Sulla costruzione esplicita di forme differenziali con assegnati periodi.

Memoria di E. MARTINELLI (a Genova).

Sunto. - *Si scrivono esplicitamente forme differenziali di grado $p \leq 4$ che risolvono il problema esistenziale di CARTAN-DE RHAM in una varietà topologica chiusa n -dimensionale.*

1. È noto che un fondamentale teorema di CARTAN-DE RHAM ⁽¹⁾ assicura l'esistenza di forme differenziali di grado p , regolari e integrabili in una varietà orientabile chiusa n -dimensionale M_n , con periodi preassegnati arbitrariamente.

In questo lavoro mi occupo della costruzione di una particolare classe di forme differenziali risolvanti il predetto problema esistenziale, le quali sono suscettibili di un'espressione esplicita, allorchè, sia la varietà M_n , sia i cicli di una base per il gruppo di BETTI $(n-p)$ -dimensionale di M_n , possono rappresentarsi localmente mediante parametrizzazioni biunivoche regolari, dotate di derivate di ordine sufficientemente alto.

Benchè io sviluppi qui in completa generalità gli elementi fondamentali, mi limito per ora a giungere fino in fondo alla costruzione delle forme soltanto per i primi quattro valori del grado p (la dimensione n dell'ambiente essendo comunque grande). Per questi valori di p ne deriva una nuova dimostrazione del teorema citato.

Il mio punto di partenza è l'introduzione di una metrica riemanniana in M_n . Pur essendo altrimenti nota la possibilità di ottenere una metrica in una varietà del tipo considerato, segnalo il metodo diretto di cui mi giovo qui a questo scopo (n. 3), metodo che denomino di « sovrapposizione sfumata » per illustrarne così il semplice concetto.

Assegnata una varietà Δ_{n-p} subordinata ad M_n , fisso poi l'attenzione sul componente normale a Δ_{n-p} del parallelismo di LEVI-CIVITA determinato dalla metrica. Tale componente, considerato la prima volta da H. WEYL, consente il trasporto (infinitesimo) di direzioni normali a Δ_{n-p} ; lo dico brevemente parallelismo W . Ebbene, in relazione al parallelismo W introduco la nozione invariante di forma differenziale « inviluppo » e, sulla base di questa nozione, pervengo alla costruzione esplicita di forme differenziali risolvanti il problema esistenziale predetto. Tali forme risultano definite in modo invariante, una volta assegnata la metrica di M_n e scelto un sistema fondamentale per i cicli $(n-p)$ -dimensionali della varietà.

⁽¹⁾ Enunciato da E. CARTAN [1] e dimostrato da G. DE RHAM [5].

Osservo infine che, se si applica la costruzione qui indicata al caso della varietà M_{2m} immagine dello spazio proiettivo complesso S_m , sulla quale sia fissata la metrica hermitiana ellittica di STUDY, si ottengono proprio le note forme differenziali invarianti di WIRTINGER, che forniscono l'elemento di estensione delle immagini in M_{2m} delle varietà analitiche di S_m . Quest'affermazione è almeno valida nei casi che ho fino ad ora esaminato, secondo è precisato al n. 18.

Questo rapido cenno sul contenuto della ricerca, mostra che il suo carattere è prevalentemente metrico-differenziale. Il teorema di CARTAN-DE RHAM deve invece considerarsi di natura topologica. Forse non è senza interesse questo nuovo esempio dei profondi rapporti che intercorrono fra questi campi apparentemente lontani.

Richiami e premesse.

2. La varietà ambiente M_n si intende connessa, orientabile e chiusa. Si suppone inoltre M_n di classe u . Ciò significa che M_n è ricopribile con un numero finito di interni $\mathcal{I}_n$, ciascuno dei quali può descriversi biunivocamente mediante n coordinate $x_1, \dots, x_n$ variabili entro una ipersfera dello spazio euclideo n -dimensionale, con la condizione che tra le coordinate x_i, x'_i ($i = 1, \dots, n$) di uno stesso punto appartenente all'eventuale zona di sovrapposizione di due interni diversi $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}'_n$ interceda una trasformazione biunivoca con jacobiano non nullo, rappresentata da funzioni di classe u (ammettenti cioè derivate continue fino all'ordine u).

Si conosca infine in M_n una base per il gruppo di BETTI $(n-p)$ -dimensionale, costituita da $(n-p)$ -cicli di classe u_0 rispetto all'ambiente M_n ⁽²⁾. Supponiamo u, u_0 abbastanza alti affinchè abbiano senso gli enti geometrici e analitici in seguito considerati.

Una forma differenziale esterna ω_p , di grado p , regolare in M_n (cioè con coefficienti univocamente definiti e di classe conveniente, in ogni caso però ≥ 1) si dice *integrabile* (o *chiusa*), quando si annulla identicamente il suo differenziale esterno $d\omega_p$; si dice forma *differenziale esatto* (o *omologa a zero*), quando esiste una forma θ_{p-1} , di grado $p-1$, regolare in M_n , tale che $d\theta_{p-1} = \omega_p$. Una forma differenziale esatto è sempre integrabile (teorema di POINCARÉ); non viceversa in generale.

Ricordiamo che l'integrale sopra un ciclo p -dimensionale Γ_p di M_n , di una forma integrabile ω_p , non varia sostituendo il ciclo con un ciclo omologo (anche con divisione) in M_n . In particolare quell'integrale è nullo se $\Gamma_p \approx 0$

⁽²⁾ Cioè rappresentabili localmente ponendo le coordinate x_i di un punto di M_n funzioni di classe u_0 di $n-p$ parametri, con condizioni analoghe a quelle già espresse in relazione ad M_n per la sovrapposizione di due rappresentazioni valide localmente. È, naturalmente, $u_0 \leq u$.

in M_n ; mentre è sempre nullo l'integrale sopra un ciclo qualunque di una forma differenziale esatto ⁽³⁾.

Sia $\Gamma_p^1, \dots, \Gamma_p^{R_p}$ (R_p essendo il numero di BETTI p -dimensionale di M_n) un sistema fondamentale per i p -cicli di M_n ; e siano $k^1, \dots, k^{R_p}$ numeri reali arbitrari. Il teorema di CARTAN-DE RHAM assicura precisamente l'esistenza di qualche forma ω_p , regolare e integrabile in M_n , siffatta che risulti:

$$(1) \quad \int_{\Gamma_p^i} \omega_p = k^i \quad (i = 1, \dots, R_p).$$

Introduzione di una metrica.

3. È noto che può costruirsi un modello della varietà M_n immerso in uno spazio euclideo di dimensione conveniente, anch'esso di classe u ⁽⁴⁾. La metrica euclidea dell'ambiente subordina allora sul modello, e quindi sulla M_n , una metrica riemanniana di classe $u - 1$.

D'altronde si può pervenire alla determinazione di una metrica riemanniana di classe $u - 1$ su M_n anche direttamente col metodo seguente, che potrebbe chiamarsi di *sovrapposizione sfumata*.

Siano $\mathcal{I}_n^1, \dots, \mathcal{I}_n^N$ intorni atti a ricoprire M_n (n. 2), e $\mathcal{I}_n^k$ ($k = 1, \dots, N$) rappresentato sopra la regione ipersferica dello spazio euclideo $E_n^k(x_1^k, \dots, x_n^k)$:

$$\sum_{i=1}^n (x_i^k)^2 < (r^k)^2.$$

Si consideri su $\mathcal{I}_n^k$ la metrica (trasformata conforme di quella di E_n^k) definita dalla forma quadratica

$$\varepsilon^k(x_1^k, \dots, x_n^k)[(dx_1^k)^2 + \dots + (dx_n^k)^2],$$

dove con ε^k s'indica una qualunque funzione positiva e di classe $u - 1$ definita nella regione ipersferica, annullantesi insieme alle sue derivate fino all'ordine $u - 1$ sul contorno; p. es. può assumersi $\varepsilon^k = [(r^k)^2 - \sum_i (x_i^k)^2]^u$.

Si ottiene allora sopra l'intera M_n una metrica che soddisfa ai requisiti richiesti, considerando, per ogni punto P di M_n ove si sovrappongono più intorni $\mathcal{I}_n^k$, la metrica

$$(2) \quad \sum_k \varepsilon^k[(dx_1^k)^2 + \dots + (dx_n^k)^2],$$

l'indice k percorrendo i valori corrispondenti agli intorni sovrapponentisi, e i differenziali $dx_1^k, \dots, dx_n^k$ essendo espressi mediante quelli delle coordinate che si vogliono assumere in P . Si riconosce invero subito che la forma

⁽³⁾ Sono queste ben note e immediate conseguenze della formula generale di GREEN-STOKES; cfr. p. es. F. SEVERI [6], pag. 384.

