Sulle singolarità della curva hessiana.

Nota di GIUSEPPINA MASOTTI BIGGIOGERO (a Milano).

Sunto. - Si precisano talune singolarità della hessiana H di una curva piana algebrica F , dimostrando che: a) in un generico punto r -plo O della F , origine di r rami lineari distinti, la H presenta $3r - 4$ rami lineari distinti (r dei quali tangenti ai rami della F); b) in un generico punto r -plo O della F , origine di un ramo superlineare d'ordine r e classe 1, la H presenta due rami superlineari degli ordini r e $r - 2$, entrambi di classe 1 e tangenti al ramo della F , e $r - 1$ rami lineari distinti, nessuno dei quali tangente al ramo della F ; c) in un generico punto r -plo O della F , origine di r rami lineari distinti, aventi tra loro a due a due contatto s -punto, e soltanto s -punto, la H presenta $3r - 3$ rami lineari distinti, aventi tra loro e coi rami della F contatto s -punto, e soltanto s -punto.

1. — È noto che le singolarità della hessiana H di una curva piana algebrica F dipendono, in generale ⁽¹⁾, da quelle della F .

Già HESSE aveva riconosciuto il comportamento della H nei punti doppi della F ⁽²⁾. Sono state pure precisate la molteplicità della H in un punto r -plo O della F , e le tangenti alla H in O ⁽³⁾. Per le singolarità straordinarie il problema non è ancora stato completamente risolto. Si conosce soltanto il comportamento della H nel tacnodo e nel tacnodo simmetrico ⁽⁴⁾, nella singolarità costituita da un punto doppio O , origine di una serie di $s \geq 2$ punti doppi infinitamente vicini, sia che essi appartengano a un tacnodo di specie $s - 1$, sia che appartengano a una cuspidale di specie s , e, comunque, siano generici, nel senso che, per $s > 2$, il ramo lineare sul quale essi si succedono non presenti flesso in O , e, per $s = 2$, la somma delle curvature dei due

⁽¹⁾ P. DEL PEZZO, *Sulla curva Hessiana*, « Rend. R. Accademia di Napoli », v. XXII (1883), p. 203. C. SEGRE, *Sulla forma Hessiana*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », v. IV (1895), p. 143. F. GERBALDI, *Sulle singolarità della Jacobiana di tre curve piane*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. VIII (1894), p. 1. M. VILLA, *Sulle singolarità della Jacobiana di $r + 1$ ipersuperficie dello spazio a r dimensioni*, « Mem. R. Ist. Lombardo », v. XXII (1931), p. 177; *Sulla molteplicità d'intersezione della Jacobiana*, ecc., « Rend. R. Ist. Lombardo », v. LXIV (1931), p. 683.

⁽²⁾ L. O. HESSE, *Ueber die Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven*, ecc., « Journal für die reine und ang. Math. », t. 41 (1851), p. 272.

⁽³⁾ A. BRILL, *Ueber die Hesse'sche Curve*, « Math. Ann. », t. 13 (1878), p. 175. E. KÖTTER, *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung*, « Math. Ann. », t. 34 (1888), p. 123. C. SEGRE, *La molteplicità delle intersezioni delle curve piane algebriche*, ecc., « Giornale di Mat. », v. XXXVI (1898), p. 1.

⁽⁴⁾ E. WÖLFFING, *Ueber die Hesse'sche Covariante*, ecc., « Math. Ann. », t. 36 (1889), p. 97. C. SEGRE, l. c. in nota ⁽³⁾ e *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche*, ecc., « Rend. R. Accademia dei Lincei », v. VI (1897), p. 168.

rami che vi osculano la F sia diversa da zero ⁽⁵⁾. È stato pure dimostrato il comportamento della H nella singolarità costituita da un punto r -plo O , origine di una serie di $s \geq 2$ punti r -pli della F succedentisi sopra un ramo lineare in posizione *generica* (nel senso detto sopra) e derivanti dal contatto s -punto, e non più che s -punto, di r rami lineari distinti della F ⁽⁶⁾.

Ma la precisa singolarità che la H presenta in una data singolarità della F (cioè il numero e la natura dei rami che compongono la singolarità della H) è nota solo per i punti doppi e per la serie di $s \geq 2$ punti doppi infinitamente vicini e *generici*, tanto nel caso del tacnodo di specie $s-1$, come nel caso della cuspidale di specie s ⁽⁷⁾. Scopo di questa nota è appunto di caratterizzare (nel senso detto sopra) la singolarità della H in talune singolarità assegnate della F . Si studiano qui tre casi notevoli, in quanto costituiscono elementi idonei per ulteriori analisi di casi più complicati. Precisamente:

