Sulla interazione ionosferica delle onde elettromagnetiche.

Nota di MARZIANO MARZIANI (a Ferrara) (°)

Sunto. - *Si stabilisce il legame non lineare, di tipo ereditario, fra densità di corrente e campo elettrico (quest'ultimo variabile col tempo con legge qualsiasi), che, nella ionosfera, è alla base di vari fenomeni d'interazione fra onde elettromagnetiche interessanti le radio-comunicazioni (cross-modulation, self-modulation, ecc.). In tal modo si colmano certe lacune della teoria «ereditaria» dei detti fenomeni e si ricollegano quantitativamente i risultati di questa con le acquisizioni della teoria «elementare».*

1. - La possibilità che onde elettromagnetiche interagiscano fra loro nella ionosfera è stata riconosciuta nel 1933 da B. D. H. TELLEGEN osservando sperimentalmente che l'onda emessa da una stazione radio «potente» era in grado d'influenzare l'onda, non modulata, emessa da una stazione «più debole» di diversa frequenza, trasferendo ad essa la propria modulazione (effetto Lussemburgo o ionospheric cross-modulation). Secondo V. A. BAILEY e D. F. MARTYN [1] il campo della prima onda, provocando con la propria modulazione oscillazioni con la frequenza di quest'ultima nell'energia cinetica media degli elettroni ionosferici, modifica corrispondentemente la frequenza delle collisioni di questi e quindi l'indice di assorbimento del mezzo. In conseguenza di ciò, il campo della seconda onda, che dipende da tale indice, viene ad assumere la modulazione della prima.

Tale teoria (detta comunemente «elementare»), anche se interpreta il meccanismo fisico del fenomeno, non fornisce tuttavia nella sua forma originaria equazioni generali per il campo elettromagnetico che tengan conto degli

---

(°) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) V. A. BAILEY and D. F. MARTYN, *The Influence of Electric Waves on the Ionosphere*, «Philosophical Magazine S. 7», vol. 18 (1934), pp. 369-386. - V. A. BAILEY, *On some Effects caused in the Ionosphere by Electric Waves*, «Philosophical Magazine S. 7», vol. 23 (1937) pp. 929-960 e vol. 26 (1938), pp. 425-453. Altre esposizioni di tale teoria sono state date successivamente da vari Autori. (Si veda ad es. L. G. H. HUXLEY and J. A. RATCLIFFE, *A Survey of Ionospheric Cross-modulation*, «Procedings of the Institution of Electrical Engineers», vol. 96 (1949), pp. 433-440; oppure la trattazione fatta da H. BREMMER in, *Propagation of Electromagnetic Waves*», «Handbuch der Physik», Berlin, Springer Verlag, 1958, p. 573 e segg.

effetti non lineari [2] d'interazione ionosferica. Equazioni di questo tipo sono state stabilite fin dal 1936 da D. GRAFFI [3] nella sua teoria « ereditaria » associando alle ordinarie equazioni di MAXWELL e alle relazioni $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ [4] il legame non lineare a carattere ereditario fra i vettori densità di corrente $\boldsymbol{J}$ e campo elettrico $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{J}(t) = \int_0^t \alpha(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^t\int_0^t \gamma(t-\tau_1,\ t-\tau_2,\ t-\tau_3)\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{1}$$

con α e γ omografie rispettivamente del primo e del terzo ordine.

È però da rilevare che, essendo state tali omografie lasciate del tutto indeterminate dal GRAFFI, i risultati che si possono dedurre dalle suddette equazioni sono solo qualitativi. Non è quindi privo d'interesse concettuale e pratico il problema di determinare esplicitamente queste omografie. I progressi recenti della fisica elettronica dovuti a vari Autori (V. L. GINZBURG, A. V. GUREVICH [5], I. M. VILENSKIY [6], D. H. MENZEL e D. LAYZER [7], ecc.) che hanno inquadrato il fenomeno della interazione ionosferica nella teoria dei plasma basata sull'equazione del trasporto di BOLTZMANN (la cosidetta teoria « cinetica »), consentono ora di valutare con alcune approssimazioni la α e la γ. Le espressioni che si ottengono trascurando l'influenza del campo ma-

---

(2) L'interazione delle onde elettromagnetiche è infatti incompatibile con l'ipotesi della linearità delle equazioni del campo.

(3) D. GRAFFI, *Una teoria ereditaria dell'effetto Lussemburgo*, « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », Anno VII (1936), pp. 36-54.

(4) In tali equazioni $\boldsymbol{D}$ indica il vettore spostamento, $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, $\boldsymbol{H}$ il campo magnetico, ε e μ rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del gas non ionizzato.

(5) V. L. GINZBURG and A. V. GUREVICH, *Nonlinear Phenomena in a Plasma Located in an Alternating Electromagnetic Field*, « Uspekhi Fiz. Nauk », vol. 70 (1960), pp. 201-246 e pp. 393-428. I risultati di varie ricerche di questi e di altri Autori, insieme con un'ampia bibliografia sull'argomento, sono riportati nel volume di V. L. GINZBURG, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, « Amsterdam, North-Holland Publishing Comp. », 1961.