⁽⁴⁾ Cfr. H. WHITNEY [8] e W. V. HODGE [2], pagg. 9 e 13.

quadratica (2) risulta di classe $u - 1$ in M_n , tenendo conto che le trasformazioni tra i sistemi di coordinate che possono assumersi in P sono di classe u (n. 2), quindi le trasformazioni tra i differenziali di classe $u - 1$, e che, quando P muovendosi su M_n esca da uno degli intorni $\mathcal{I}_n^k$, la perdita del termine corrispondente nella somma (2) non altera la continuità dei coefficienti e delle loro derivate fino all'ordine $u - 1$ della forma quadratica considerata, a causa delle proprietà delle funzioni ε^k . Inoltre la forma quadratica (2) è ovviamente definita positiva.

Nel seguito ci riferiremo alla metrica introdotta, od ad un'altra qualunque metrica di classe abbastanza alta, comunque nota in M_n .

Preliminari topologici.

4. Sia $\Delta_{n-p}^1, \dots, \Delta_{n-p}^{R_p}$ una base per il gruppo di BETTI di dimensione $n - p$ in M_n , costituita da cicli che, come si è detto (n. 2), supponiamo di classe u_0 abbastanza alta. Consideriamo una qualunque base duale $\Gamma_p^1, \dots, \Gamma_p^{R_p}$, in guisa che, per una fissata orientazione della varietà orientabile M_n , gl'indici di KRONECKER delle intersezioni valgano:

$$(3) \quad (\Gamma_p^i, \Delta_{n-p}^j) = \delta^{ij},$$

ove $\delta^{ij} = 0$ per $i \neq j$, $\delta^{ii} = 1$.

Fissiamo l'attenzione sopra un determinato ciclo Δ_{n-p}^j e sopra un suo punto P . Sia $G_p^j(P)$ la varietà geodetica p -dimensionale normale a Δ_{n-p}^j in P , luogo cioè delle geodetiche dell'ambiente M_n uscenti da P secondo le ∞^{p-1} direzioni ortogonali a Δ_{n-p}^j . Sia inoltre $\sigma_{p-1}^j(P)$ la $(p-1)$ -sfera geodetica tracciata su $G_p^j(P)$, di centro P e raggio geodetico r^j abbastanza piccolo, e $\Sigma_p^j(P)$ la p -cella geodetica, porzione di $G_p^j(P)$, delimitata da $\sigma_{p-1}^j(P)$ (contorno σ_{p-1}^j incluso). Al variare del punto P su Δ_{n-p}^j e tenendo costante r^j , $\Sigma_p^j(P)$ descrive intorno a Δ_{n-p}^j un tubo (o *strato* per $p=1$), n -dimensionale T_n^j , il cui contorno t_{n-1}^j è descritto da σ_{p-1}^j .

Fissiamo sopra ogni $\Sigma_p^j(P)$ l'orientazione determinata da un p -edro e_p di direzioni ortogonali a Δ_{n-p}^j in P , siffatto che, associato ordinatamente con un $(n-p)$ -edro e_{n-p} tangente in P a Δ_{n-p}^j ed orientante secondo il suo verso Δ_{n-p}^j , dia luogo ad un n -edro $e_n = (e_p, e_{n-p})$ che orienta in P la varietà M_n concordemente all'orientazione già fissata per M_n . Risulta allora:

$$(4) \quad (\Sigma_p^j, \Delta_{n-p}^j) = 1.$$

Si osservi che, se P', P'' sono due punti di una stessa componente irriducibile del ciclo Δ_{n-p}^j , le orientazioni così fissate su $\Sigma_p^j(P')$ e $\Sigma_p^j(P'')$ si mutano l'una nell'altra per continuità, quando si trasporti il punto P da P' a P'' su tale componente e si segua la variazione continua di $\Sigma_p^j(P)$: è una immediata conseguenza del fatto che la varietà Δ_{n-p}^j ed M_n sono orientabili.

Supponiamo ora, in un primo tempo, Δ_{n-p}^j irriducibile. Indichiamo con $\tilde{\Gamma}_p^{*i}$ l'intersezione di Γ_p^i con il tubo T_n^j . Le varietà $\tilde{\Gamma}_p^{*i}$ e le Σ_p^j possono tutte considerarsi come *cicli mod. t_{n-1}^j* . Dimostriamo che risulta:

$$(5) \quad \tilde{\Gamma}_p^{*i} \approx \delta^{ij} \Sigma_p^j \quad \text{in } T_n^j \pmod{t_{n-1}^j}.$$

Infatti, poichè la varietà $T_n^j - t_{n-1}^j$ può contrarsi su Δ_{n-p}^j (facendo tendere a zero il raggio del tubo), una base per il gruppo di BETTI $(n-p)$ -dimensionale in $T_n^j - t_{n-1}^j$ è costituita dal solo ciclo Δ_{n-p}^j , e per stabilire la (5) basta verificare che

$$(\tilde{\Gamma}_p^{*i} - \delta^{ij} \Sigma_p^j, \Delta_{n-p}^j) = 0 \quad (5),$$

ciò che è ben vero in base alle (3) e (4).

Nel caso in cui Δ_{n-p}^j si decomponga in più componenti irriducibili, $\Delta_{n-p}^j = \Delta_{n-p}^{j1} + \dots + \Delta_{n-p}^{jm}$ (delle quali eventualmente alcune sovrapposte), del pari accade che risulta $T_n^j = T_n^{j1} + \dots + T_n^{jm}$. Si ha inoltre

$$(6) \quad (\Gamma_p^i, \Delta_{n-p}^{jk}) = \nu_k, \quad \nu_1 + \dots + \nu_m = \delta^{ij};$$

e, ragionando come sopra in relazione a ciascun T_n^{jk} , viene

$$(7) \quad \tilde{\Gamma}_p^{*ijk} \approx \nu_k \Sigma_p^j(P_k) \quad \text{in } T_n^{jk} \pmod{t_{n-1}^{jk}},$$

dove con $\tilde{\Gamma}_p^{*ijk}$ s'indica la parte di $\tilde{\Gamma}_p^{*i}$ che appartiene a T_n^{jk} , e con P_k un punto qualunque di Δ_{n-p}^{jk} . Sommando le (7) risulta

$$(8) \quad \tilde{\Gamma}_p^{*i} \approx \nu_1 \Sigma_p^j(P_1) + \dots + \nu_m \Sigma_p^j(P_m) \quad \text{in } T_n^j \pmod{t_{n-1}^j}.$$

5. Ciò posto, supponiamo d'aver costruito, per ogni ciclo Δ_{n-p}^j una forma differenziale di grado p , ω_p^j , che diremo *forma elementare associata a Δ_{n-p}^j* , la quale soddisfaccia alle condizioni seguenti:

a) ω_p^j sia regolare nel tubo T_n^j , o, più precisamente, abbia coefficienti univocamente definiti e di classe $v \geq 1$;

b) i coefficienti di ω_p^j si annullino insieme alle loro derivate fino all'ordine v sul contorno t_{n-1}^j del tubo T_n^j ;

c) ω_p^j sia integrabile ($d\omega_p^j = 0$);

d) sia $\int_{\Sigma_p^j(P)} \omega_p^j = 1$.

Una volta note R_p forme elementari ω_p^j ($j = 1, \dots, R_p$), si ottengono subito forme che risolvono il problema esistenziale di CARTAN-DE RHAM.

(5) Si ricordi che i cicli che soddisfanno ai teoremi di dualità rispetto ai p -cicli di T_n^j mod. t_{n-1}^j , sono gli $(n-p)$ -cicli ordinari di $T_n^j - t_{n-1}^j$. Cfr. S. LEFSCHETZ [3], pag. 178.

S'immagini prolungata ogni ω_p^j in tutta M_n come forma identicamente nulla fuori di T_n^j . La ω_p^j risulta allora, in base a b), di classe v e integrabile in M_n ; e così pure accade per la forma

$$(9) \quad \omega_p = \sum_{j=1}^{R_p} k^j \omega_p^j,$$

con k^j costanti arbitrarie.

