Sulle stratificazioni convesse.

Memoria di BRUNO DE FINETTI (a Trieste).

Sunto. - *Data una funzione convessa, gli insiemi ove essa assume valori superiori a una generica costante* c *sono ovviamente insiemi convessi uno interno all'altro, ma non è vero inversamente che ad una siffatta classe d'insiemi possa sempre associarsi una funzione convessa. Si studiano le circostanze da cui dipendono le eccezioni, e le condizioni atte ad escluderle.*

1. Generalità.

Se $f(P)$ è una funzione convessa dei punti P (del piano, o dello spazio, o, in generale, di uno spazio affine a un numero qualunque, finito [1], di dimensioni), le regioni definite dalle disuguaglianze $f(P) \geq c$ costituiscono ovviamente (al variare della costante c) una famiglia di regioni convesse, una interna all'altra. Inversamente, data una famiglia di regioni convesse, una interna all'altra, o, come diremo brevemente, una *stratificazione convessa*, è possibile associarvi, nel modo predetto, una funzione $f(P)$ convessa? ossia, in breve, è una *stratificazione di funzione convessa*?

Generalmente sembra si ritenga di sì senz'altro: ad es. in economia matematica dal fatto che le regioni $\varphi(P) \geq c$ (precisamente: le regioni delimitate dalle « varietà d'indifferenza ») sono convesse, si ritiene lecito dedurre che $f(P)$ (« indice di ofelimità ») si può assumere convessa (cioè: o è convessa la $\varphi(P)$ stessa, o la si può sostituire con $f(P) = F(\varphi(P))$, con F crescente, in modo che $f(P)$ sia convessa).

Geometricamente, nel caso più intuitivo del piano, tale ammissione significherebbe che, assegnate come linee di livello per una superficie $z = f(P) = f(x, y)$ una famiglia di linee convesse $\varphi(P) = \varphi(x, y) = \text{cost.}$, è sempre possibile (valendosi dell'arbitrarietà risultante per f, che è definita a meno di una trasformazione crescente, $f = F(\varphi)$) trovare una superficie $z = f(P)$ *convessa* avente quelle linee di livello.

Detta proprietà sussiste effettivamente qualora ad es. la funzione $\varphi(x, y)$ si supponga dotata di derivate prime e seconde limitate: basta osservare che in tal caso $f = F(\varphi) = -e^{-\lambda\varphi}$ risulta certamente convessa pur di prendere λ

---

(1) O anche infinito, salvo rinunciare a quelle conclusioni derivanti dal poter correntemente parlare di « massimi » anzichè di « estremi superiori in diverse questioni (cfr. ad es. nota (7)).

sufficientemente grande [2]; la conclusione non sarebbe però valida se non si imponessero restrizioni del genere. Vedremo nel n. 2 degli esempi negativi da cui prenderemo le mosse per affrontare il problema in generale, e studiare il significato delle circostanze che impediscono l'esistenza della cercata funzione convessa (o meglio: che la fanno degenerare in una costante).

Ad ogni modo, se il problema ammette soluzioni, ve n'è una tra esse (univocamente determinata a meno di una costante additiva e di una moltiplicativa: $z = h + kf(P)$) che è «la meno convessa di tutte» (nel senso, del resto intuibile, che sarà precisato nel n. 3); ogni altra soluzione risulta poi data da $F(f)$ con F crescente e *convessa*.

Alcune questioni concernenti tali «funzioni minimamente convesse», che possono interessare indipendentemente dal problema precedentemente considerato, saranno studiate nei nn. 5 e 7.

2. Esempi.

Consideriamo alcuni esempi di stratificazioni convesse che non sono stratificazioni di funzioni convesse. Per semplicità si tratterà di stratificazioni piane circolari (famiglie di cerchi uno interno all'altro).

Le figg. 1 e 3 rappresentano dei solidi ottenuti da coni alterando il profilo come indicato in sezione; il piano della sezione è piano di simmetria, sicchè i cerchi di livello sono i cerchi di cui in sezione resta indicato il diametro.

L'alterazione, nella fig. 1, consiste nel sostituire un tratto del profilo con un quarto di cerchio; nella fig. 3 un tratto del profilo è diviso in infiniti tratti (p. es. ciascuno metà del precedente) su cui viene ripetuta un'intaccatura secondo lo schema riportato nella fig. 3*a*.

Il solido della fig. 2 può esso pure pensarsi ottenuto da un cono, alterandolo però non in tal modo simmetrico bensì spostando le successive sezioni col far percorrere ai centri (in proiezione) una spirale logaritmica (raggio del cerchio = lunghezza della spirale dal punto asintotico).