(6) I. M. VILENSKIY, *On the Theory of Radio-Wave Interaction in the Ionosphere*, « Zurn. Eksp. Teoret. Fiz. », T. 22 (1952), pp. 544-561.

(7) D. H. MENZEL and D. LAYZER, *The Interaction of Electromagnetic and Acoustic Waves in an Ionized Medium*, « Report U. S. Air Force », 14 March 1959 - *Ionospheric Cross-Modulation: A Microscopic Theory*, « Radio Science Journal of Research », vol. 69 D. (1965) pp. 59-68.

gnetico terrestre sono:

(2) $$\alpha(s) = \frac{e^2 N}{m} e^{-\nu_0 s}$$

(3) $$\gamma(s_1, s_2, s_3)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 =$$
$$= \Gamma_{123}(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_3 + \Gamma_{132}(\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_2 + \Gamma_{231}(\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_1$$

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ essendo tre vettori generici e

(4) $$\Gamma_{ijk} = \nu_0 g(s_i, s_j) \frac{\partial e^{-\nu_0 s_k}}{\partial \nu_0}$$

(5) $$g(s_i, s_j) = g(s_j, s_i) =$$
$$= \frac{e^4 N}{18 m^2 k T} \{ e^{-\nu_0[(\delta-1)s_i + s_j]} \mathbf{1}(s_j - s_i) + e^{-\nu_0[(\delta-1)s_j + s_i]} \mathbf{1}(s_i - s_j) \}$$
$$i \neq j \neq k$$

(6) $$s = t - \tau, \quad s_i = t - \tau_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e dove gli altri simboli hanno il significato seguente:

N = concentrazione degli elettroni ionosferici

e, m = carica, massa dell'elettrone

k = costante di BOLTZMANN

T = temperatura assoluta delle molecole neutre

ν_0 = frequenza effettiva delle collisioni fra elettrone e molecola in assenza di campo elettrico, cioè quando la temperatura degli elettroni è uguale a T

δ = frazione media di energia trasferita da un elettrone nella collisione con una molecola

$\mathbf{1}(s)$ = funzione di HEAVISIDE.

Le relazioni (1), (2), (3) rendono possibile uno studio più preciso dei fenomeni d'interazione fra radio-onde da cui emerge una sostanziale concordanza dei risultati della teoria « ereditaria » e di quella « elementare ». L'estensione di tali considerazioni al caso in cui non s'intendano trascurare gli effetti del campo magnetico terrestre viene lasciata ad altra ricerca.

2. - Ponendoci dal punto di vista della teoria « cinetica », conveniamo d'identificare il mezzo ionosferico in cui il fenomeno d'interazione si svolge con un plasma imperfettamente lorentziano, cioè con un gas composto di elet-

troni e di molecole neutre [8] nel quale la massa m^* della molecola è molto grande in confronto della massa m dell'elettrone (così che il rapporto m/m^* risulti piccolo rispetto all'unità senza che possa considerarsi nullo [9]) e piccolo è il numero degli elettroni in confronto al numero delle molecole [10]. Sia poi $\boldsymbol{E}(t)$ il campo elettrico, uniforme e di debole intensità, che agisce sul plasma (nullo per $t \leq 0$ e comunque variabile col tempo t per $t > 0$) e trascurabile l'effetto del campo magnetico (variabile) della radiazione e del campo magnetico (costante) della terra. Allora, nella ipotesi che il plasma possa considerarsi spazialmente omogeneo, la funzione di distribuzione $f = f(\boldsymbol{v}, t)$ delle velocità $\boldsymbol{v}$ degli elettroni soddisfa all'equazione di BOLTZMANN

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathfrak{e}}{m}\boldsymbol{E} \cdot \nabla_v f + S = 0 \tag{7}$$

dove $\mathfrak{e}$ è la carica dell'elettrone, $\nabla_v f$ è il gradiente di f nello spazio delle velocità e S è il cosidetto integrale delle collisioni rappresentante la variazione di f nell'unità di tempo dovuta agli urti degli elettroni con le molecole. La funzione f deve inoltre soddisfare alla condizione di normalizzazione

$$\int f(\boldsymbol{v}, t) d\boldsymbol{v} = N \tag{8}$$

ove l'integrale s'intende esteso all'intero spazio delle velocità e N denota la concentrazione costante degli elettroni.

Com'è noto [11], poichè la frazione media δ di energia trasferita da un elettrone nell'urto con una molecola [12] è molto piccola rispetto all'unità, è possibile scrivere la funzione di distribuzione nella forma approssimata

$$f(\boldsymbol{v}, t) = f_0(v, t) + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_1(v, t)}{v} \tag{9}$$

$$|\, \boldsymbol{f}_1(v, t) \,| \ll f_0(v, t) \quad (^{13})$$

[8] Ammettiamo per semplicità che gli ioni pesanti (positivi o negativi) non influenzino sensibilmente la propagazione delle radio-onde così da poter trascurare la loro presenza.