1.° Si considera il *generico* punto r -plo della F a tangenti tutte distinte (n. 2), quindi origine di r rami lineari distinti. Si sa, per il teorema del BRILL ⁽⁸⁾, che l'hessiana H possiede in O un punto multiplo d'ordine $3r-4$, le cui tangenti sono le stesse tangenti principali in O alla F e le $2r-4$ rette che ne costituiscono il gruppo hessiano. In questa nota si precisa ulteriormente la singolarità della H , dimostrando il

TEOREMA I. — *Nel generico punto r -plo O della F , origine di r rami lineari distinti, l'hessiana presenta $3r-4$ rami lineari distinti.*

L'enunciato di questo teorema appare meno significativo di un analogo enunciato di CORRADO SEGRE, il quale afferma ⁽⁹⁾, senza però dimostrarlo, che « queste tangenti in O alla Hessiana di f saranno tutte distinte fra loro, se tali sono le tangenti ad f ». Ma la nuova forma è necessaria, in quanto esistono curve F , dotate di punto r -plo O a tangenti tutte distinte, la cui hessiana non ammette in O le tangenti tutte distinte. Ad esempio, quando le tangenti in O alla F siano costituite dalle rette (distinte).

$$x'' + ay'' = 0,$$

le corrispondenti tangenti alla H sono

$$(x'' + ay'')x'^{-2}y'^{-2} = 0,$$

e queste, per $r > 3$, non sono tutte distinte.

⁽⁵⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, *Sul comportamento della hessiana in un caso semplice di singolarità straordinaria*, « Rend. R. Ist. Lombardo », v. LXXIV (1940-41), p. 317; *Precisazione di singolarità della hessiana*, ibid., v. LXXIX (1945-46), p. 89.

⁽⁶⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, *Sul comportamento della hessiana*, « Rend. R. Ist. Lombardo », v. LXXVI (1942-43), p. 271.

⁽⁷⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, l. c. in nota ⁽⁵⁾.

⁽⁸⁾ A. BRILL, l. c. in nota ⁽³⁾.

⁽⁹⁾ C. SEGRE, l. c. in nota ⁽³⁾.

La dimostrazione del teorema I, per il ricordato teorema del BRILL, evidentemente si riduce a stabilire il

LEMMA. - *L'hessiano della generica forma binaria $\varphi_r(x, y) = 0$, a radici tutte distinte, ha pure tutte le sue radici distinte, e diverse da quelle della $\varphi_r(x, y) = 0$.*

Alle radici dell'hessiano di una forma binaria sono dedicati diversi lavori ⁽¹⁰⁾, nei quali però non ho trovato dimostrato, e neppure enunciato, il lemma che qui interessa; perciò ritengo opportuno darne la dimostrazione.

Sarebbe desiderabile di poter assegnare anche le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'hessiano di una forma a radici tutte distinte presenti una radice multipla; ma qui, essendoci proposti la caratterizzazione delle singolarità della H derivanti da una data singolarità della F , ci occupiamo solo dei casi *generici*, senza, per ora, soffermarci sulle loro possibili complicazioni.

2.° Il BRILL si era anche occupato ⁽¹¹⁾ del punto r -plo O a tangenti tutte coincidenti e con l'unica tangente a contatto $(r+1)$ -punto (punto r -plo *ordinario*), e aveva dimostrato che la H possiede allora in O la molteplicità $3r - 3$, e in O ha $2r - 2$ tangenti coincidenti con quella della F . Qui, al n. 3, preciseremo ulteriormente, nel senso anzidetto, la singolarità della H in O , dimostrando il

TEOREMA II. - *Se una generica curva piana algebrica F , d'ordine n , è dotata di un punto r -plo ordinario O (con $2 \leq r < n$), a tangenti coincidenti, e quindi possiede in O un ramo superlineare d'ordine r e classe 1, l'hessiana H della F presenta in O :*

- a) *un ramo superlineare d'ordine r e classe 1, tangente a quello della F ;*
- b) *un ramo superlineare d'ordine $r - 2$ e classe 1, tangente a quello della F ;*
- c) *$r - 1$ rami lineari distinti, nessuno dei quali tangente al ramo della F .*

3.° In un precedente lavoro ⁽¹²⁾ ho dimostrato che se la F presenta $s \geq 2$ punti r -pli ($r \geq 2$) infinitamente vicini e *generici* (nel senso precisato sopra), derivanti dal contatto s -punto, e soltanto s -punto, di r rami lineari distinti (a due a due), la H possiede in tali punti la molteplicità $3r - 3$. Qui, al n. 4, preciso ulteriormente la singolarità della H in O , dimostrando il

TEOREMA III. - *Se una generica curva piana algebrica F , d'ordine r , possiede un punto r -plo O , origine di r rami lineari distinti e generici, aventi a due a due in O contatto s -punto, e non più che s -punto, tra loro, l'hessiana H*

⁽¹⁰⁾ L. O. HESSE, *Ueber die Bedingung unter welcher eine homogene ganze Function*, ecc., « Journal für die reine und ang. Math. », t. 42 (1851), p. 117. F. GERSALDI, *Un teorema sull'hessiana di una forma binaria*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. III (1889), p. 22. P. H. SCHOUTE, *Sur un théorème relatif à l'hessienne d'une forme binaire*, ibid., p. 160.

