Sulla monogeneità negli spazi di Banach.

PAOLO DENTONI (Parma) (*) (**)

Summary. - *In assenza di struttura moltiplicativa, la definizione di funzione monogena viene data in questo lavoro basandosi sulla considerazione di una coppia di operatori lineari (uno dei quali coincidente ad es. col differenziale) che mandano 0-forme in 1-forme. Si stabiliscono risultati sull'esistenza delle derivate successive, delle primitive e un teorema integrale di tipo Cauchy. L'equivalenza fra il problema della primitiva e il problema della derivata appare qui dipendere dalla permutabilità dei ruoli degli operatori della coppia.*

1. - **Premessa** (***).

Nell'ambito della teoria delle funzioni differenziabili (secondo FRECHET) negli spazi di BANACH, il caso degli spazi dotati anche di struttura moltiplicativa (*algebre*) è stato oggetto di speciale considerazione da parte di numerosi Autori (G. SCHEFFERS, E. R. LORCH, G. B. RIZZA e altri). In tali spazi, si è introdotta un'ampia classe di funzioni (*funzioni monogene*), per le quali una gran parte della classica teoria continua a sussistere (derivate, primitive, teorema integrale ecc.).

In questo lavoro, si cerca di svolgere una teoria delle funzioni monogene, svincolata, per quanto possibile, dall'ipotesi di struttura d'algebra nello spazio ambiente. In questo ordine di idee, è apparso chiaro fin dall'inizio che il ruolo della struttura moltiplicativa può essere svolto più generalmente da un conveniente *operatore lineare* che mandi 0-forme in 1-forme (n. 2). Gli operatori del tipo ora accennato costituiscono una classe molto ampia, comprendente tra l'altro anche l'ordinario differenziale (n. 3). La definizione di *funzione monogena* nasce poi, in modo naturale, dalla considerazione di una *coppia di operatori* (n. 5) (particolarmente significativo il caso in cui uno dei due operatori è il differenziale).

In queste condizioni generali si stabiliscono risultati sull'esistenza delle *derivate successive* (n. 5), delle *primitive* (Teor. 1', n. 6) e un *teorema integrale* di tipo CAUCHY (Teor. 2, n. 7) La ragione profonda della sostanziale equivalenza fra il problema della primitiva e il problema della derivata appare qui

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di Ricerca n. 9 del C.N.R.

(**) Entrata in Redazione il 25 giugno 1970.

(***) Una nota riassuntiva dei principali risultati di questo lavoro è apparsa nei Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), 49 (1970).

consistere nella possibilitá di *permutare i ruoli* dei due operatori della coppia. Ne deriva una sorta di *dualità* (n. 6), nella quale si corrispondono primitive e derivate.

Nella seconda parte del lavoro, in ipotesi lievemente più restrittive sugli operatori, si ottengono altri risultati (*teorema di approssimazione* (n. 9), *teorema sulle funzioni monogene in uno spazio quoziente* (n. 10)).

Dal secondo deriva infine il Teor. 4 del n. 11 che consente, sotto ampie ipotesi, di ricondurre lo studio delle funzioni monogene in un'algebra al caso associativo e commutativo.

2. - Definizioni.

Dati due spazi di BANACH V, W sul campo reale $\boldsymbol{R}$ (1), ed un aperto $U \subset V$, si denota con W^U l'insieme delle funzioni definite in U a valori in W, e con $\mathcal{L}_p(V, W)$ l'insieme delle applicazioni p-lineari continue di V^p in W. Il sottoinsieme di $\mathcal{L}_p(V, W)$ formato dalle applicazioni p-lineari *alternanti* è indicato con $\mathcal{A}_p(V, W)$ (2). Gli insiemi W^U, $\mathcal{L}_p(V, W)$ ed $\mathcal{A}_p(V, W)$ sono ovviamente spazi vettoriali su $\boldsymbol{R}$. Occorrendo considerare in essi una topologia, si farà riferimento, in $\mathcal{L}_p(V, W)$ alla topologia indotta dalla sua struttura naturale di spazio di BANACH (3), in W^U e $\mathcal{L}_p(V, W)^U$ alla topologia della convergenza semplice (4).

Ciò premesso, si consideri un *omomorfismo* q tra un sottospazio vettoriale $Q_0^{(1)}$ di W^U e lo spazio $\mathcal{L}(V, W)^U$ delle 1-forme definite in U, a valori in W (5).

Per ogni intero $p \geq 0$, l'omomorfismo precedente dà luogo, in modo naturale, ad un *omomorfismo*, denotato ancora con q, tra un conveniente sottospazio $Q_p^{(1)}$ di $\mathcal{L}_p(V, W)^U$ e lo spazio $\mathcal{L}_{p+1}(V, W)^U$. Precisamente, per ogni applicazione $\alpha_p \in \mathcal{L}_p(V, W)^U$ e per ogni $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ sia $< \alpha_p; v_1, \ldots, v_p >$ la funzione appartenente a W^U, definita in ogni $x \in U$ da

$$< \alpha_p;\ v_1, \ldots, v_p > \,:\, x \mapsto \alpha_p(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p) \qquad (6).$$

---

(1) Per le nozioni fondamentali sugli spazi di BANACH, ved. p. es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [6], J. DIEUDONNÉ [5].

(2) Come d'ordinario, si pone $\mathcal{A}_0(V, W) = \mathcal{L}_0(V, W) = W$; $\mathcal{A}_1(V, W) = \mathcal{L}_1(V, W)$ e in luogo di $\mathcal{L}_1(V, W)$ si scrive semplicemente $\mathcal{L}(V, W)$.

(3) Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], p. 101.

(4) Sulla topologia della convergenza semplice, ved. p. es. J. L. KELLEY [7], p. 217.

(5) Si dicono *p-forme* definite in un aperto U di V, a valori in W, gli elementi di $\mathcal{A}_p(V, W)^U$. Per la teoria delle p-forme negli spazi di BANACH, ved. p. es. H. CARTAN [3].

(6) Se T è un elemento di $\mathcal{L}_p(V, W)$, si denota con $T. (v_1, \ldots, v_p)$ il valore che T assume sul punto $(v_1, \ldots, v_p)$ di V^p. Ved. p. es. H. CARTAN [3].