---

(2) Se $\varphi(x)$ è funzione di una variabile, la derivata seconda di $f(x) = -e^{-\lambda\varphi}$ è $f''(x) = -\lambda e^{-\lambda\varphi}(\lambda\varphi'^2 - \varphi'')$, che è sempre negativa se $\varphi(x)$ è due volte derivabile, se il rapporto φ''/φ'^2 è superiormente limitato nel campo che si considera, e se λ è superiore all'estremo superiore di tale rapporto. Per $\varphi(x, y)$ funzione di due variabili (e analogamente per tre o più), stesso ragionamento sulle derivate direzionali: la condizione diviene

$$\lambda > \text{estr. sup.} \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} \bigg/ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 \right\}$$

per ogni punto P del campo e ogni direzione p (o anche soltanto per la direzione di «massima pendenza», tenendo conto del teorema del n. 4).

Vedremo nella nota (9) che la semplice esistenza delle derivate seconde, senza la restrizione addizionale che siano limitate, non costituisce più una condizione sufficiente per la conclusione stabilita.

Le stratificazioni che si ottengono dagli esempi delle figg. 1 e 2 presentano delle *strozzature*: nei due punti A e B della fig. 1 ([3]) gli strati divengono « infinitamente sottili » (esprimeremo la cosa in modo corretto nei nn. 6 e 7),

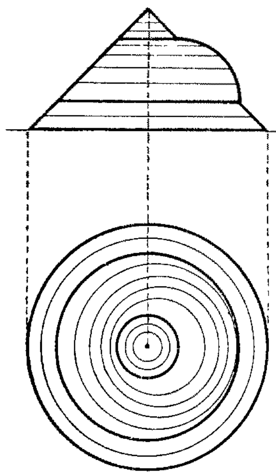

Fig. 1.

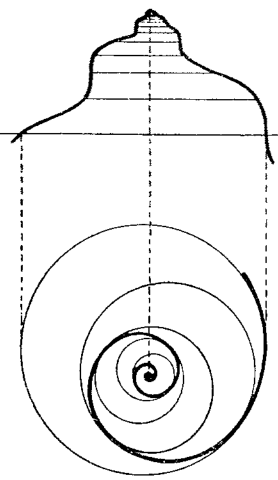

Fig. 2.

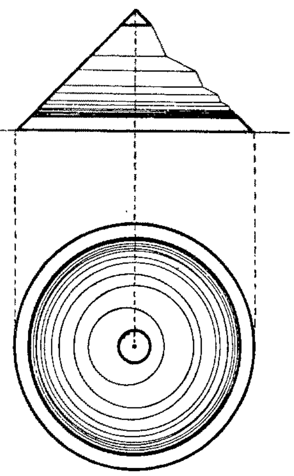

Fig. 3.

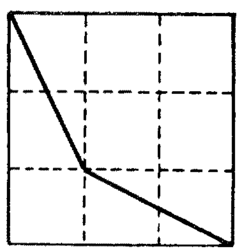

Fig. 2a.

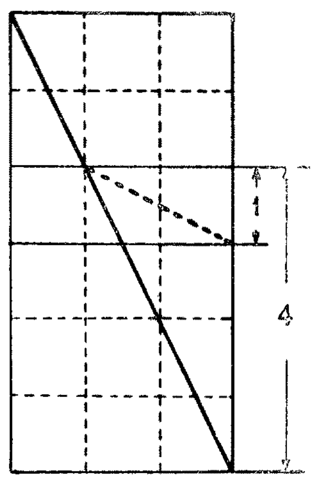

Fig. 3b.

e lo stesso fatto si presenta nella fig. 2 su tutti i punti di una linea (spirale logaritmica di cui i cerchi dati sono i cerchi osculatori, e che ne è quindi l'inviluppo). Vi corrispondono, sul solido, punti di pendenza infinita (o nulla), non eliminabili (com'è intuibile, e si vedrà comunque nel n. 6) con alcuna deformazione $f = F(\varphi)$, e che impediscono la convessità. Nel caso della fig. 3,

([3]) A e B: estremi del tratto sostituito con arco di cerchio (nella figura le lettere non sono indicate).

per ristabilire la convessità rimediando all'effetto di una delle intaccature, occorrerebbe (ferma restando la parte superiore della figura) quadruplicare in altezza tutta la parte al di sotto della gola dell'intaccatura stessa (lo si vede dalla fig. 3*b*). Ma, ripetendo infinite volte tale quadruplicazione, già il tronco di cono con le intaccature viene trasformato in un solido che si estende all'infinito (in altezza), ed è impossibile proseguirlo con la parte inferiore.