La (9) risolve il problema esistenziale. Infatti si ha:

$$\int_{\Gamma_p^i} \omega_p = \sum_{j=1}^{R_p} k^j \int_{\Gamma_p^i} \omega_p^j = \sum_{j=1}^{R_p} k^j \int_{\Gamma_p^{*i}} \omega_p^j;$$

e poichè ω_p^j si annulla su t_{n-1}^j , per valutare gli ultimi integrali indicati, tenuto conto di c), possono sostituirsi alle varietà Γ_p^{*i} varietà omologhe in T_n^j mod. t_{n-1}^j . Ricordando la (5), o la più generale (8) insieme alla seconda delle (6), si ha quindi

$$\int_{\Gamma_p^{*i}} \omega_p^j = \delta^{ij} \int_{\Sigma_p^j} \omega_p^j = \delta^{ij};$$

e infine:

$$\int_{\Gamma_p^i} \omega_p = \sum_{j=1}^{R_p} k^j \delta^{ij} = k^i,$$

come vuole la (1) del n. 2.

La costruzione di forme risolventi il problema esistenziale di CARTAN-DE RHAM, si riduce dunque essenzialmente alla costruzione di forme soddisfacenti le condizioni a), b), c), d). A quest'ultimo compito sono dedicati i nn. seguenti.

Caso semplice.

6. Poichè tutto ciò che dovremo dire d'ora in avanti è lo stesso per i possibili valori dell'indice j ($= 1, \dots, R_p$), ometteremo di apporlo ai simboli già usati Δ_{n-p}^j , Σ_p^j , T_n^j , ecc.

Sopra la p -cella geodetica Σ_p introduciamo un sistema di coordinate normali di RIEMANN $y^1, \dots, y^p$, determinato da un p -edro $e_p(P)$ di direzioni ortogonali fra loro e a Δ_{n-p} in P , il quale sia concorde con l'orientazione fissata nel modo detto su $\Sigma_p(P)$ (n. 4). Indicheremo con $s = [(y^1)^2 + \dots + (y^p)^2]^{\frac{1}{2}}$ la distanza geodetica di un punto Q ($y^1, \dots, y^p$) di $\Sigma_p(P)$ dal punto P .

Consideriamo poi, sopra la generica $\Sigma_p(P)$ di raggio r , la forma differenziale

$$(10) \quad \omega_p = f(s^2) dy^1, \dots, y^p,$$

dove $f(s^2)$ è una funzione di classe v conveniente, definita nell'intervallo $(0, r^2)$, la quale soddisfaccia alle condizioni seguenti: 1) $f(s^2)$ si annulli nell'estremo r^2 insieme alle sue derivate fino all'ordine v ; 2) risulti:

$$(11) \quad \int_{\Sigma_p} \omega_p = 1 \quad (^6).$$

Si noti che la forma ω_p è *invariantivamente definita sopra ogni Σ_p* , cioè non muta cambiando il p -edro e_p che serve a determinare le coordinate normali $y^1, \dots, y^p$. Se si immagina di rappresentare Σ_p su uno spazio euclideo $E_p(y^1, \dots, y^p)$, le trasformazioni di coordinate normali $y^1, \dots, y^p$ possono invero rappresentarsi come rotazioni in E_p , le quali perciò non alterano nè il p -differenziale $d(x^1, \dots, y^p)$ nè s , attesi i loro significati geometrici di elemento di volume e di distanza in E_p . D'altronde l'invarianza della (10) è formalmente immediata.

Orbene, *tenderemo alla costruzione di una forma elementare associata a Δ_{n-p} (n. 5), la quale sia definita nel tubo T_n descritto dalle $\Sigma_p(P)$ al variare di P su Δ_{n-p} , e si riduca sopra ogni $\Sigma_p(P)$ alla forma ω_p .*

Supponiamo per un momento che, mentre P descrive *tutto* il cielo Δ_{n-p} , si possa assegnare una legge che permetta di trasportare in modo *ovunque* continuo e regolare il p -edro ortogonale e_p di direzioni normali a Δ_{n-p} ; diciamo allora che si verifica il *caso semplice*. Discuteremo in seguito (nn. 16, 17) le condizioni per il suo verificarsi, limitandoci per ora ad osservare che ciò accade ovviamente per $p = 1$ e per $p = n - 1$.

Nel caso semplice un punto qualunque Q del tubo T_n può individuarsi mediante le p coordinate $y^1, \dots, y^p$ sulla $\Sigma_p(P)$ passante per Q , definite a partire dallo $e_p(P)$ che è determinato secondo la legge predetta, e mediante altre $n - p$ coordinate $z^{p+1}, \dots, z^n$ atte ad individuare la posizione di P su Δ_{n-p} . Il primo gruppo di coordinate è univocamente fissato per tutto T_n , mentre il secondo gruppo ha validità soltanto locale, e deve perciò assumersi diversamente da luogo a luogo.

Si ottengono allora immediatamente forme elementari. La ω_p stessa, così come è scritta in (10), è tale. Infatti la (10) può pensarsi come una forma differenziale nelle coordinate (y^a, z^a) ($a = 1, \dots, p$; $a = p + 1, \dots, n$), nella quale non appaiono le z^a ; onde essa risulta definita in tutto il tubo T_n . La

(⁶) Si costruiscono ovviamente funzioni che verificano le condizioni 1), 2). Basta p. es. assumere $f(s^2) = \frac{1}{\lambda(r)} f_0(s^2)$, con $f_0(s^2) = (r^2 - s^2)^{v+1}$ e $\lambda(r) = \int_{\Sigma_p} f_0(s^2) dy^1, \dots, y^p > 0$.

integrabilità della forma è d'altronde ovvia, perchè il suo differenziale esterno è

$$\sum_{a=1}^p \frac{\partial f(s^2)}{\partial y^a} dy^a, y^1, \dots, y^p + \sum_{\alpha=p+1}^n \frac{\partial f(s^2)}{\partial z^\alpha} dz^\alpha, y^1, \dots, y^p,$$

del quale ciascun termine è nullo, perchè nella prima somma sono nulli tutti i $(p+1)$ -differenziali, e nella seconda tutti i coefficienti. Se si tien conto infine delle proprietà della funzione $f(s^2)$ e della (11), si conclude che la ω_p soddisfa proprio a tutte le condizioni che definiscono una forma elementare di classe v (n. 5).

OSSERVAZIONE 1^a. - Affinchè i coefficienti della forma elementare costruita risultino in effetti di classe v (come la $f(s^2)$ scelta) rispetto alle coordinate generali $x_1, \dots, x_n$ in M_n , è ovvio che bisogna supporre convenientemente alte le classi u, u_0, t rispettivamente di M_n, Δ_{n-p} e della legge di trasporto del p -edro e_p che si suppone nota. Non v'è difficoltà per determinare limitazioni inferiori per u, u_0, t sufficienti affinchè la classe della forma sia proprio v . Osservazioni analoghe sottintendiamo nel seguito trattando il caso generale, in cui, avvertiamo, basterà supporre limitazioni inferiori per u e u_0 .

OSSERVAZIONE 2^a. - Benchè la forma ω_p sia invariantivamente definita sopra ogni Σ_p , la forma elementare cui si è giunti in T_n , che ha pure la medesima espressione di ω_p , non è ovviamente invariante (per $p > 1$), in quanto dipende dalla supposta legge di trasporto del p -edro e_p . Le forme elementari che costruiremo trattando il caso generale, sono invece sempre invarianti, come si è detto al n. 1. D'altronde, nel caso semplice, il fatto di partire da una forma definita in modo invariante sopra ogni Σ_p non ha alcuna importanza ai fini del ragionamento sviluppato. Il ragionamento stesso può invero ripetersi immutato se si sostituisce $f(s^2)$ con una qualunque funzione $f(y^1, \dots, y^p)$, che si annulli sul contorno di Σ_p insieme alle sue derivate fino all'ordine v e soddisfaccia ancora la (11).

OSSERVAZIONE 3^a. - Allorchè sia riducibile il ciclo $\Delta_{n-p} = \Delta_{n-p}^1 + \dots + \Delta_{n-p}^m$, col procedimento indicato si viene a costruire una forma elementare entro ciascun tubo T_n^k componente di $T_n = T_n^1 + \dots + T_n^m$ (n. 4); la quale forma deve poi estendersi come identicamente nulla in tutta la M_n (n. 5). La forma che deve assumersi come forma elementare associata all'intero ciclo Δ_{n-p} , non è altro, in questo caso, che la somma delle forme relative ai cicli Δ_{n-p}^k . La stessa osservazione è valida per il seguito.

Caso generale. Preliminare constatazione negativa.

7. Passiamo alla considerazione del caso generale. Pur prescindendo dalla validità del caso semplice, si può sempre assegnare una legge regolare di trasporto del p -edro ortogonale $e_p(P)$, limitatamente però al variare del punto P in un intorno $\mathfrak{I}_\Delta(P_0)$ di un fissato P_0 su Δ_{n-p} . Non appena sia $p > 1$ vi sono infinite possibilità di far ciò.