Se $<\alpha_p;\ v_1,\ \ldots,\ v_p>$ appartiene a $Q_0^{(1)}$, si consideri, per ogni $x \in U$, la applicazione

$$(1) \qquad (v_1, \ldots, v_{p+1}) \mapsto q <\alpha_p;\ v_1,\ \ldots,\ v_p> (x) \cdot v_{p+1}$$

che riesce lineare nelle $v_1, \ldots, v_{p+1}$. Si denota poi con $Q_p^{(1)}$ l'insieme delle $\alpha_p \in \mathfrak{L}_p(V,\ W)^U$ tali che per ogni $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ si abbia $<\alpha_p;\ v_1 \ldots,\ v_p> \in Q_0^{(1)}$ e risulti inoltre *continua* la applicazione (1) (7). Ciò premesso, l'omomorfismo q associa ad ogni $\alpha_p \in Q_p^{(1)}$ l'elemento $q\,\alpha_p$ di $\mathfrak{L}_{p+1}(V,\ W)^U$ che ad ogni $x \in U$ fa corrispondere l'applicazione (1). In altri termini:

$$(2) \qquad q\alpha_p(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}) = q <\alpha_p;\ v_1,\ \ldots,\ v_p> (x) \cdot v_{p+1}.$$

Si denota infine con $\mathfrak{Q}_p^{(r)} (r > 1)$ il sottospazio di $Q_p^{(1)}$ nel quale riesce definito l'operatore q^r, e con $Q_p^{(r)}$ il sottoinsieme di $\mathfrak{Q}_p^{(r)}$ formato dalle α_p per le quali la funzione $q^2\alpha_p(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, v_{p+2})$ risulta *simmetrica* nelle variabili v_{p+1}, v_{p+2}.

3. - Un esempio di operatore q: $Q_0^{(1)} \to \mathfrak{L}(V,\ W)^U$, definito nell'insieme $Q_0^{(1)}$ delle $f \in W^U$ di classe C^1 in U (8), è costituito dal *differenziale* (*di* FRECHET) d (9). In questo caso il sottospazio $Q_p^{(r)}$ coincide con l'insieme delle applicazioni $\alpha_p \in \mathfrak{L}_p(V,\ W)^U$ di classe C^r in U. La condizione di continuità per l'applicazione (1) e la condizione di simmetria (n. 2) riescono soddisfatte in virtù di risultati noti (10).

Un secondo esempio è dato, in un'*algebra di* BANACH $A = U = W$, dotata di unità destra u, dall'operatore *moltiplicazione a destra* m: $A^U \to \mathfrak{L}(A,\ A)^U$ definito per ogni $f \in A^U$, $x \in U$, $a \in A$ dalla relazione

$$(mf)(x) \cdot a = f(x)a.$$

---

(7) La condizione sulla continuità della (1) è superflua, qualora q sia una applicazione *continua* tra i due spazi W^U e $\mathfrak{L}(V,\ W)^U$, muniti della topologia della convergenza semplice (cfr. p. es. J. L. KELLEY [7], p. 217 e p. 86, (f)). Si tenga presente che per la continuità di una funzione multilineare è sufficiente la continuità, separatamente in ciascuna variabile (cfr. p. es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [6], p. 765).

(8) Per la definizione di funzioni di classe C^r, C^∞, ved. p. es. N. BOURBAKI [2], p. 18.

(9) Ved. p. es. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [6], p. 110. Ved. anche J. DIEUDONNÉ [5], p. 141; N. BOURBAKI [2], 1.2.1, dove il differenziale d è chiamato *derivata*. In questo lavoro il termine «derivata» viene usato con altro significato (n. 5).

(10) Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], 8.12.1 e 8.12.4.

Si assume in questo caso $Q_p^{(1)} = \mathfrak{L}_p(A, A)^U$. L'insieme $Q_p^{(r)}(r \geq 2)$ è costituito dalle applicazioni $\alpha_p \in \mathfrak{L}_p(A, A)^U$ aventi i valori $\alpha_p(x) \cdot (a_1, \dots, a_p)$ negli annullatori sinistri dell'insieme $\{x_1x_2 - x_2x_1 \mid x_1, x_2 \in A\}$ dei commutatori di A.

4. – Conviene ora introdurre, in corrispondenza all'omomorfismo q: $\mathfrak{L}_p(V, W)^U \to \mathfrak{L}_{p+1}(V, W)^U$, un omomorfismo $\boldsymbol{q}$: $\mathfrak{A}_p(V, W)^U \to \mathfrak{A}_{p+1}(V, W)^U$ detto *operatore esterno associato all'operatore* q. Precisamente, per ogni p-forma ω_p appartenente all'insieme $\boldsymbol{Q}_p^{(r)} = Q_p^{(r)} \cap \mathfrak{A}_p(V, W)^U (r \geq 1)$ si assume come $\boldsymbol{q}\omega_p$ l'elemento di $\boldsymbol{Q}_{p+1}^{(r-1)}$ definito, per ogni $x \in U$ e $(v_1, \dots, v_{p+1}) \in V^{p+1}$, dalla formula

$$\boldsymbol{q}\omega_p(x) \cdot (v_1, \dots, v_{p+1}) = \frac{(-1)^p}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} q\omega_p(x) \cdot (v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{p+1}, v_i). \tag{3}$$

Se q è il differenziale di FRECHET d (n. 3), il suo operatore esterno $\boldsymbol{q}$ è il differenziale esterno di CARTAN $\boldsymbol{d}$. Come il differenziale di CARTAN, anche l'operatore esterno $\boldsymbol{q}$ gode della proprietà fondamentale:

P$_0$ – *Per ogni p-forma* $\omega_p \in \boldsymbol{Q}_p^{(r)}$ *con* $r \geq 2$, risulta

$$\boldsymbol{q}^2\omega_p = 0\,. \tag{4}$$

La dimostrazione si fonda essenzialmente sulla simmetria della funzione $q^2\omega_p(x) \cdot (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, v_{p+2})$ nelle variabili v_{p+1}, v_{p+2} (n. 2), ed è del tutto analoga a quella relativa al differenziale esterno $\boldsymbol{d}$ (11).