⁽¹¹⁾ A. BRILL, l. c. in nota ⁽³⁾.

⁽¹²⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, l. c. in nota ⁽⁷⁾.

della F presenta in O $3r - 3$ rami lineari distinti, aventi contatto s -punto, e soltanto s -punto, coi rami della F e tra loro.

Per la dimostrazione dei risultati ora enunciati, ove la verifica analitica diretta sarebbe troppo laboriosa, o praticamente impossibile, si ricorre invece a particolari procedimenti algebrico-geometrici, che qui appaiono efficaci, e che sembrano interessanti, anche indipendentemente dalla loro attuale applicazione.

2. — Precisiamo anzitutto la singolarità della hessiana, cioè il numero e la natura dei suoi rami, nel generico punto r -plo O della F , a tangenti tutte distinte. Si sa, per il teorema del BRILL ⁽¹³⁾, che la H possiede in O la molteplicità $3r - 4$, avendo ivi, come tangenti, le stesse tangenti della F e le $2r - 4$ rette che ne costituiscono il gruppo hessiano. Ora vogliamo dimostrare il

TEOREMA I. — *Nel generico punto r -plo della F , origine di r rami lineari distinti, l'hessiana presenta $3r - 4$ rami lineari distinti.*

L'equazione della curva F , quando si assuma come origine degli assi il punto r -plo allo studio, è del tipo:

$$F(x, y) = \varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0,$$

dove φ_i indica una forma binaria in x e y , di grado i . Le tangenti in O alla F sono complessivamente rappresentate da

$$\varphi_r(x, y) = 0,$$

e, per il teorema del BRILL, le tangenti in O alla H sono date dalla

$$\varphi_r(x, y) \cdot h_{2r-4}(x, y) = 0,$$

dove $h_{2r-4}(x, y)$ è l'hessiano della forma $\varphi_r(x, y)$. Per dimostrare il teorema di cui sopra, basta limitare le nostre considerazioni al fascio di rette di centro O , o, ciò che è proiettivamente lo stesso, ai punti di una retta, dimostrando il

LEMMA. — *L'hessiano della generica forma binaria $\varphi_r(x, y) = 0$, a radici tutte distinte, ha pure tutte le sue radici distinte, e diverse da quelle della $\varphi_r(x, y) = 0$.*

Osserviamo anzitutto che questo lemma si potrà ritenere dimostrato in generale, se riconosceremo che esso si verifica per una particolare forma $\varphi_r(x, y) = 0$, a radici distinte; perchè se per la generica $\varphi_r(x, y) = 0$ il corrispondente hessiano dovesse presentare delle radici multiple, una $\varphi_r(x, y) = 0$ particolare non potrebbe mai possedere l'hessiano a radici tutte distinte.

⁽¹³⁾ A. BRILL, l. c. in nota ⁽³⁾.

Ma la verifica analitica diretta, anche su un esempio particolare, comunque semplice, richiede dei calcoli laboriosi, che ci proponiamo di evitare. Vi sostituiamo il seguente procedimento. Consideriamo come *particolare* forma $\bar{\varphi}_r(x, y) = 0$, a radici tutte distinte, la *generica* forma di un *particolare* fascio, privo di punti base multipli: in quanto sono $2r - 2$ (distinte o coincidenti) le forme di un tal fascio d'ordine r che possiedono punti doppi, la forma *generica* del fascio ha tutte le radici distinte. L'hessiano della nostra $\bar{\varphi}_r(x, y) = 0$ si presenta allora di secondo grado nel parametro λ del fascio, e così, togliendo l'omogeneità, ed eguagliandolo a zero, si perviene a un'equazione

$$(1) \quad h(x, \lambda) = 0$$

di grado $2r - 4$ in x e di 2° grado in λ . La (1), quando si riguardino x e λ come coordinate cartesiane, rappresenta una curva algebrica, in generale di ordine $2r - 2$. Se, per λ generico, la (1) dovesse presentare delle radici multiple per x , vorrebbe dire che la curva (1) ammette una componente multipla C^i . Poichè la (1) è di 2° grado in λ , la C^i , se esiste, può soltanto verificare una delle seguenti ipotesi:

- a) essere una retta doppia genericamente posta;
- b) essere una curva doppia unisecata dalle rette passanti pel punto improprio dell'asse λ ;
- c) essere costituita da una o più rette multiple passanti per il punto improprio dell'asse λ .

Nelle prime due ipotesi, per x generico, la (1) dovrebbe presentare sempre una radice doppia per λ , e così dovrebbe annullarsi identicamente il suo discriminante, quando essa sia riguardata come equazione nella sola λ . Nella terza ipotesi le rette multiple dovrebbero intanto figurare tra le tangenti alla curva (1) nel punto improprio dell'asse λ , per la qual cosa, presentandosi la (1) di grado $2r - 4$ in x , è *necessario* che il coefficiente di λ^2 nell'equazione stessa ammetta dei fattori del tipo $(x - x_0)^i$, con $i > 1$.