3. Definizioni; funzione minimamente convessa.

Per svolgere la trattazione ci porremo nel più generale spazio affine S: dati comunque in S dei punti $P_1 \dots P_n$ e dei numeri $\lambda_1 \dots \lambda_n (\Sigma_h \lambda_h = 1)$ vi sarà definita la loro combinazione lineare (baricentro) $P = \Sigma_h \lambda_h P_h$, ma non supporremo introdotte nozioni metriche, sicchè ad es. riterremo lecito confrontare le lunghezze di due segmenti solo se paralleli.

Un insieme C si dirà *convesso* ([4]) se contiene ogni segmento di cui contiene gli estremi (ossia: insieme a P_1 e P_2, ogni $P = \lambda P_1 + \mu P_2$ con $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$; allora anche: insieme a $P_1 \dots P_n$, ogni $P = \Sigma_h \lambda_h P_h$ con $\lambda_h > 0$, $\Sigma_h \lambda_h = 1$). Una funzione reale $f(P)$, definita su un insieme C convesso, si dice ivi *convessa* se è $f(P) \geq \Sigma_h \lambda_h f(P_h)$ comunque si prendano $P_1 \dots P_n$ punti di C e $\lambda_1 \dots \lambda_n$ positivi $(\Sigma_h \lambda_h = 1)$, e sia $P = \Sigma_h \lambda_h P_h$.

Giova notare il lemma: data in C una funzione qualunque $\psi(P)$ (non convessa), e ponendo

« $f(P) =$ estr. sup. $\Sigma_h \lambda_h \psi(P_h)$ al variare di tutti i modi possibili di esprimere $P = \Sigma_h \lambda_h P_h$ come combinazione lineare a coefficienti $\lambda_h > 0$ di un numero (finito) qualunque di punti P_h di C »,

risulta che $f(P)$ è convessa, e che, in tutto C, è $f(P) \geq \psi(P)$, mentre è $f(P) \leq \varphi(P)$ qnando $\varphi(P)$ sia una qualunque altra funzione convessa $\geq \psi(P)$. La dimostrazione è ovvia.

Di una funzione $f(P)$ consideriamo, oltre alle varietà di livello $f(P) =$ cost., gli *strati* $a \leq f(P) \leq b$: insieme dei punti P ove $f(P)$ assume i valori di un certo intervallo (a, b); e *stratificazione* diremo la suddivisione in strati così ottenuta ([5]).

Una stratificazione si dirà *convessa* se ogni strato è differenza di due insiemi convessi (negli es. del n. 2: zona tra due cerchi non secanti).

Una funzione (convessa) $\varphi(P)$ si dirà *minimamente convessa* in un certo suo strato $a \leq \varphi(P) \leq b$ (e quindi, ovviamente, in ogni strato in esso contenuto) se ogni funzione convessa $f(P)$ avente la medesima stratificazione (le medesime varietà di livello, ossia $f(P) = F(\varphi(P))$, F crescente) e i medesimi

([4]) Per le nozioni di carattere generale, cfr. p. es. T. Bonnesen u. W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin, Springer, 1934.

([5]) Volendo darne una definizione astratta: la classe D degli insiemi-differenza di una classe d'insiemi K l'uno interno all'altro; K è cioè tale che per due suoi insiemi A e B qualunque sia sempre $A \supset B$ oppure $B \supset A$ (o anche: K risulti *ordinato* rispetto a $\supset$).

valori al contorno ($f(P)=a$ per $\varphi(P)=a$, $f(P)=b$ per $\varphi(P)=b$ ossia $F(a)=a$, $F(b)=b$) è, nello strato, $\geq \varphi(P)$.

Diamo ora due diversi procedimenti per costruire la funzione minimamente convessa quando sia assegnato un insieme qualunque di varietà di livello (le due che delimitano lo strato, e nell'interno o nessuna, o un numero finito, o un'infinità numerabile, ..., o tutte); e dati i valori estremi a e b al contorno ($a < b$).

Il primo è un procedimento di iterazione. Partiamo dalla funzione

$$\varphi_0(P) = \begin{cases} a \text{ in tutto lo strato, tranne} \\ b \text{ sul contorno interno.} \end{cases}$$

Sia $\varphi_1(P)$ la minima funzione convessa $\geq \varphi_0(P)$ (v. lemma precedente), e poi sia $\varphi_2(P)$ la minima funzione $\geq \varphi_1(P)$ costante sulle prescritte varietà di livello (basta prendere $\varphi_2(P) =$ estr. sup. $\varphi_1(Q)$ per Q sulle varietà di livello passante per P o esterne a P).

