Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi.

Memoria di G. SANSONE ed R. CONTI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Studio dell'equazione $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]}$ con λ parametro reale, variabile in $(-\infty, \infty)$.*

Summary. - *The equation*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]}$$

is studied for every real value of the parameter λ .

INTRODUZIONE

Dato un sistema « autonomo » di due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y; \lambda), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y; \lambda), \end{cases}$$

contenente un parametro reale λ , è noto che il variare di λ può determinare la comparsa (o la sparizione) di cicli tra le caratteristiche del sistema stesso.

Il fenomeno può aver luogo con modalità diverse e può dirsi che per ora solo il caso in cui i cicli abbiano origine da un fuoco (o scompaiano in esso) è stato studiato con una certa profondità ⁽¹⁾.

Il caso, ugualmente importante, in cui l'elemento generatore di cicli sia costituito da una o più separatrici e dai rispettivi punti limite sembra invece essere per ora quello meno approfondito ⁽²⁾.

In mancanza di una trattazione sistematica acquistano particolare rilievo gli esempi atti ad illustrare il fenomeno. Tra questi è assai interessante quello del sistema

$$(B) \quad \begin{cases} \dot{x} = y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda] \\ \dot{y} = -xy \end{cases}$$

(*) I risultati dei nn. da 1 a 7 sono dovuti essenzialmente a R. CONTI, quelli dei nn. da 8 a 13 a G. SANSONE.

⁽¹⁾ Si veda ad es. A. A. ANDRONOW - C. E. CHAIKIN, *Theory of oscillations*, edited by S. LEFSCHETZ, Princeton Univ. Press, 1949, pp. 217 e segg.

⁽²⁾ Citeremo tuttavia, come aventi qualche attinenza con questo argomento, i seguenti lavori: G. F. D. DUFF, *Limit cycles of systems of the second order*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », 37 (1950), pp. 749-752; E. LEONTOVIC, *Sulla generazione di cicli limite da separatrici* (russo), « Dokl. Ak. Nauk S.S.S.R. », 78 (1951), pp. 641-644; T. UNO, *On the formation of limit cycles*, « Math. Japonicae », 2 (1951), pp. 75-78; *On the curves defined by some differential equations*, ibid., 2 (1952), pp. 119-126.

(dove al solito $\dot{x}$ sta per dx/dt , $\dot{y}$ per dy/dt), equivalente all'equazione

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{y^2 + (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]},$$

considerata recentemente da T. UNO ed R. YOKOMI ⁽³⁾.

Il meccanismo della generazione di cicli limite è stato da questi due AA. studiato sull'equazione (A) in un intorno di $\lambda=0$ mediante procedimenti di integrazione grafica. È sembrato perciò opportuno agli AA. del presente lavoro di studiare la (A) (ovvero il sistema (B)) in connessione all'esistenza di cicli limite per tutti i valori di λ e facendo uso di metodi dimostrativi rigorosi.

I risultati della presente ricerca sono contenuti raccolti in due §§; quelli del § 1 si possono sintetizzare come segue:

- 1) se $\lambda \leq 0$, oppure se $\lambda \geq 1$, non esistono cicli (nn. 1, 2, 3, 4, 6);
- 2) se $0 < \lambda < 1$ esistono due cicli (stabili) situati simmetricamente rispetto all'asse delle x (n. 5) e questi due cicli sono unici (n. 8);
- 3) in corrispondenza a valori di λ sufficientemente prossimi a zero esistono cicli aventi distanza arbitrariamente piccola dall'insieme costituito da due punti singolari e da due separatrici che li uniscono (n. 5);
- 4) in corrispondenza a valori di λ sufficientemente prossimi ad 1 esistono cicli interamente contenuti in un intorno arbitrariamente piccolo del punto $(0, \sqrt{2})$ (n. 7).

Questi risultati sono poi completati, nel § 2, da un esame completo della struttura delle caratteristiche di (B) al variare di λ in un intervallo $(5 - 4\sqrt{2} < \lambda < 5 + 4\sqrt{2})$ che contiene quello $(0 < \lambda < 1)$ nel quale ha luogo il fenomeno della generazione e sparizione di cicli.

Un'opportuna trasformazione di variabili consente infine di dedurre dai risultati precedenti che:

l'equazione (di LIÉNARD, generalizzata)

$$(E) \quad \ddot{x} + [3x^2 + \lambda - 1]\dot{x} + 2x(x+1)[(x-1)^2 + \lambda] = 0,$$

(λ parametro reale, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$) non ha soluzioni periodiche se $\lambda \leq 0$, oppure se $\lambda \geq 1$, ed ha invece una ed una sola soluzione periodica se $0 < \lambda < 1$.

§ 1. - Esistenza dei cicli limite in relazione al parametro λ .

1. Preliminari.

Il sistema (B) è soddisfatto da $y=0$ e resta inalterato se si muta y in $-y$; pertanto ogni caratteristica che abbia un punto sull'asse delle x vi appartiene per intero mentre tutte le altre caratteristiche si distribuiscono

⁽³⁾ T. UNO - R. YOKOMI, *On some mode of appearance of limit cycles*, « Math. Japonicae », 2 (1952), pp. 117-118.

in coppie di curve simmetriche rispetto a quell'asse. Ci possiamo limitare pertanto a considerare le sole caratteristiche che appartengono al semipiano $y \geq 0$.

Tra le caratteristiche di (B) hanno particolare importanza i punti singolari.

Facendo ricorso al classico procedimento di POINCARÉ ⁽⁴⁾ si vede, senza difficoltà, che dei punti singolari due sono impropri e precisamente il punto all'infinito dell'asse x , X_∞ , e quello, Y_∞ , all'infinito dell'asse y , e ciò qualunque sia il valore del parametro λ .

Se si prende

$$\begin{aligned} x < -1, y > 0 & \quad \text{se } \lambda \geq 0, \\ x < \min(-1, 1 - \sqrt{-\lambda}), y > 0, & \quad \text{se } \lambda < 0, \end{aligned}$$

dal sistema (B) si ricava $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$, cosicchè la semicaratteristica negativa per $P \equiv (x, y)$ deve avere un asintoto orizzontale; il punto X_∞ può quindi considerarsi come un nodo instabile.

Non esistono invece caratteristiche dotate di asintoti verticali. Infatti se $x = x_0$ (x_0 finito) fosse un tale asintoto, dalla (A), scritta nella forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y - \frac{(x+1)[(x-1)^2 + \lambda]}{y}},$$

seguirebbe $\lim_{x \rightarrow x_0} y' = 0$, in contrasto con $\lim_{x \rightarrow x_0} y = \infty$.

I punti singolari a distanza finita sono tutte e sole le intersezioni degli assi x, y con la cubica

$$\Gamma_\lambda: y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda] = 0,$$

e quindi essi sono i punti

$$\begin{aligned} A &\equiv (-1, 0), & \lambda \text{ qualunque,} \\ B &\equiv (1 - \sqrt{-\lambda}, 0), \quad C \equiv (1 + \sqrt{-\lambda}, 0), & \text{se } \lambda \leq 0, \\ B_1 &\equiv (0, \sqrt{1+\lambda}), \quad B_2 \equiv (0, -\sqrt{1+\lambda}), & \text{se } -1 \leq \lambda. \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Cfr. ad es. S. LEFSCHETZ, *Lectures on differential equations*, Princeton University Press, 1948, p. 142 e segg.