[9] In modo da tener conto dei piccoli scambi d'energia verificantisi nelle collisioni binarie fra elettroni e molecole.

[10] In modo da poter trascurare gli urti fra elettroni. Gli urti fra elettroni e molecole si suppongono perfettamente elastici.

[11] Cfr. V. L. GINZBURG, *Propagation of electromagnetic Waves in plasma*, pp. 42-43.

[12] Ricordiamo che per le collisioni elastiche è $\delta = 2m/m^*$; in particolare, per lo strato E della ionosfera $\delta \simeq 2{,}610^{-3}$.

[13] Si ammette cioè che la funzione di distribuzione non si scosti molto dall'essere isotropa.

ove v è il modulo di $\boldsymbol{v}$, e sostituire la (7) col sistema

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial t} + \dfrac{e}{3mv^2}\dfrac{\partial}{\partial v}(v^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{f}_1) + S_0 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \dfrac{e}{m}\,\boldsymbol{E}\,\dfrac{\partial f_0}{\partial v} + \boldsymbol{S}_1 = 0 \end{cases}$$

in cui S_0 e $\boldsymbol{S}_1$ sono i primi due coefficienti dello sviluppo di S in serie di armoniche sferiche di superficie ([14]), espressi con sufficiente approssimazione da ([15])

$$(11)\qquad \begin{aligned} S_0 &= -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\delta\nu\left[\frac{kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + vf_0\right]\right\} \\ \boldsymbol{S}_1 &= \nu\boldsymbol{f}_1 \end{aligned}$$

ove $\nu = \nu(v)$ é la frequenza degli urti binari fra elettroni e molecole ([16]), k la costante di BOLTZMANN e T la temperatura assoluta delle molecole.

La (8), ora sostituita da

$$(12)\qquad 4\pi\int_0^{+\infty} v^2 f_0(v,\ t)dv = N$$

resta verificata in conseguenza di (10_1) e di (11_1) e del fatto che la (12) sussiste per $t = 0$. Alle equazioni (10)-(11) si devono infatti aggiungere le condizioni iniziali

$$(13)\qquad \begin{aligned} f_0(v,\ 0) &= N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ \boldsymbol{f}_1(v,\ 0) &= 0 \end{aligned}$$

oltre alla condizione che, per ogni t, le funzioni f_0 *e* $\boldsymbol{f}_1$ (definite nell'intero spazio delle velocità) risultino convergenti all'infinito.

([14]) Nel nostro caso, $\boldsymbol{S}_1$ ha, come $\boldsymbol{f}_1$, la direzione di $\boldsymbol{E}$ che è la sola direzione privilegiata dello spazio.

([15]) Queste formule furono stabilite rispettivamente da S. CHAPMAN & T. G. COWLING (*The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases,* « Cambridge, University Press », 1939, pp. 347-350) e da H. A. LORENTZ, (*The Theory of Electrons*, Leipzig. Teubner, 1909, Nota 29) e successivamente ritrovate da altri Autori (Cfr. ad es. D. H. MENZEL and D. LAYZER: loc. cit.; V. L. GINZBURG and A. V. GUREVICH: loc. cit.).

([16]) Sulla dipendenza di ν da v si veda V. L. GINZBURG and A. V. GUREVICH: loc. cit, paragrafo 2. 2a,

3. – Per semplificare la risoluzione del problema differenziale ora posto converrà supporre ν uguale per tutti gli elettroni (e quindi indipendente da v) e coincidente con la frequenza effettiva di collisione ν_ε che corrisponde alla temperatura assoluta T_ε degli elettroni. A questo riguardo va tenuto presente che T_ε è definita dalla relazione

$$\frac{3}{2} k T_\varepsilon = \frac{1}{N} \int \frac{mv^2}{2} f_0(v,\ t) d\boldsymbol{v} \tag{14}$$

e che ν_ε è legata a T_ε da

$$\nu_\varepsilon = \nu_0 \sqrt{\frac{T_\varepsilon}{T}} \simeq \nu_0 \left(1 + \frac{T_\varepsilon - T}{2T}\right) \text{ (17)} \tag{15}$$

ove ν_0 è il valore di ν_ε in assenza di campo elettrico (cioè per $T_\varepsilon = T$). Scritto allora il sistema differenziale (10)-(11) nella forma:

$$\tag{16} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta \nu_0 \left[\frac{kT}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\} = \\ & \qquad = - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{f}_1) - \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta (\nu_0 - \nu_\varepsilon) \left[\frac{kT}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right] \right\} \\ & \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \nu_0 \boldsymbol{f}_1 = - \frac{e}{m} \boldsymbol{E} \frac{\partial f_0}{\partial v} + (\nu_0 - \nu_\varepsilon) \boldsymbol{f}_1 \end{aligned} \right.$$

cerchiamo una sua soluzione con un procedimento di approssimazioni successive. Prendendo come prima approssimazione per $\boldsymbol{f}_1$ e f_0 i valori

$$\tag{17} \begin{aligned} \boldsymbol{f}_{10} &= 0 \\ f_{00} &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \end{aligned}$$

che tali funzioni assumono all'istante $t = 0$, si ha in corrispondenza, per

(17) Se il campo elettrico è sufficientemente debole la differenza $| T_\varepsilon - T |$ è piccola nei confronti di T.