Analogamente passiamo da φ_2 a φ_3 e da φ_3 a φ_4, in generale da φ_{2n} a φ_{2n+1} e da φ_{2n+1} a φ_{2n+2}; la successione è mai decrescente, tende quindi a una funzione limite $\varphi(P)$, che è convessa essendo limite delle funzioni convesse φ_h (h dispari) ed è costante sulle prescritte varietà di livello essendo limite delle φ_h (h pari) dotate di tale proprietà.

Perchè la soluzione non sia illusoria occorre però che φ non si riduca a una costante; e può solo accadere che sia $\varphi(P)=b$ su tutto uno strato anzichè sulla sola varietà di livello interna, perchè se è $\varphi(Q)=c$ per un punto Q interno al campo $\varphi(P)\geq c$, non può aversi in alcun punto $\varphi(P)>c$ (infatti, sia $\varphi(P)>c$; prolungando il segmento PQ oltre Q, per ipotesi interno al campo ove $\varphi\geq c$, troveremo ancora punti R con $\varphi(R)\geq c$ e per Q, compreso tra R e P, dovrebbe essere $\varphi(Q)>c$, contro l'ipotesi).

È poi evidente che, cambiando i valori estremi a e b in a' e b' (sempre $b'>a'$), tutte le φ_h e la φ si modificano linearmente (chè tutti i procedimenti hanno carattere affine): φ diventa $\varphi' = h + k\varphi$ con $h=(ba'-ab')/(b-a)$ e $k=(b'-a')/(b-a)$ (così che $h+ka=a'$, $h+kb=b'$); la funzione minimamente convessa relativa a una stratificazione è dunque, come annunciato, determinata a meno di una costante additiva e di una moltiplicativa (>0).

4. Convessità dei « profili ».

L'altro procedimento, più analitico-costruttivo, per determinare la $\varphi(P)$ richiede la considerazione dello *spessore* degli strati e del *profilo* della funzione secondo le diverse *giaciture*.

Sia $\xi(P)$ una funzione *lineare* di P: sia cioè $\xi(\Sigma_h\lambda_hP_h)=\Sigma_h\lambda_h\xi(P_h)$. Gli iperpiani paralleli $\xi=$ cost. definiscono una *giacitura*, e nella nozione intenderemo inclusa quella dell'orientamento dato dal verso in cui ξ cresce (quindi $\xi'=h+k\xi$ definirà la medesima giacitura di ξ per $k>0$, e per $k<0$

la giacitura opposta: stessi iperpiani, orientamento invertito). Per « ξ–spessore di uno strato » intenderemo la differenza $\xi'' - \xi'$ dove ξ'' e ξ' siano l'estremo superiore di $\xi(P)$ sulle ipersuperficie che delimitano lo strato rispettivamente all'esterno e all'interno. Il rapporto degli ξ–spessori di più strati non dipende più dall'eventuale coefficiente $k > 0$ ma soltanto dalla giacitura (orientata), e in tal senso potremo parlare del rapporto fra gli spessori di più strati secondo una data giacitura (e a volte, per brevità, parleremo degli « spessori » sottintendendo che, essendo determinati a meno di una costante, dovremo limitarci a considerare rapporti di spessori presi secondo una stessa giacitura).

Se ora $f(P)$ è una funzione di P, con $f_\xi(x)$ indicheremo l'estremo superiore di $f(P)$ sull'iperpiano $\xi(P) = x$; la $f_\xi(x)$ è il *profilo* della f secondo la giacitura ξ (denominazione di significato intuitivo nel caso di una superficie $z = f(P)$, P punti del piano x, y).

Dimostriamo, come *lemma*, che: se le sue varietà di livello $(f(P) = c)$ delimitano regioni convesse $(f(P) \geq c)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(P)$ sia funzione convessa è che lo siano tutti i suoi profili.

Infatti, supposta $f(P)$ convessa, risulta $f_\xi(x)$ convessa, ossia

$$f_\xi(x_2) \geq \lambda f_\xi(x_1) + \mu f_\xi(x_3) \quad (\text{per } x_1 < x_2 < x_3\,, \ \ x_2 = \lambda x_1 + \mu x_3\,, \ \ \lambda + \mu = 1),$$

perchè, detto P_h (per $h = 1, 2, 3$) il punto di $\xi = x_h$ ove $f(P)$ assume il massimo valore $f_\xi(x_h)$, e posto $Q = \lambda P_1 + \mu P_3$, è (per la linearità di ξ) $\xi(Q) = x_2$ così che $f_\xi(x_2) \geq f(Q)$, ma (per la convessità di f) $f(Q) \geq \lambda f(P_1) + \mu f(P_3)$, e quindi l'asserto.