Con le posizioni

$$x = u/z, \quad y = v/z, \quad u^2 + v^2 + z^2 = 1,$$

il sistema (B) diventa

$$\begin{cases} uvz^2 du + z \{ v^2 z - (u+z)[(u-z)^2 + \lambda z^2] \} dv = \\ = v \{ u^2 z + (u+z)[(u-z)^2 + \lambda z^2] \} dz, \\ udu + vdv + zdz = 0, \end{cases}$$

e per $z=0$ si hanno appunto i due punti singolari $X_\infty \equiv (1, 0, 0)$ ed $Y_\infty \equiv (0, 1, 0)$.

Eventuali cicli debbono appartenere interamente al semipiano $y > 0$ (od al semipiano $y < 0$) e contenere nell'interno il punto B_1 (o B_2 rispettivamente), *cosicchè nel caso $\lambda \leq -1$ non esistono cicli.*

Ci occuperemo pertanto, da ora in poi, del caso $\lambda > -1$, limitando, come si è già avvertito, le nostre considerazioni al semipiano $y \geq 0$.

2. Considerazioni relative al caso $\lambda > -1$.

Se $\lambda > -1$ le rette $x = k$, con $-1 < k < 0$ tagliano la cubica Γ_λ in due punti reali distinti; quelli con ordinata positiva costituiscono un arco di curva $\widehat{AB}_1$ di estremi A e B_1 .

Poichè ogni eventuale ciclo deve necessariamente contenere almeno un punto di tale arco $\widehat{AB}_1$, imposteremo le nostre considerazioni ulteriori sull'esame delle caratteristiche uscenti da punti dell'arco $\widehat{AB}_1$ stesso.

Il nostro compito sarà facilitato da alcune convenzioni ed osservazioni valevoli per $\lambda > -1$, che qui riuniamo.

Anzitutto, quando $\lambda > -1$, diremo *regione interna a Γ_λ* [*regione esterna a Γ_λ*] quella dei punti (x, y) per i quali si ha

$$y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda] < 0, \quad [> 0].$$

In secondo luogo accanto a Γ_λ considereremo la

$$\Gamma_\lambda^*: \quad y^2 + (x-1)[(x+1)^2 + \lambda] = 0,$$

simmetrica di Γ_λ rispetto all'asse delle y e definiremo *regione interna a Γ_λ^** [*regione esterna a Γ_λ^**] l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$y^2 + (x-1)[(x+1)^2 + \lambda] < 0, \quad [> 0].$$

Sono utili le posizioni

$$(1) \quad \begin{cases} p_\lambda = 1 + \lambda - x^2 - y^2, \\ q_\lambda = (1 - \lambda)x - x^3, \end{cases}$$

mediante le quali l'equazione di Γ_λ diventa semplicemente $p_\lambda - q_\lambda = 0$, quella di Γ_λ^* diventa $p_\lambda + q_\lambda = 0$, mentre le disuguaglianze $p_\lambda - q_\lambda > 0$, $p_\lambda - q_\lambda < 0$, [$p_\lambda + q_\lambda > 0$, $p_\lambda + q_\lambda < 0$], caratterizzano rispettivamente la regione interna e quella esterna a Γ_λ [a Γ_λ^*].

Sempre se $\lambda > -1$ il punto singolare $A \equiv (-1, 0)$ risulta ⁽⁵⁾ del tipo

(5) Per determinare la natura dei punti singolari (al finito) facciamo ricorso, qui e nel seguito, ai classici risultati contenuti in O. PERRON, *Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, 1er Teil, « Math. Zeitschrift », 15 (1922), 121-146; 2er Teil, ibid., 16 (1923), 273-295.

Nel caso del punto $A \equiv (-1, 0)$ con la traslazione $x = X - 1$, $y = Y$ il sistema (B) diventa

$$\begin{cases} \dot{X} = -(4 + \lambda)X + 4X^2 + Y^2 - X^3, \\ \dot{Y} = Y - XY, \end{cases}$$

colle, con quattro separatrici, di cui due, appartenenti all'asse delle x , tendono ad A per $t \rightarrow +\infty$ e due, simmetriche rispetto all'asse delle x , vi tendono in direzione verticale per $t \rightarrow -\infty$.

Di queste ultime due diciamo α quella appartenente al semipiano $y > 0$ e seguiamone l'andamento per t crescente.

Intanto nessun punto P di α può avere ascissa ≤ -1 , poichè se ciò fosse dal sistema (B) si avrebbe $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$ e la α uscendo da P dovrebbe per $t \rightarrow -\infty$ tendere verso X_∞ anzichè verso A . Sia dunque $P \equiv (x, y)$ un punto di α , con ascissa $-1 < x < 0$; sempre dal sistema (B) si ha che se P è interno a Γ_λ si ha anche $\dot{x} < 0$, cosicchè decrescendo t , x cresce e P si allontana da A . Poichè A è il punto limite della separatrice α per $t \rightarrow -\infty$ segue che esiste un $t_0 < 0$ tale che per $t \leq t_0$ i punti di α appartengono tutti alla regione esterna a Γ_λ .

In tale regione, finchè è $x < 0$ ($y > 0$) si ha $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$, quindi x ed y crescono entrambe con t e la α si mantiene esterna a Γ_λ ; non potendo avere asintoti verticali (n. 1) la α incontra l'asse y in un punto D al disopra di $B_1 \equiv (0, \sqrt{1+\lambda})$ e l'intero arco $\widehat{AD}$ della α si trova al disopra dell'arco $\widehat{AB_1}$ della Γ_λ .

Seguiamo ancora l'andamento della separatrice α dopo il punto D .

Finchè è $0 \leq x \leq \sqrt{1-\lambda}$, $y > 0$, si ha $-q_\lambda \leq 0 \leq q_\lambda$ quindi $p_\lambda - q_\lambda \leq p_\lambda + q_\lambda$, ed anche, quando (x, y) è esterno Γ_λ ed a Γ_λ^* , $p_\lambda - q_\lambda \leq p_\lambda + q_\lambda < 0$, da cui

$$(2) \quad \frac{xy}{p_\lambda + q_\lambda} \leq \frac{xy}{p_\lambda - q_\lambda}.$$

L'ultima frazione scritta non è che il secondo membro della (A) e dà perciò la direzione della caratteristica uscente da (x, y) ; la prima frazione di (2) è invece il secondo membro dell'equazione differenziale

$$(A^*) \quad y' = \frac{-xy}{y^2 + (x-1)[(x+1)^2 + \lambda]},$$

al quale sono associate le radici caratteristiche 1 e $-(4+\lambda)$; poichè supponiamo $\lambda > -1$ A è un colle per il sistema ridotto e quindi, in virtù dei risultati di PERRON ora richiamati, esso è colle anche per il sistema ora scritto ed anche per il sistema (B). Da A escono quattro separatrici le cui direzioni in A si ricavano dalla

$$Y' = \frac{Y - XY}{-(4+\lambda)X + 4X^2 + Y^2 - X^3}$$

per $X \rightarrow 0$, $Y \rightarrow 0$. Pertanto sarà $\lim_{X \rightarrow 0} Y' = \infty$ oppure

$$\lim_{X \rightarrow 0} Y' = - \lim_{X \rightarrow 0} Y'/(4+\lambda)$$

e ciò è possibile, essendo $4+\lambda \neq 0$, solo se $\lim_{X \rightarrow 0} Y' = 0$.

le caratteristiche della quale sono tutte e sole le curve dedotte per simmetria rispetto all'asse delle y dalle caratteristiche della (A) . Tra le soluzioni della (A^*) vi è dunque l'arco di curva di estremi D ed $A^* \equiv (1, 0)$ simmetrico dell'arco $\widehat{AD}$ della a ; esso è esterno a Γ_λ^* .

