Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti continui.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*) (**)

Summary. - *It is considered a linear second order uniformly elliptic partial differential equation, where coefficients of second derivatives are supposed uniformly continuous and the other ones belong to suitable L_p classes. I prove some result about existence and uniqueness of the solution of the Dirichlet problem in the space $H^2(\Omega) \cap H^1{}_0(\Omega)$.*

1. - Introduzione.

Si consideri l'operatore ellittico

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1}$$

ove i coefficienti a_{ij} sono uniformemente continui nell'aperto Ω e glì altri coefficienti appartengono ad opportune classi $L_p(\Omega)$. Vari autori (vedi ad esempio [1], [8], [10]) hanno studiato maggiorazioni del tipo

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} \leq K_1 [\| Lu \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)}] \tag{2}$$

valida per ogni funzione u nulla sulla frontiera di Ω e dotata di derivate seconde (generalizzate) di quadrato sommabile in Ω. La costante K_1 dipende da Ω e dai coefficienti di (1). Non mi risulta tuttavia che la disuguaglianza (2) sia finora stata sfruttata per risolvere il seguente problema di DIRICHLET: assegnata comunque una funzione $f \in L_2(\Omega)$, stabilire l'esistenza di una funzione u, dotata di derivate seconde (generalizzate) di quadrato sommabile in Ω e tale che

$$\begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del centro di ricerca di matematica e fisica teorica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Genova.

(**) Entrata in Redazione il 13 settembre 1970.

Nel presente lavoro dimostro che, sotto opportune ipotesi sul coefficiente c di L, il problema (3) ammette una ed una sola soluzione.

2. - Notazioni ed ipotesi.

Salvo avviso contrario nel seguito si faranno sempre le seguenti ipotesi. Sia Ω un insieme aperto limitato di R^n, con $n \geq 2$. Supponiamo che la frontiera di Ω sia rappresentabile localmente come grafico di una funzione dotata di derivate seconde continue. Siano $H^1(\Omega)$ ed $H_0^1(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\overline{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \| u \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)} .$$

In $H_0^1(\Omega)$ una norma equivalente è la seguente:

$$\| u_x \|_{L_2(\Omega)} = \{ \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L_2(\Omega)}^2 \}^{\frac{1}{2}} .$$

Sia $H^2(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^2(\overline{\Omega})$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} = \| u \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,\, j=1}^{n} \| u_{x_i x_j} \|_{L_2(\Omega)} .$$

Poniamo

$$u_{xx} = \{ \sum_{i,\, j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

e osserviamo che in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ le quantità $\| u \|_{H^2(\Omega)}$ e $\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)}$ sono norme equivalenti (vedi ad esempio [14] pag. 288). Siano poi $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geq \nu | t |^2$, ν costante positiva, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $b_i \in L_p(\Omega)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ con $p > 2$ se $n = 2$, $p = n$ se $n \geq 3$; $c \in L_q(\Omega)$ con $q = 2$ se $2 \leq n \leq 3$, $q > 2$ se $n = 4$, $q = n/2$ se $n \geq 5$. Sia infine L l'operatore definito nella (1).

3. - Risultati.

LEMMA 1. - « *Siano* a_{ij}^0 $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *costanti tali che* $\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}^0 t_i t_j \geq \geq \nu | t |^2$ e sia

$$L_0 = - \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c .$$

Allora esistono due costanti positive K_2 e λ_0, dipendenti da ν, Ω e dai coefficienti b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, c di L_0 tali che risulti

$$\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \le K_2[\| (L_0 + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)}]$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ed uniformemente per ogni $\lambda \ge \lambda_0$ ».

DIMOSTRAZIONE. - Per [11] pag. 169-183 sussiste una disuguaglianza del tipo

$$\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \le K_3[\| L_0 u \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)}] \tag{4}$$

valida per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e con K_3 dipendente da Ω e dai coefficienti di L_0. Risulta poi, per le stesse funzioni u:

$$\begin{aligned} \| (L_0 + \lambda I)u \|^2_{L_2(\Omega)} &= \| L_0 u \|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda^2 \| u \|^2_{L_2(\Omega)} + 2\lambda \int_\Omega (L_0 u)u\,dx = \\ &= \| L_0 u \|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda^2 \| u \|^2_{L_2(\Omega)} + 2\lambda \int_\Omega \Big\{ - \sum_{i,j=1}^n a^0_{ij} u_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u + cu^2 \Big\}\, dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Per le ipotesi fatte e per le formule di GREEN si ha