(14) e (15), $\nu_c = \nu_0$ e quindi dalle (16) come nuova approssimazione per $\boldsymbol{f}_1$ e f_0 [18]

$$\boldsymbol{f}_{11} = -\frac{\mathrm{e}}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\boldsymbol{E}(\tau)d\tau$$

(18)
$$f_{01} = f_{00} + $$
$$+\frac{\mathrm{e}^2}{3m^2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\right)\int_0^t e^{-\delta\nu_0(t-\tau_1)}\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\int_0^{\tau_1} e^{-\nu_0(\tau_1-\tau_2)}\boldsymbol{E}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 .$$

Se poi s'introduce con la (5) la funzione $g(s_1, s_2)$, la (18_2) diventa

(19)
$$f_{01} = f_{00} + $$
$$+\frac{3kT}{\mathrm{e}^2N}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\right)\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\boldsymbol{E}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

e, in corrispondenza, la (14) e la (15) danno per ν_c la seguente valutazione:

$$\nu_c = \nu_0 + \frac{3m\nu_0}{\mathrm{e}^2N}\int_0\int_0 g(t-\tau_1,\ t-\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\boldsymbol{E}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 . \tag{20}$$

Dalla (16_2) si trae allora come successiva approssimazione per $\boldsymbol{f}_1$ l'espressione

$$\boldsymbol{f}_{12} = -\frac{\mathrm{e}}{m}\int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\frac{\partial f_{01}}{\partial v}\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}(\nu_0-\nu_c)\boldsymbol{f}_{11}(v,\ \tau)d\tau \tag{21}$$

con f_{01}, ν_c e $\boldsymbol{f}_{11}$ forniti rispettivamente da (19), (20) e (18_1). Il primo integrale della (21) risulta dunque la somma di $\boldsymbol{f}_{11}$ e di un altro termine proporzionale a $\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial f_{00}}{\partial v}\right)\right]$. Quanto al secondo integrale della (21), sostituendo a $(\nu_0-\nu_c)$ e a $\boldsymbol{f}_{11}$ le rispettive espressioni (20) e (18_1) e invertendo l'ordine delle integrazioni si ottiene un termine che conduce al contributo non lineare della (1). È tuttavia conveniente, se si vogliono condurre in fondo i calcoli nei casi interessanti le applicazioni e ritrovare i risultati ottenuti con la teoria « elementare », semplificare l'espressione del termine suddetto. Poichè, per la presenza del fattore esponenziale che compare nell'ultimo integrale di (21), contribuiscono in modo essenziale all'integrale in discorso i valori di $(\nu_0-\nu_c)$ prossimi all'istante t, potremo, in via approssimata, considerare nel suddetto

[18] Naturalmente si tien conto delle condizioni iniziali (13) e di quelle all'infinito.

integrale $(\nu_0 - \nu_c)$ uguale al suo valore nell'istante medesimo ([19]). L'integrale si riduce allora a $-(\nu_0 - \nu_c)\dfrac{\partial f_{11}}{\partial \nu_0}$. La ricerca della corrispondente approssimazione per f_0 riesce superflua e trascurabili sono le ulteriori perturbazioni della distribuzione se, come si suppone, $\boldsymbol{E}$ è sufficientemente debole.

4. - Ottenuta così in via approssimata la funzione di distribuzione $f(\boldsymbol{v}, t)$, siamo ora in grado di calcolare la densità di corrente $\boldsymbol{J}$ espressa, com'è noto, da

$$\boldsymbol{J}(t) = e \int f(\boldsymbol{v}, t)\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v}$$

con l'integrale esteso all'intero spazio delle velocità. Anzi, essendo $\int f_0(v, t)\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = 0$, tale densità è determinata dalla sola parte anisotropa della $f(\boldsymbol{v}, t)$ attraverso la relazione:

$$\boldsymbol{J}(t) = e \int \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}_1)}{v}\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \frac{4\pi}{3} e \int_0^{+\infty} \boldsymbol{f}_1(v, t)v^3 dv.$$

Sostituendo allora a $\boldsymbol{f}_1$ la valutazione (21) e tenendo presenti le osservazioni fatte, avremo:

$$\boldsymbol{J}(t) = \frac{e^2 N}{m} \int_0^t e^{-\nu_0(t-\tau)}\boldsymbol{E}(\tau)d\tau +$$

$$+ 3\nu_0 \int_0^t\int_0^t\int_0^t g(t-\tau_1, t-\tau_2)\frac{\partial e^{-\nu_0(t-\tau_3)}}{\partial \nu_0}\boldsymbol{E}(\tau_1)\cdot\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

e quindi, facendo intervenire le omografie α e γ definite da (2)-(5),

$$\boldsymbol{J}(t) = \int_0^t \alpha(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)d\tau + \tag{22}$$

$$+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t \gamma(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\boldsymbol{E}(\tau_1)\boldsymbol{E}(\tau_2)\boldsymbol{E}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

La (22) costituisce appunto il legame fra densità di corrente e campo elettrico, già stabilito da D. GRAFFI coi metodi della teoria « ereditaria »: le espressioni (2)-(5), fissando i valori da attribuire alle omografie α e γ, completano sul piano teorico i risultati di tale Autore.