Dalla (2) ricaviamo perciò che uscendo dal punto D la separatrice a resta per $0 < x \leq \sqrt{1-\lambda}$ tutta al di sopra dell'arco $\widehat{DA}^*$.

3. Il caso $-1 < \lambda < 0$.

In questo caso la Γ_λ si compone di un circuito chiuso passante per A , B_1 , B e B_2 di un ramo illimitato, campaniforme, passante per C ; la situazione è illustrata dalla fig. 1.

Fig. 1.

La separatrice a , dovendo restare al disopra di $\widehat{DA}^*$, taglia la retta $x = 1 - \sqrt{1-\lambda}$ (verticale per B) in un punto D_0 di ordinata positiva, necessariamente esterno a Γ_λ . Per il sistema (B) in D_0 è $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$, quindi, crescendo t , x cresce ed y decresce e la separatrice a tende a C per $t \rightarrow +\infty$ ⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾ A priori sono possibili due casi: 1) la a tende verso C restando esterna a Γ_λ ; 2) la a tende verso C dopo aver attraversato il ramo di Γ_λ che passa per C . L'esame dell'effettivo comportamento della a non ha tuttavia interesse per lo studio del fenomeno descritto nell'introduzione.

Evidentemente anche tutte le altre semicaratteristiche positive uscenti da punti della semiretta BD_0 distinti da B tendono a C per $t \rightarrow +\infty$.

Sia ora P un punto dell'arco $\widehat{AB}_1$ di Γ_λ , distinto da A e da B_1 , γ_{P^+} la semicaratteristica positiva uscente da P , Q l'intersezione di γ_{P^+} con l'asse della y (giacente necessariamente tra B_1 e D), $\widehat{QP^*}$ l'arco simmetrico di $\widehat{PQ}$ rispetto all'asse y .

Detta L l'intersezione dell'arco $\widehat{AB}_1$ di Γ_λ con la retta $x = -1 + \sqrt{-\lambda}$, simmetrica della retta BD_0 , due casi sono possibili e cioè: 1°) P appartiene all'arco $\widehat{AL}$ di Γ_λ (A escluso, L incluso); 2°) P appartiene all'arco $\widehat{LB}_1$ di Γ_λ (aperto in L ed in B_1).

Nel 1° caso γ_{P^+} taglia la semiretta BD_0 in un punto di ordinata positiva e quindi (cfr. la Nota ⁽⁶⁾) tende verso C per $t \rightarrow +\infty$; infatti γ_{P^+} deve restare al disopra di $\widehat{QP^*}$ per $0 \leq x \leq \sqrt{1-\lambda}$ e a fortiori, (essendo $-1 < \lambda < 0$) per $0 < x \leq 1 - \sqrt{-\lambda}$. La γ_{P^+} non può perciò appartenere ad un ciclo.

Nel 2° caso sono possibili, a priori, tre eventualità: a) γ_{P^+} incontra BD_0 tra B e D_0 ; b) γ_{P^+} tende per $t \rightarrow +\infty$ verso B ; c) γ_{P^+} taglia, verticalmente, Γ_λ in un punto R dell'arco $\widehat{B_1B}$ di Γ_λ .

Nelle eventualità a) o b) γ_{P^+} non può appartenere ad un ciclo; nella c) osserviamo che se x_P indica l'ascissa di P , x_R quella di R , si ha $x_R > -x_P$. Infatti γ_{P^+} dovendo restare per $0 < x \leq -x_P$ al di sopra di $\widehat{QP^*}$ taglia la Γ_λ^* in un punto di ascissa $> -x_P$; in tale punto dal sistema (B) si ha $\dot{x} > 0$, quindi in R è appunto $x_R > -x_P$. In R la γ_{P^+} entra nella regione interna a Γ_λ , taglia l'asse delle y in un punto S e poi la Γ_λ in un punto T di ascissa x_T . Dico che $x_T < x_P < 0$ e ciò basterà a provare che neppure nell'eventualità c) attualmente in esame la γ_{P^+} può far parte di un ciclo.

Per provare l'asserto si noti che per $-x_R \leq x \leq 0$ si ha $q_\lambda \leq 0 \leq -q_\lambda$, quindi $p_\lambda + q_\lambda \leq p_\lambda - q_\lambda$, ed essendo (x, y) interno ad entrambe le cubiche Γ_λ , Γ_λ^* sarà $0 < p_\lambda + q_\lambda \leq p_\lambda - q_\lambda$ e perciò vale ancora la (2). Ripetendo il ragionamento fatto prima γ_{P^+} deve restare al di sotto dell'arco $\widehat{SR^*}$ simmetrico di $\widehat{SR}$ e tagliare Γ_λ^* in un punto di ascissa $< -x_R < x_P$. Poichè dal sistema (B) si ha in tale punto $\dot{x} < 0$, segue $x_T < -x_R$ e quindi l'asserto.

In conclusione *neppure nel caso $-1 < \lambda < 0$ esistono cicli.*

4. Il caso $\lambda = 0$.

Le considerazioni svolte nel n. 3 si applicano, con evidenti semplificazioni, anche al caso $\lambda = 0$, come il lettore può facilmente constatare. Perciò *anche nel caso $\lambda = 0$ non esistono cicli.*

Vale la pena tuttavia di rilevare esplicitamente alcuni punti nei quali il caso attuale si differenzia dal precedente.

Anzitutto i due punti B e C sono «fusi» in un unico punto $A^* \equiv B \equiv C \equiv (1, 0)$ che è punto doppio nodale per la cubica Γ_λ (cfr. Fig. 2): i quattro punti singolari A , B_1 , $A^* \equiv B \equiv C$, B_2 sono i vertici di un quadrato.

La separatrice a uscente da A taglia necessariamente la retta $x = 1$ (verticale per $A^* \equiv B \equiv C$) in un punto di ordinata positiva; dopodichè, crescendo t , la x e la y decrescono finchè la a incontra Γ_λ in un punto G avente ascissa, necessariamente, > 1 . Indi la y seguita a decrescere, l'ascissa decresce e la separatrice a tende per $t \rightarrow +\infty$ verso il punto $A^* \equiv B \equiv C$.

Fig. 2.

Lo stesso andamento hanno tutte le semicaratteristiche positive che escono da punti di Γ_λ compresi tra A^* e G .

Il punto L (n. 3) coincide adesso con A .

Per ulteriori considerazioni relative al caso $\lambda = 0$ rinviamo il lettore al seguente n. 10.

