice la precedente.

e') *Condizione necessaria e sufficiente affinché $v(P)$, di classe $K^{(1)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente) è che la media $M(v, P, r)$ in ogni punto P di A sia funzione non crescente (non decrescente) di r .*

⁽⁷⁾ Fissato un dominio limitato D interno ad A , prendendo r_1 abbastanza piccolo ed $\bar{n}$ abbastanza grande, è evidente che al variare di P in D e di Q nel cerchio di centro P e raggio $< 1/\bar{n}$, Q varierà in un dominio limitato interno ad A .

Poichè

$$M_1(v, P, r) = \frac{6}{r^3} \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \int_0^{r_2} M_0(v, P, \rho) d\rho$$

si ha

$$\frac{d}{dr} M_1(v, P, r) = -\frac{3}{r^4} \int_0^r (3\rho^2 - 4r\rho + r^2) M_0(v, P, \rho) d\rho,$$

come si riconosce effettuando successive integrazioni per parti. Ora, posto

$$f(r) = \int_0^r (3\rho^2 - 4r\rho + r^2) M_0(v, P, \rho) d\rho,$$

si ha

$$f'(r) = 2 \int_0^r (r - 2\rho) M_0(v, P, \rho) d\rho, \quad f''(r) = 2 \int_0^r M_0(v, P, \rho) d\rho - 2r M_0(v, P, r).$$

Poichè per e) è $M_0(v, P, r) \leq M(v, P, \rho)$ per $r > \rho$, segue $f''(r) \geq 0$ onde $f'(r)$ è funzione non decrescente e poichè $f'(0) = 0$, è $f'(r) \geq 0$; ne segue che $f(r)$ è funzione non decrescente e poichè $f(0) = 0$, è $f(r) \geq 0$. Pertanto $\frac{d}{dr} M(v, P, r) \leq 0$. Ciò prova la necessità. La sufficienza segue dal successivo n. 6.

6. Se $v(P)$ è in A una funzione della classe $K^{(2)}$, in ogni punto P di A si ha

$$(24) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{5}[v(P) - M_0(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}^2(v(P))$$

$$(24') \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{350\sqrt{5}[v(P) - M_1(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}^2(v(P)).$$

Perciò, qualora non esista l' $\mathfrak{N}^2(v)$ ordinario ma esistano i limiti che figurano al primo membro in (24) e (24')⁽⁸⁾, questi si potranno ritenere delle generalizzazioni dell' $\mathfrak{N}^2(v)$. Si noti che mentre l'operatore al primo membro di (24) si può considerare per funzioni $v(P)$ della classe $K^{(1)}$, l'operatore a

(8) Si noti che se esiste il limite indicato dalla (24), esiste ed è uguale ad esso, anche il limite indicato dalla (24'). Infatti, detto λ tale limite, si ha $M_0 = v - \frac{r^4}{10\sqrt{5}}\lambda + o(r^4)$, onde

$$\frac{350\sqrt{5}[v(P) - M_1(v, P, r)]}{r^4} = \frac{350\sqrt{5}}{r^7} \left[r^3 v(P) - 6 \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \int_0^{r_2} \left[v(P) - \frac{r^4 \lambda}{10\sqrt{5}} + o(r^4) \right] d\rho \right] \xrightarrow{r \rightarrow 0} \lambda.$$

primo membro di (24') si può considerare anche per funzioni soltanto continue. Però, mentre la condizione

$$(25) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(P) - M_1(v, P, r)}{r^4} = 0$$

è evidentemente necessaria perchè sia $\mathfrak{N}^2(v) = 0$, essa non è sufficiente. Per esempio, sia A il campo $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, e sia

$$v(P) = \begin{cases} x^2 + y & \text{per } y \geq 0 \\ x^2 - y & \text{per } y < 0. \end{cases}$$

Questa funzione non è in A soluzione regolare di $\mathfrak{N}^2(v) = 0$; ciò nonostante la (25) è soddisfatta in ogni punto P di A . Lo stesso esempio prova come neppure la continuità di v e di $\partial v / \partial x$, unitamente alla (25), sia sufficiente ad assicurare che $v(P)$ è soluzione regolare di $\mathfrak{N}^2(v) = 0$.