([19]) Del resto, nel caso per noi particolarmente interessante di un campo elettromagnetico sinusoidale di frequenza sufficientemente elevata, la $(\nu_0 - \nu c)$ è praticamente costante, come si vedrà nella nota ([24]) in cui è calcolato un termine proporzionale a tale grandezza.

5. - Si tratta ora di mostrare come il legame da noi ritrovato sia alla base di vari fenomeni d'interazione ionosferica fra onde elettromagnetiche e, in particolare, dei casi di cross- e self-modulation cui intendiamo riferirci. A tal fine conviene osservare che è possibile estendere gli integrali della (22) da $-\infty$ a t (a patto di prendere t sufficientemente grande) definendo $\boldsymbol{E}$ arbitrariamente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ [20], così che, fatte le posizioni (6), la (22) stessa diventa:

$$(23) \qquad \boldsymbol{J}(t) = \int_0^{+\infty} \alpha(s)\boldsymbol{E}(t-s)ds +$$

$$+ \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \gamma(s_1, s_2, s_3)\boldsymbol{E}(t-s_1)\boldsymbol{E}(t-s_2)\boldsymbol{E}(t-s_3)ds_1ds_2ds_3 .$$

Siano ora $\boldsymbol{E}_1(t)$ ed $\boldsymbol{E}_2(t)$ i valori dei campi elettrici delle onde emesse da due stazioni radio quando si trascuri l'effetto ionosferico rappresentato dall'integrale

$$(24) \qquad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\infty+} \gamma(s_1, s_2, s_3)\boldsymbol{E}(t-s_1)\boldsymbol{E}(t-s_2)\boldsymbol{E}(t-s_3)ds_1ds_2ds_3 .$$

Il campo $\boldsymbol{E}_1$ (di frequenza $\omega_1/2\pi$, modulato in ampiezza con (bassa) frequenza $\Omega/2\pi$) sia variabile con legge:

$$(25) \qquad \boldsymbol{E}_1(t) = E_{10}(1 + M \operatorname{sen} \Omega t) \operatorname{sen}(\omega_1 t)\boldsymbol{a} =$$

$$= E_{10} \left\{ \operatorname{sen} \omega_1 t + \frac{M}{2}\cos(\omega_1 - \Omega)t - \frac{M}{2}\cos(\omega_1 + \Omega)t \right\} \boldsymbol{a}$$

con $0 < M < 1$ ($M =$ profondità della modulazione) e

$$(26) \qquad \omega_1 \gg \Omega,$$

([20]) Infatti, se ad esempio si pone $-\infty$ in luogo di 0 nei limiti inferiori dell'integrale della (20) esprimente $(\nu_e - \nu_0)$ (uno degli integrali che concorrono a formare la (22)), l'errore, maggiorato da

$$K\int_{-\infty}^{0} e^{-\delta\nu_0(t-\tau_1)} \left(\int_{-\infty}^{\tau_1} e^{-\nu_0(\tau_1-\tau_2)} d\tau_2 \right) d\tau_1 + K\int_0^t e^{-\delta\nu_0(t-\tau_1)} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\nu_0(\tau_1-\tau_2)} d\tau_2 \right) d\tau_1 =$$

$$= \frac{K}{\nu_0^2} e^{-\delta\nu_0 t} \left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta-1} (e^{-\nu_0(1-\delta)t} - 1) \right],$$

risulta trascurabile per t abbastanza grande. Analogamente per gli altri integrali. Cfr. V. VOLTERRA, *Sui fenomeni ereditari*, « Rend. Acc. Lincei », S. 5, vol. XXII (1913), pp. 529-539.

mentre il campo $\boldsymbol{E}_2$ (di frequenza $\omega_2/2\pi$ e non modulato) sia variabile con legge

$$\boldsymbol{E}_2(t) = E_{20}\,\mathrm{sen}\,(\omega_2\, t)\boldsymbol{b} \quad (27)$$ [21].

Con tali campi è possibile avere una valutazione approssimata dell'integrale (24) sostituendo al valore effettivo di $\boldsymbol{E}$ la somma $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ [22] e trascurando, se l'intensità del campo $\boldsymbol{E}_2$ dell'onda « più debole » è molto minore dell'intensità del campo $\boldsymbol{E}_1$ dell'onda « potente » [23], i termini che contengono due o più fattori uguali a $\boldsymbol{E}_2$. Si ha così per il contributo non lineare (24) (che indicheremo con $\boldsymbol{J}'$) l'espressione seguente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}' = &\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\gamma(s_1,\ s_2,\ s_3)\boldsymbol{E}_1(t-s_1)\boldsymbol{E}_1(t-s_2)\boldsymbol{E}_1(t-s_3)ds_1ds_2ds_3 + \\ &+ 3\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\gamma(s_1,\ s_2,\ s_3)\boldsymbol{E}_1(t-s_1)\boldsymbol{E}_1(t-s_2)\boldsymbol{E}_2(t-s_3)ds_1ds_2ds_3\,,\end{aligned} \tag{28}$$