5. Il caso $0 < \lambda < 1$; generazione di cicli.

I soli punti singolari (al finito) sono adesso $A \equiv (-1, 0)$, $B_1 \equiv (0, \sqrt{1+\lambda})$ e $B_2 \equiv (0, -\sqrt{1+\lambda})$, mentre B e C sono scomparsi dopo essersi fusi per $\lambda = 0$.

Le cubiche Γ_λ e Γ_λ^* si tagliano in sei punti propri e cioè nei tre punti $B_1 \equiv (0, \sqrt{1+\lambda})$, $M \equiv (-\sqrt{1-\lambda}, \sqrt{2\lambda})$, $N \equiv (\sqrt{1-\lambda}, \sqrt{2\lambda})$ e nei loro simmetrici rispetto all'asse delle x : la situazione è rappresentata in Fig. 3.

La separatrice a uscendo da D resta al disopra dell'arco $\widehat{DA^*}$ finchè è $0 < x \leq \sqrt{1-\lambda}$, quindi taglia la retta $x = \sqrt{1-\lambda}$ al di sopra del punto N ed incontra la Γ_λ in un punto E di ascissa $> \sqrt{1-\lambda}$. Indi, crescendo t , la a

penetra nella regione interna a Γ_λ dove (come mostra il sistema (B)) si ha $x < 0$ cosicchè la a incontra nuovamente l'asse delle y in un punto D_1 posto tra B_1 e l'origine degli assi coordinati.

Fig. 3.

Dopo D_1 mentre resta $x < 0$ si ha invece $y > 0$ e la y cresce finchè la a taglia ancora la Γ_λ in un punto F e passa all'esterno di Γ_λ dove è $\dot{x} > 0$.

Così seguitando si vede che la separatrice a compie infiniti giri attorno al punto B_1 avvolgendosi nel verso orario. Diciamo D_2 l'intersezione di a con l'asse delle y successiva a D_1 .

Sia ora P un punto dell'arco $\widehat{MB_1}$ di Γ , distinto da B_1 ; ragionando come si è fatto nel n. 3 per trattare quel caso c) abbiamo che la semicaratteristica positiva γ_{P^+} dopo aver compiuto un giro intorno a B_1 taglia nuovamente Γ_λ in un punto P_1 compreso tra A e P .

Si ha dunque una regione « anulare », quella (tratteggiata nella Fig. 3) che ha per contorno interno il circuito costituito dall'arco $\widehat{FP_1}$ di γ_{P^+} e dall'arco $\widehat{P_1P}$ di Γ_λ e per contorno esterno il circuito costituito dall'arco $\widehat{DD_2}$ della separatrice a e dal segmento D_2D , alla quale possiamo applicare il noto teorema di BENDIXSON ⁽⁷⁾.

⁽⁷⁾ I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, « Acta Math. », 24 (1901), 1-88, p. 29.

Perciò nel caso $0 < \lambda < 1$ esiste almeno un ciclo intorno al punto B_1 [B_2].

Oss. - Proveremo nel n. 7 che non può esistere più di un ciclo intorno al punto B_1 ; possiamo fin d'ora ritenere acquisito questo risultato e indicare con γ_λ il ciclo intorno a B_1 .

Dalla precedente dimostrazione risulta che il ciclo γ_λ incontra la cubica Γ_λ in un punto posto tra A ed M ed incontra Γ_λ^* in un punto posto tra A^* ed N . Poichè per $\lambda \rightarrow 0^+$ i punti M ed N tendono rispettivamente ad A e ad A^* abbiamo che quanto più λ è prossimo a zero tanto più il ciclo γ_λ passa vicino ai punti A ed A^* e quindi all'intera separatrice $\overline{AA^*}$.

Dal confronto della situazione attuale (λ positivo, prossimo a zero) con quella relativa al caso $\lambda = 0$ appare giustificato di affermare che *il ciclo è generato dal circuito costituito, per $\lambda = 0$, dalle due separatrici a ed A^*A e dai due punti singolari A ed A^* .*

6. Il caso $\lambda \geq 1$.

È sempre $\lambda - 1 + x^2 \geq 0$, cosicchè $q_\lambda = -x[\lambda - 1 + x^2]$ si annulla solo se $x = 0$ ed ha segno opposto a quello di x . Le due cubiche Γ_λ , Γ_λ^* non hanno altre intersezioni reali a distanza finita oltre i punti $B_1 \equiv (0, \sqrt{1 + \lambda})$ e $B_2 \equiv (0, -\sqrt{1 + \lambda})$ (Cfr. la Fig. 4).

Fig. 4.

Avremo che, se $x > 0$, segue $q_\lambda \leq 0 \leq -q_\lambda$, ed anche $p_\lambda + q_\lambda \leq p_\lambda - q_\lambda$; e se $x > 0$, ($y > 0$) ed il punto (x, y) è esterno a Γ_λ (e quindi a Γ_λ^*), segue $p_\lambda + q_\lambda \leq p_\lambda - q_\lambda < 0$, e perciò

$$(2') \quad \frac{xy}{p_\lambda - q_\lambda} \leq \frac{xy}{p_\lambda + q_\lambda}.$$

Dunque se P è un qualunque punto dell'arco $\widehat{AB}_1$ di Γ_λ , distinto da B_1 , e costruiamo, al solito, l'arco $\widehat{PQ}$ della semicaratteristica positiva γ_{P^+} ed il simmetrico $\widehat{QP^*}$, avremo questa volta che γ_{P^+} uscendo da Q deve restare al disotto di $\widehat{QP^*}$.

Allora, o γ_{P^+} tende verso B_1 in direzione determinata ⁽⁸⁾ per $t \rightarrow +\infty$, e non può quindi far parte di un ciclo, oppure essa taglia Γ_λ . Indi due eventualità sono ancora possibili, a priori, e cioè o γ_{P^+} tende verso B_1 ⁽⁸⁾ e si conclude come sopra, oppure essa taglia Γ_λ^* in un punto R dell'arco $\widehat{B_1P^*}$. Uscendo da R se γ_{P^+} non tende a B_1 ⁽⁸⁾ essa dovrà tagliare l'asse delle y in un punto S , dopodichè o tende a B_1 ⁽⁸⁾, oppure taglia Γ_λ in un punto T : diciamo che in questo caso T sta tra P e B_1 e quindi γ_{P^+} non può mai far parte di un ciclo.

Basta infatti osservare che se $x < 0$, $y > 0$ e (x, y) è interno sia a Γ_λ che a Γ_λ^* si ha $-q_\lambda \leq 0 \leq q_\lambda$, $0 < p_\lambda - q_\lambda \leq p_\lambda + q_\lambda$ e quindi vale ancora la (2'), cosicchè γ_{P^+} dovrà stare al di sopra dell'arco $\widehat{SR^*}$, simmetrico di $\widehat{RS}$. Poichè R sta tra B_1 e P^* su Γ_λ^* , R^* starà tra P e B_1 su Γ_λ e ciò varrà, a fortiori, per T .

Perciò se $\lambda \geq 1$ non esistono cicli.

7. Esistenza di cicli arbitrariamente piccoli.

Alla fine del n. 5 si è studiato l'andamento dei cicli corrispondenti a valori di λ sufficientemente prossimi a zero; qui vogliamo compiere uno studio analogo relativamente al valore $\lambda = 1$. Proveremo che esistono valori di λ prossimi ad 1 per i quali il ciclo corrispondente è contenuto interamente in un intorno arbitrariamente piccolo del punto $(0, \sqrt{2})$.