Inversamente supposto $f(P)$ *non* convessa e convessa ogni regione delimitata da varietà di livello, risulta non convesso almeno un profilo. Supponiamo infatti esistano tre punti, P_1, P_3 e $P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3$ (λ, $\mu > 0$; $\lambda + \mu = 1$) per cui $f(P_2) < \lambda f(P_1) + \mu f(P_3)$, e sia $\xi = x_2$ un iperpiano *radente* in P_2 alla varietà di livello ivi passante ([6]): sarà $\xi(Q) \leq x_2$ per ogni Q ove $f(Q) \geq f(P_2)$, e quindi $f_\xi(x_2) = f(P_2)$. Ma per $x_1 = \xi(P_1)$ è $f_\xi(x_1) = f(P_1)$, e così per $x_3 = \xi(P_3)$, e quindi il profilo secondo tale giacitura ξ non è convesso avendosi

$$f_\xi(x_2) < \lambda f_\xi(x_1) + \mu f_\xi(x_3), \quad x_2 = \lambda x_1 + \mu x_3\,.$$

Si noti ancora che una funzione convessa $f(P)$ rimane univocamente determinata conoscendone tutti i profili $f_\xi(x)$: è infatti $f(P) = \min f_\xi(\xi(P))$ al variare di ξ, o addirittura $f(P) = f_\xi(x)$ se $\xi = x$ è iperpiano radente in P (chè allora vi si ha il minimo).

([6]) Cioè l'iperpiano tangente se il punto non è angoloso; altrimenti uno qualunque dei piani che toccano ivi la varietà senza tagliarla.

5. Condizione per i profili.

La condizione di convessità dei profili può scriversi

$$\frac{f_\xi(x_2) - f_\xi(x_3)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f_\xi(x_1) - f_\xi(x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 < x_2 < x_3) \tag{1}$$

e, brevemente,

$$\frac{\delta_2}{s_2} \geq \frac{\delta_1}{s_1} \qquad \text{o} \qquad \delta_2 \geq \delta_1 \frac{s_2}{s_1},$$

dove s_1 e s_2 sono gli spessori, secondo la giacitura ξ, dei due strati, e δ_1 e δ_2 i corrispondenti incrementi della f. Ma ciò vale per qualunque giacitura, se f è convessa, e allora dovrà essere

$$\delta_2 \geq \delta_1 \max\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \tag{2}$$

ove con σ_1 e σ_2 s' intendono gli spessori dei due strati secondo una giacitura generica, e il max s' intenda preso al variare della giacitura (7). Considerando più strati successivi avremo, per induzione

$$\delta_n \geq \delta_1 \max\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \max\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \cdot \ldots \cdot \max\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\right), \tag{3}$$

o, scritto diversamente,

$$\frac{\delta_n}{s_n} \geq \frac{\delta_1}{s_1} \left\{ \frac{s_1}{s_n} \max\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \ldots \max\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}\right) \right\}$$

od anche

$$\frac{\delta_n}{s_n} \geq \frac{\delta_1}{s_1} \left\{ \frac{\max(\sigma_2/\sigma_1)}{s_2/s_1} \cdot \frac{\max(\sigma_3/\sigma_2)}{s_3/s_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\max(\sigma_n/\sigma_{n-1})}{s_n/s_{n-1}} \right\}.$$

Poichè f_ξ, essendo convessa, è derivabile (salvo al più un' infinità numerabile di punti angolosi che in seguito supporremo esclusi dal fungere da suddivisione per gli strati), e la derivata è crescente (in valore assoluto), abbiamo

$$-f_\xi'(x_{n-1}) \geq \frac{\delta_n}{s_n} \geq \frac{\delta_1}{s_1} \left\{ \prod_1^{n-1}{}_h \frac{\max(\sigma_{h+1}/\sigma_h)}{s_{h+1}/s_h} \right\} \geq -f_\xi'(x_1) \left\{ \prod_1^{n-1}{}_h \frac{\max(\sigma_{h+1}/\sigma_h)}{s_{h+1}/s_h} \right\}, \tag{4}$$

ossia: il rapporto fra la derivata di $f_\xi(x)$ in due punti qualunque x_2 e $x_1 (x_2 > x_1)$ è $\geq$ del prodotto $\{\Pi \ldots\}$ relativo a una qualsivoglia suddivisione in strati dello strato considerato, e quindi anche $\geq$ di $W_\xi(x_1, x_2) =$ estr. sup. $\{\Pi \ldots\}$ al variare della suddivisione.