Costruiamo ora una *particolare* forma binaria $\bar{\varphi}_r(x, y) = 0$, il cui hessiano $h_{2r-4}(x, \lambda) = 0$ non verifichi alcuna delle predette ipotesi. Come particolare forma $\bar{\varphi}_r$, si consideri quella di equazione (non omogenea):

$$\bar{\varphi}_r = x^r + x^{r-1} + \lambda(x - 1) = 0;$$

il suo hessiano è:

$$h = \lambda^2 - [r(r-2)x^{r-1} + (2-4r)x^{r-2} + r(2-r)x^{r-3}]\lambda + x^{2r-4} = 0.$$

Si verifica subito, senza neppure far calcoli, che il discriminante dell'equazione $h = 0$, riguardata come equazione in λ , non è identicamente nullo, e che il coefficiente di λ^2 non contiene alcun fattore del tipo $(x - x_0)^i$. Pertanto, in base ai ragionamenti che precedono, risulta dimostrato che *l'hessiano della generica forma a radici distinte possiede tutte le sue radici distinte*.

Occorre ora riconoscere che una forma a radici distinte e il corrispondente hessiano non hanno radici comuni, il che è ovvio. È noto infatti ⁽¹⁴⁾ che una radice di una forma, multipla secondo i , è per l'hessiano multipla secondo $k = 2i - 2$. Nel caso nostro essendo, per ipotesi, sempre $i = 1$, è $k = 0$.

Pertanto risulta dimostrato il lemma e, con esso, il teorema I.

OSSERVAZIONE. — Si verifica facilmente che l'hessiana ha in O tante intersezioni con la F quante sono richieste dall'equivalenza plückeriana della singolarità della F , agli effetti del computo del numero dei flessi.

Infatti, dette

$$t_1, t_2, \dots, t_r$$

le tangenti in O alla F , siano rispettivamente

$$r + \tau_1, r + \tau_2, \dots, r + \tau_r$$

le loro intersezioni con la F in O . Poichè un punto r -plo a tangenti distinte equivale a $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, nessuno dei quali cuspidi, poichè un punto doppio assorbe 6 flessi, e le intersezioni della F con le sue tangenti in O equivalgono a $\sum_{i=1}^r (\tau_i - 1)$ flessi, le intersezioni in O della F e della H devono essere

$$6 \frac{r(r-1)}{2} + \sum_{i=1}^r (\tau_i - 1) = 3r^2 - 4r + \sum_{i=1}^r \tau_i.$$

Per il teorema ora dimostrato, le intersezioni della F e della H in O sono esattamente

$$(3r - 4)r + \sum_{i=1}^r \tau_i,$$

quindi tante quante sono richieste dall'equivalenza plückeriana della singolarità.

3. — Vogliamo ora precisare il numero e la natura dei rami della hessiana in un punto r -plo O della F , a tangenti tutte coincidenti, e *ordinario*, cioè tale che l'unica sua tangente (r -pla) abbia in O contatto $(r+1)$ -punto (e non più che $(r+1)$ -punto) con la F . Il BRILL ha dimostrato ⁽¹⁵⁾ che l'hessiana possiede allora in O la molteplicità $3r - 3$, e ha $2r - 2$ tangenti coincidenti con quella della F . Ora vogliamo dimostrare il

⁽¹⁴⁾ Cfr. C. SEGRE, l. c. in nota ⁽³⁾.

⁽¹⁵⁾ A. BRILL, l. c. in nota ⁽³⁾.

TEOREMA II. - Se una generica ⁽¹⁶⁾ curva piana, algebrica, F , d'ordine n , è dotata di un punto r -plo ordinario O , a tangenti coincidenti (con $2 \leq r < n$), e quindi possiede in O un ramo superlineare d'ordine r e classe 1, l'hessiana H della F presenta in O :

a) un ramo superlineare d'ordine r e classe 1, tangente a quello della F ;
 b) un ramo superlineare d'ordine $r - 2$ e classe 1, tangente a quello della F ;

c) $r - 1$ rami lineari distinti, nessuno dei quali tangente al ramo della F .

La dimostrazione dei primi due risultati si può far consistere in una verifica analitica diretta, la quale non richiede, in questo caso, calcoli troppo laboriosi. Il terzo risultato discende da semplici considerazioni.

Assumiamo come origine degli assi il punto O della F che si vuol considerare, e come asse delle x l'unica tangente principale in O alla F ; l'equazione di questa curva si presenta allora del tipo:

$$F(x, y) = y^r + \varphi_{r+1}(x, y) + \varphi_{r+2}(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0,$$

dove φ_i indica un polinomio omogeneo in x e y , di grado i , e, in particolare, è

$$\varphi_{r+1}(x, y) = ax^{r+1} + bx^ry + cx^{r-1}y^2 + \dots + ly^{r+1},$$

con $a \neq 0$, in quanto si è supposto che la tangente in O alla F (la $y = 0$), vi abbia contatto $(r + 1)$ -punto con la curva.