Poniamo

$$(26) \quad \max \lim_{r \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{5}[v(P) - M_0(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}_0''^2(v, P)$$

$$(26') \quad \min \lim_{r \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{5}[v(P) - M_0(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}_0'^2(v, P).$$

Si ha:

f) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $v(P)$, di classe $K^{(1)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente), è che sia $\mathfrak{N}_0''^2(v, P) \geq 0$ ($\mathfrak{N}_0'^2(v, P) \leq 0$) in ogni punto P di A .*

La necessità segue dal n. 5. Proviamo la sufficienza, per esempio per il primo caso (essendo il ragionamento in tutto simile per il secondo caso). Supponiamo dapprima che sia sempre $\mathfrak{N}_0''^2(v, P) > 0$; allora v è $\mathfrak{N}^2$ -prevalente. Se ciò non fosse, esisterebbe un dominio normale D in A tale che, essendo $u(P)$ la funzione associata della $v(P)$ rispetto a D , vi sarebbero dei punti di $D - S$ ove $v < u$; sia P_0 un punto ove $v - u$ raggiunge il suo minimo; sarà allora $\mathfrak{N}(v) - \mathfrak{N}(u) \geq 0$ in P_0 . Ora, per quanto si è provato in d), la $\mathfrak{N}(v)$ è $\mathfrak{N}$ -subvalente e quindi $\mathfrak{N}(v(P)) \leq \mu_0(\mathfrak{N}(v), P, r)$ per tutti gli r abbastanza piccoli; di qui la contraddizione se si suppone che valga sempre il segno $<$. Supposto poi che sia $\mathfrak{N}_0''^2(v, P) \geq 0$ e $\mathfrak{N}(v(P)) \leq \mu_0(\mathfrak{N}(v), P, r)$, senza escludere che valga il segno di eguaglianza, consideriamo la successione di funzioni

$$v_n(P) = v(P) + \frac{x^4}{4!n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

riferendoci a un arbitrario dominio limitato contenuto in A , qualora A non sia limitato. Trovandoci ora nelle condizioni in cui ci si era posti prima, si può concludere che le $v_n(P)$ sono tutte $\mathfrak{N}^2$ -prevalenti. Ma le $v_n(P)$ e le $\mathfrak{N}(v_n)$ convergono uniformemente rispettivamente a $v(P)$ e a $\mathfrak{N}(v)$. Resta così provato che anche la $v(P)$ è $\mathfrak{N}^2$ -prevalente.

In modo del tutto simile, posto

$$(27) \quad \max \lim_{r \rightarrow 0} \frac{350\sqrt{5}[v(P) - M_1(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}_1''^2(v, P)$$

$$(27') \quad \min \lim_{r \rightarrow 0} \frac{350\sqrt{5}[v(P) - M_1(v, P, r)]}{r^4} = \mathfrak{N}_1'^2(v, P)$$

si ha che:

f') *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, di classe $K^{(1)}$ in A , sia ivi $\mathfrak{N}^2$ -prevalente ($\mathfrak{N}^2$ -subvalente), è che sia $\mathfrak{N}_1'^2(v, P) \geq 0$ ($\mathfrak{N}_1''^2(v, P) \leq 0$) in ogni punto P di A .*

Infine da f) ed f') segue che:

g) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $v(P)$, di classe $K^{(1)}$ in A , sia ivi soluzione (regolare) di $\mathfrak{N}^2(v) = 0$, è che in ogni punto P di A sia*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(P) - M_0(v, P, r)}{r^4} = 0 \quad \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(P) - M_1(v, P, r)}{r^4} = 0 \right).$$