(7) L' esistenza del massimo è dimostrabile trattandosi di funzioni convesse.

Risulta subito, inversamente, che se tale condizione è soddisfatta la funzione $f(P)$ è convessa, e lo è in particolare quindi se $f_\xi(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\varphi'_\xi(x) = k W_\xi(x_1, x) \qquad (k = \varphi'_\xi(x_1))$$

ossia per

$$f_\xi(x) = \varphi_\xi(x) = h + k \int_{x_1}^{x} W_\xi(x_1, u) du. \tag{5}$$

Basta infatti rilevare come la (5) sia indipendente dalla giacitura, come ne scenda immediatamente la (4) per s_h relativi a qualunque giacitura, e in essa la $\{\Pi \ldots\}$ sia ≥ 1 (prodotto di fattori tutti ≥ 1), sicchè i rapporti incrementali, e quindi le derivate, sono crescenti.

Di più, dimostreremo che la $\varphi(P)$ individuata dai profili $\varphi_\xi(x)$ è minimamente convessa (e coincide quindi necessariamente con la soluzione determinata per altra via nel n. 3). Basta provare che per una $f(P)$ convessa (e avente in comune con $\varphi(P)$ i valori al contorno a e b) non può in alcun punto Q aversi $f(Q) < \varphi(Q)$; supposto ciò avvenisse, e posto $f = F(\varphi)$, $\varphi(Q) = q$, vorrebbe dire che $F(q) < q$ mentre $F(a) = a$, $F(b) = b$, ed esisterebbero allora p ed r, $a < p < q < r < b$, tali che $F'(p) < F'(r)$.

Ma allora $f_\xi(x) = F(\varphi_\xi(x))$, $f'_\xi(x) = F'(\varphi_\xi(x))\varphi'_\xi(x)$, e il rapporto fra le derivate in due punti per cui $\varphi_\xi(x_2) = p$, $\varphi_\xi(x_1) = r$ risulterebbe

$$\frac{f_\xi'(x_2)}{f_\xi'(x_1)} = W_\xi(x_1, x_2)\frac{F'(p)}{F'(r)} < W_\xi(x_1, x_2),$$

cosicchè f_ξ non soddisfa la condizione stabilita.

Giova rilevare, come corollario, la seguente proprietà caratteristica delle funzioni minimamente convesse: se e soltanto se φ è minimamente convessa $f = F(\varphi)$ è convessa solo se F è crescente e convessa.

Alla considerazione della $W_\xi(x_1, x_2)$ dipendente dalle varietà di livello V_1 e V_2 su cui $\max \xi = x_1, x_2$ e inoltre dalla giacitura ξ, giova spesso sostituire quella di $W(V_1, V_2) = \max W_\xi(x_1, x_2)$ data da:

$$W(V_1, V_2) = \text{estr. sup.} \prod_1^n {}_h \max\left(\frac{\sigma_{h+1}}{\sigma_h}\right) \tag{6}$$

con la convenzione $\sigma_{n+1} = \sigma_1$; il notevole significato intrinseco di $W(V_1, V_2)$ è il seguente: il rapporto $f_\xi'(x_2)/f_\xi'(x_1)$ ha massimo $\geq W$ ($=$ se e solo se f è minimamente convessa).

6. Esistenza di funzioni convesse per un'assegnata stratificazione.

Il fatto di cui ci occupiamo, cioè l'esistenza di un'effettiva funzione convessa con le assegnate varietà di livello o la sua degenerazione, appare ora ovviamente legata alla circostanza che W rimanga limitata o divenga infinita. Se $W < K$, nessun pericolo di degenerazione. Se è $W_\xi(x_1, x_2) = \infty$ risulta $\varphi'_\xi(x_2)/\varphi'_\xi(x_1) = \infty$ e quindi o $\varphi'_\xi(x_2) = \infty$ o $\varphi'_\xi(x_1) = 0$ (o entrambi); in tali condizioni può ancora esistere una funzione convessa rispondente al problema nello strato (V_1, V_2) (come nell'es. della fig. 1 — o, come diremo brevemente, es. 1 — per lo strato a profilo arrotondato), ma non in uno strato più ampio.