È utile la definizione:

DEF. 1 – *Un operatore esterno* $\boldsymbol{q}$ *si dice un operatore di* POINCARÈ *nell'aperto* U *se per ogni p-forma* $\omega_p \in \boldsymbol{Q}_p^{(r)}(r \geq 1,\ p \geq 1)$ *definita in* U *tale che* $\boldsymbol{q}\omega_p = 0$ *esiste una* $(p-1)$*-forma* $\omega_{p-1} \in \boldsymbol{Q}_{p-1}^{(r)}$ *definita in* U *tale che* $\boldsymbol{q}\omega_{p-1} = \omega_p$.

Conviene notare esplicitamente che, in virtù del Lemma di POINCARÈ (12), l'operatore differenziale esterno $\boldsymbol{d}$ è un operatore di POINCARÈ secondo la DEF. 1, *in ogni aperto convesso* U. Si vedrà poi al successivo n. 8 che anche l'operatore $\boldsymbol{m}$, relativo al secondo esempio del n. 3, è un operatore di POINCARÈ, in ogni aperto U.

5. – **Funzioni monogene**

Si prende ora in considerazione una coppia di omomorfismi q, $\tilde{q}$:

(11) Ved. p. es. H. CARTAN [3], p. 27.
(12) Ved. p. es. H. CARTAN [3], p. 39.

$W^U \to \mathfrak{L}(V,\ W)^U$, tali che gli operatori esterni q, $\tilde{q}$ ad essi associati siano *operatori di* POINCARÈ in U.

Siano

$$I_{\tilde{q}q} = \{f \in Q_0^{(1)} \mid qf \in \tilde{Q}_1^{(1)}\},\quad I_{q\tilde{q}} = \{f \in \tilde{Q}_0^{(1)} \mid \tilde{q}f \in Q_1^{(1)}\},$$

i sottoinsiemi di W^U nei quali sono rispettivamente definiti gli operatori $\tilde{q}q$, $q\tilde{q}$. Si suppone che per le applicazioni

$$\tilde{q}q : I_{\tilde{q}q} \to \mathfrak{A}_2(V,\ W)^U, \qquad q\tilde{q} : I_{q\tilde{q}} \to \mathfrak{A}_2(V,\ W)^U$$

sussista la relazione

$$\text{Ker}\ \tilde{q}q = \text{Ker}\ q\tilde{q}. \tag{5}$$

Ciò premesso, conviene porre la definizione:

DEF. 2 - *Una funzione f appartenente al sottoinsieme $Q_0^{(1)}$ di W^U si dice $(q,\ \tilde{q})$-monogena in U se esiste nel sottoinsieme $\tilde{Q}_0^{(1)}$ di W^U una funzione f' tale che risulti:*

$$qf = \tilde{q}f' \ (^{13}). \tag{6}$$

La funzione f', che è definita a meno di elementi del nucleo di q, si dice una $(q,\ \tilde{q})$-*derivata* (*prima*) della funzione f. Se f' è a sua volta $(q,\ q)$-monogena, ogni sua $(q,\ \tilde{q})$-derivata prima si dice una $(q,\ \tilde{q})$-*derivata seconda* di f, e si denota con f''. In modo analogo si definiscono le eventuali derivate di f d'ordine superiore.

Conviene osservare subito che *la $(q,\ \tilde{q})$-monogeneità equivale alla $(\tilde{q},\ q)$-monogeneità*. In altri termini, la definizione di funzione monogena riesce *simmetrica nei due operatori*. Precisamente:

TEOR. 1 – *Se f è una funzione $(q,\ \tilde{q})$-monogena con $(q,\ \tilde{q})$-derivata $f' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$, f è pure funzione $(\tilde{q},\ q)$-monogena, ed ogni sua $(\tilde{q},\ q)$-derivata $\tilde{f}'$ appartiene all'insieme $Q_0^{(2)}$. Inversamente, scambiando gli operatori.*

Sia infatti f funzione $(q,\ \tilde{q})$-monogena, con $f' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$. Tenuto conto della

---

(13) Con riferimento ai due esempi ricordati al n. 3, ponendo in particolare $q = d$, $\tilde{q} = m$ si ottengono le funzioni monogene nelle algebre, considerate da E. R. LORCH [8], G. B. RIZZA [9], [10], P. DENTONI [4] ed altri Autori.

proprietà fondamentale P_0 (n. 4), si ha $\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}f = \tilde{\boldsymbol{q}}qf = \tilde{\boldsymbol{q}}\tilde{q}f' = \tilde{\boldsymbol{q}}^2 f' = 0$ da cui in virtù della (5)

$$\boldsymbol{q}\tilde{\boldsymbol{q}}f = 0. \tag{7}$$

Poichè $\boldsymbol{q}$ è operatore di POINCARÈ esiste una funzione $\tilde{f}' \in Q_0^{(1)}$ tale che $q\tilde{f}' = \tilde{q}f$, onde f è $(\tilde{q},\ q)$-monogena. Tenute presenti le due ultime uguaglianze si conclude subito che risulta

$$\boldsymbol{q}\tilde{q}\tilde{f}' = \boldsymbol{q}\tilde{q}f = 0.$$

Di qui segue $\tilde{f}' \in Q_0^{(2)}$. Invero si riconosce facilmente dalla definizione (3) che la proprietà di simmetria di $q^2\tilde{f}'$ (n. 2) equivale proprio all'esser nullo $\boldsymbol{q}^2\tilde{f}'$. È quindi provato l'asserto.

Analogamente si prova la parte inversa del teorema.

Dal TEOR. 1 seguono alcuni corollari concernenti l'esistenza di derivate successive per una funzione $(q,\ \tilde{q})$-monogena. Precisamente:

Se una funzione $(q,\ \tilde{q})$-monogena f appartiene all'insieme $Q_0^{(2)}$, anche ogni sua $(q,\ \tilde{q})$-derivata prima f' è $(q,\ \tilde{q})$-monogena, e risulta $f'' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$.

L'asserto segue subito dal TEOR. 1, riguardando f come una $(\tilde{q},\ q)$-derivata di f'.

L'osservazione precedente porta a concludere che, *se $f \in Q_0^{(n)}$, esistono $(q,\ \tilde{q})$-derivate $f^{(r)}$ di ogni ordine $r \leq n$ e risulta $f^{(r)} \in \tilde{Q}_0^{(r)}$.*

6. - Primitive. Dualità.

