Aggiunte ed Errata Corrige alla memoria «Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi».

di Carlo Miranda (a Napoli) (*)

Summary. - *Some remarks and an errata concerning a previous paper.*

I Aggiunta. - Nella memoria ricordata nel titolo [1] ho stabilito dei teoremi di esistenza e di unicità per il problema che consiste nella ricerca di un ovaloide S e di un vettore costante c soddisfacenti all'equazione:

$$F\left(\left(\frac{2H}{K}\right)_{x=x(\xi)}, \left(\frac{1}{K}\right)_{x=x(\xi)}, \xi\right) + c\xi = k(\xi). \tag{1}$$

Nella (1) $k(\xi)$ è un'assegnata funzione del vettore unitario ξ, $c\xi$ è il prodotto scalare di ξ per il vettore costante incognito c, $x(\xi)$ è il punto di S in cui la normale interna ha per versore ξ, H e K sono le curvature media e totale di S. All'ovaloide S si impone di passare per l'origine e di avere ivi per normale interna l'asse x_3.

Vogliamo ora rilevare un caso in cui è $c = 0$, in cui cioè la (1) assume la forma:

$$F\left(\frac{2H}{K}, \frac{1}{K}, \xi\right) = k(\xi) \tag{2}$$

e l'unica incognita è l'ovaloide S. Tale osservazione è da porre in relazione con un risultato di A. V. Pogorelov [2].

Sia $\zeta = \gamma\zeta'$ una trasformazione lineare ortogonale di R^3 in sè e indichiamo con ε un numero reale suscettibile di assumere solo i valori $+1$ e -1.

Fissato ε supponiamo che le radici dell'equazione caratteristica di γ siano tutte diverse da ε e che riesca:

$$F(\eta_1, \eta_2, \gamma\zeta') = \varepsilon F(\eta_1, \eta_2, \zeta'). \tag{3}$$

(*) Entrata in Redazione il 20 febbraio 1971.

Allora, se per l'equazione (1) *vale un teorema di esistenza e di unicità e se*:

$$k(\gamma\xi') = \varepsilon k(\xi), \tag{4}$$

anche l'equazione (2) *ammette una e una sola soluzione.*

Detta (S, c) una soluzione di (1) consideriamo l'ovaloide S' di equazione

$$x = \gamma[x(\xi) - x(\xi^0)],$$

dove $\xi^0 = \gamma i_3$, essendo i_3 il versore dell'asse x_3. Tale ovaloide al pari di S passa per l'origine ed ha ivi per normale interna l'asse x_3. Infatti è facile verificare che, più in generale, detta ξ' la normale interna a S' nel punto corrispondente al punto $x(\xi)$ di S, si ha $\xi' = \gamma^{-1}\xi$. Da ciò segue anche che, se indichiamo con $x'(\xi')$ il punto di S' in cui la normale interna ha per versore ξ', si ha:

$$x'(\xi') = \gamma[x(\gamma\xi') - x(\xi^0)]$$

e che nei punti $x'(\xi')$ di S' e $x(\gamma\xi')$ di S le due superficie hanno le stesse curvature principali. Dopo ciò, se scriviamo la (1) nel punto $\xi = \gamma\xi'$, indicando con H' e K' le curvature media e totale di S' e tenendo conto delle (3) e (4), si ha:

$$F\left(\left(\frac{2H'}{K'}\right)_{x=x'(\xi')}, \left(\frac{1}{K'}\right)_{x=x'(\xi')}, \xi'\right) + \varepsilon c(\gamma\xi') = k(\xi').$$

Ne segue che, se (S, c) è soluzione della (1), anche $(S', \varepsilon\gamma^{-1}c)$ è tale da cui per il teorema di unicità segue:

$$S = S', \qquad c = \varepsilon\gamma^{-1}c.$$

Di queste due formule la prima esprime una proprietà geometrica di S, mentre dalla seconda segue $c = 0$ per l'ipotesi fatta su ε.

Si noti che le ipotesi che assicurano l'esistenza di una soluzione della (2) implicano, com'è facile verificare, che:

$$\int_\Omega k(\xi)\xi d\sigma = 0,$$

avendo indicato con Ω l'ipersfera unitaria.

D'altra parte è anche da rilevare che tali ipotesi sono significative solo se esiste un intero n (pari se $\varepsilon = -1$) tale da risultare $\gamma^n\xi = \xi$.