Per avere $W_\xi(x_1, x_2) = \infty$, poichè $W_\xi(x_1, x_2) = W_\xi(x_1, x) \cdot W_\xi(x, x_2)$ per qualunque $x_1 < x < x_2$, dev'essere infinita la W_ξ per uno almeno dei due sub-intervalli, e, così procedendo, risulta che deve esistere in (x_1, x_2) un x tale che $W_\xi(x', x'') = \infty$ (e quindi $W(V', V'') = \infty$) per ogni intervallo (x', x'') contenente x. La corrispondente varietà di livello V si dirà *eccezionale*, e potremo intanto enunciare che per ammettere una funzione convessa è necessario che una stratificazione convessa non contenga alcuna varietà eccezionale all'interno dello strato considerato (e sufficiente che non siano varietà eccezionali neppure quelle al contorno).

Per comprendere e classificare le « eccezionalità » così definite, è utile considerare, più in generale, per ogni varietà di livello V_0, l'estremo inferiore di $W(V', V'')$ per V', V'' comprendente V_0; indichiamolo $w(V_0)$. È sempre $w \geq 1$ (essendo ovviamente $W \geq 1$); oltre al caso già detto delle varietà eccezionali, per le quali è $w = \infty$, distingueremo quelli delle varietà *regolari*, ove $w = 1$, e di quelle *spigolose*, ove $w > 1$ ma finito. La ragione delle denominazioni è spontanea: sono spigolose le varietà sulle quali almeno un profilo ha un punto angoloso (e w è il rapporto fra la pendenza delle tangenti a destra e a sinistra, secondo il profilo che rende massimo tale rapporto). Per quelle eccezionali si ha analogamente almeno un punto ove tale rapporto diviene infinito, e la pendenza è necessariamente nulla a sinistra se è finita a destra, e infinita a destra se è finita a sinistra.

Distingueremo due casi di eccezionalità: avremo *varietà di strozzatura* quando già con gli spessori di due strati, σ_1 e σ_2, si può rendere arbitrariamente grande il prodotto

$$\max\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \max\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = \frac{\max\,(\sigma_2/\sigma_1)}{\min\,(\sigma_2/\sigma_1)}. \tag{7}$$

È questa la circostanza che si verificava negli esempi 1 e 2 (n. 2): entro uno strato comunque sottile comprendente una strozzatura, si possono sempre trovare due strati per cui il rapporto degli spessori secondo una giacitura divenga piccolo quanto si vuole in confronto alla giacitura per cui è massimo.

Nel caso opposto avremo *varietà d'instabilità* [8], che possono essere varietà d'accumulazione di varietà spigolose (come nell'es. 3 del n. 2), ma possono anche essere interne a uno strato ove tutte le altre varietà sono regolari (basterebbe, nello stesso es. 3, arrotondare i vertici delle intaccature) [9]. Una varietà d'accumulazione di varietà spigolose è necessariamente eccezionale se il prodotto delle loro w diverge in ogni suo intorno (cfr. es. 3), altrimenti può anche essere regolare (basterebbe, sempre nell'es. 3, eseguire delle intaccature sempre più attutite), o spigolosa (basterebbe, inoltre, sovrapporre una spigolosità).

7. Particolarità di comportamento in punti.

A proposito degli esempi del n. 2, si era parlato di *punti* (e non di varietà) di *strozzatura*; e in genere tutte le considerate possibilità di comportamento sono riferibili più specificamente a *punti* delle varietà ove si manifestano.

Riconosciamo anzitutto che su ogni varietà di livello esistono dei punti, che chiameremo *punti-cerniera*, definibili, con riferimento alla funzione φ minimamente convessa, da una qualunque delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti:

— se una trasformazione $f = F(\varphi)$ rende non convessa la funzione f, vi sono dei punti P in cui $f(P)$ è minore di quanto occorrerebbe per rispettare le condizioni di convessità: *punti-cerniera* diciamo quelli per cui tale

(8) Denominazione intesa a rilevare come lo spessore di uno strato sottile fluttui irregolarmente mentre lo si fa tendere alla varietà stessa (cfr. p. es. fig. 3).