È utile la definizione:

DEF. 3 - *Si dice che la funzione $f \in \tilde{Q}_0^{(1)}$ ammette come $(q,\ \tilde{q})$-primitiva una funzione $F_{(1)} \in Q_0^{(1)}$ se $F_{(1)}$ è $(q,\ \tilde{q})$-monogena ed ammette f come $(q,\ \tilde{q})$-derivata.*

Dal confronto delle DEF. 2, 3 segue immediatamente che *f ammette $F_{(1)}$ come $(q,\ \tilde{q})$-primitiva se e solo se f è $(\tilde{q},\ q)$-monogena, ed ha $F_{(1)}$ come $(\tilde{q},\ q)$-derivata.* In altri termini, ogni $(\tilde{q},\ q)$-derivata ed ogni $(\tilde{q},\ q)$-primitiva possono sempre riguardarsi rispettivamente come una $(q,\ \tilde{q})$-primitiva ed una $(q,\ \tilde{q})$-derivata.

Ciò consente talora di riportare nell'ambito della teoria relativa alla coppia ordinata $(q,\ \tilde{q})$ risultati, nei quali intervengano nozioni legate alla coppia $(\tilde{q},\ q)$. Ad esempio, seguendo il procedimento accennato, l'equivalenza della $(q,\ \tilde{q})$-monogeneità con la $(\tilde{q},\ q)$-monogeneità (TEOR. 1) può ora interpretarsi in questo modo. Nella teoria legata alla coppia ordinata $(q,\ \tilde{q})$ l'esistenza della primitiva e l'esistenza della derivata sono problemi *equivalenti*. Precisamente:

TEOR. 1' - *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f ammetta una $(q, \tilde{q})$-primitiva $F_{(1)} \in Q_0^{(2)}$ é che f sia $(q, \tilde{q})$-monogena, con $(q, \tilde{q})$-derivata $f' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$.*

Conviene ancora osservare esplicitamente che ad ogni proprietà P, che faccia intervenire le nozioni di $(q, \tilde{q})$-derivata e $(q, \tilde{q})$-primitiva, può associarsi, sempre nella $(q, \tilde{q})$-teoria, una proprietà P^* (*proprietà duale*). Invero, a causa della simmetria delle ipotesi sugli operatori q, $\tilde{q}$ (n. 5), a P corrisponde una proprietà $\tilde{P}$ nella $(\tilde{q}, q)$-teoria e da questa si perviene alla P^* seguendo il procedimento già utilizzato [14].

Ad esempio, dall'osservazione alla fine del n. 5 si ottiene per dualità la seguente:

Se una funzione $f \in \tilde{Q}_0^{(n)}$ ammette una $(q, \tilde{q})$-primitiva, essa ammette $(q, \tilde{q})$-primitive $F_{(r)}$ di ogni ordine $r \leq n$ *e risulta* $F_{(r)} \in Q_0^{(r)}$.

7. - Teorema integrale.

Si assume ora l'operatore q coincidente con il differenziale di FRECHET d. Il TEOR. 1' può perfezionarsi nel seguente *teorema integrale*:

TEOR. 2 - *Se f è una funzione $(d, \tilde{q})$-monogena nell'aperto U, con una $(d, \tilde{q})$-derivata prima f' appartenente all'insieme $\tilde{Q}_0^{(2)}$, risulta*

$$\int_\gamma \tilde{q}f = 0 \tag{8}$$

per ogni curva chiusa γ di classe C^1, omotopa ad un punto in U. Inversamente, se $f \in I_{d\tilde{q}}$ e vale la (8) *per ogni γ omotopa ad un punto in U, allora f è $(d, \tilde{q})$-monogena, e risulta $f' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$* [15].

Infatti, sia f $(d, \tilde{q})$-monogena con $f' \in \tilde{Q}_0^{(2)}$. Risulta intanto dalla prima parte della dimostrazione del TEOR. 1 che f appartiene all'insieme $I_{d\tilde{q}}$; in particolare, essendo $\tilde{q}f$ differenziabile e quindi continua in U, esiste l'integrale

---

(14) Le funzioni $(q, \tilde{q})$-monogene divengono per dualità le funzioni dotate di $(q, \tilde{q})$-primitiva ed il Teor. 1' mostra che, sotto opportune ipotesi, il concetto di funzione monogena é autoduale.

(15) Per una 1-forma continua ω, l'integrale su una curva γ: $[0, 1] \to U$, di classe C^1, si definisce mediante la formula $\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(\xi)) \cdot \gamma'(\xi) d\xi$. Ved p. es. H. CARTAN [3], p. 48.

curvilineo (8). Sia ora U un aperto *convesso* contenuto in U, e si consideri l'operatore $\tilde{q}'$: $W^{U'} \to \mathfrak{L}(V, W)^{U'}$ definito nell'insieme $\tilde{Q}_0'^{(1)} = \{ f_{|U'} \mid f \in \tilde{Q}_0^{(1)} \}$ dalla relazione $\tilde{q}'(f_{|U'}) = (\tilde{q}f)_{|U'}$. Dalla (7) del n. 5 si ricava immediatamente $\boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{q}}'f_{|U'} = 0$. Poichè in U' il differenziale $\boldsymbol{d}$ è operatore di POINCARÈ (n. 4), può ripetersi il ragionamento del TEOR. 1, e si ottiene che $f_{|U'}$ ammette una $(d, \tilde{q}')$-primitiva in U'. Per un noto risultato ([16]), si conclude allora che risulta

$$0 = \int_\gamma \tilde{q}' f_{|U'} = \int_\gamma \tilde{q} f$$

onde la (8) è stabilita per ogni γ in U'. Tenuta poi presente l'arbitrarietà dell'aperto convesso $U' \subset U$, con un ragionamento di natura essenzialmente topologica, si perviene finalmente al caso generale di una qualunque curva γ omotopa a un punto in U ([17]).