Il complesso delle coordinate (y^a, z^x) permette allora di rappresentare ogni punto Q appartenente alla *porzione* del tubo T_n che è descritta da $\Sigma_p(P)$ al variare di P in $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$. Se si cambiano la legge di trasporto per lo $e_p(P)$ e i parametri $z^{p+1}, \dots, z^n$, si opera una trasformazione di coordinate del tipo:

$$(12) \quad \begin{cases} y^a = c^a_{\alpha'}(\bar{z}^{p+1}, \dots, \bar{z}^n) \bar{y}^{a'} \\ z^x = z^x(\bar{z}^{p+1}, \dots, \bar{z}^n) \end{cases} \quad (a, a' = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n),$$

ove il determinante delle $c^a_{\alpha'}$, funzioni delle $\bar{z}^{p+1}, \dots, \bar{z}^n$, è ortogonale positivo, ed è sottinteso il segno di somma rispetto all'indice a' .

Ciò posto, conviene richiamare l'attenzione su quanto segue. Se si ragiona come al n. 6, ma limitatamente alla regione parziale di T_n ora considerata, la espressione (10) fornisce una forma differenziale che può pensarsi definita e integrabile in tale regione. Considerato allora un numero finito di intorni del tipo di $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$, ricoprenti Δ_{n-p} , si ottiene in corrispondenza una suddivisione di T_n in regioni parziali, in ciascuna delle quali risulta similmente definita una forma differenziale integrabile. Tenuto conto della invarianza della (10) per trasformazioni di coordinate normali $y^1, \dots, y^p$, si potrebbe allora essere indotti a credere di aver così ottenuto una *unica* forma differenziale regolare ed integrabile in tutto il tubo T_n .

Ma così non è in generale. Ciascuna forma definita in una regione parziale di T_n dipende invero essenzialmente dalla legge usata nel corrispondente intorno $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$ di Δ_{n-p} per trasportare il p -edro e_p . In un punto Q di T_n che sia comune a due regioni parziali ivi sovrapponentisi, indicate con y^a e $\bar{y}^a$ le coordinate normali relative alle due regioni, si hanno le due forme

$$\omega_p = f(s^2) d(y^1, \dots, y^p), \quad \bar{\omega}_p = f(\bar{s}^2) d(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^p).$$

Se ora si vuole esprimere p. es. la prima forma ω_p con le coordinate della seconda, bisogna eseguire sul p -differenziale $d(y^1, \dots, y^p)$ una sostituzione ortogonale i cui coefficienti dipendono in generale dalle coordinate $z^{p+1}, \dots, z^n$ del punto P variabile su Δ_{n-p} , onde la forma trasformata viene a contenere dei termini nei differenziali delle z^x , e non coincide così con la $\bar{\omega}_p$.

Il parallelismo W. Caso di integrabilità.

8. Premessa questa constatazione negativa, osserviamo che, pur sempre prescindendo dalla validità del caso semplice, può in ogni caso determinarsi una *legge di trasporto infinitesimo*, ovunque regolare su Δ_{n-p} , *intrinsecamente (e quindi univocamente) definita*, la quale permetta di trasportare un p -edro $e_p(P)$ di vertice P , ortogonale a Δ_{n-p} , in un p -edro $e_p(P')$ congruente, ortogonale a Δ_{n-p} in un punto P' infinitamente vicino a P .

Invero, sia v un vettore ortogonale a Δ_{n-p} in P , e v' il vettore trasportato in P' col parallelismo di LEVI-CIVITA relativo alla metrica dell'ambiente M_n . Se si considera l'operazione che muta v nel vettore v^* , che è

componente normale a Δ_{n-p} del vettore v' , si ottiene un parallelismo che permette di trasportare vettori ortogonali a Δ_{n-p} in vettori ortogonali. Chiameremo questo parallelismo, che è stato per la prima volta considerato da H. WEYL [7], *parallelismo W*. Ebbene, trasportando il p -edro e_p mediante il parallelismo W , si ha appunto una legge di trasporto infinitesimo del tipo desiderato, giacchè si verifica facilmente che il parallelismo W conserva gli angoli tra vettori (ciò che è del resto geometricamente evidente, tenuto conto che della stessa proprietà gode il parallelismo di LEVI-CIVITA).

Supponiamo, in un primo tempo, che il parallelismo W sia *integrabile*, vale a dire che, con una circolazione del vertice P su Δ_{n-p} (limitata, se occorre, ad un intorno abbastanza piccolo su Δ_{n-p}), il p -edro e_p trasportato per parallelismo ritorni in se stesso. Ciò accade certamente quando sia $p=1$ ovvero $p=n-1$, giacchè, nel primo caso lo e_p si riduce all'unica normale a Δ_{n-p} nel punto P variabile, e nel secondo caso, riducendosi Δ_1 ad una linea, le circolazioni *locali* di P su Δ_1 si riducono a percorsi di andata e ritorno sullo stesso tratto di linea. In quest'ultimo caso tuttavia, la circolazione di P sull'intera linea chiusa Δ_1 non è escluso possa produrre una rotazione dello $(n-1)$ -edro e_{n-1} . Comunque, sia per i valori indicati di p , sia per ogni altro valore di p quando il parallelismo W risulti integrabile, la situazione è quasi la medesima di quella che si presenta nel caso semplice (n. 6).

Infatti, nell'attuale ipotesi, mercè il parallelismo W si può, partendo da un determinato $e_p(P_0)$ di vertice P_0 comunque fissato su Δ_{n-p} , trasportare il p -edro in modo regolare e univocamente determinato, se non addirittura su tutta la varietà Δ_{n-p} , almeno a tutto in intorno finito $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$ del punto P_0 . E tenuto conto del fatto che il parallelismo W è determinato intrinsecamente, si può in questo caso sviluppare con successo il ragionamento indicato al n. 7, giacchè le due forme $\omega_p, \bar{\omega}_p$ ivi considerate vengono di fatto a coincidere, in quanto il passaggio dall'una all'altra si fa attualmente mediante una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti.

Forme inviluppo.

9. In generale il parallelismo W non è però integrabile, come non lo è il parallelismo di LEVI-CIVITA. Ecco allora come può ugualmente giungersi alla costruzione di una forma differenziale definita e regolare in T_n , che si riduca alla (10) sopra ogni Σ_p .

Fissato un punto P_0 di Δ_{n-p} consideriamo le ∞^{n-p-1} geodetiche *entro* Δ_{n-p} uscenti da P_0 , ovvero un qualunque altro sistema di linee tracciate su Δ_{n-p} e uscenti da P_0 secondo tutte le possibili direzioni: indicheremo un tal sistema di linee con $\{l\}_{P_0}$. Assegnato un p -edro $e_p(P_0)$ di vertice P_0 , questo può trasportarsi col parallelismo, usando come linee di trasporto quelle del sistema $\{l\}_{P_0}$, a tutto un intorno $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$ in modo univocamente determinato.

Ripetendo il ragionamento del n. 7, la forma (10) dà luogo allora ad una forma integrabile definita in una regione parziale del tubo T_n , che ha la stessa espressione formale della (10) e che indicheremo con $\omega_p^{P_0}$. Ciò può ripetersi a partire da ogni punto P_0 scelto su Δ_{n-p} , ottenendosi così altrettante forme differenziali $\omega_p^{P_0}$. È ormai ben chiaro però che, se il parallelismo W non è integrabile, le forme costruite non coincidono affatto, anche se si assume come sistema di linee $\{l\}_{P_0}$ per ogni P_0 su Δ_{n-p} il sistema intrinsecamente determinato delle geodetiche per P_0 . Infatti, in ogni caso, ciascuna delle forme $\omega_p^{P_0}$ costruite viene a dipendere dal punto P_0 scelto come *centro* della costruzione predetta. Quel che soltanto può asserirsi, in virtù dell'invarianza per rotazioni della (10), è che ciascuna forma costruita *non* dipende dal particolare $e_p(P_0)$ fissato nel centro P_0 .

Ebbene, perverremo lo stesso ad una forma univocamente definita in tutto il tubo T_n , considerando quella che diremo la *forma involuppo* $\tilde{\omega}_p$ delle forme $\omega_p^{P_0}$. Se Q_0 è un punto comunque variabile nel tubo T_n e $\Sigma_p(P_0)$ la p -cella geodetica per esso, definiamo come $\tilde{\omega}_p$ la forma che si riduce in ogni punto Q_0 alla forma $\omega_p^{P_0}$.