L'equazione dell'hessiana H della F è:

$$\begin{vmatrix} \Sigma \varphi_i^{11} & \Sigma \varphi_i^{12} & \Sigma (n-i)\varphi_i^1 \\ \Sigma \varphi_i^{12} & r(r-1)y^{r-2} + \Sigma \varphi_i^{22} & r(n-r)y^{r-1} + \Sigma (n-i)\varphi_i^2 \\ \Sigma (n-i)\varphi_i^1 & r(n-r)y^{r-1} + \Sigma (n-i)\varphi_i^2 & (n-r)(n-r-1)y^r + \Sigma (n-i)(n-i-1)\varphi_i^3 \end{vmatrix} =$$

dove le sommatorie si intendono estese da $i = r + 1$ a $i = n$, e dove, seguendo CORRADO SEGRE, con gli indici 1 e 2 in alto rispettivamente denoto le derivazioni rispetto a x e a y .

I termini di grado minimo dell'equazione della H sono costituiti da

$$(2) \quad r(n-r)(n-1)y^{2r-2}\varphi_{r+1}^{11},$$

e sono quindi di grado $3r - 3$; quelli di grado $3r - 2$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (3) \quad & r(r-1)(n-r-1)y^{r-2}[(n-r-1)(\varphi_{r+1}^1)^2 - (n-r-2)\varphi_{r+1}\varphi_{r+1}^{11}] + \\ & + 2r(n-r)(n-r-1)y^{r-1}[\varphi_{r+1}^2\varphi_{r+1}^{11} - \varphi_{r+1}^1\varphi_{r+1}^{12}] + \\ & + (n-r)(n-r-1)y^r[(\varphi_{r+1}^{12})^2 - \varphi_{r+1}^{11}\varphi_{r+1}^{22}] + \\ & + r(n-r)(n-1)y^{2r-2}\varphi_{r+2}^{11}, \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ Si intende *generica* entro la famiglia delle curve d'ordine n , dotate della singolarità allo studio, nel punto O .

e il termine di grado minimo nella sola x è di grado $3r - 1$ ed è

$$(4) \quad (n-1)(n-r-1)a[2(r+1)ac - rb^2]x^{3r-1}.$$

Si rileva subito, intanto, come è affermato dal teorema del BRILL, che la H ha in O un punto multiplo di ordine $3r - 3$, e che l'unica tangente in O alla F (la $y = 0$) è per la H tangente multipla d'ordine $2r - 2$. Si rileva inoltre che la $y = 0$ e la generica parabola $y = \lambda x^2$ hanno in O $3r - 1$ intersezioni con la H , il che significa che la H possiede in O un punto multiplo d'ordine $3r - 3$, e ha infinitamente vicino ad esso, sull'asse x , un punto doppio.

Se nell'equazione della H si pone

$$y = \lambda x^{\frac{r+1}{r}},$$

con $\lambda \neq 0$, il termine di minimo grado in x risulta il seguente:

$$r(n-1)(r+1)a\lambda^{r-2}[r(n-r)\lambda^r + (r-1)(n-r-1)a]x^{3r-1-\frac{2}{r}},$$

e poichè il suo coefficiente si annulla quando sia

$$(5) \quad \lambda^r = \frac{(1-r)(n-r-1)a}{r(n-r)},$$

si riconosce che la H possiede in O un ramo superlineare di ordine r e classe 1, tangente a quello della F , la cui costante caratteristica λ è data dalla (5).

Similmente, se nell'equazione della H si pone

$$y = \mu x^{\frac{r-1}{r-2}},$$

con $\mu \neq 0$, il termine di grado minimo in x è

$$(n-1)(n-r-1)a[r(r^2-1)a\mu^{r-2} + 2(r+1)ac - rb^2]x^{3r-1},$$

che si annulla per

$$(6) \quad \mu^{r-2} = \frac{rb^2 - 2(r+1)ac}{r(r^2-1)a}.$$

Ne deriva che l'hessiana possiede in O un ramo superlineare di ordine $r - 2$ e classe 1, tangente a quello della F , e avente come costante caratteristica μ quella data dalla (6).