Inversamente, per ipotesi è $f \in I_{d\tilde{q}}$ e sussiste la (8) per ogni γ omotopa a un punto in U. In particolare, per ogni γ in un aperto convesso $U' \subset U$ risulta $\int_\gamma \tilde{q}' f_{|U'} = 0$, onde la funzione $f_{|U'}$ ammette una $(d, \tilde{q}')$-primitiva $F_{(1)}$ in U' ([18]), la quale appartiene a $D_0^{(2)}$, in quanto $f \in I_{d\tilde{q}}$. Dalla relazione $dF_{(1)} = \tilde{q}' f_{|U'}$ si ricava allora, come nella dimostrazione del TEOR. 1 (parte inversa) $0 = \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{q}}' f_{|U'} = (\boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{q}}f)_{|U'}$. Per l'arbitrarietà di $U' \subset U$, risulta $\boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{q}}f = 0$ ovunque in U. Si perviene ormai all'asserto, proseguendo come nella parte inversa del TEOR. 1.

8. - A partire da questo numero, si denota con d il differenziale di FRECHET (n. 3), e con m un qualunque operatore lineare *continuo* di W^U in $\mathfrak{L}(U, W)^U$ con le proprietà:

I *considerata in V la traslazione*

$$\tau_a : v \mapsto v + a \quad (a \in V),$$

per ogni $f \in W^U$; $a \in V$; x, $x + a \in U$ *risulta*

$$m(f \circ \tau_a)(x) = (mf) \circ \tau_a(x);$$

([16]) Ved. p. es. H. CARTAN [3], p. 52, Théor. 3.4 3.
([17]) Ved. p. es. E. K. BLUM [1], Theor. 3.2.
([18]) Ved. p. es. H. CARTAN [3], p. 52, Théor. 3.4.3.

II *esiste in* V *un elemento* u *tale che, per ogni* $f \in W^U$ *e per ogni* $x \in U$, *risulta*

$$(mf)(x) \cdot u = f(x) \ ({}^{19}).$$

Denotato con $M_p^{(r)}$ lo spazio, analogo a $Q_p^{(r)}$, ma relativo all'operatore m, si ha per definizione $M_p^{(r)} = \mathfrak{L}_p(V, W)^U$. Si riconosce poi che, in virtù della II, m risulta *iniettivo*.

Conviene osservare subito che *l'operatore esterno* $\boldsymbol{m}$ *associato ad* m *é un operatore di* POINCARÈ. Invero, data un'arbitraria p-forma ω_p di grado $p \geq 1$, si consideri la $(p$-$1)$-forma ω_{p-1} definita dalla relazione

$$\omega_{p-1}\ (x) \cdot (v_1, \ldots, v_{p-1}) = p\omega_p(x) \cdot (v_1, \ldots, v_{p-1}, u).$$

Tenute presenti le (2), (3) si può scrivere allora

$$(p+1)(\boldsymbol{m}\omega_p)(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p, u) =$$

$$-(\boldsymbol{m}\omega_{p-1})(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p) + (m\omega_p)(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p, u)$$

$$-(\boldsymbol{m}\omega_{p-1})(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p) + \omega_p(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p)$$

e nell'ipotesi $\boldsymbol{m}\omega_p = 0$ segue $\omega_p = \boldsymbol{m}\omega_{p-1}$.

Sussiste infine per gli operatori $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{m}$ la (5) del n. 5. Invero, posto

$$g_{v_1}(x) = \frac{f(x+v_1) - f(x) - df(x) \cdot v_1}{\| v_1 \|}$$

nell'ipotesi $f \in D_0^{(1)}$ (ossia f di classe C^1) risulta $\lim\limits_{\|v_1\| \to 0} g_{v_1} = 0$, onde per la continuità di m è anche $\lim\limits_{\|v_1\| \to 0} mg_{v_1} = 0$. D'altra parte può scriversi

$$(mg_{v_1})(x) \cdot v_2 = \frac{(mf) \circ \tau_{v_1} - mf - m < df;\ v_1 >}{\| v_1 \|}(x) \cdot v_2$$

$$= \frac{< mf;\ v_2 > (x + v_1) - < mf;\ v_2 > (x) - m < df;\ v_1 > (x) \cdot v_2}{\| v_1 \|}$$

(19) Un esempio è l'operatore m definito al n. 3. Un altro esempio più generale è dato nel successivo n. 11.

onde può affermarsi che $< mf;\ v_2 >$ è differenziabile in U, e risulta

$$d < mf;\ v_2 > (x) \cdot v_1 = m < df;\ v_1 > (x) \cdot v_2 \ ([20]).$$

In particolare, si riconosce che $< mf;\ v_2 >$ appartiene a $D_0^{(1)}$, perchè il secondo membro è funzione continua di x [21], onde $f \in I_{dm}$. Si perviene ora senza difficoltà alla relazione

$$\mathbf{dm}f + \mathbf{md}f = 0 \tag{9}$$

e pertanto nell'ipotesi $f \in \operatorname{Ker} \mathbf{md} \subset D_0^{(1)}$ segue $f \in \operatorname{Ker} \mathbf{dm}$. Viceversa se $f \in \operatorname{Ker} \mathbf{dm}$, risulta $mf \in D_1^{(1)}$, e successivamente $f = < mf;\ u > \in D_0^{(1)} = I_{md}$. La (9) porge allora $f \in \operatorname{Ker} \mathbf{md}$ e l'asserto è provato.

In virtù delle precedenti osservazioni, è applicabile agli operatori d, m la teoria della $(q, \tilde{q})$-monogeneità sviluppata nei numeri 2-7 [22].

9. - Teorema di approssimazione.

È utile la seguente proposizione:

P$_1$ - *Per ogni funzione monogena $f \in W^U$, esiste una successione di funzioni $f_n \in W^U$, monogene di classe C^∞ in U, tali che risulti*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f; \quad \lim_{n\to\infty} f'_n = f' \tag{10}$$

uniformemente su ogni compatto di U.

Invero, denotata con ρ: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione di classe C^∞ a supporto compatto [23], si consideri la funzione

$$f_n(x) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \lambda u)\rho(n\lambda)d\lambda \qquad (\lambda \in \boldsymbol{R}) \ ([24]). \tag{11}$$

Può applicarsi la regola di derivazione sotto il segno [25].

---

[20] In modo del tutto analogo, servendosi della funzione $\delta_h(x) = f(x+h) - f(x)$ si prova che se la funzione f è *continua* in U, anche mf risulta funzione continua di x in U.