che, posto $\boldsymbol{E}_1 = E_1\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{E}_2 = E_2\boldsymbol{b}$ ed esplicitata la γ mediante la (3), la (4) e la (5), diventa:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}' = &\\ = &\frac{e^4N\nu_0}{3m^2kT}\boldsymbol{a}\int_0^{+\infty}\frac{\partial e^{-\nu_0 s_3}}{\partial\nu_0}E_1(t-s_3)ds_3\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\nu_0[(\delta-1)s_1+s_2]}\,\mathbf{1}\,(s_2-s_1)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2)ds_1ds_2 + \\ &+\frac{e^4N\nu_0}{3m^2kT}\boldsymbol{b}\int_0^{+\infty}\frac{\partial e^{-\nu_0 s_3}}{\partial\nu_0}E_2(t-s_3)ds_3\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\nu_0[(\delta-1)s_1+s_2]}\,\mathbf{1}\,(s_2-s_1)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2)ds_1ds_2 + \\ &+ 6\nu_0(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\int_0^{+\infty}\frac{\partial e^{-\nu_0 s_2}}{\partial\nu_0}E_1(t-s_2)ds_2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}g(s_1,\ s_3)E_1(t-s_1)E_2(t-s_3)ds_1ds_3\,.\end{aligned} \tag{29}$$

---

[21] I vettori unitari $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ della direzione di tali campi e le quantità scalari E_{10}, E_{20} e M ora introdotte non dipendono da t.

[22] Questo modo di procedere è giustificato dall'esperienza che, anche in tal caso, rivela solo modesti scostamenti del campo totale effettivo $\boldsymbol{E}$ dal valore $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ fornito dalle ordinarie equazioni di MAXWELL lineari.

[23] Queste due onde sono chiamate anche da certi Autori onda « ricercata » e onda « disturbatrice ».

Si tratta ora di eseguire le integrazioni indicate sostituendo a E_1, E_2 e g le rispettive espressioni (25), (27) e (5). Se alla (26) si aggiungono le ipotesi (verificate sovente in pratica ([24])): $\omega_1 \gg \nu_0$, $\omega_2 \gg \nu_0$ con ν_0 sufficientemente grande, $\omega_2 - \omega_1 \gg \delta\omega_2$ (oppure $\omega_1 - \omega_2 \gg \delta\omega_1$) risulta ([25]):

([24]) Nella pratica i valori di ω_1 e ω_2 sono, di solito, dell'ordine di $10^6 \div 10^7\, \text{sec}^{-1}$, mentre ν_0 assume nello strato E della ionosfera valori dell'ordine di $10^5\, \text{sec}^{-1}$.

([25]) I primi due addendi della (29) contengono l'integrale

$$(^0) \qquad \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\nu_0[(\delta-1)s_1+s_2]}\, 1(s_2-s_1)E_1(t-s_1)E_1(t-s_2)ds_1ds_2$$

che, in virtù della (25), darà luogo a tre gruppi di termini, uno dei quali indipendente da M e gli altri due proporzionali rispettivamente a M e a M^2. Quanto al primo di essi, si trova, trascurando quantità molto piccole:

$$\frac{E_{10}^2}{2(\omega_1^2+\nu_0^2)}\left\{\frac{1}{\delta}+\frac{2\omega_1^2-\delta\nu_0^2}{4\omega_1^2+\delta^2\nu_0^2}\cos 2\omega_1 t-\frac{\omega_1\nu_0(2+\delta)}{4\omega_1^2+\delta^2\nu_0^2}\operatorname{sen} 2\omega_1 t\right\}$$

che, a meno di termini dell'ordine di $\frac{\delta\nu_0}{\omega_1}$ e δ può pensarsi uguale a:

$$\frac{E_{10}^2}{2\delta(\omega_1^2+\nu_0^2)}.$$

Il contributo della (^{0}) proporzionale a M vale invece

$$\frac{M\nu_0E_{10}^2}{\omega_1^2+\nu_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{\Omega^2+\delta^2\nu_0^2}}\operatorname{sen}(\Omega t-\varphi_\Omega)$$

con

$$\varphi_\Omega=\operatorname{arctg}\frac{\Omega}{\delta\nu_0}$$

mentre il contributo della (^{0}) proporzionale a M^2 risulta:

$$\frac{M^2E_{10}^2}{4\delta(\omega_1^2+\nu_0^2)}\left\{1-\frac{\delta\nu_0}{\sqrt{4\Omega^2+\delta^2\nu_0^2}}\cos(2\Omega t-\varphi_{2\Omega})\right\}$$

con

$$\varphi_{2\Omega}=\operatorname{arctg}\frac{2\Omega}{\delta\nu_0}.$$

Quanto al terzo addendo della (29), esso dà luogo a termini sinusoidali di frequenza $\frac{\omega_2}{2\pi}$ e di frequenza $\frac{2\omega_1\pm\omega_2}{2\pi}$ il cui contributo è però molto piccolo rispetto a quello fornito dai primi due integrali della (29) e pertanto può essere trascurato. (L'esistenza di termini di questo tipo è stata riscontrata anche da altri Autori: si vedano al riguardo i citati lavori del GRAFFI, del VILENSKIY e del GINZBURG).