Per provare questo fatto, anzichè seguire la tecnica indicata nel volume di ANDRONOW e CHAIKIN ⁽⁹⁾, che nel caso attuale sembra richiedere calcoli eccessivamente laboriosi e delicati, procederemo come segue.

Converrà intanto indicare il punto $(0, \sqrt{1+\lambda})$, anzichè con B_1 , come si è fatto fino ad ora, con $B_1(\lambda)$; nei nn. successivi riprenderemo la notazione abituale.

⁽⁸⁾ Questa eventualità non può darsi se $\lambda = 1$; si veda la successiva Nota ⁽¹⁰⁾.

⁽⁹⁾ Loc. cit. in ⁽¹⁾.

Osserviamo anzitutto che per $\lambda = 1$ non esistono caratteristiche che tendano a $B_1(1) = (0, \sqrt{2})$ con una direzione determinata ⁽¹⁰⁾, perciò tutte le caratteristiche del semipiano $y > 0$ tendono a $B_1(1)$ per $t \rightarrow +\infty$ avvolgendosi a spirale, nel verso orario.

Se $0 < \lambda \leq 1$ e se K è un qualunque punto dell'asse delle y , di ordinata positiva e distinto da $B_1(\lambda)$, la semicaratteristica positiva per K , corrispondente a λ , compie nel verso orario infiniti giri intorno a $B_1(\lambda)$.

Detta $K(\lambda)$ l'intersezione della semicaratteristica positiva per K con l'asse della y dopo il primo giro, la $K(\lambda)$ risulta una funzione continua di λ .

Fissato $\lambda = \bar{\lambda}$ positivo e minore di 1, il punto $B_1(\bar{\lambda}) \equiv (0, \sqrt{1 + \bar{\lambda}})$ si trova al disotto di $B_1(1) \equiv (0, \sqrt{2})$. Il ciclo corrispondente a $\bar{\lambda}$ taglia l'asse y in un punto $C(\bar{\lambda})$ posto tra $B_1(\bar{\lambda})$ e l'origine 0.

Fissiamo il punto K tra $B_1(\bar{\lambda})$ e $C(\bar{\lambda})$; dico che per K passa (almeno) un ciclo. Infatti $K(1)$ sta al disopra di K (poichè la semicaratteristica positiva per K corrispondente a $\lambda = 1$ deve girare intorno a $B_1(1)$ avvolgendosi), mentre $K(\bar{\lambda})$ si trova al disotto di K (poichè la semicaratteristica positiva per K corrispondente a $\bar{\lambda}$, deve girare intorno a $B_1(\bar{\lambda})$ allontanandosene ed avvicinandosi al ciclo che passa per $C(\bar{\lambda})$).

Non esistono valori di λ tra $\bar{\lambda}$ ed 1 per i quali la caratteristica per K si riduca al punto K stesso e, per la continuità della $K(\lambda)$, esisterà almeno un λ' compreso tra $\bar{\lambda}$ ed 1 tale che $K(\lambda') \equiv K$, da cui l'asserto.

Abbiamo così che per *ogni* punto K posto al disotto di $B_1(1)$ passa almeno un ciclo e dalla dimostrazione risulta anche che il corrispondente fuoco $B_1(\lambda)$ è posto tra K e $B_1(1)$.

⁽¹⁰⁾ Ciò non è immediatamente deducibile dai teoremi di PERRON poichè il punto $B_1(1)$ è, per il sistema ridotto, un centro. Ma si può ragionare come segue. Mediante la traslazione $x = X$, $y = Y + \sqrt{2}$ il sistema (B) diventa ($\lambda = 1$)

$$\begin{cases} \dot{X} = 2\sqrt{2}Y + X^2 + Y^2 - X^3 \\ \dot{Y} = -\sqrt{2}X - XY. \end{cases}$$

Se vi fossero caratteristiche che tendono a $B_1(1)$ in direzione determinata esse si potrebbero rappresentare nella forma $X = X(Y)$ nell'intorno di $B_1(1)$ e dovrebbero soddisfare l'equazione

$$\frac{dX}{dY} = \frac{2\sqrt{2}Y + X^2 + Y^2 - X^3}{-\sqrt{2}X - XY},$$

dalla quale risulta che dX/dY non può avere limite finito per $Y \rightarrow 0$.

D'altronde tali caratteristiche sarebbero rappresentabili in un intorno di $B_1(1)$ anche nella forma $Y = Y(X)$ e dovrebbero soddisfare l'equazione

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-\sqrt{2}X - XY}{2\sqrt{2}Y + X^2 + Y^2 - X^3}$$

da cui segue che dY/dX non può avere limite finito per $X \rightarrow 0$.

Facciamo ora alcune considerazioni sulla cubica

$$\varphi_\lambda: \sqrt{1+\lambda} y = (x+1)[(x-1)^2 + \lambda],$$

per $0 < \lambda \leq 1$; essa taglia l'asse delle x in $A \equiv (-1, 0)$ e quello delle y in $B_\lambda(\lambda)$.

L'ordinata y ha un massimo per $x = (1 - \sqrt{4-3\lambda})/3$, un minimo per $x = (1 + \sqrt{4-3\lambda})/3$, cosicchè se $\eta < \sqrt{1+\lambda}$ la retta $y = \eta$ taglia φ_λ in un sol punto di ascissa $x'_\lambda < 0$. Questa ascissa x'_λ , se η cresce fino a $\sqrt{1+\lambda}$, decresce in valore assoluto fino a raggiungere per $\eta = \sqrt{1+\lambda}$, il valore $(1 - \sqrt{5-4\lambda})/2$ e questo valore è infinitesimo per $\lambda \rightarrow 1$; questa circostanza sarà utilizzata tra breve.

Sempre se $\eta < \sqrt{1+\lambda}$ e se η è sufficientemente prossimo a $\sqrt{1+\lambda}$ la retta $y = \eta$ taglia la φ_λ in due punti di ascissa positiva; la minore delle due ascisse, x''_λ , decresce se η cresce fino a $\sqrt{1+\lambda}$ ed è infinitesima per $\eta \rightarrow \sqrt{1+\lambda}$; anche di questo ci varremo tra breve.

Quando $\lambda = 1$ la φ_λ si riduce alla cubica

$$\varphi_1: \sqrt{2} y = x^3 - x^2 + 2,$$

la cui ordinata ha il massimo per $x = 0$, cioè in $B_1(1) \equiv (0, \sqrt{2})$. Si può dunque determinare un numero $r > 0$ tale che il cerchio di centro $B_1(1)$ e raggio r tagli la φ_1 in due soli punti reali e tutti i punti dell'arco di φ_1 avente estremi in tali intersezioni risulteranno interni a questo cerchio.

Si potrà allora, per continuità, determinare un numero $\delta > 0$ tale che se $|\lambda - 1| < \delta$ il cerchio C_λ di centro $B_\lambda(\lambda) \equiv (0, \sqrt{1+\lambda})$ e raggio r tagli φ_λ in due soli punti reali e tutti i punti dell'arco di φ_λ che ha per estremi tali intersezioni siano interni al cerchio.