[21] Ved. nota [20].

[22] Nel seguito, le funzioni (d, m)-monogene si diranno anche semplicemente *funzioni monogene*.

[23] Cfr. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], p. 176.

[24] L'integrale si intende esteso ad un qualsiasi intervallo I_n che contenga propriamente il supporto di $\rho(n\lambda)$.

[25] Ved. p. es. J DIEUDONNÉ [5], p. 169.

Tenendo poi presente che m, essendo continuo, è permutabile con l'integrazione, si può scrivere

$$df_n(x)\cdot v = n\int_{-\infty}^{+\infty} df(x+\lambda u)\cdot v\rho(n\lambda)d\lambda$$

$$= n\int_{-\infty}^{+\infty} (mf')(x+\lambda u) \quad v\rho(n\lambda)d\lambda$$

$$= m\Big(n\int_{-\infty}^{+\infty} f'\circ\tau_{\lambda u}\rho(n\lambda)d\lambda\Big)(x)\cdot v$$

onde f_n risulta *monogena*, con derivata

$$f'_n(x) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x+\lambda u)\rho(n\lambda)d\lambda\,. \tag{12}$$

Ora, risulta $f'(x+\lambda u) = (mf')(x+\lambda u)\cdot u = (df)(x+\lambda u)\cdot u = \dfrac{d}{d\lambda}f(x+\lambda u)$. Per la regola di integrazione per parti ([26]) si può dunque scrivere:

$$f'_n(x) = -\,n^2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\lambda u)\rho'(n\lambda)d\lambda\,.$$

Si ritrova per f'_n un'espressione del tipo (11). Può quindi ripetersi il ragionamento usato sopra; si perviene facilmente alla conclusione che f_n é di classe C^∞.

Alterando eventualmente la funzione ρ di un fattore costante, può sempre assumersi $\int_{-\infty}^{+\infty}|\rho(\lambda)|\,d\lambda = 1$. Posto allora $f^{(0)} = f$. $f^{(1)} = f'$ dalle (11), (12) segue, per $s = 0,\ 1$

([26]) Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ (5). p. 158. Si ricordi che la funzione $\rho(n\lambda)$ è nulla sul contorno di I_n (nota([24])).

$$\| f_n^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) \| \leq n \int_{-\infty}^{+\infty} \| f^{(s)}(x + \lambda u) - f^{(s)}(x) \| \cdot | \rho(n\lambda) | \, d\lambda$$

$$\leq \sup_{\lambda \in I_n} \| f^{(s)}(x + \lambda u) - f^{(s)}(x) \| .$$

Dalla continuità di $f^{(s)}$, ***uniforme sui compatti*** [27], discendono allora facilmente le (10).

La proposizione enunciata è così completamente dimostrata.

10. - Funzioni monogene nel quoziente V/S.

Sia U un aperto *convesso* di V ed S un sottospazio vettoriale *chiuso* di V. Si denota con $\bar{V}$ lo spazio quoziente V/S, munito della sua struttura canonica di spazio di BANACH [28], e con $\bar{U}$ l'aperto di $\bar{V}$ formato dalle classi individuate dagli elementi di U.

É naturale considerare l'***isomorfismo*** θ dello spazio vettoriale $\mathfrak{L}_p(\bar{V}, W)^{\bar{U}}$, nello spazio $\mathfrak{L}_p(V, W)^U$, definito per ogni $\bar{\alpha}_p \in \mathfrak{L}_p(\bar{V}, W)^{\bar{U}}$ dalla relazione

$$(\theta \bar{\alpha}_p)(x) \cdot (v_1, \ldots, v_p) = \bar{\alpha}_p(\bar{x}) \cdot (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p) \tag{13}$$

ove $\bar{x}$, $\bar{v}_i$ denotano i laterali $x + S$, $v_i + S$.

Si noti in particolare che $\theta(W^{\bar{U}})$ è l'insieme delle funzioni definite in U e costanti sui laterali. Non è poi difficile verificare che θ è anche un *isomorfismo topologico*, rispetto alla topologia della convergenza semplice. Denotato infine con $\bar{d}$ il ***differenziale*** relativo alle funzioni definite in $\bar{U}$, sussiste la ***relazione di permutabilità***

$$(d \circ \theta)\bar{\alpha}_p = (\theta \circ \bar{d})\bar{\alpha}_p \tag{14}$$

per ogni $\bar{\alpha}_p$ nell'insieme $\bar{D}_p^{(1)}$ (cioè di classe C^1 in $\bar{U}$). L'asserto segue immediatamente da due note proprietà del differenziale [29].

Ciò premesso, può stabilirsi una relazione tra la monogeneità in U e la monogeneità in $\bar{U}$. Precisamente:

---

[27] Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], p. 56.

[28] Ved. p. es. E. HILLE-R.S. PHILLIPS [6], p. 18.

[29] Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], 8.2.1 e 8.1.3.

Teor. 3 - *Ad ogni operatore* m: $W^U \to \mathcal{L}(V, W)^U$, *del tipo considerato al n. 8, corrisponde univocamente un operatore dello stesso tipo* $\overline{m}$: $W^{\overline{U}} \to \mathcal{L}(\overline{V}, W)^{\overline{U}}$ *tale che l'isomorfismo* θ *subordina un isomorfismo tra lo spazio* $\mathfrak{M}(\overline{U})$ *delle funzioni* $(\overline{d}, \overline{m})$*-monogene in* $\overline{U}$ *e lo spazio* $\mathfrak{M}_S(U)$ *delle funzioni* (d, m)*-monogene in* U, *costanti sui laterali.*

Infatti, si consideri l'insieme

$$\overline{M}_0^{(1)} = \{ \overline{f} \in W^{\overline{U}} \,|\, (m\theta\overline{f})(x) \cdot s = 0 \ \ \forall x \in U, \ s \in S \}$$

e sia $\overline{m}$ l'*operatore lineare* definito per ogni $\overline{f} \in \overline{M}_0^{(1)}, \overline{x} \in \overline{U}, \overline{v} \in \overline{V}$ dalla relazione

$$(\overline{m}\,\overline{f})(\overline{x}) \cdot \overline{v} = (m\theta\overline{f})(x) \cdot v \tag{15}$$

essendo x, v elementi arbitrari delle classi $\overline{x}$, $\overline{v}$. La definizione non dipende dalla scelta di questi elementi, dato che per $\overline{f} \in \overline{M}_0^{(1)}$, $s \in S$ risulta

$$\begin{aligned}(m\theta\overline{f})(x+s) \cdot (v+s) &= (m\theta\overline{f})(x+s) \cdot v \\ &= m(\theta\overline{f} \circ \tau_s)(x) \cdot v \\ &= (m\theta\overline{f})(x) \cdot v.\end{aligned}$$