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^0_{ij} u_{x_i x_j} u\,dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^0_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\,dx \ge \nu \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{6}$$

e inoltre note disuguaglianze (vedi ad esempio [7] teorema 5.1) implicano che per ogni $\varepsilon > 0$ risulti

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_\Omega b_i u_{x_i} u\,dx \right| \le \varepsilon \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + K_4 \| u \|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{7}$$

$$\left| \int_\Omega cu^2\,dx \right| \le \varepsilon \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + K_5 \| u \|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{8}$$

ove le costanti K_4, K_5 dipendono da ε e dai coefficienti b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, c. Allora scelto $\varepsilon = \nu/4$ e posto $\lambda_0 = 2(K_4 + K_5)$ dalle (5), ..., (8) segue che se $\lambda \ge \lambda_0$ risulta

$$\| L_0 u \|_{L_2(\Omega)} \le \| (L_0 + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{9}$$

Dalle (4) e (9) è immediata la tesi, c.v.d.

LEMMA 2. – «*Esistono due costanti positive λ_0 e K_6 dipendenti dai coefficienti di L, da n e da Ω, tali che risulti*

$$\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \leq K_6 [\| (L + \lambda I) u \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)}] \tag{10}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e uniformemente per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ »

DIMOSTRAZIONE. – Basta ripetere parola per parola quella di [11] pag. 190-193, osservando che quando si trovano disuguaglianze di tipo (4) in sottoinsiemi di Ω di diametro piccolo per operatori a coefficienti costanti che approssimano L, tali disuguaglianze valgono uniformemente per $\lambda \geq \lambda_0$ come si è visto nel lemma precedente.

Per convenienza del lettore la dimostrazione dettagliata è riportata in appendice.

TEOREMA 1. – «*Esistono due costanti positive K_7 e λ^* dipendenti dai coefficienti di L, da n e da Ω, tali che risulti*

$$\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \leq K_7 \| (L + \lambda I) u \|_{L_2(\Omega)}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e uniformemente per ogni $\lambda \geq \lambda^*$ ».

DIMOSTRAZIONE. – Siano $\overset{0}{a}_{ij}$ ed L_0 definiti come nel lemma 1; poniamo

$$M = n \max_{\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} - \overset{0}{a}_{ij} | . \tag{11}$$

L'operatore L_0 può scriversi anche in forma variazionale (vedi [12]); per la teoria di tali equazioni svolta da G. STAMPACCHIA ([13] teorema 3.2) esistono costanti positive c_0, c_1 tali che risulti

$$\int_{\Omega} (L_0 u) u dx \geq c_1 \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} - c_0 \| u \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{12}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Ne segue

$$\int_{\Omega} (L_0 u + \lambda u) u dx \geq c_1 \| u_x \|^2_{L_2(\Omega)} + (\lambda - c_0) \| u \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{13}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e per ogni $\lambda > c_0$, da cui subito

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leq (\lambda - c_0)^{-1} \| (L_0 + \lambda I) u \|_{L_2(\Omega)} . \tag{14}$$

Dalla (11) si ottiene

$$\| L_0 u - Lu \|_{L_2(\Omega)} \leq M \| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \tag{15}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Utilizziamo ora le (10), (14), (15) osservando che le costanti K_6 e c_0 non dipendono da λ. Per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda > \max(c_0, \lambda_0)$ si ha:

$$\begin{aligned} \| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} &\leq K_6[\| (L + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Omega)}] \leq \\ &\leq K_6[\| (L + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} + (\lambda - c_0)^{-1} \| (L_0 + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)}] \leq \\ &\leq K_6[\| (L + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} + (\lambda - c_0)^{-1} \| (L + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} + M(\lambda - c_0)^{-1} \| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)}]. \end{aligned} \tag{16}$$

A questo punto sia $\lambda^* = \max(\lambda_0, 2MK_6 + c_0)$. Allora dalla (16) segue

$$\| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \leq 2K_6[1 + (\lambda - c_0)^{-1}] \| (L + \lambda I)u \|_{L_2(\Omega)} \tag{17}$$

valida per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ed uniformemente per ogni $\lambda \geq \lambda^*$, c.v.d.

COROLLARIO 1. - «*Sia* $\lambda \geq \lambda^*$, $c \geq 0$ *quasi ovunque in* Ω, $f \in L_2(\Omega)$, $f \geq 0$ *quasi ovunque in* Ω, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $(L + \lambda I)u = f$ *in* Ω. *Allora risulta* $u \geq 0$ *quasi ovunque in* Ω».

DIMOSTRAZIONE: si trova nell'appendice.