Ciò premesso moltiplichiamo la prima equazione del sistema (B) per x , la seconda per $y - \sqrt{1+\lambda}$; sommando membro a membro avremo

$$xx + (y - \sqrt{1+\lambda})y = x \{ \sqrt{1+\lambda} y - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda] \},$$

cosicchè lungo una caratteristica i punti estremanti della espressione $d^2 = x^2 + (y - \sqrt{1+\lambda})^2$ e quindi della distanza da $B_\lambda(\lambda)$ del punto mobile sulla caratteristica stessa si trovano sull'asse delle y oppure sulla φ_λ . Precisamente l'asse y e la φ_λ dividono il semipiano $y > 0$ in quattro regioni che in Fig. 5 abbiamo numerato I, II, III, IV, tali che $xx + (y - \sqrt{1+\lambda})y$ è positivo in I e III, negativo in II e IV. Perciò lungo una caratteristica d^2 ha minimi relativi nelle intersezioni di questa con l'asse delle y , mentre i suoi massimi sono in quei punti in cui la caratteristica attraversa la φ_λ .

Da quanto precede si ha che possiamo prendere un punto K al disotto di $B_1(1)$ avente i seguenti requisiti: 1) per K passi un ciclo; 2) K sia così vicino a $B_1(1)$ che il cerchio C_λ di centro $B_\lambda(\lambda)$ e raggio r abbia la proprietà,

detta prima, di tagliare φ_λ in due soli punti reali; 3) detta K_1 l'intersezione con φ_λ della retta orizzontale passante per K avente ascissa negativa e detta K_3 quella con l'ascissa positiva più piccola, entrambi i punti K_1 e K_3 risultino interni a C_λ .

Fig. 5.

Il ciclo passante per K (o i cicli) resterà tutto al disopra della retta K_1K_3 ; tracciato nel verso orario un arco di cerchio $\widehat{K_1K_2}$ di centro $B_1(\lambda)$ passante per K_1 fino ad intersecare in K_2 l'asse y e tracciato nel verso antiorario un secondo arco di cerchio $\widehat{K_3K_4}$ con centro $B_1(\lambda)$, passante per K_3 fino ad intersecare in K_4 l'asse delle y , il ciclo (o i cicli) resta tutto dentro la regione (tratteggiata in fig. 5) che ha per contorno la spezzata mistilinea $K_1K_3K_4K_2K_1$.

Il diametro di questa regione tende a zero come la somma dei raggi $\overline{B_1K_1} + \overline{B_1K_3}$ se tende a zero la distanza fra K e $B_1(\lambda)$, e poichè si è visto che comunque si prenda K al disotto di $B_1(1)$ vi è sempre (almeno) un ciclo per K , segue l'esistenza di cicli interamente contenuti in un intorno arbitrariamente piccolo del punto $B_1(1)$ come si era asserito all'inizio di questo numero.

8. Unicità del ciclo (intorno a B_1).

Tra i due piani x, y ed u, v si consideri la trasformazione

$$(T) \quad \begin{cases} u = x \\ v = y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]. \end{cases}$$

La (T) fa corrispondere alla coppia di punti (x, y) , $(x, -y)$ un sol punto (u, v) , ma poichè possiamo limitare le nostre considerazioni al semipiano $y \geq 0$, ad ogni punto (x, y) di questo corrisponderà un sol punto (u, v) . Se si vuole invertire la (T) nel campo reale dovrà aversi $y^2 \geq 0$, o ciò che è lo stesso, i punti (u, v) immagini di punti reali del semipiano $y \geq 0$ sono i punti della cubica

$$\chi: v = -(u+1)[(u-1)^2 + \lambda]$$

(immagine dell'asse delle x) e quelli che stanno « al disopra » di essa.

Il punto $A \equiv (-1, 0)$ va nel punto $A^* \equiv (-1, 0)$ del piano u, v , il ramo di Γ_λ che sta nel semipiano $y > 0$ ha per immagine la semiretta $v = 0$, $u > -1$; in particolare il punto $B_1 \equiv (0, \sqrt{1+\lambda})$ va nell'origine $B_1^* \equiv (0, 0)$ del piano u, v . (Cfr. la Fig. 6).

Fig. 6.

La (T) muta inoltre le caratteristiche del sistema (B) in quelle del sistema

$$(C) \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -[3u^2 - (1-\lambda)]v - 2u(u+1)[(u-1)^2 + \lambda], \end{cases}$$

e la corrispondenza tra i due insiemi di caratteristiche è biunivoca. In particolare alla separatrice α di (B) , la quale, come si è visto, esce da A ed incontra poi l'asse y in D , la Γ_λ in E , di nuovo l'asse y in D_1 ed ancora la Γ_λ in F , corrisponderà nel piano u, v una caratteristica α^* di (C) la quale (Cfr. la Fig. 7) esce da A^* , incontra l'asse delle v in un punto D^* , indi l'asse delle u in un punto E^* , di nuovo l'asse delle v in un punto D_1^* ed ancora l'asse delle u in un punto F^* , posto fra A^* e B_1^* .

Ogni caratteristica di (C) uscente da un punto P_0 fra D^* e B_1^* dovrà necessariamente compiere infiniti giri intorno a B_1^* ; dopo uno di questi giri essa taglierà l'asse delle v in un punto P_1 e sarà $P_1 \equiv P_0$ allora e solo quando la corrispondente caratteristica di (B) è un ciclo.

Fig. 7.

Per provare che (B) non può avere due cicli intorno a B_1 basterà allora far vedere che (C) non può avere due cicli intorno a B_1^* .

Per questo converrà scrivere (C) nella forma

$$(D) \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -f_\lambda(u)v - g_\lambda(u) \end{cases}$$

dopo aver posto

$$(3) \quad \begin{cases} f_\lambda(u) = 3u^2 - (1 - \lambda) \\ g_\lambda(u) = 2u(u + 1)[(u - 1)^2 + \lambda], \end{cases}$$

ed adattare poi al sistema (D), ovvero all'equazione

$$(D') \quad \frac{dv}{du} = -f_\lambda(u) - \frac{g_\lambda(u)}{v},$$

un ragionamento già usato da N. LEVINSON e O. K. SMITH ⁽¹¹⁾.

⁽¹¹⁾ Ved. N. LEVINSON - O. K. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*, «Duke Math. J.», 9 (1942), 382-403, p. 394; cfr. anche G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte 2^a (2^a Ed., Bologna, 1949), p. 402 e segg.

Se $P_0 \equiv (0, v_0)$ è un punto posto fra B_1^* e D^* , detto γ_0 l'arco di caratteristica uscente da P_0 , descritto per t crescente fino alla successiva intersezione $P_1 \equiv (0, v_1)$ col segmento $B_1^*D^*$, possiamo introdurre la funzione

$$\Delta(v_0) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2),$$

per la quale si ha $\Delta(v_0) = 0$ allora e solo quando $P_1 \equiv P_0$, ossia allora e solo quando γ_0 è chiuso ⁽¹²⁾,

La $\Delta(v_0)$ è, per noti risultati sulla dipendenza degli integrali dai dati iniziali, una funzione di v_0 continua e dotata di derivata; questa è data da

$$\frac{d\Delta(v_0)}{dv_0} = v_1 \cdot \left. \frac{\partial v}{\partial v_0} \right|_{P_1} - v_0,$$

ed è perciò

$$\frac{d\Delta(v_0)}{dv_0} = v_0 \left(\left. \frac{\partial v}{\partial v_0} \right|_{P_1} - 1 \right),$$

se γ_0 è un arco chiuso.