Per la continuità di m, θ anche *l'operatore* $\overline{m}$ *è continuo.* Risulta poi per ogni $\overline{f} \in \overline{M}_0^{(1)}$; $\overline{a}$, $\overline{v} \in \overline{V}$; $\overline{x}$, $\overline{x} + \overline{a} \in \overline{U}$:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\overline{f} \circ \tau_{\overline{a}})(\overline{x}) \cdot \overline{v} &= (m\theta)(\overline{f} \circ \tau_{\overline{a}})(x) \cdot v \\ &= (m\theta\overline{f}) \circ \tau_a(x) \cdot v \\ &= (\overline{m}\,\overline{f}) \circ \tau_{\overline{a}}(\overline{x}) \cdot \overline{v}; \\ \overline{m}\,\overline{f}(\overline{x}) \cdot \overline{u} &= (m\theta\overline{f})(x) \cdot u \\ &= (\theta\overline{f})(x) \\ &= \overline{f}(\overline{x}),\end{aligned}$$

onde per l'operatore $\overline{m}$ sussistono condizioni analoghe alle I, II del n. 8.

Conviene poi notare esplicitamente che le definizioni dell'operatore $\overline{m}$ e dell'isomorfismo θ, conducono alla *relazione di permutabilità*

$$(m \circ \theta)\overline{\alpha}_p = (\theta \circ \overline{m})\overline{\alpha}_p \tag{16}$$

per ogni $\overline{\alpha}_p \in \overline{M}_p^{(1)}$.

È immediato ora verificare che se $\overline{f} \in \overline{D}_0^{(1)}$ è una funzione $(\overline{d}, \overline{m})$-monogena avente per derivata $\overline{f}'$, la funzione $\theta\overline{f}$, costante sui laterali, è (d, m)-monogena con derivata $\theta\overline{f}'$, e pertanto appartiene ad $\mathfrak{M}_S(U)$.

Viceversa, se $f \in \mathfrak{M}_S(U)$ risulta

$$f(x) = f(x + s) \tag{17}$$

per ogni $x \in U$, $s \in S$ onde riesce definita una $\overline{f} = \theta^{-1}f$ appartenente a $W^{\overline{U}}$.

Dalla (17), poichè f è (d, m)-monogena, segue immediatamente

$$0 = (df)(x) \cdot s = (mf')(x) \cdot s. \tag{18}$$

D'altra parte differenziando la (17) si ottiene anche $f'(x) = df(x) \cdot u = df(x + s) \cdot u = f'(x + s)$ onde $f' \in \theta(W^{\overline{U}})$. La (18) mostra allora che $\overline{f}' = \theta^{-1}f'$ appartiene all'insieme $\overline{M}_0^{(1)}$. Tenuta ora presente la monogeneità di f e la relazione di permutabilità (16), si ottiene

$$df = mf' = m\theta\overline{f}' = \theta\overline{m}\overline{f}'.$$

Per la (13) e la differenziabilità di f, ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che per $\|h\| < \delta$ può scriversi

$$\|\overline{f}(\overline{x} + \overline{h}) - \overline{f}(\overline{x}) - (\overline{m}\overline{f}')(\overline{x}) \cdot \overline{h}\| = \|f(x + h) - f(x) - (\theta\overline{m}\overline{f}')(x) \cdot h\| < \varepsilon\|h\|. \tag{19}$$

Poichè $\|\overline{h}\| = \inf\limits_{h \in \overline{h}} \|h\|$, in ogni laterale $\overline{h}$ con $\|\overline{h}\| < \delta$ esiste una successione di elementi h_j, in norma minori di δ, tali che risulti $\lim\limits_{j \to \infty} \|h_j\| = \|\overline{h}\|$. Ponendo nella (19) $h = h_j$ e passando al limite per j tendente all'infinito, si ottiene in definitiva

$$\|\overline{f}(\overline{x} + \overline{h}) - \overline{f}(\overline{x}) - \overline{m}\overline{f}'(\overline{x}) \cdot \overline{h}\| \leq \varepsilon\|\overline{h}\|$$

valida per ogni $\overline{h}$ con $\|\overline{h}\| < \delta$. La relazione ottenuta prova che $\overline{f} \in \overline{D}_0^{(1)}$ ed è

$$(\overline{d}\overline{f})(\overline{x}) \cdot \overline{h} = (\overline{m}\overline{f}')(\overline{x}) \cdot \overline{h}.$$

Il TEOR. 3 è così completamente dimostrato.

11. – Funzioni monogene definite in un'algebra.

In questo numero si assume come spazio V *un'algebra* di BANACH A su $\boldsymbol{R}$, *non necessariamente associativa né commutativa.*

Sia poi assegnata un'*applicazione bilineare continua*

$$(w,\ a) \mapsto w \cdot a$$

di $W \times A$ in W, con le proprietà

a) $(w \cdot a_1) \cdot a_2 = w \cdot (a_1 a_2)$ per ogni $w \in W$ e $a_1,\ a_2 \in A$;

b) esiste in A un elemento u tale che per ogni $w \in W$ risulti

$$w \cdot u = w \text{ (}^{30}\text{)}.$$

Ciò premesso, per le funzioni definite nell'algebra A, a valori nello spazio W, si può definire un operatore m (*moltiplicazione a destra*) del tipo considerato al n. 8. Precisamente, se $f \in W^U$ si pone

$$(mf)(x) \cdot a = f(x) \cdot a \text{ (}^{31}\text{)}.$$

È immediato verificare infatti che le condizioni I, II del n. 8 sono soddisfatte. Si osserva poi che in questo caso l'insieme $M_0^{(2)}$ coincide con l'insieme delle $f \in W^U$ tali che per ogni $x \in U$; $a_1,\ a_2 \in A$ risulti

$$f(x) \cdot (a_1 a_2 - a_2 a_1) = 0.$$

Si consideri ora l'insieme

$$S = \{ s \in A \,|\, f(x) \cdot s = 0 \ \forall\, f \in M_0^{(2)} \}.$$

Non è difficile verificare che S è un ideale chiuso di A, contenente gli insiemi degli *associatori* $a_1(a_2 a_3) - (a_1 a_2) a_3$ e dei *commutatori* $a_1 a_2 - a_2 a_1$ di A, onde l'algebra quoziente $\bar{A} = A/S$ è *associativa* e *commutativa*, con unità $\bar{u}$, ottenuta canonicamente da u.