$$(30) \qquad J' = \frac{e^4 N E_{10}^2 (1 + M^2/2)}{6m^2 kT\delta(\omega_1^2 + \nu_0^2)^2} \left\{ 1 + \frac{4M\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi^{\Omega}) - \right.$$

$$\left. - \frac{M^2\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{4\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \right\} \nu_0 E_1 \boldsymbol{a} +$$

$$+ \frac{e^4 N E_{10}^2 (1 + M^2/2)}{6m^2 kT\delta(\omega_1^2 + \nu_0^2)(\omega_2^2 + \nu_0^2)} \left\{ 1 + \frac{4M\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_\Omega) - \right.$$

$$\left. - \frac{M^2\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{4\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \right\} \nu_0 E_2 \boldsymbol{b}$$

con

$$\varphi_\Omega = \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\delta\nu_0}, \qquad \varphi_{2\Omega} = \operatorname{arctg} \frac{2\Omega}{\delta\nu_0}.$$

Si desume così dalla (30) che il campo elettrico $\boldsymbol{E}_1$ dell'onda « potente », interagendo con ogni campo elettrico $\boldsymbol{E}$ di pulsazione ω (e in particolare con se stesso ([26])), determina, nelle dette ipotesi, l'aggiunta di una corrente elettrica

$$\Delta \boldsymbol{J} = \frac{e^4 N E_{10}^2 (1 + M^2/2)}{6m^2 kT\delta(\omega_1^2 + \nu_0^2)(\omega^2 + \nu_0^2)} \left\{ 1 + \frac{4M\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_\Omega) - \right.$$

$$\left. - \frac{M^2\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{4\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \right\} \nu_0 \boldsymbol{E}$$

che sarà più comodo scrivere nella forma

$$(31) \qquad \Delta \boldsymbol{J} = C \{ 1 + M_\Omega \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_\Omega) - M_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \} \nu_0 \boldsymbol{E}$$

ponendo

$$(32) \qquad C = \frac{e^4 N E_{10}^2 (1 + M^2/2)}{6m^2 kT\delta(\omega_1^2 + \nu_0^2)(\omega^2 + \nu_0^2)}$$

$$(33) \qquad M_\Omega = \frac{4M\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}}$$

$$(34) \qquad M_{2\Omega} = \frac{M^2\delta\nu_0}{(2 + M^2)\sqrt{4\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}}.$$

([26]) Il campo $\boldsymbol{E}_1$ influenza quindi anche la propagazione della propria onda dando luogo, in particolare, al fenomeno della self-modulation.

In altre parole, per effetto di $\boldsymbol{E}_1$, al campo $\boldsymbol{E}$ corrisponde la densità di corrente ionosferica

$$\boldsymbol{J} + \Delta\boldsymbol{J}$$

con

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\boldsymbol{E}\right) \text{ (}^{27}\text{)}$$

e $\Delta\boldsymbol{J}$ espressa dalla (31) (dove σ è la conduttività ed ε è il coefficiente dielettrico del mezzo nella propagazione, in assenza di $\boldsymbol{E}_1$, dell'onda cui appartiene $\boldsymbol{E}$ [28]). Ciò equivale ad attribuire al parametro σ l'incremento variabile col tempo [29]:

$$\Delta\sigma = \nu_0 C \{ 1 + M_\Omega \,\text{sen}\,(\Omega T - \varphi_\Omega) - M_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \}$$

e quindi all'indice di assorbimento

$$\varkappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega n}$$

($n \approx \sqrt{\varepsilon}$ indice di rifrazione per l'onda di $\boldsymbol{E}$ in assenza di $\boldsymbol{E}_1$) l'incremento:

$$\text{(35)} \quad \Delta\varkappa = \frac{2\pi\Delta\sigma}{\omega n} = \frac{2\pi\nu_0 C}{\omega n} \{ 1 + M_\Omega \,\text{sen}\,(\Omega t - \varphi_\Omega) - M_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega}) \}.$$

Questi risultati sussistono ancora, in prima approssimazione, quando le proprietà fisiche del mezzo variano con l'altezza a causa di una stratificazione piana a debole gradiente.

---

(27) La $\boldsymbol{J}$ denota qui la densità di corrente in tale propagazione.

(28) Com'è noto:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\omega_0^2\nu_0}{\omega^2 + \nu_0^2} \qquad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2}$$

con

$$\omega_0^2 = 4\pi\,\frac{e^2}{m}\,N = 3{,}18 \cdot 10^9 N_{cm^{-3}}.$$

(29) Il coefficiente dielettrico ε non è invece influenzato in maniera sensibile dalla presenza di $\boldsymbol{E}_1$.