Si capisce che la forma involuppo $\tilde{\omega}_p$ dipende soltanto dalla ω_p e dal parallelismo W e non dai sistemi di linee scelti $\{l\}_{P_0}$ per ogni P_0 su Δ_{n-p} . Infatti, basta per convincersene tener presente che i coefficienti di una forma differenziale si comportano in una trasformazione di variabili come tensori; per modo che, in un dato punto, la relazione che intercede tra i valori ivi assunti dai coefficienti di due forme l'una trasformata dell'altra dipende soltanto dai valori delle derivate prime nel punto stesso delle funzioni che rappresentano la trasformazione. Del resto può ottenersi l'espressione esplicita della $\tilde{\omega}_p$ nel modo seguente.

Per evitare confusione, indichiamo con $t^1, \dots, t^p$ le coordinate normali in $\Sigma_p(P)$ determinate dal p -edro $\bar{e}_p(P)$, che si suppone ottenuto da un fissato $\bar{e}_p(P_0)$ mediante trasporto col parallelismo W eseguito lungo le linee $\{l\}_{P_0}$, essendo P nell'intorno $\mathcal{I}_\Delta(P_0)$. Assunte allora (t^a, z^a) come coordinate atte a descrivere la porzione di T_n generata da $\Sigma_p(P)$, la forma $\omega_p^{P_0}$ è data semplicemente da:

$$(13) \quad \omega_p^{P_0} = f(s^2) d(t^1, \dots, t^p),$$

con $s^2 = (t^1)^2 + \dots + (t^p)^2$.

Indichiamo invece con (y^a, z^a) il riferimento, valido nella stessa porzione di T_n , già determinato al n. 7 mediante il trasporto con legge generica del p -edro $e_p(P)$ col quale si definiscono le coordinate $y^1, \dots, y^p$ su $\Sigma_p(P)$. A causa del carattere invariante rilevato per la ω_p (n. 6), possiamo supporre, senza che occorra perciò di alterare la (13), che per $P = P_0$ lo $\bar{e}_p(P_0)$ che serve a definire le coordinate $t^1, \dots, t^p$ sopra la $\Sigma_p(P_0)$ coincida con lo $e_p(P_0)$ che determina le coordinate $y^1, \dots, y^p$ sopra la $\Sigma_p(P_0)$ stessa. Sopra tale $\Sigma_p(P_0)$ (e, in generale, soltanto su questa) è allora $y^a = t^a$.

Vogliamo esprimere la forma involuppo $\tilde{\omega}_p$ nel riferimento (y^a, z^x) . All'uopo associamo ad un punto $Q_0(y^a, z^x)$ di $\Sigma_p(P_0)$, il vettore contravariante applicato in P_0 e ortogonale a Δ_{n-p} , v , di componenti $y^1, \dots, y^p, 0, \dots, 0$ nel riferimento (y^a, z^x) . Si tratta di un vettore tangente in P_0 alla geodetica P_0Q_0 . Siano $\delta y^1, \dots, \delta y^p, 0, \dots, 0$ le componenti contravarianti del differenziale covariante di v rispetto al parallelismo W . Si ha ovviamente, ricordata la definizione di W (n. 8),

$$(14) \quad \delta y^a = dy^a + \left\{ \begin{matrix} a \\ b\beta \end{matrix} \right\}_0 y^b dz^\beta,$$

dove $\left\{ \begin{matrix} a \\ b\beta \end{matrix} \right\}_0$ sono simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie relativi alla metrica dell'ambiente M_n espressa in coordinate (y^a, z^x) ; coll'indice 0 intendiamo che i simboli stessi *siano valutati nel punto* $(0, z^x)$. Nella (14) sono sottintesi i segni di somma rispetto agl'indici $b = 1, \dots, p$ e $\beta = p+1, \dots, n$.

Ciò posto, facciamo vedere che la forma $\tilde{\omega}_p$ si ottiene dalla (10) sostituendo il p -differenziale $d(y^1, \dots, y^p)$, espresso come prodotto esterno di differenziali semplici

$$d(y^1, \dots, y^p) = dy^1 \times \dots \times dy^p \quad (^7),$$

con il prodotto esterno dei differenziali covarianti considerati. Precisamente si ha

$$(15) \quad \tilde{\omega}_p = f(s^2) \delta y^1 \times \dots \times \delta y^p.$$

Infatti, tenuto conto dell'invarianza per trasformazioni di variabili delle operazioni di prodotto esterno e di differenziazione covariante, la (15) nelle coordinate (t^a, z^x) diviene

$$(16) \quad \tilde{\omega}_p = f(s^2) \delta t^1 \times \dots \times \delta t^p.$$

D'altronde, per i punti Q_0 di $\Sigma_p(P_0)$ è evidentemente $\delta t^a = dt^a$, quindi in ogni tal punto Q_0 il secondo membro della (16) coincide col secondo membro della (13). In formule:

$$\tilde{\omega}_p(Q_0) = \omega_p^{F_0}(Q_0);$$

che è quanto si voleva provare.

La forma involuppo $\tilde{\omega}_p$, della quale la (15) fornisce l'espressione esplicita, è, di sua natura, definita *invariantivamente, e quindi univocamente, in tutto il tubo* T_n , e soddisfa alla condizione di ridursi alla (10) sopra ogni Σ_p . Tuttavia la $\tilde{\omega}_p$ *non è ancora* una forma che possa in ogni caso assumersi come forma elementare associata al ciclo Δ_{n-p} , in quanto non v'è in generale alcuna ragione perchè la $\tilde{\omega}_p$ risulti integrabile. (Essa risulta certamente integrabile quando è integrabile il parallelismo W , perchè allora tutte le forme $\omega_p^{F_0}$ coincidono fra loro e con la $\tilde{\omega}_p$).

(⁷) Indichiamo col segno $\times$ l'operazione di prodotto esterno.

Forme fondamentali $\tilde{\Omega}_p, \tilde{\Theta}_{p-1}$.

10. Per giungere ad una forma sempre integrabile possiamo procedere così.

Allo scopo di poter usare nel seguito di una scrittura più spedita, consideriamo accanto alla (10) anche la semplice forma

$$(17) \quad \Omega_p = d(y^1, \dots, y^p),$$

invariantivamente definita su una generica $\Sigma_p(P)$, e la forma inviluppo da essa determinata

$$(18) \quad \tilde{\Omega}_p = \delta y^1 \times \dots \times \delta y^p,$$

che è invece invariantivamente definita nel tubo T_n . È allora:

$$(19) \quad \omega_p = f(s^3)\Omega_p, \quad \tilde{\omega}_p = f(s^3)\tilde{\Omega}_p.$$

Sopra $\Sigma_p(P)$, la forma Ω_p è differenziale esatto della forma di grado $p-1$:

$$(20) \quad \Theta_{p-1} = \frac{1}{p} \{ y^1 d(y^2, \dots, y^p) - y^2 d(y^1, y^3, \dots, y^p) + \dots + (-1)^{p-1} y^p d(y^1, \dots, y^{p-1}) \}.$$

In formule, si ha cioè:

$$(21) \quad d\Theta_{p-1} = \Omega_p.$$

Come la Ω_p , così anche la Θ_{p-1} è una forma invariantivamente definita sopra $\Sigma_p(P)$ (n. 6). Lo si verifica subito eseguendo una sostituzione ortogonale sulle $y^1, \dots, y^p$, oppure osservando che, se si rappresenta Σ_p sopra uno spazio euclideo $E_p(y^1, \dots, y^p)$ come al n. 6, la Θ_{p-1} esprime il volume della piramide che ha vertice nell'origine delle coordinate e base costituita dal parallelepipedo individuato da $p-1$ vettori infinitesimi uscenti dal punto di coordinate $(y^1, \dots, y^p)$ ⁽⁸⁾.