(9) Si noti che il profilo a intaccature (sempre sull'esempio della fig. 3) può alterarsi in modo che risulti ovunque esistente e finita (sebbene non limitata) la derivata seconda, e continui a sussistere l'eccezionalità. Basta ad es. eseguire delle intaccature sempre più attutite, ma non troppo rapidamente, e precisamente in modo che il rapporto fra le pendenze di due successivi tratti tenda ad uno, ma il prodotto infinito di tali rapporti diverga (p. es., rapporto dell'n-esima intaccatura $= 1 + 1/n$), mentre la larghezza delle intaccature stesse decresca in modo appropriato (per il medesimo esempio, larghezza dell'n-esima intaccatura p. es. dell'ordine di $n^{-3/2}$), cosicchè l'ordine di grandezza della distanza dal punto d'accumulazione delle intaccature (resto della serie) sia superiore a quello delle oscillazioni della pendenza per effetto delle intaccature stesse (nell'es., $n^{-1/2}$ in confronto ad n^{-1}). Ciò fatto si possono raccordare due lati successivi della spezzata con archi di curva (p. es. di parabola di 3° grado) che escludano i punti angolosi; si ottiene una curva dotata ovunque di derivata prima e seconda continue, salvo nel punto d'accumulazione delle intaccature dove la derivata seconda esiste (ed è nulla) ma non continua (nè limitata in nessun intorno). Ciò dimostra (come annunciato nella nota (2)), che la condizione della derivata seconda *limitata* non si può sopprimere nell'enunciato di quella condizione sufficiente.

Non si tratta naturalmente di una condizione necessaria; non è necessaria neppure l'esistenza delle derivate seconde e neppure prime. Osserviamo però che la semplice differenziabilità basta ad escludere la possibilità di varietà spigolose (salvo eventualmente su varietà di livello formate di « punti stazionari », ossia con differenziale primo nullo).

proprietà si verifica necessariamente non appena essa si verifichi anche per un sol punto della stessa varietà di livello;

— sopprimendo il vincolo di rispettare la stratificazione per i punti di un campo C, la funzione minimamente convessa φ può risultare migliorabile o no: lo è precisamente se almeno per una varietà di livello tutti i punti-cerniera P sono interni a C;

— il profilo relativo alla giacitura tangente (o a una almeno delle giaciture radenti) nel punto P ha ivi curvatura nulla;

— per tale giacitura è nullo il minimo limite di

$$\frac{W_\xi(x_1, x_2) - 1}{x_2 - x_1}$$

al restringersi dell'intorno $x \pm \varepsilon$ in cui x_1, x_2 possono prendersi attorno ad $x = \xi(P)$.

Le ultime due formulazioni sono visibilmente uguali salvo la veste geometrica o analitica; dalla formulazione geometrica risulta chiaro che rendendo concavo, in un punto, un profilo, altrettanto debba avvenire, sulla varietà di livello di quel punto, per tutti i profili ivi a curvatura nulla.

Tale considerazione conduce anche alla dimostrazione della asserita esistenza di punti-cerniera su ogni varietà di livello: esiste cioè almeno una giacitura ξ per cui

$$\min \lim \frac{W_\xi(x_1, x_2) - 1}{x_2 - x_1} = 0$$

(per x_1, x_2 tendenti risp. da sinistra e da destra alla x della considerata varietà di livello V_0).

Altrimenti infatti esisterebbero un numero $\gamma > 0$ e uno strato contenente V_0 tale che, per qualunque giacitura ξ, prendendo in esso x_1 e x_2, l'espressione di cui si considera il min lim risulti sempre $> \gamma$. E sarebbe allora

$$\frac{\varphi_\xi'(x_2)}{\varphi_\xi'(x_1)} = W_\xi(x_1, x_2) > 1 + \gamma(x_2 - x_1)$$

e se si prende $f = F(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2}\varkappa\varphi^2$ (con $\varkappa > 0$ costante; F *non convessa!*)

$$\frac{f_\xi'(x_2)}{f_\xi'(x_1)} = \frac{\varphi_\xi'(x_2)}{\varphi_\xi'(x_1)} \cdot \frac{1 + \varkappa\varphi_\xi(x_2)}{1 + \varkappa\varphi_\xi(x_1)} > [1 + \gamma \cdot \Delta x] \cdot \left\{1 - \frac{\varkappa\Delta\varphi_\xi}{1 + \varkappa\varphi_\xi(x_1)}\right\} > 1 + \gamma\Delta x - \frac{\varkappa}{1 + \varkappa\varphi_1}\Delta\varphi_\xi$$

e quindi $f_\xi'(x_2)/f_\xi'(x_1) > 1$ se $\varkappa$ è sufficientemente piccolo. Quindi φ non è minimamente convessa (contraddizione col « corollario » del n. 6).

Analogamente sulle varietà di strozzatura esistono punti di strozzatura ove $w_\xi = \infty$, e sulle varietà spigolose (od anche di strozzatura o d'instabilità) dei punti spigolosi ove $w_\xi \neq 1$ (definendo ovviamente w_ξ analogamente a w, ma da W_ξ anzichè da W).