Poichè l'equazione complessiva delle tangenti in O alla H si ottiene uguagliando a zero il termine (2), e poichè l'asse x , contato $2r - 2$ volte, costituisce il gruppo delle tangenti che competono ai due rami superlineari ora rilevati, le ulteriori tangenti in O alla H sono complessivamente rappresentate dalla

$$(7) \quad \varphi_{r+1}^{11} = 0.$$

Si rileva senz'altro che queste tangenti alla H sono tutte tra loro distinte, perchè la F è, per ipotesi, *generica*, e così sono *generiche* la φ_{r+1} e la φ_{r+1}^{11} , quindi questa è a radici distinte (si potrebbe anzi prendere ad arbitrio la φ_{r+1}^{11} , a radici distinte, e poi costruire la φ_{r+1}). Si rileva inoltre che nessuna delle rette rappresentate dalla (7) può coincidere con l'asse x , perchè si è supposto diverso da zero il coefficiente a di x^{r+1} nella φ_{r+1} . Pertanto il teorema risulta dimostrato.

OSSERVAZIONI.

1.^a Il teorema ora dimostrato naturalmente vale anche per $r = n - 1$, nel qual caso la F ha l'equazione $y^{n-1} + \varphi_n = 0$, e l'hessiana si riduce al complesso delle sue tangenti in O , rappresentate da

$$y^{2n-4}\varphi_n^{11} = 0.$$

Le $n - 2$ rette $\varphi_n^{11} = 0$ proiettano da O i flessi della F .

2.^a La (4) e la (6), insieme coi termini (2) e (3), mostrano che l'hessiana ha soltanto $3r - 1$ intersezioni in O con la retta $y = 0$ e con la generica parabola $y = \lambda x^2$, e possiede il ramo d'ordine $r - 2$, *solo se sia*

$$rb^2 - 2(r + 1)ac \neq 0.$$

Ora questa relazione deve verificarsi nel caso nostro, perchè abbiamo supposta la F *generica* (mentre se fosse $rb^2 - 2(r + 1)ac = 0$ vorrebbe dire, come abbiamo avuto occasione di dimostrare ⁽¹⁷⁾, che sarebbe nulla la somma dei quadrati delle differenze delle radici della $\varphi_{r+1} = 0$).

3.^a Riconosciamo che l'hessiana, essendo dotata in O delle singolarità stabilite dal teorema II, ha in O tante intersezioni con la F quante sono richieste dall'equivalenza plückeriana della singolarità della F , agli effetti del computo del numero dei flessi. Infatti:

Un punto r -plo a tangenti coincidenti, con l'unica tangente di classe 1, equivale a $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r - 1$ cuspidi. Pertanto le intersezioni della F con la H in O devono essere

$$6 \frac{r(r-1)}{2} + 2(r-1) = 3r^2 - r - 2.$$

D'altra parte, le intersezioni in O del ramo d'ordine r della H con quello (di ordine r) della F sono $r^2 + r$, perchè sono diverse le costanti caratteristiche dei due rami; infatti il ramo della F è del tipo:

$$y = \sqrt[r]{-a x^{\frac{r+1}{r}}} + \dots,$$

e la sua costante caratteristica è sempre diversa da quella espressa dalla (5).

⁽¹⁷⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, l. c. in nota ⁽⁶⁾.

Le intersezioni in O del ramo d'ordine $r-2$ della H con quello della F sono $r(r-2) + r-2 = (r+1)(r-2)$, e ognuno degli $r-1$ rami lineari della H incontra la F , in O , in r punti. Complessivamente le intersezioni in O delle due curve sono

$$r^2 + r + (r+1)(r-2) + r(r-1) = 3r^2 - r - 2,$$

dunque tante quante sono richieste dall'equivalenza plückeriana della singolarità considerata.

4. — Vogliamo ora precisare il numero e la natura dei rami della H in un punto r -plo O della F , che sia origine di r rami lineari distinti, i quali abbiano in O , tra loro, a due a due, contatto s -punto, e soltanto s -punto, e siano *generici*, cioè tali che la somma delle loro curvature in O sia diversa da zero (e, in particolare, per $s > 2$ essi siano sprovvisti di flesso in O). La F presenta così in O s punti r -pli infinitamente vicini sopra un ramo lineare *generico*, e come ho dimostrato in un precedente lavoro ⁽¹⁸⁾, l'hessiana possiede in ognuno di tali punti la molteplicità $3r-3$. Qui viene ora ulteriormente precisata la singolarità della hessiana mediante il

TEOREMA III. — *Se una generica curva piana, algebrica F , d'ordine n , possiede un punto r -plo O ($r \geq 2$), origine di r rami lineari distinti e generici, aventi a due a due, in O , contatto s -punto, e non più che s -punto, tra loro, l'hessiana H della F presenta in O $3r-3$ rami lineari distinti, aventi contatto s -punto, e soltanto s -punto, coi rami della F e fra loro.*

Per la dimostrazione di questo teorema, che sarebbe praticamente impossibile per via diretta, per la mole e la pesantezza dei calcoli, si ricorre qui a un procedimento analogo a quello impiegato al n. 2, per dimostrare che l'hessiano della generica forma binaria a radici distinte, ha tutte le sue radici distinte. Precisamente, si considera una particolare curva $\bar{F}$, dotata della singolarità che si vuol studiare, si riconosce che la sua hessiana verifica il teorema, e si conclude che il teorema è vero in generale. Perchè se *in generale* la H dovesse presentare in O singolarità più complicate di quelle previste dal teorema (si intende oltre gli s punti multipli secondo $3r-3$), non potrebbe l'hessiana di una curva *particolare* presentare, in O , $3r-3$ rami lineari distinti, aventi a due a due soltanto contatto s -punto, in quanto questi non possono risultare caso particolare di una singolarità più complicata.