ERRATA CORRIGE. - Nella dimostrazione del teorema 5.III di [1] sono incorso in una svista ammettendo implicitamente che sia $A_0 \leq 0 \leq A_1$, ipotesi questa che non figura nell'enunciato. Tale ipotesi d'altra parte implica che può aversi $B_0 = 0$ solo se $A_0 = A_1 = 0$, solo cioè se la (5.7) si riduce all'equazione di MINKOWSKI.

Il teorema 5.III sussiste peraltro com'è facile verificare, anche senza l'ipotesi $A_0 \leq 0 \leq A_1$, a condizione di sostituire nel suo enunciato gli ultimi due righi di pag. 261 con i seguenti:

$$B_0 = \frac{1}{4} \max (3A_1 - 7A_0, \; -7A_0, \; 3A_1), \qquad B_1 = \frac{3}{4} \max (A_1 - A_0, \; -A_0, \; A_1), \tag{5}$$
$$0 < q < 1.$$

Inoltre nel caso $\mu = 1$, mentre la (5.12) rimane inalterata col nuovo significato di B_1, la (5.13) può essere sostituita dall'altra meno restrittiva:

$$B_0 < 1, \qquad \frac{B_1(1 + A_1 + B_1')}{1 - B_0} < 1 + A_0 - B_1', \tag{5.13'}$$

dove:

$$B_1' = \frac{3}{4}(A_1 - A_0). \tag{6}$$

È poi da rilevare che anche l'ipotesi (5.8) del teorema 5.III può essere modificata, senza alterare per nulla la dimostrazione, sostituendola con l'altra meno restrittiva:

$$\Phi_1 \geq 0, \qquad \Phi_2 \geq a - 1 \tag{5.8'}$$

con $a > 0$ costante.

Notiamo anche che l'affermazione a piè di pag. 263, per la quale la funzione $F = \eta_2 + \Phi$ soddisfa a tutte le ipotesi del teorema 5.II non è corretta perchè tale funzione F non è omogenea rispetto a ξ. Ciò però non porta conseguenze perchè il teorema 5.II è ancora valido, com'è facile verificare, se, invece di supporre omogenea di primo grado rispetto a η_3, η_4, η_5 la F, si suppone che tale sia la $F - F_0(\eta_2)$, dove $F_0(\eta_2)$ è una arbitraria funzione della sola η_2 definita e continua per $\eta_2 > 0$.

Segnaliamo infine che nel rigo 9 di pag. 260 bisogna leggere $\nabla(\xi_i, \xi_k)$ al posto di $\Delta(\xi_i, \xi_k)$ e che nel rigo 10 di pag. 264 bisogna leggere R^2 al posto di R.

II AGGIUNTA. - In [1] abbiamo già rilevato nell'Osservazione II di pag. 261 che l'ipotesi del teorema 5.II relativa all'omogeneità di F non lede la generalità in quanto, figurando nell'equazione solo i valori di $F(\eta_1, \eta_2, \xi)$ per $\xi \in \Omega$, nulla vieta di prolungare la F per $\xi \in R^3 - \Omega$ con legge di omogeneità. E nella precedente Errata Corrige abbiamo anche indicato la possibilità di sostituire con altra la predetta ipotesi. Riteniamo ora opportuno di riformulare il teorema 5.II rinunziando ad ogni ipotesi di omogeneità per la F e sostituendo l'ipotesi (5.3) con altra meno restrittiva e di carattere intrinseco, cioè indipendente dal prolungamento per omogeneità della F di cui ci varremo nella dimostrazione.

In effetti osserviamo che la condizione (5.3) può essere sostituita dall'altra che per ogni $S \in \Sigma_3$ sia:

$$-\sum_{i,k=0}^{3} F_{i+2,k+2} \nabla(\xi_i, \xi_k) \geq -\chi_0\left(\frac{1}{K}\right) - \chi_1\left(\frac{1}{K}\right)\left(\frac{2H}{K}\right)^{2-\nu} \tag{7}$$

con $\chi_0(\eta_2)$ e $\chi_1(\eta_2)$ funzioni continue per $\eta_2 > 0$ e con $0 < \nu \leq 2$.

Invero nell'ipotesi (7) si trova, ragionando come a pag. 260 di [1]:

$$\sup\left(\frac{2H}{K}\right)^2 \leq 4\rho_1 + \frac{3}{a}\| k \|_{\Omega^2} + \frac{1}{a}\left[\sup \chi_0 + \sup \chi_1\left(\sup \frac{2H}{K}\right)^{2-\nu}\right], \tag{8}$$

dove $\sup \chi_0$ e $\sup \chi_1$ si intendono calcolati per $K + \frac{1}{K} < \rho_1$, e da tale formula segue la limitazione di $2H/K$ richiesta per la dimostrazione del teorema 5.II. Si noti che se $\sup \chi_1 < a$ si può anche supporre $\nu = 0$.