TEOREMA 2. - «*Sia* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$. *Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f \quad q.o. \text{ in } \Omega, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{19}$$

ammette una ed una sola soluzione comunque si assegni f *in* $L_2(\Omega)$. *Se per almeno un valore di* i $(1 \leq i \leq n)$ *è* $b_i \in L_\infty(\Omega)$, *il risultato vale anche se* $\operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c = 0$».

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\lambda \geq \lambda^*$, ove λ^* è definito nel teorema 1. Allora esiste l'operatore inverso di $L + \lambda I$, e sia G_λ, che porta $L_2(\Omega)$ in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Poichè G_λ è un operatore compatto, il suo spettro è discreto e numerabile; indicando con $\{\lambda_j\}_{j \in N}$ la successione degli autovalori di L e con $\{\mu_j\}_{j \in N}$ quella degli autovalori di G_λ, risulta

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda_j + \lambda}, \qquad j \in N \tag{20}$$

per ogni $\lambda \geq \lambda^*$. Inoltre, per il corollario precedente, all'operatore G_λ si può applicare il teorema 6.1 di [9] in quanto G_λ lascia invariante il cono delle funzioni positive di $L_2(\Omega)$. Usando un procedimento gia utilizzato in [3], [4] si trova che esiste un autovalore μ_1 di G_λ reale e di modulo massimo tra tutti gli autovalori di G_λ:

$$|\mu_j| \leq \mu_1 \qquad \forall\, \mu_j \text{ autovalore di } G_\lambda. \tag{21}$$

Dalla (20) segue che esiste in corrispondenza di μ_1 l'autovalore (reale) di L $\lambda_1 = \dfrac{1 - \lambda\mu_1}{\mu_1}$ tale che

$$\operatorname{Re} \lambda_j \geq \lambda_1 \qquad \forall\, \lambda_j \text{ autovalore di } L. \tag{22}$$

È chiaro quindi che la tesi sarà provata non appena si dimostri che $\lambda_1 > 0$. A questo scopo consideriamo una successione $a_{ij}^{(m)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ $(m = 1, 2, ...)$ tale che

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{\overline{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - a_{ij}^{(m)}| = 0 \tag{23}$$

e sia

$$L^{(m)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c. \tag{24}$$

Siano poi $G_\lambda^{(m)}$ gli operatori inversi di $L^{(m)} + \lambda I$, certamente esistenti per $\lambda \geq \lambda^*$. Dalla (23) segue

$$\lim_{m \to +\infty} \|(L - L^{(m)})u\|_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{25}$$

ove il limite è uniforme per $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} \leq 1$.

Ciò implica che la successione di operatori $\{G_\lambda^{(m)}\}_{m \in N}$ converge a G_λ nella metrica uniforme di $\mathcal{L}[L_2(\Omega); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$.

Per il lemma a pag. 1091 di [6] risulta allora

$$\lim_{m \to +\infty} \mu_j^{(m)} = \mu_j \tag{26}$$

uniformemente per $j \in N$, ove $\{\mu_j^{(m)}\}_{i \in N}$ è la successione degli autovalori di $G_\lambda^{(m)}$. In particolare è

$$\lim_{m \to +\infty} \mu_1^{(m)} = \mu_1$$

da cui subito

$$\lim_{m \to +\infty} \lambda_1^{(m)} = \lambda_1 \tag{27}$$

ove $\lambda_1^{(m)}$ è l'autovalore di minima parte reale di $L^{(m)}$, cioè

$$\lambda_1^{(m)} = \frac{1 - \lambda\mu_1^{(m)}}{\mu_1^{(m)}}.$$

Osserviamo a questo punto che l'operatore $L^{(m)}$ si può scrivere anche in forma variazionale e si possono quindi applicare ad esso i risultati di [13] e [2].

In particolare essendosi supposto $c \geq k$ q.o. in Ω con k costante positiva, da [13] teorema 3.8 segue che $\lambda_1^{(m)} \geq k$ per ogni $m = 1, 2, \ldots$. Dalla (27) si ottiene quindi

$$\lambda_1 \geq k > 0. \tag{28}$$

Pertanto 0 non è un autovalore di L e il problema (19) ammette una ed una sola soluzione.

Resta da provare che se $b_i \in L_\infty(\Omega)$ per almeno un valore di i, il risultato è vero anche se $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega c = 0$. A questo scopo basta utilizzare un artificio di PICARD come in [5] pag. 322. Riporto la dimostrazione per convenienza del lettore.

Sia $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Lu = 0$ q.o. in Ω, $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega c = 0$, $b_1 \in L_\infty(\Omega)$; facciamo vedere che $u = 0$ q.o. in Ω.