Ma anche sulla hessiana della particolare curva $\bar{F}$ che si considera sarebbe molto faticoso riconoscere direttamente la singolarità asserita dal teorema. Perchè quando si cercano i rami lineari aventi con la H in O più di $(3r-3)s$ intersezioni, gli sviluppi in serie dei rami stessi presentano, com'è naturale, uguali i coefficienti delle prime $s-1$ potenze della x , mentre i coefficienti μ_i di x^s , che caratterizzano i rami stessi, si presentano come radici

⁽¹⁸⁾ G. MASOTTI BIGGIOGERO, l. c. in nota ⁽⁶⁾.

di una certa equazione di grado $3r-3$ in μ , sulla quale sarebbe troppo arduo riconoscere, coi metodi consueti, che essa non ammette radici multiple.

Si perviene invece al risultato nel modo seguente. Anzitutto si assegna un fascio di curve tutte aventi in un punto base O la singolarità che si vuol studiare, e si assume come *particolare* curva $\bar{F}$ la *generica* curva di quel fascio: in tal modo la $\bar{F}$ dipende da un parametro λ . L'hessiana H della $\bar{F}$, come hessiana della generica curva di un fascio, è di 3° grado nel parametro λ del fascio, e quindi anche l'equazione da cui dipendono le costanti caratteristiche μ_i dei rami della H per O , che è di grado $3r-3$ in μ , risulta di 3° grado in λ . Sia

$$(8) \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

questa equazione. Se l'hessiana della generica curva dotata della singolarità allo studio dovesse presentare in O una singolarità più complicata di quella prevista dal teorema (naturalmente oltre gli s punti multipli secondo $3r-3$), la (8) dovrebbe presentare almeno una radice multipla per μ , in corrispondenza al generico valore di λ . Ciò comporterebbe che la curva rappresentata dalla (8), quando si riguardino λ e μ come coordinate cartesiane, dovrebbe essere dotata di una componente multipla C^m . E poichè la (8) è di 3° grado in λ , e di grado non minore di 3 in μ , la C^m , se esiste, può solo essere una delle seguenti curve:

- a) una retta doppia o tripla genericamente posta;
- b) una curva doppia o tripla unisecata dalle rette passanti per il punto improprio dell'asse λ ;
- c) una o più rette multiple parallele all'asse λ .

Nelle prime due ipotesi la (8) dovrebbe risultare dotata di una radice doppia o tripla per λ in corrispondenza al generico valore μ_0 di μ ; quindi essa, riguardata come equazione (di 3° grado) nella sola λ , dovrebbe presentare il discriminante identicamente nullo. Nella terza ipotesi, le rette multiple a cui si ridurrebbe la C^m dovrebbero intanto figurare tra le tangenti principali alla curva (8) nel punto improprio dell'asse λ . Si verificherebbe invece che il discriminante della (8), riguardata come equazione in λ , non si annulla identicamente (e sarà sufficiente verificare che non si annulla identicamente un suo termine di un certo grado in μ), e l'analisi della $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ (di grado $3r-3$ in μ) mostrerà subito che il coefficiente di λ^3 non contiene fattori del tipo $(\mu - \mu_0)^m$. Ne deriva che la (8) non può contenere una componente multipla e quindi che, per λ generico, essa ammette radici distinte per μ . Il che significa che la generica curva $\bar{F}$ del fascio considerato (corrispondente al generico valore di λ) ha l'hessiana che presenta in O $3r-3$ rami lineari distinti (poichè le loro costanti caratteristiche μ_i sono tutte tra loro distinte), aventi a due a due contatto s -punto, e soltanto s -punto, tra loro (e coi rami della F ⁽¹⁹⁾). Con ciò il teorema risulta dimostrato.

(19) G. MASOTTI BIGGIOGERO, l. c. in nota (6).