6. - Riferendoci al caso ora accennato, consideriamo l'ampiezza $E_0(\zeta, t)$ del campo $\boldsymbol{E}$. Tale ampiezza, che in assenza di $\boldsymbol{E}_1$ è proporzionale a [30]

$$e^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_0^\zeta \varkappa d\zeta}$$

(ove c è la velocità della luce nel vuoto e l'integrale è esteso all'arco ζ di traiettoria descritto dall'onda), viene ora ad essere moltiplicato per il fattore

$$e^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_0^\zeta \Delta\varkappa d\zeta} \simeq 1 - \frac{\omega}{c}\int\limits_0^\zeta \Delta\varkappa d\zeta.$$

Sostituendo allora a $\Delta\varkappa$ l'espressione (35) e trascurando l'effetto non periodico dovuto al campo $\boldsymbol{E}_1$ in assenza di modulazione, si ottiene per la suddetta ampiezza la legge seguente:

$$E_0(\zeta, t) \simeq \tag{36}$$

$$\simeq K\left\{1 - \frac{2\pi}{c}\left(\int\limits_0^\zeta \frac{\nu_0 C M_\Omega}{n} d\zeta\right)\operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_\Omega) + \frac{2\pi}{c}\left(\int\limits_0^\zeta \frac{\nu_0 C M_{2\Omega}}{n} d\zeta\right)\cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega})\right\}$$

in cui K è un coefficiente indipendente da t. La (36) mostra come l'onda di $\boldsymbol{E}$ riceva, per effetto della modulazione di $\boldsymbol{E}_1$, due modulazioni, rispettivamente di (basse) frequenze $\Omega/2\pi$ e Ω/π, la seconda delle quali molto meno marcata della prima [31]. La profondità di questa modulazione fondamentale (di bassa frequenza $\Omega/2\pi$)

$$M_i = \frac{2\pi}{c}\int\limits_0^\zeta \frac{\nu_0 C M_\Omega}{n} d\zeta$$

risulta espressa, in virtù di (32) e (33), da [32]

$$M_i = \frac{cM}{2\pi m l^2 \sqrt{\Omega^2 + \delta^2 \nu_0^2}} \int\limits_0^\zeta \frac{N a(\omega_1) a(\omega)}{\mathcal{R}e\, \mathfrak{n}(\omega)} E_{10}{}^2 d\zeta \tag{37}$$

---

[30] In conseguenza dell'applicazione del metodo W. K. B. all'equazione (derivata per eliminazione dalle equazioni di MAXWELL)

$$\frac{d^2E}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathfrak{n}^2(\zeta)E = 0 \qquad \left(\mathfrak{n}^2 = \varepsilon - \frac{i4\pi\sigma}{\omega}\right)$$

i essendo l'unità immaginaria (cfr. V. L. GINZBURG: loc. cit. pp. 766-767).

[31] Come appare dal confronto dei coefficienti di modulazione M_Ω e $M_{2\Omega}$.

[32] $\mathcal{R}e\,\mathfrak{n}$ e $\mathcal{I}m\,\mathfrak{n}$ denotano al solito la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $\mathfrak{n}$.

con $l =$ libero cammino medio dell'elettrone in assenza del campo [33] e

$$a(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{\mathcal{R}e\, \mathfrak{n}\, \mathcal{I}m\, \mathfrak{n}}{N\nu_0} \quad [34]$$

($\mathfrak{n} =$ indice complesso di rifrazione del mezzo per l'onda di $\boldsymbol{E}$ in assenza di $\boldsymbol{E}_1$), relazione che, in particolare, fornisce per $\omega = \omega_1$ la misura dell'azione ionosferica dell'onda « potente » su se stessa. La (37), che insieme con la (36) compendia vari aspetti salienti dei fenomeni di cross- e self-modulation (quali la proporzionalità fra la modulazione dell'onda perturbatrice e la modulazione impressa e la dipendenza di questa dal fattore caratteristico $1/\sqrt{\Omega^2 + \delta^2\nu_0^2}$), prova la sostanziale concordanza delle acquisizioni della teoria « ereditaria » e di quella « elementare » [35].

---

[33] Tale libero cammino medio è connesso all'energia cinetica media $\frac{3}{2}kT$ dell'elettrone dalla relazione $\frac{3}{2}\,kT = \frac{m}{2}\,l^2\nu_0^2$.

[34] Poichè $\mathfrak{n}^2 = \varepsilon - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, risulta:

$$\mathcal{R}e\, \mathfrak{n}\, \mathcal{I}m\, \mathfrak{n} = -\frac{2\pi}{\omega}\,\frac{\omega_0^2\nu_0}{4\pi(\omega^2 + \nu_0^2)}.$$

Il parametro $a(\omega)$ è quindi pressochè indipendente da N e da ν_0 per valori molto grandi di ω.

[35] Si vedano al riguardo i lavori degli Autori citati all'inizio e, in particolare, H. BREMMER: loc. cit. p. 575 formula (87.8).