Basterà ora provare che se γ_0 è un arco chiuso si ha

$$(4) \quad \left. \frac{\partial v}{\partial v_0} \right|_{P_1} < 1$$

poichè allora se vi fosse più di un ciclo si avrebbe l'assurdo di una funzione $\Delta(v_0)$ continua con derivata negativa in tutti i suoi zeri.

Resta dunque da provare la (4), od anche l'equivalente

$$(4') \quad \log \left| \left. \frac{\partial v}{\partial v_0} \right| \right|_{P_1} < 0.$$

Dalla (D') abbiamo

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial v}{\partial v_0} \right) = \frac{g_\lambda(u)}{v^2} \frac{\partial v}{\partial v_0},$$

od anche

$$(5) \quad d \log \left| \frac{\partial v}{\partial v_0} \right| = \frac{g_\lambda(u)}{v^2} du = - \frac{f_\lambda(u)}{v} du - d \log |v|.$$

⁽¹²⁾ Cioè γ_0 fa parte di un ciclo; l'intero ciclo si ottiene descrivendo infinite volte γ_0 nei due versi.

Se si integra questa lungo l'arco di curva γ_0 avendo presente che è

$$\frac{\partial v}{\partial v_0} \Big|_{P_0} = 1, \quad \log \left| \frac{\partial v}{\partial v_0} \right| \Big|_{P_0} = 0,$$

si ottiene

$$\log \left| \frac{\partial v}{\partial v_0} \right| \Big|_{P_1} = - \int_{\gamma_0} \frac{f_\lambda(u)}{v} du - \log \left| \frac{v_1}{v_0} \right|.$$

Se γ_0 è chiuso, scelta una rappresentazione mediante il parametro t tale che P_0 corrisponda a $t=0$, P_1 a $t=T$ (periodo) avremo anche

$$\log \left| \frac{\partial v}{\partial v_0} \right| \Big|_{P_1} = - \int_0^T f_\lambda(u(t)) dt,$$

e provare la (4') equivarrà a provare la

$$(4'') \quad \int_0^T f_\lambda(u(t)) dt > 0.$$

Introduciamo a questo scopo le funzioni

$$G_\lambda(u) = \int_0^u g_\lambda(z) dz$$

$$\Omega(u, v) = v^2 + 2G_\lambda(u) - 2G_\lambda(\delta).$$

con

$$\delta = \sqrt{\frac{1-\lambda}{3}},$$

ed osserviamo che dalla (D) risulta lungo ogni caratteristica

$$(5) \quad d\Omega(u, v) = -2[v(t)]^2 f(u(t)) dt.$$

Nel n. 5 abbiamo visto che i cicli di (B) non hanno punti di ascissa ≤ -1 e tagliano (le due rette $x = -\sqrt{1-\lambda} = -3\delta$, $x = \sqrt{1-\lambda} = 3\delta$ e quindi, a fortiori) le due rette $x = -\delta$, $x = \delta$; per la (T) lo stesso avverrà per i cicli di (C).

Dalla (5) risulta che i punti estremanti di $\Omega(u, v)$ lungo una caratteristica sono quelli in cui questa taglia l'asse delle u ($v=0$) oppure le rette $u = \pm \delta$, ($f_\lambda(\pm \delta) = 0$).

Ma essendo ⁽¹³⁾

$$(6) \quad \begin{cases} G_\lambda(u) - G_\lambda(\delta) > 0, & f_\lambda(u) > 0 & \text{se } -1 < u < -\delta, \delta < u, \\ G_\lambda(u) - G_\lambda(\delta) < 0, & f_\lambda(u) < 0 & \text{se } -\delta < u < \delta, \end{cases}$$

segue subito che se γ_0 è un arco di caratteristica che taglia entrambe le rette $u = -\delta$, $u = \delta$, si ha su di esso $\Omega(u(t), v(t)) > 0$ e

$$\frac{v^2(t)}{\Omega(u(t), v(t))} f_\lambda(u(t)) < f_\lambda(u(t)).$$

Questa disuguaglianza varrà in particolare per i cicli e dalla (5), dividendo per $\Omega(u(t), v(t))$ e integrando da 0 a T , segue la (4').

9. Un'equazione di Liénard (generalizzata).

Osserviamo che dalla precedente analisi e tenuto conto del n. preced. risulta anche che l'equazione

$$(E) \quad \ddot{u} + [3u^2 - (1 - \lambda)]u + 2u(u + 1)[(u - 1)^2 + \lambda] = 0$$

non ammette soluzioni periodiche se $\lambda \leq 0$ oppure se $\lambda \geq 1$, mentre se $0 < \lambda < 1$ essa ammette una ed una sola soluzione periodica (stabile).

Ciò non sembra senz'altro deducibile dai risultati noti relativamente alle equazioni del tipo di LIÉNARD (generalizzate) cui la (E) appartiene ⁽¹⁴⁾.

§ 2. Struttura delle caratteristiche per $5 - 4\sqrt{2} < \lambda < 5 + 4\sqrt{2}$.

Completeremo in questo § quanto si è visto nel § 1 studiando la configurazione delle caratteristiche del sistema (B) nell'ipotesi

$$5 - 4\sqrt{2} < \lambda < 5 + 4\sqrt{2}.$$

Ci soffermiamo su questo intervallo che copre interamente l'insieme dei valori di λ passando attraverso ai quali si manifesta il fenomeno della generazione e scomparsa dei cicli.

I due valori estremi $\lambda_1 = 5 - 4\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 5 + 4\sqrt{2}$, non sono scelti a caso; infatti le radici caratteristiche associate al punto $B_1 \equiv (0, \sqrt{1 + \lambda})$ (ed al simmetrico B_2) sono date da

$$\frac{1 - \lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)},$$

⁽¹³⁾ Si noti che, essendo $0 < \lambda < 1$, la $g_\lambda(u)$ per $-1 < u$ ha il segno della u .

⁽¹⁴⁾ Per la bibliografia su quest'argomento si veda ad es.: R. CONTI, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard generalizzata. Esistenza ed unicità*, « Boll. U.M.I. », (3) 7 (1952), 111-118.

cosicchè B_1 risulta per il sistema ridotto corrispondente a (B) fuoco instabile se $\lambda_1 < \lambda < 1$, centro se $\lambda = 1$, fuoco stabile se $1 < \lambda < \lambda_2$.

Considereremo nella nostra discussione anche il valore $\lambda = 0$ e distingueremo quattro casi come segue: $\lambda_1 < \lambda < 0$, $\lambda = 0$, $0 < \lambda < 1$, $1 \leq \lambda < \lambda_2$.

10. Il caso $\lambda_1 < \lambda < 0$.

I punti B_1 e B_2 sono fuochi instabili, C un nodo stabile, A e B due colli; B è dotato di 2 separatrici orizzontali appartenenti all'asse delle x e 2 separatrici che tendono a B per $t \rightarrow +\infty$ verticalmente ⁽¹⁵⁾. Di queste chiameremo b quella appartenente al semipiano $y > 0$.