Ora possiamo ripetere per la forma Θ_{p-1} quanto si è detto al n. 9 deducendone la forma inviluppo:

$$(22) \quad \tilde{\Theta}_{p-1} = \frac{1}{p} \{ y^1 \delta y^2 \times \dots \times \delta y^p - \dots + (-1)^{p-1} y^p \delta y^1 \times \dots \times \delta y^{p-1} \}.$$

La forma $\tilde{\Theta}_{p-1}$ di grado $p-1$, e così pure la forma di grado p che ne è differenziale esterno $d\tilde{\Theta}_{p-1}$, risultano *invariantivamente (e univocamente) definite nel tubo T_n* . La forma $d\tilde{\Theta}_{p-1}$ risulta inoltre *integrabile*, in base al citato teorema di POINCARÉ (n. 2). Osserviamo ancora che, se si considera la

(8) Infatti, immaginando i $(p-1)$ -differenziali che appaiono nella Θ_{p-1} determinati dai $p-1$ vettori considerati, il volume della piramide suddetta è la p -ma parte di quello del parallelepipedo individuato dai precedenti $p-1$ vettori infinitesimi e dal vettore di componenti $-y^1, \dots, -y^p$, applicato anch'esso nel punto $(y^1, \dots, y^p)$. D'altronde il volume del parallelepipedo uguaglia (a meno del segno) il determinante formato dalle componenti di tutti i p vettori: cioè quanto è in parentesi nel secondo membro della (20). Per $p=2$, nel piano cartesiano (x, y) si ha la ben nota forma pfaffiana $\Theta_1 = 1/2(xdy - ydx)$ il cui integrale sopra una linea chiusa esprime l'area racchiusa dalla curva.

forma inviluppo $\tilde{\Theta}_{p-1}$ sopra una Σ_p , si ha $(\tilde{\Theta}_{p-1})_{\Sigma_p} = \Theta_{p-1}$; onde, tenuto conto che $(d\tilde{\Theta}_{p-1})_{\Sigma_p} = d(\tilde{\Theta}_{p-1})_{\Sigma_p}$ e della (21), risulta:

$$(d\tilde{\Theta}_{p-1})_{\Sigma_p} = \Omega_p.$$

Se $g(s^2)$ è una fissata funzione di s^2 , le stesse proprietà ora indicate per Θ_{p-1} , $\tilde{\Theta}_{p-1}$, $d\tilde{\Theta}_{p-1}$, spettano rispettivamente alle forme: $g(s^2)\Theta_{p-1}$, $g(s^2)\tilde{\Theta}_{p-1}$, $d[g(s^2)\tilde{\Theta}_{p-1}]$.

Differenziando esternamente la forma $g\Theta_{p-1}$, considerata sopra una generica Σ_p , si ha poi:

$$d[g\Theta_{p-1}] = g'(s^2)ds^2 \times \Theta_{p-1} + g(s^2)d\Theta_{p-1};$$

perciò, ricordando la (21) e osservando che

$$(23) \quad \Omega_p = \frac{p-1}{2} \frac{1}{s^2} ds^2 \times \Theta_{p-1},$$

risulta:

$$d[g\Theta_{p-1}] = \left\{ \frac{2}{p} s^2 g'(s^2) + g(s^2) \right\} \Omega_p.$$

Assumiamo per $g(s^2)$ un integrale, per ora non precisato, della equazione differenziale:

$$(24) \quad \frac{2}{p} s^2 g'(s^2) + g(s^2) = f(s^2).$$

In base alla prima delle (19) si ha allora:

$$(25) \quad d[g\Theta_{p-1}] = f\Omega_p = \omega_p,$$

donde si trae, analogamente a sopra,

$$(26) \quad (d[g\tilde{\Theta}_{p-1}])_{\Sigma_p} = f\Omega_p = \omega_p.$$

La forma $d[g\tilde{\Theta}_{p-1}]$ è dunque una forma di grado p , invariantivamente definita nel tubo T_n , ivi integrabile, che si riduce alla ω_p sopra ogni Σ_p . *Tale forma può allora assumersi come forma elementare associata al ciclo Δ_{n-p} ?*

Esame critico.

11. È necessario esaminare con un po' d'attenzione la domanda finale del n. precedente.

La forma $d[g\tilde{\Theta}_{p-1}]$ dipende dalla scelta di un integrale, $g(s^2)$, dell'equazione differenziale (24). L'integrale generale della (24), per s variabile nell'intervallo $(0, r)$ che a noi interessa, è

$$(27) \quad cs^{-p} + \frac{p}{2} s^{-p} \int_0^{s^2} f(s^2) s^{p-2} ds^2,$$

con c costante arbitraria.

Si verifica facilmente che per $c = 0$ la (27) fornisce un integrale regolare, anzi l'unico integrale regolare,

$$g_0(s^2) = \frac{p}{2} s^{-p} \int_0^{s^2} f(s^2) s^{p-2} ds^2,$$

nonostante l'apparente indeterminazione per $s^2 = 0$. La funzione $g_0(s^2)$ risulta precisamente della stessa classe v di $f(s^2)$ in tutto l'intervallo $(0, r^2)$ (n. 6). Con siffatta scelta della funzione $g(s^2) = g_0(s^2)$, la forma $g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}$ è regolare nel tubo T_n e così pure la $d[g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}]$. Tenuto conto della (26) si è allora tentati di pensare di avere in questo modo ottenuto effettivamente una forma elementare associata al ciclo Δ_{n-p} . Ma ciò non è vero, in generale. Infatti, $d[g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}]$ soddisfa sì alle condizioni *a)*, *c)*, *d)* del n. 5, ma la condizione *b)*, concernente l'annullamento dei coefficienti della forma sul contorno del tubo T_n , è soddisfatta dalla forma $(d[g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}])_{\Sigma_p}$ considerata sopra una Σ_p (cioè dalla ω_p), e non dalla $(d[g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}])$ liberamente considerata nei punti del contorno di T_n . In altri termini, la (26) ci dice soltanto che si annullano sul contorno del tubo il coefficiente del p -differenziale $d(y^1, \dots, y^p)$ che appare in $d[g_0 \tilde{\Theta}_{p-1}]$, mentre nulla ci dice circa l'annullarsi dei coefficienti degli altri p -differenziali contenenti i differenziali dz^z ⁽⁹⁾.

Anzichè considerare l'integrale regolare che si ottiene per $c = 0$, possiamo assumere $c = -\frac{p}{2} \int_0^{r^2} f(s^2) s^{p-2} ds^2$, ottenendo l'integrale

$$(28) \quad g_1(s^2) = \frac{p}{2} s^{-p} \int_{r^2}^{s^2} f(s^2) s^{p-2} ds^2 \quad (s^2 \leq r^2).$$

La funzione $g_1(s^2)$ è *singolare* in $s^2 = 0$, ma, ad eccezione di questo punto, risulta di classe $v+1$ nell'intervallo $(0, r^2)$, essendo ivi $f(s^2)$ di classe v . Inoltre, avuto riguardo alla condizione 1) supposta per $f(s^2)$ (n. 6), risulta che $g_1(s^2)$ si annulla per $s^2 = r^2$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $v+1$.

Ne segue subito che la forma $d[g_1 \tilde{\Theta}_{p-1}]$ soddisfa effettivamente alla condizione *b)* del n. 5. Le condizioni *c)* *d)* sono anche soddisfatte dalla $d[g_1 \tilde{\Theta}_{p-1}]$. Quanto alla condizione *a)* essa è certamente soddisfatta nei punti di $T_n - \Delta_{n-p}$, ma non si può asserire che sia soddisfatta nei punti di Δ_{n-p} , poichè ivi i coefficienti di $g_1 \tilde{\Theta}_{p-1}$ risultano singolari in dipendenza della singolarità

⁽⁹⁾ Che di fatto non svaniscano in generale anche questi coefficienti, può verificarsi su esempi. Se $p=2$, p. es., la (41) del successivo n. 13, nella quale si ponga $g_0(s^2)$ in luogo di $g(s^2)$, mostra appunto la presenza della forma $\mathfrak{C}_2$ (in generale $\neq 0$) affetta dal coefficiente $s^2 g_0 = \int_0^{s^2} f ds^2$, il quale non può annullarsi per $s^2 = r^2$ dovendo $f(s^2)$ soddisfare la (11).

della $g_1(s^2)$. Tenendo conto della (26) si può dire soltanto che la $d[g_1\tilde{\Theta}_{p-1}]$ si riduce *sopra* ogni Σ_p ad una forma regolare anche nei punti di Δ_{n-p} .

Si conclude dunque che, sia per l'una che per l'altra delle due strade tentate, non si può dare, almeno in generale, risposta immediata e affermativa alla domanda del n. 10. Otterremo invece tale risposta e la effettiva costruzione delle forme elementari, soltanto dopo un esame approfondito della struttura delle forme $\tilde{\Omega}_p$ e $\tilde{\Theta}_{p-1}$ fornite dalle (18) e (22). È opportuno però che prima stabiliamo alcune relazioni formali.

Alcune relazioni formali.

12. Indichiamo brevemente con σ_1^{ab} la forma pfaffiana nelle variabili $z^{p+1}, \dots, z^n$:

$$(29) \quad \sigma_1^{ab} = \left\{ \begin{matrix} a \\ b\beta \end{matrix} \right\}_0 dz^\beta,$$

dove, al solito, è sott'inteso il segno di somma rispetto all'indice $\beta = p+1, \dots, n$.