Ora il primo membro di (7) è un polinomio di secondo grado, diciamo P, nelle variabili $(1/K)_u$ e $(1/K)_v$ che, tenendo presente il prolungamento per omogeneità della F, possiamo scrivere nella forma:

$$P = -F_{22}\nabla\left(\frac{1}{K}\right) - 2\nabla_\xi\left(\frac{1}{K}, F_2\right) - \Delta_\xi F - 2F,$$

dove ∇_ξ e Δ_ξ vanno calcolati pensando F_2 ed F come funzioni del solo punto ξ. Pertanto, se si vuole che la (7) sia soddisfatta qualunque sia S, bisogna supporre che P sia dotato di minimo e che:

$$\min P > -\chi_0\left(\frac{1}{K}\right) - \chi_1\left(\frac{1}{K}\right)\left(\frac{2H}{K}\right)^{2-\nu}. \tag{9}$$

Se P non è costante condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista la (9) è che sia

$$F_{22} < 0, \tag{10}$$

$$\Delta_\xi F + 2F - F_{22}^{-1}\nabla_\xi(F_2) \leq \chi_0(\eta_2) + \chi_1(\eta_2)\eta_1^{2-\nu}. \tag{11}$$

Se invece per certi valori di η_1, η_2, $\xi \in \Omega$ si ha:

(12) $$F_{22} = \nabla_\xi(F_2) = 0,$$

la (9) è soddisfatta se F verifica la condizione:

(13) $$\Delta_\xi F + 2F \leq \chi_0(\eta_2) + \chi_1(\eta_2)\eta_1^{2-\nu}.$$

Possiamo perciò concludere che:

5.IV. - *Il teorema* 5.II *è valido anche se, rinunziando all'ipotesi di omogeneità sulla F, si suppone che in una parte di $D \cap \{|\xi| = 1\}$ siano soddisfatte le* (10) *e* (11) *e nella parte complementare le* (12) *e* (13) *dove $\chi_0(\eta_2)$ e $\chi_1(\eta_2)$ sono funzioni continue non negative per $\eta_2 > 0$, e $\nu > 0$, potendosi anche assumere $\nu = 0$ se* $\sup \chi_1 < a$.

Un altro teorema interessante è il seguente:

5.V. - *Il teorema* 5.IV *è valido, anche rinunziando a supporre verificata in ogni punto di $D \cap \{|\xi| = 1\}$ una delle due coppie di condizioni* (9), (10) *e* (11), (12), *se si suppone*:

a) *che esistano dei numeri reali non negativi C_0, C_1 e λ tali che per ogni soluzione (S, c) dell'equazione sia*:

(14) $$|c| < C_0 + C_1 \sup (2H/K)^\lambda,$$

b) *che esistano un numero reale $\nu > 0$ e due funzioni non negative $\chi_0(\eta_2)$ e $\chi_1(\eta_2)$, continue per $\eta_2 > 0$, tali da risultare*:

(15) $$\frac{|F_{22}|}{F_2^2}[1 + \nabla_\xi(F) + \eta_1^{2\lambda}] + \frac{[\nabla_\xi(F_2)]^{1/2}}{F_2}[1 + \eta_1^\lambda] + \Delta_\xi F + 2F$$
$$\leq \chi_0(\eta_2) + \chi_1(\eta_2)\eta_1^{2-\nu}.$$

Per dimostrare il teorema basta osservare che si può seguire lo stesso procedimento adottato nella dimostrazione dal teorema precedente, rilevando però che per arrivare all'asserto è sufficiente provare la validità della (7) non già per qualunque S ma solo quando S è soluzione dell'equazione e nei soli punti di massimo di $2H/K$.

Ora derivando la (2.2) si stabilisce facilmente che nei punti di massimo di $2H/K$ si ha per ogni soluzione (S, c) dell'equazione:

$$F_2^2 \nabla\left(\frac{1}{K}\right) \leq 3[\nabla(k) + \nabla_\xi(F) + |c|^2],$$

$$F_2 \nabla_\xi\left(\frac{1}{K}, F_2\right) \leq [\nabla_\xi(F_2)]^{1/2}[(\nabla(k))^{1/2} + |c|],$$

Dopo ciò, tenendo conto anche delle (14) e (15), si giunge facilmente ad una limitazione del tipo (8), con che il teorema è dimostrato.