Passiamo ora ai calcoli. Come *particolare* curva $\bar{F}$ consideriamo la

$$\bar{F}(x, y) = (y + x^2)^r + \lambda(y + x^2)x^{rs-s} = 0$$

per λ generico. Essa presenta, in O , r rami lineari distinti del tipo

$$y = -x^2 + \mu_i x^s + \dots,$$

le cui costanti caratteristiche μ_i sono le radici dell'equazione

$$\mu^r + \lambda\mu = 0.$$

L'equazione della hessiana H della $\bar{F}$ è di 3° grado in λ . Essa si scrive qui per disteso, per agevolare le deduzioni che occorrono in seguito:

Posto $k = (r-1)(s-2)$, e

$$\begin{aligned} A &= 2r^2(k+r), \\ B &= r(k+r)(k+2r-2)(k+2r-3), \\ C &= -2r[(r^2-3r-1)k + r(2r^2-6r+1)], \\ D &= (k+2r-2)[k^2+2(r-1)k+2r(r-2)], \\ E &= -2r[(r-4)k+2r^2-8r+3], \\ F &= -(k+2r-2), \\ G &= 2(k+2r-1), \end{aligned}$$

l'equazione della hessiana (dopo aver soppresso nel primo membro il fattore non nullo $rs-s+1$) è la seguente:

$$\begin{aligned} &A(y+x^2)^{3r-3} + \\ (9) \quad &+ \lambda[B(y+x^2)^{2r-1}x^{rs-s-2} + C(y+x^2)^{2r-2}x^{rs-s}] + \\ &+ \lambda^2[D(y+x^2)^rx^{2rs-2s-2} + E(y+x^2)^{r-1}x^{2rs-2s}] + \\ &+ \lambda^3[F(y+x^2)x^{3rs-3s-2} + Gx^{3rs-3s}] = 0. \end{aligned}$$

Si noti che il termine di grado minimo dell'equazione della H è Ay^{3r-3} , e che la parabola

$$y = -x^2$$

ha $(3r-3)s$ intersezioni con la H in O : circostanze che devono verificarsi, perchè, come è stato dimostrato, la H presenta un punto multiplo d'ordine $3r-3$ in ognuno degli s punti r -pli infinitamente vicini della $\bar{F}$, succedendosi sulla parabola $y = -x^2$.

La generica curva del tipo

$$(10) \quad y = -x^2 + \mu x^s$$

ha pure $(3r-3)s$ intersezioni in O con la H ; le intersezioni sono in numero maggiore se μ annulla il coefficiente di $x^{(3r-3)s}$, che si presenta nell'equazione della H quando alla y si sostituisca il secondo membro della (10). La struttura di questo coefficiente, per la speciale $\bar{F}$ qui considerata, è diversa a seconda

che sia $s = 2$, o $s > 2$. Converrà quindi esaminare separatamente i due casi; ma, per evitare inutili ripetizioni, i singoli passaggi saranno indicati soltanto per il primo di essi.

Come facilmente si ricava dalla (9), per $s = 2$, quindi $k = 0$, uguagliando a zero il coefficiente di $x^{(3r-3)s} = x^{6(r-1)}$, si ha l'equazione:

$$(11) \quad \begin{aligned} & 2r^3\mu^{3r-3} + \\ & + \lambda [2r^2(r-1)(2r-3)\mu^{2r-1} - 2r^2(2r^2-6r+1)\mu^{2r-2}] + \\ & + \lambda^2[4r(r-1)(r-2)\mu^r - 2r(2r^2-8r+3)\mu^{r-1}] + \\ & + \lambda^3[-2(r-1)\mu + 2(2r-1)] = 0. \end{aligned}$$

Occorre dimostrare che le radici della (11) sono tutte tra loro distinte. In base alle considerazioni che precedono, basterà riconoscere che l'equazione (11), riguardata come equazione nella sola λ (quindi di 3° grado), non presenta il discriminante identicamente nullo, e che il coefficiente di λ^3 non ammette fattori del tipo $(\mu - \mu_0)^i$, con $i > 1$.

La seconda circostanza è evidente, perchè il coefficiente di λ^3 nella (11) è di primo grado in μ . La prima circostanza si riconosce subito constatando che non si annulla identicamente il termine di grado minimo in μ del discriminante della (11).

Com'è noto, il discriminante dell'equazione di 3° grado

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

è

$$27a^2d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2.$$

Si rileva facilmente, nel caso nostro, che il termine del discriminante di minimo grado in μ è di grado $6r - 6$. Il suo coefficiente è un polinomio in r , il cui termine di grado minimo è $-512r^6$. Ciò basta per riconoscere che il discriminante della (11), riguardata come equazione nella sola λ , non è identicamente nullo. Pertanto il teorema, per $s = 2$, risulta dimostrato.

Analogamente si procede per $s > 2$; si trova che l'equazione di grado $3r - 3$ in μ , dalla quale dipendono le $3r - 3$ costanti caratteristiche μ_i dei rami della H per O , riguardata come equazione in λ (quindi di 3° grado), non presenta il discriminante identicamente nullo. Infatti, nel discriminante, il termine di minimo grado in μ è di grado $6r - 6$, e il suo coefficiente è un polinomio in r il cui termine di grado minimo è $512r^3$. Poichè esso è diverso da zero, e il coefficiente di λ^3 nell'equazione da cui dipendono le costanti μ_i , essendo di grado zero in μ , non contiene fattori del tipo $(\mu - \mu_0)^v$, e (con $v > 1$), il teorema risulta dimostrato in generale.