Si è già visto (n. 3) che la separatrice a uscente da $A \equiv (-1, 0)$ tende a $C \equiv (1 + \sqrt{-\lambda}, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$; perciò la separatrice b , per $t \rightarrow -\infty$, tenderà, a spirale, verso B_1 .

Per ogni punto della regione esterna ad a , nel semipiano $y > 0$, passa una caratteristica la quale tende verso X_∞ per $t \rightarrow -\infty$ e verso C per $t \rightarrow +\infty$; per ogni punto della regione interna al circuito costituito dalla a , dalla separatrice $\vec{BC}$, dalla separatrice $\vec{BA}$ e dai tre punti A, B, C , passa una caratteristica la quale tende a spirale verso B_1 per $t \rightarrow -\infty$ mentre per $t \rightarrow +\infty$ tende (se non è la b) verso C .

Data la simmetria rispetto all'asse delle x possiamo concludere che nel caso attuale tutte le caratteristiche non separatrici provengono da X_∞ o da B_1 o da B_2 e tendono tutte a C .

Fig. 8.

⁽¹⁵⁾ Ciò si vede operando come già si è fatto per il punto A nella nota ⁽⁵⁾. Effettuata la traslazione $x = X + 1 - \sqrt{-\lambda}$, $y = Y$ l'equazione (A) diventa

$$Y' = \frac{-(1 - \sqrt{-\lambda})Y - XY}{2\sqrt{-\lambda}(2 - \sqrt{-\lambda})X + (3\sqrt{-\lambda} - 2)X^2 + Y^2 - X^3}$$

da cui per $X \rightarrow 0$, $Y \rightarrow 0$ si ricava che Y' tende a ∞ oppure a zero.

La configurazione è illustrata nella Fig. 8 dove le separatrici sono indicate con tratto più marcato, i punti singolari con cerchietti; la stessa figura, come pure le successive si riferiscono alla rappresentazione sulla sfera di POINCARÉ di cui si è già fatto uso nel n. 1.

11. Il caso $\lambda = 0$.

Mentre il punto A rimane un colle e B_1, B_2 rimangono fuochi instabili, i punti B e C si fondono ora in un sol punto $A^* \equiv (1, 0)$, che è una singolarità di tipo « non elementare ».

Dalla (A) risulta che ogni caratteristica che tenda verso A^* non vi può tendere che orizzontalmente o verticalmente.

La prima eventualità si verifica effettivamente per la separatrice a , la quale, dopo aver attraversato Γ_λ in G (ci riferiamo alla Fig. 2) deve restare interna a Γ_λ quindi non può tendere ad A^* verticalmente; lo stesso è di tutte le caratteristiche che passano per punti di Γ_λ compresi tra A^* e G .

Congiungiamo ora G con un punto H di Γ_λ posto tra A^* e B_1 e sia P un punto del segmento GH . Se la caratteristica per P taglia (per t crescente) la Γ_λ tra A^* ed H [tra A^* e G] lo stesso è di tutte le caratteristiche uscenti da punti di GH di ascissa minore [maggiore] di quella di P . I punti P della prima [seconda] specie riempiono un segmento HJ_1 aperto in J_1 [un segmento J_2G aperto in J_2]; la caratteristica per J_1 non può attraversare l'arco $\widehat{A^*G}$ di Γ_λ e tenderà perciò ad A^* , ma non potendo attraversare l'arco $\widehat{A^*G}$ essa dovrà tendere ad A^* verticalmente. Lo stesso ragionamento vale per la caratteristica uscente da J_2 .

Diciamo che $J_1 \equiv J_2$.

Se ciò non fosse, per ogni punto di GH compreso tra J_1 e J_2 dovrebbe passare una caratteristica che tende ad A^* , per $t \rightarrow +\infty$, verticalmente.

Effettuata la traslazione $x = X + 1, y = Y$ il sistema (B) diventa

$$\begin{cases} \dot{X} = -2X^2 + Y^2 - X^3 \\ \dot{Y} = -Y - XY. \end{cases}$$

Per Y sufficientemente vicino a zero l'equazione di una caratteristica uscente da un punto tra J_1 e J_2 si potrà scrivere $X = Y\xi(Y)$ ed essendo per ipotesi $\lim_{Y \rightarrow 0} Y/X = \lim_{Y \rightarrow 0} Y' = \infty$ dovrà aversi

$$(7) \quad \lim_{Y \rightarrow 0} \xi(Y) = 0.$$

Ma la $\xi(Y)$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi + Y - \xi^2 Y - \xi^3 Y^2 \\ \dot{Y} = -Y - \xi Y^2, \end{cases}$$

per il quale il teorema di PERRON assicura che il punto $(0, 0)$ è un colle, cosicchè non vi potrà essere che un numero finito di soluzioni $\xi(Y)$ per cui vale la (7); quindi il segmento $J_1 J_2$ dovendo comprendere solo un numero finito di punti sarà in effetti ridotto all'unico punto $J \equiv J_1 \equiv J_2$.

La caratteristica per J possiamo indicarla con b ed allora la situazione nel caso attuale appare (cfr. Fig. 9) il caso limite per $\lambda \rightarrow -0$ di quella del caso precedente.

Fig. 9.

Sarà bene osservare esplicitamente che la cosa non si può dedurre immediatamente ragionando « per continuità » perchè per $\lambda = 0$ il sistema (B) rientra tra i cosiddetti *sistemi a struttura instabile* ⁽¹⁶⁾; il valore $\lambda = 0$ è un valore di « biforcazione » attraversando il quale la struttura delle caratteristiche subisce una brusca trasformazione, come mostra l'esame del caso seguente.

12. Il caso $0 < \lambda < 1$.

I punti B e C sono scomparsi dopo essersi fusi: sono comparsi i due cicli, uno intorno a B_1 , l'altro intorno a B_2 . Tutte le caratteristiche (non singolari) ad eccezione delle due appartenenti all'asse delle x , tendono per $t \rightarrow +\infty$ verso l'uno o l'altro ciclo, quelle esterne provenendo da X_∞ o da A (la separatrice a e la sua simmetrica), quelle interne provenendo da B_1 o da B_2 (Ved. Fig. 10).

⁽¹⁶⁾ Sui concetti della stabilità ed instabilità di struttura si veda, anche per la bibliografia, il recente lavoro di H. F. DE BAGGIS, *Dynamical systems with stable structures*, (Contributions to the theory of non-linear oscillations, vol. II), Princeton Univ. Press., 1952, pp. 37-59.

Fig. 10.

13. Il caso $1 \leq \lambda < \lambda_2$.

I punti B_1 e B_2 sono ora del tipo del fuoco stabile: ciò risulta dai teoremi di PERRON se $1 < \lambda < \lambda_2$ ed è stato dedotto per altra via se $\lambda = 1$ nel n. 7. Non esistono cicli e tutte le caratteristiche (non singolari) provengono da X_{∞} o da A (la separatrice a e la simmetrica) e per $t \rightarrow +\infty$ tendono a spirale verso B_1 quelle del semipiano $y > 0$, verso B_2 quelle del semipiano $y < 0$ (Cfr. Fig. 11).

Fig. 11.

Osserveremo infine che lo schema resta lo stesso anche se $\lambda \geq \lambda_2$, salvo che B_1 e B_2 diventano del tipo del nodo stabile.