Avvertiamo che riserveremo le lettere latine $a, b, c, \dots$ per gl'indici variabili da 1 a p , e le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ per gl'indici variabili da $p+1$ a n . Adotteremo inoltre sempre la convenzione di somma rispetto ad un indice alto ed uno basso, il che ci indurrà talora a spostare in basso l'indice delle coordinate y^a , scrivendo cioè indifferentemente y_a in luogo di y^a .

La (14) si scrive allora:

$$(30) \quad \delta y^a = dy^a + y_b \sigma_1^{ab}.$$

Tenuto conto che le linee coordinate y^a , nei punti di Δ_{n-p} , sono ortogonali fra loro e a Δ_{n-p} , risulta

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ b\beta \end{matrix} \right\}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{a\beta}}{\partial y_b} - \frac{\partial g_{b\beta}}{\partial y_a} \right),$$

dove i g_{ij} sono i coefficienti della metrica di M_n riferiti alle coordinate (y^a, z^α) , e le loro derivate s'intendono calcolate nel punto $(0, z^\alpha)$ di Δ_{n-p} . Ne seguono le relazioni di emisimmetria

$$\sigma_1^{ba} = -\sigma_1^{ab}, \quad \sigma_1^{aa} = 0,$$

e l'identità

$$(31) \quad \delta s^2 = 2y_a \delta y^a = 2y_a dy^a + 2y_a y_b \sigma_1^{ab} = ds^2 + y_a y_b (\sigma_1^{ab} + \sigma_1^{ba}) = ds^2,$$

del resto a priori ovvia in base alle proprietà del parallelismo W (n. 8), interpretando s come misura di un vettore di componenti $y^1, \dots, y^p$ applicato in un punto di Δ_{n-p} .

Vediamo ora come si trasformino gli enti considerati per un cambiamento di coordinate del tipo espresso dalle (12). Ricordando l'ortogonalità del determinante delle $c^a_{\cdot a'}$, si ha $c^a_{\cdot a'} = c_a^{\cdot a'}$, dove con $c_a^{\cdot a'}$ s'indichi il reciproco

dell'elemento $c^a_{\cdot a'}$. Tenuto conto di ciò si trovano senza difficoltà le seguenti formule di trasformazione:

$$(32) \quad \begin{aligned} dy^a &= d\bar{y}^{a'} c^a_{\cdot a'} + \bar{y}^{a'} dc^a_{\cdot a'}, \\ \sigma_1^{ab} &= \bar{\sigma}_1^{a'b'} c^a_{\cdot a'} c^b_{\cdot b'} + c^a_{\cdot a'} dc^b_{\cdot b'} = \bar{\sigma}_1^{a'b'} c^a_{\cdot a'} c^b_{\cdot b'} - c^b_{\cdot b'} dc^a_{\cdot a'}, \end{aligned}$$

$$(33) \quad \delta y^a = \delta \bar{y}^{a'} c^a_{\cdot a'}.$$

La relazione (33) mostra che il differenziale δy^a si comporta, per le trasformazioni (12), come un tensore contravariante rispetto all'indice a . Si può trarne subito una verifica formale dell'invarianza delle forme differenziali $\tilde{\Omega}_p, \tilde{\Theta}_{p-1}$ (invarianza già assicurata a priori, come abbiamo detto, dalla definizione stessa delle forme inviluppo; n. 9). Infatti basta scrivere le predette forme così

$$(18') \quad \tilde{\Omega}_p = \frac{1}{p!} \varepsilon_{a_1 \dots a_p} \delta y^{a_1} \times \dots \times \delta y^{a_p},$$

$$(22') \quad \tilde{\Theta}_{p-1} = \frac{1}{p!} \varepsilon_{a_1 \dots a_p} y^{a_1} \delta y^{a_2} \times \dots \times \delta y^{a_p},$$

essendo $\varepsilon_{a_1 \dots a_p}$ il tensore numerico che vale $+1$ o -1 a seconda della parità o disparità della permutazione $a_1, \dots, a_p$ ⁽¹⁰⁾, e osservare che i prodotti esterni di tensori si comportano ancora come tensori.

Segnaliamo infine la forma differenziale di secondo grado nelle variabili $z^{p+1}, \dots, z^n$:

$$(34) \quad \tau_2^{ab} = d\sigma_1^{ab} - \sum_c \sigma_1^{ac} \times \sigma_1^{bc},$$

la quale si comporta anch'essa come un tensore rispetto agli indici a, b ⁽¹¹⁾. Invero, differenziando la (32), si ottiene facilmente la formula di trasformazione:

$$\tau_2^{ab} = \bar{\tau}_2^{a'b'} c^a_{\cdot a'} c^b_{\cdot b'}.$$

Si ha inoltre:

$$\tau_2^{ab} = -\tau_2^{ba}, \quad \tau_2^{aa} = 0.$$

Forme elementari invarianti di grado $p=1$ e $p=2$.

13. Come abbiamo avvertito da principio (n. 1), ci limitiamo da questo punto in poi a considerare soltanto i primi quattro valori di p .

Il caso $p=1$ è ovvio e rientra del resto, come si è detto, nel caso semplice del n. 6. Tuttavia anche il procedimento generale conduce naturalmente allo stesso risultato. Invero, poichè per $p=1$ il parallelismo W è integrabile (n. 8), risulta

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 = dy, \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 = f(s^2)dy, \quad \tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 = y,$$

⁽¹⁰⁾ Il tensore $\varepsilon_{a_1 \dots a_p}$ si comporta qui come un tensore assoluto in quanto lo jacobiano della trasformazione (12), per quanto concerne dy^a , vale $+1$.

⁽¹¹⁾ Si vede subito che la forma τ_2^{ab} ha per coefficienti i simboli di RIEMANN relativi al parallelismo W .

e, con qualunque scelta della funzione $g(s')$ tra gli integrali della (24) per $p=1$, si ottiene sempre $d[g\tilde{\Theta}_0]=f dy$, cioè la stessa forma elementare che dà il n. 6.

Passiamo al caso $p=2$. Tenuto conto delle (18), (22), (30), si trova immediatamente

$$(35) \quad \tilde{\Theta}_1 = \Theta_1 + s^2 \Phi_1,$$

$$(36) \quad \tilde{\Omega} = \Omega_2 + ds^2 \times \Phi_1,$$

ove Φ_1 è la forma di 1° grado regolare

$$(37) \quad \Phi_1 = -\frac{1}{2} \sigma_1^{12}.$$

La (36) può anche dedursi dalla (35) ricordando la (23) e la relazione analoga

$$(38) \quad \tilde{\Omega}_p = \frac{p}{2} \frac{1}{s^2} \delta s^2 \times \tilde{\Theta}_{p-1} = \frac{p}{2} \frac{1}{s^2} ds^2 \times \tilde{\Theta}_{p-1},$$

che si ottiene avuto riguardo all'identità (31).

Differenziando la (35) abbiamo

$$(39) \quad d\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Omega}_2 + s^2 d\Phi_1.$$

La precedente, tenuto conto dell'invarianza di $\tilde{\Theta}_1$ e di $\tilde{\Omega}_2$, mostra che anche la forma $d\Phi_1$ è invariante. Ciò può del resto verificarsi direttamente, perchè dalla (37) risulta, ricordando la (34),

$$d\Phi_1 = -\frac{1}{2} d\sigma_1^{12} = -\frac{1}{2} \tau_2^{12} = -\frac{1}{4} \varepsilon_{a_1 a_2} \tau_2^{a_1 a_2}.$$

Dato il carattere tensoriale rilevato per la forma $\tau_2^{a_1 a_2}$ (n. 12), si ha appunto l'invarianza della forma

$$(40) \quad \mathcal{T}_2 = d\Phi_1 = -\frac{1}{4} \varepsilon_{a_1 a_2} \tau_2^{a_1 a_2}.$$

Possiamo dunque scrivere la (39) anche così

$$(39') \quad d\tilde{\Theta}_1 = \tilde{\Omega}_2 + s^2 \mathcal{T}_2;$$

e, se $g(s^2)$ è un integrale dell'equazione differenziale (24) per $p=2$, si ha poi

$$(41) \quad \begin{aligned} d[g\tilde{\Theta}_1] &= \{s^2 g' + g\} \tilde{\Omega}_2 + s^2 g \mathcal{T}_2 \\ &= f \tilde{\Omega}_2 + s^2 g \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

Si scelga ora come funzione $g(s^2)$ la $g_1(s^2)$ espressa dalla (28) per $p=2$; nonostante la singolarità di $g_1(s^2)$ in $s^2=0$, il coefficiente $s^2 g_1(s^2) = \int_{\tau^2}^{s^2} f ds^2$, che appare nel secondo membro della (41), risulta regolare. Ne segue che la forma $d[g_1 \tilde{\Theta}_1]$ è regolare di classe v in tutto il tubo T_n , compresi i punti del ciclo Δ_{n-2} .