Poniamo $u = zv$ con $z = C - e^{\mu x_1}$; le quantità μ e C sono costanti da fissare più tardi.

Si ha:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i x_j} v - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} z - 2\sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i z_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} z + czv = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega$$

e per le posizioni fatte

$$z\left[-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} + \left(\frac{2\mu e^{\mu x_1}}{z}\sum_{i=1}^n a_{i1} + \sum_{i=1}^n b_i\right) v_{x_i} + \left(\frac{a_{11}\mu^2 e^{\mu x_1} - b_1 \mu e^{\mu x_1}}{z} + c\right) v\right] = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega. \tag{29}$$

Si scelgono ora le costanti C e μ in modo che $z > 1$ in Ω e $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega \left(\frac{a_{11}\mu^2 e^{\mu x_1} - b_1 \mu e^{\mu x_1}}{z} + c\right) > 0$.

Allora l'equazione (29) diventa del tipo

$$\widehat{L}v = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega$$

ove i coefficienti soddisfano alle ipotesi necessarie per applicare la prima parte del teorema. Ne segue $v = 0$ q.o. in Ω e quindi $u = 0$ q.o. in Ω. Perciò di nuovo 0 non è un autovalore di L e il problema (19) ammette una ed una sola soluzione, c.v.d.

COROLLARIO 2. - «*Siano soddisfatte le ipotesi del teorema precedente. Allora esiste una costante* K_8 *indipendente da* u *tale che*

$$(*) \qquad \| u_{xx} \|_{L_2(\Omega)} \leq K_8 \| Lu \|_{L_2(\Omega)}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. *Se inoltre è* $Lu \geq 0$ *q.o. in* Ω, *ne segue* $u \geq 0$ *q.o. in* Ω».

DIMOSTRAZIONE. - La disuguaglianza $(*)$ segue subito dal fatto che, per il teorema precedente, lo zero non è un autovalore di L e quindi esiste l'operatore L^{-1} (inverso di L) limitato da $L_2(\Omega)$ ad $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

L'ultima affermazione si deduce nel modo seguente: detti $L^{(m)}$ gli operatori definiti nella dimostrazione del teorema precedente, siano $u^{(m)}$ le soluzioni dei problemi di DIRICHLET

$$(30) \qquad \begin{cases} L^{(m)}u^{(m)} = Lu \quad \text{q.o. in } \Omega; \\ u^{(m)} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Per noti teoremi (vedi ad esempio [2]) se è $Lu \geq 0$ quasi ovunque in Ω risulta $u^{(m)} \geq 0$ quasi ovunque in Ω.

Per le (25), (30) si ottiene facilmente

$$\lim_{m \to \infty} \| u^{(m)} - u \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

da cui la tesi, c.v.d.

4. - Appendice.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2. - Per la supposta uniforme continuità in Ω dei coefficienti a_{ij}, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un numero $R > 0$ e dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_q \in \Omega$ tali che, posto

$$S(y, r) = \{ x : |x - y| < r \}$$

risulti

$$(31) \qquad \Omega \subset \bigcup_{l=1}^{q} S(x_l, R),$$

$$\max_{1\leq l\leq q}\ \max_{x\in S(x_l,\,2R)}\ \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_l)| < \varepsilon. \tag{32}$$

Siano poi $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ funzioni tali che: $\varphi_l \in C_0^\infty(S(x_l, 2R))$, $0 \leq \varphi_l \leq 1$, $\varphi_l \equiv 1$ in $S(x_l, R)$ (per $l = 1, 2, \ldots, q$).

È chiaro allora che $\varphi_l u \in H^2(\Omega \cap S(x_l, 2R)) \cap H_0^1(\Omega \cap S(x_l, 2R))$ per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Posto

$$L_0^{(l)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_l)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

per la (9) risulta

$$\| L_0^{(l)}(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|(L_0^{(l)} + \lambda I)(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} \tag{33}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ (ricordiamo che λ_0 dipende solo dai coefficienti b_i, c). Per noti teoremi (vedi ad esempio [11] lemma 8.1) si ha

$$\|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_9 \{ \| L_0^{(l)}(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_l u\|_{L_2(\Omega)} \} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q). \tag{34}$$

La costante K_9 dipende solo da b_i, c, ν, n e dalle curvature di $\partial\Omega$ e quindi non dipende da l, q, ε, R.