Ciò premesso, si mostra ora come, utilizzando il TEOR. 3 del precedente n. 10 sia possibile ricondurre lo studio delle funzioni monogene in A

(30) Le condizioni precedenti equivalgono in sostanza a richiedere per W una struttura di A-*modulo unitario destro* (A non è necessariamente associativa).

(31) In particolare, se A è associativa con unità destra u e si assume $W = A$ e, come applicazione lineare, si considera l'ordinaria moltiplicazione in A, si ottiene il secondo esempio del n. 3.

all'analogo studio nell'algebra associativa e commutativa $\bar{A}$. Precisamente, sussiste il teorema:

TEOR. 4 - *Per ogni funzione (d, m)-monogena f definita nell'aperto convesso U di A, a valori in W, risulta*

$$f(x) = w_0 + w_1 \cdot x + (\theta \bar{f})(x) \tag{20}$$

essendo w_0, w_1 opportuni elementi di W, e $\bar{f}$ una funzione $(\bar{d}, \bar{m})$-monogena nell'aperto $\bar{U}$ di $\bar{A}$, a valori in W.

Per la dimostrazione, si consideri una successiooe $\{f_n\}$ di funzioni (d, m)-monogene di classe C^∞, convergenti ad f in U, del tipo indicato al n. 9 ([32]).

Denotato con x_0 un arbitrario elemento di U, si consideri la funzione

$$\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0) - f'_n(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Essa è (d, m)-monogena in U ([33]). D'altra parte, per la funzione monogena f_n sussiste la formula di TAYLOR ([34])

$$f_n(x) = f_n(x_0) + f'_n(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_0^1 (1 - \lambda) f''_n(x_0 + \lambda(x - x_0)) \cdot (x - x_0)^2 d\lambda.$$

Tenuto conto poi della continuità di m e del fatto che $f''_n \in M_0^{(2)}$ (osservazione alla fine del n. 5), per ogni $s \in S$, risulta

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) \cdot s &= \int_0^1 (1 - \lambda) f''_n(x_0 + \lambda(x - x_0)) \cdot (x - x_0)^2 \cdot s d\lambda \\ &= \int_0^1 (1 - \lambda) f''_n(x_0 + \lambda(x - x_0)) \cdot s \cdot (x - x_0)^2 d\lambda \\ &= 0. \end{aligned}$$

([32]) Quando $f \in D_0^{(2)}$ si può giungere più rapidamente all'asserto senza far uso della proposizione P_4 del n. 9.

([33]) Invero essa differisce dalla funzione monogena $f_n(x)$ per un polinomio di primo grado in x.

([34]) Ved. p. es. J. DIEUDONNÉ [5], p. 182.

Differenziando la relazione ottenuta, può scriversi

$$\tilde{f}_n'(x) \cdot s = 0.$$

Si consideri ora la funzione

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Essa è ovviamente monogena e risulta $\tilde{f}'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Tenuto conto della proposizione P_1 del n. 9 si ha

$$\tilde{f}(x) = \lim \tilde{f}_n(x), \quad \tilde{f}'(x) = \lim \tilde{f}_n'(x).$$

La continuità di m ed una osservazione precedente permettono di concludere che

$$\tilde{f}'(x) \cdot s = 0.$$

Dalla formula di TAYLOR segue ora

$$\tilde{f}(x + s) = \tilde{f}(x) + \int_0^1 \tilde{f}'(x + \lambda s) \cdot s d\lambda = \tilde{f}(x)$$

per ogni $s \in S$, e pertanto $\tilde{f}$ appartiene a $\mathfrak{M}_S(U)$. Il TEOR. 3 assicura allora che la funzione

$$\overline{f} = \theta^{-1}\tilde{f}$$

è $(\overline{d}, \overline{m})$-monogena in $\overline{U}$. Si perviene ormai all'asserto, ponendo

$$w_0 = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$w_1 = f'(x_0).$$

In particolare, la (20) mostra che *per l'esistenza di funzioni monogene $f \in W^U$ non lineari, occorre e basta che risulti $\overline{A} = A/S \neq 0$, cioé $S \neq A$.*

Invero, se $S = A$, $\theta\overline{f}$ riesce costante. D'altra parte, se $S \neq A$, l'esistenza nell'algebra $\overline{A}$, commutativa e dotata di unità, di serie di potenze $\sum w_n \cdot \overline{x}^n$ ($w_n \in W$, $\overline{x} \in \overline{U}$) convergenti a funzioni monogene $\overline{f}(\overline{x})$ prova l'asserto [35].

---

[35] Cfr. p. es. E. HILLE-R S. PHILLIPS [6]. p. 116. La dimostrazione, relativa al caso $W = A$, può traspostarsi senza alcuna modifica al caso generale qui considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. K. BLUM, *A theory of analytic functions in Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), 343-370.

[2] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats (Hermann, Paris, 1967).

[3] H. CARTAN, *Formes différentielles* (Hermann, Paris, 1967).

[4] P. DENTONI, *Sulle funzioni monogene nelle algebre non commutative*, Rend. Mat. e Appl. Roma, (5), **26** (1967), 403-421.

[5] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne* (Gauthier-Villars, Paris, 1967).

[6] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups* (A.M.S. Colloquium Publ., Providence, 1957).

[7] J. L. KELLEY, *General Topology* (Van Nostrand. New York, 1955).

[8] E. R. LORCH, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 414-425.

[9] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, Comm. Pont. Ac. Sci., **14** (1950), 169-194.

[10] — —, *Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative*, Rend. Mat. e Appl. Roma, (5), 12 (1953), 306-338.