Le generalizzazioni del teorema 5.II fornite dai teoremi 5.IV e 5.V consentono analoghe generalizzazioni dei teoremi 5.III e 6.III di [1]. Enunceremo questi teoremi sostituendo anche l'ipotesi (5.10) con altra meno restrittiva. Le dimostrazioni possono essere facilmente ricostruite sulla traccia di quelle dei teoremi 5.III e 6.III e per ciò non le riporteremo.

5.VI. - *Sia* $\Phi \in C^{m+1,\lambda}(D)$ *con* $m \geq 2$ *e siano soddisfatte la* (5.8)' *e le condizioni*:

$$\Phi_{22} < 0, \qquad \Delta_\xi \Phi + 2\Phi - \Phi_{22}^{-1} \nabla_\xi(\Phi) \leq \chi_0(\eta_2) + \chi_1(\eta_2)\eta_1^{2-\nu}, \tag{16}$$

$$\varphi_0 + A_0 \eta_2^\mu \leq \Phi \leq \varphi_1 + A_1 \eta_2^\mu, \tag{17}$$

dove χ_0, χ_1 *e* ν *soddisfano all'ipotesi del teorema* 5.IV, *mentre* φ_0, $\varphi_1(\geq \varphi_0)$, A_0, $A_1(\geq A_0)$ *sono numeri reali arbitrari e* $0 \leq \mu < 1$.

Allora la (5.7) *ammette una e una sola soluzione* $(S, c) \in \Sigma'_{m+2,\lambda}$ *per qualunque* $k \in \Omega^{m,\lambda}$ *con* $m \geq 2$, *soddisfacente la* (5.11) *e la*

$$\inf k > \psi_1 + B_1 \max\left[\left(\frac{\sup k + \psi_0}{q}\right)^\mu, \left(\frac{B_0}{1-q}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right], \tag{18}$$

dove B_0 *e* B_1 *sono dati dalla* (5), $0 < q < 1$ *e*

$$\psi_0 = \max\left[0, \frac{1}{4}(3\varphi_1 - 7\varphi_0)\right], \qquad \psi_1 = \frac{1}{4}(7\varphi_1 - 3\varphi_0). \tag{19}$$

Il risultato sussiste anche per $\mu = 1$ *se valgono le* (5.13)' *e se inoltre* k *soddisfa la condizione*

$$\inf k > \psi_1 + \frac{B_1}{1 - B_0}(\sup k + \psi_0). \tag{20}$$

A proposito di questo teorema si osservi che la prima delle (16) implica che Φ come funzione di η_2 o è crescente oppure ammette un solo punto di massimo o infine è decrescente. Nel primo caso si può senz'altro supporre che la (17) valga con $A_0 = 0$, mentre nel secondo e nel terzo la (17) è possibile solo se $A_0 < 0$, $\mu = 1$, potendosi poi supporre $A_1 = 0$.

5.VII. - *Se è*:

$$\Phi = \eta_2 \Phi^{(1)}(\eta_1) + \Phi^{(2)}(\eta_1, \xi), \tag{21}$$

il teorema 5.VI *è ancora valido se al posto della* (16) *si suppone verificata la condizione*:

$$\Delta_\xi \Phi^{(2)} \leq \chi_0 + \chi_1 \eta_1^{2-\nu} \tag{22}$$

con χ_0, χ_1 *costanti non negative e* $\nu > 0$.

A proposito di questo teorema bisogna rilevare che la (17) è compatibile con la (21) solo se è $\mu = 1$ oppure se è $\Phi^{(1)} = A_0 = A_1 = 0$.

5.VIII. - *Il teorema* 5.VI *è ancora valido se al posto della* (16) *si suppone verificata per ogni* $\alpha \in [0, 1]$ *la condizione*:

$$\frac{\alpha\,|\Phi_{22}|}{(1+\alpha\Phi_2)^2}[1 + \alpha^2 \nabla_\xi(\Phi)] + \frac{\alpha[\nabla_\xi(\Phi_2)]^{1/2}}{1+\alpha\Phi_2} + \alpha(\Delta_\xi \Phi + 2\Phi) \tag{23}$$

$$\leq \chi_0(\eta_2) + \chi_1(\eta_2)\eta_1^{2-\nu}.$$

Qui è da rilevare che agli effetti del solo teorema di esistenza basterebbe che la (23) fosse verificata per $\alpha = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. MIRANDA, *Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi*, Annali di Mat. pura e appl., 87 (1970), pp. 237-269.

[2] A. V. POGORELOV, *Existence of a function with a prescribed function of the principal radii of curvature*, Doklady Akad. Nauk SSSR 174 (1967), pp. 291-293.