Per le (33), (34) si ottiene:

$$\|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_9 \{ \|(L_0^{(l)} + \lambda I)(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_l u\|_{L_2(\Omega)} \} \tag{35}$$

per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Dalle (32), (35) segue

$$\|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} \leq K_9 \{ \|(L + \lambda I)(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_l u\|_{L_2(\Omega)} + n\varepsilon \|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} \}. \tag{36}$$

Fissiamo ora $\varepsilon = (2nK_9)^{-1}$; in tal modo restano determinati anche R e q. La (36) fornisce

$$\|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} \leq 2K_9 \{ \|(L + \lambda I)(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_l u\|_{L_2(\Omega)} \}. \tag{37}$$

A questo punto un facile calcolo mostra che

$$\|(L + \lambda I)(\varphi_l u)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|(L + \lambda I) u\|_{L_2(\Omega)} + K(l)[\|u_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}]. \tag{38}$$

La costante $K(l)$ dipende da φ_l e dai coefficienti di L; poniamo

$$K_{10} = \max_{1\leq l\leq q} K(l). \tag{39}$$

Osserviamo inoltre che, per la scelta delle funzioni φ_l, è:

(40) $$\|\varphi_l u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q),$$

(41) $$\|u\|_{H_2(\Omega)} \leq \sum_{l=1}^{q} \|\varphi_l u\|_{H^2(\Omega)} + K_{11}[\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}]$$

ove la costante K_{11} dipende dal massimo modulo delle derivate (prime e seconde) delle funzioni φ_l.

Dalle (37), ..., (41) segue

(42) $$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq 2qK_9(K_{10} + K_{11} + 1)[\|u_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|(L + \lambda I)u\|_{L_2(\Omega)}].$$

Infine utilizzando la nota disuguaglianza

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^2(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \eta > 0$$

e la (42) si ottiene la (10), valida per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap \cap H_0^1(\Omega)$, c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO 1. - Si considerino gli operatori $L^{(m)}$ definiti nelle (23), (24). Sia $u^{(m)}$ la soluzione, per $m = 1, 2, \ldots$, e per $\lambda \geq \lambda^*$, del problema di DIRICHLET

(43) $$\begin{cases} (L^{(m)} + \lambda I)u^{(m)} = f \text{ q.o. in } \Omega, \\ u^{(m)} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Per le ipotesi fatte e per i risultati di [2], [13] tale soluzione $u^{(m)}$ esiste ed è unica, ed inoltre risulta

(44) $$u^{(m)} \geq 0 \qquad \text{in } \Omega, \text{ per } m = 1, 2, \ldots.$$

Applicando il teorema 1 all'operatore $L^{(m)}$ si trova

(45) $$\|u_{xx}^{(m)}\|_{L_2(\Omega)} \leq K_{12}\|f\|_{L_2(\Omega)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ed è facile verificare (rivedendo le dimostrazioni precedenti) che la costante K_{12} può essere scelta indipendente da m.

Dalla (45) segue che una successione estratta dalla $u^{(m)}$ converge debolmente ad una funzione v che per le (43) è soluzione della equazione $(L + \lambda I)v = f$. Per il teorema 1 è $u = v$ e per la (44) si ottiene $u \geq 0$ q.o. in Ω, c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CACCIOPPOLI, *Limitazioni integrali per le soluzioni di una equazione ellittica alle derivate parziali*, Giorn. Mat. Battaglini (4), vol. **4** (1951), pag. 186-212.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana (3), vol. **22** (1967), pag. 368-372.

[3] — —, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore*, Annali di Matematica Pura e Applicata (4), vol. **85** (1970), pag. 347-356.

[4] — —, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per equazioni ellittiche del secondo ordine in forma variazionale*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), vol. **87** (1970), pag. 1-10.

[5] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. **2**, Interscience, New York (1962).

[6] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, part. **2**, Interscience, New York (1963).

[7] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche di Matematica, vol. **7**, (1958), pag. 102-137.

[8] A. I. KOŠELEV, *A priori estimate in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems*, American Mathematical Society Translations (2), vol. **20** (1962), pag. 105-171.

[9] M. G. KREĬN, N. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant cone in a Banach space*, American Mathematical Society Traslations (1), vol. **10** (1962), pag. 199-325.

[10] O. A. LADYZHENSKAYA, *On the closure of an elliptic operator*, Doklady Akad. Nauk USSR, vol. **79** (1951), pag. 723-725.

[11] — —, N. N. URAL'TSEVA, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York (1968).

[12] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), vol. **63** (1963), pag. 353-386.

[13] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales Institut Fourier (Grenoble), vol. **15** (1965), pag. 189-258.

[14] G. TALENTI, *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), vol. **69** (1965), pag. 285-304.