In base al n. 11, la forma

$$(42) \quad f(s^2)\tilde{\Omega}_2 + \left[\int_{r^2}^{s^2} f(s^2)ds^2 \right] \mathcal{C}_2$$

costituisce perciò la desiderata *forma elementare invariante di 2° grado e di classe v associata al ciclo Δ_{n-2}* .

Ha dunque risposta affermativa, per $p=2$, l'interrogativo del n. 10. Vedremo che la risposta non è la stessa per $p>2$, benchè possa ugualmente giungersi alla costruzione di forme elementari.

OSSERVAZIONE. - Una volta stabilita direttamente l'invarianza della forma $\mathcal{C}_2 = d\Phi_1$, si sarebbe potuto ottenere la forma elementare costruita anche scrivendone a priori l'espressione invariante (42), quindi verificando per essa le condizioni a), b), c), d), del n. 5. Ciò che può farsi agevolmente osservando che la integrabilità della (42) risulta anche differenziando la (36). Osservazioni analoghe potrebbero farsi nel seguito.

Forme elementari invarianti di grado $p=3$.

14. Le relazioni che per $p=3$ tengono luogo delle (35), (36), sono:

$$(43) \quad \tilde{\Theta}_2 = \Theta_2 + s^2\Phi_2 + ds^2 \times \Psi_1,$$

$$(44) \quad \tilde{\Omega}_3 = \Omega_3 + \frac{3}{2}ds^2 \times \Phi_2,$$

essendo Φ_2 , Ψ_1 forme regolari dei gradi rispettivamente indicati.

La (44) si deduce subito dalla (43), avuto riguardo alle relazioni generali (23) e (38). La deduzione della (43) non è invece così semplice come quella della sua analoga per $p=2$; per brevità ci limitiamo ad indicare soltanto le espressioni esplicite delle forme Φ_2 e Ψ_1 :

$$(45) \quad \Phi_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon_{a_1a_2a_3}\left[\sigma_1^{a_1a_2} \times dy^{a_3} + \frac{1}{2}\sigma_1^{a_1a_2} \times \sigma_1^{a_3b} y_b\right],$$

$$(46) \quad \Psi_1 = -\frac{1}{12}\varepsilon_{a_1a_2a_3}\sigma_1^{a_1a_2}y^{a_3}.$$

Posto

$$(47) \quad \Pi_2 = \Phi_2 + 2d\Psi_1,$$

si ha poi, ricordando la (34),

$$(48) \quad \Pi_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon_{a_1a_2a_3}\tau_2^{a_1a_2}y^{a_3}.$$

L'espressione (48), tenuto conto che la forma differenziale $\tau_2^{a_2}$ e le coordinate y^{a_3} si trasformano con carattere tensoriale per i cambiamenti di variabili (n. 12), ci assicura che Π_2 è una forma invariante.

Procediamo ora analogamente al caso $p=2$. Dalla (43), differenziando e avendo riguardo alle (44), (47), abbiamo

$$d\tilde{\Theta}_2 = \tilde{\Omega}_3 + s^3 d\left[\frac{1}{s} \Pi_2\right],$$

e, essendo $g(s^3)$ un integrale dell'equazione differenziale (24) per $p=3$,

$$\begin{aligned} d[g\tilde{\Theta}_2] &= \left\{ \frac{2}{3} s^2 g' + g \right\} \tilde{\Omega}_3 + s^3 g d\left[\frac{1}{s} \Pi_2\right] \\ &= f\tilde{\Omega}_3 + s^3 g d\left[\frac{1}{s} \Pi_2\right]. \end{aligned}$$

Scelta come funzione $g(s^2)$ la $g_1(s^2)$ espressa dalla (28) per $p=3$, il coefficiente $s^3 g_1$ risulta regolare in $s^2=0$, ma non è ivi regolare la forma $d\left[\frac{1}{s} \Pi_2\right]$.

Si constata dunque che il procedimento del n. 14 non conduce ora, almeno immediatamente, ad una forma elementare come per $p=2$.

Tuttavia si giunge lo stesso al fine desiderato se si considera il differenziale

$$(49) \quad d[g\tilde{\Theta}_2 - s^2 g \Pi_2] = f\tilde{\Omega}_3 - \frac{3}{2} f ds^2 \times \Pi_2.$$

Invero, tenuto conto dell'invarianza di Π_2 e delle proprietà della funzione $f(s^2)$, si conclude subito che la forma invariantivamente definita e regolare che appare a secondo membro della (49), costituisce effettivamente una forma elementare invariante di 3° grado associata al ciclo Δ_{n-3} .

Osserviamo che la forma elementare ora ottenuta non è l'unica forma elementare invariante costruibile, che si riduca sulle celle geodetiche Σ_3 alla forma $f\tilde{\Omega}_3 = \omega_3$, dalla quale siamo partiti (n. 6). Infatti, se si aggiunge alla (49) un differenziale esatto invariante del tipo

$$d[h(s^2)\Pi_2] = h' ds^2 \times \Pi_2 + h d\Pi_2,$$

con $h(s^2)$ funzione regolare nell'intervallo $(0, r^2)$ annullantesi in $s^2 = r^2$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $v+1$, si ottiene ancora ovviamente una forma che soddisfa le condizioni dette. Posto $h'(s^2) + \frac{3}{2} f(s^2) = f_1(s^2)$, si ha dunque la seguente generale forma elementare invariante di 3° grado è di classe v associata al ciclo Δ_{n-3} :

$$(50) \quad f\tilde{\Omega}_3 + f_1 ds^2 \times \Pi_2 + \left[\int_{r^2}^{s^2} \left(\frac{3}{2} f + f_1 \right) ds^2 \right] d\Pi_2,$$

dove $f_1(s^2)$ una funzione arbitraria di classe v nell'intervallo $(0, r^2)$, soddisfacente alla condizione di annullarsi per $s^2 = r^2$ insieme alle sue derivate fino all'ordine v .

Forme elementari invarianti di grado $p = 4$.

15. Per $p = 4$ si ottengono le relazioni seguenti, sulla cui deduzione non ci fermiamo ⁽¹²⁾:

$$(51) \quad \tilde{\Theta}_3 = \Theta_3 + s^2 \Phi_3 + ds^2 \times \Psi_2,$$

$$(52) \quad \tilde{\Omega}_4 = \Omega_4 + 2ds^2 \times \Phi_3,$$

dove Φ_3 , Ψ_2 sono le forme regolari espresse dalle:

$$(53) \quad \Phi_3 = -\frac{1}{16} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \left[\sigma_1^{a_1 a_2} \times d(y^{a_3}, y^{a_4}) + \sigma_1^{a_1 a} \times \sigma_1^{a_3 b} y_b \times dy^{a_4} + \frac{1}{3} \sigma_1^{a_1 a_2} \times \sigma_1^{a_3 b} \times \sigma_1^{a_4 c} y_b y_c \right],$$

$$(54) \quad \Psi_2 = -\frac{1}{16} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \left[\sigma_1^{a_1 a_2} \times y^{a_3} dy^{a_4} - \frac{1}{2} \sigma_1^{a_1 a_2} \times \sigma_1^{a_3 b} y_b y^{a_4} \right].$$

Si trova poi, per la forma

$$(55) \quad \Pi_3 = \Phi_3 + d\Psi_2,$$

la decomposizione

$$(56) \quad \Pi_3 = \overset{\circ}{\Pi}_3 + s^2 \overset{*}{\Pi}_3,$$

dove:

$$(57) \quad \overset{\circ}{\Pi}_3 = -\frac{1}{16} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \tau_2^{a_1 a_2} \times y^{a_3} \delta y^{a_4},$$

$$(58) \quad \overset{*}{\Pi}_3 = -\frac{1}{64} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \left[\tau_2^{a_1 a_2} \times \sigma_1^{a_3 a_4} + \frac{1}{3} \sigma_1^{a_1 a_2} \times \sum_b \sigma_1^{a_3 b} \times \sigma_1^{a_4 b} \right].$$

La (57) mostra senz'altro l'invarianza di $\overset{\circ}{\Pi}_3$. Non è lo stesso di $\overset{*}{\Pi}_3$; perciò la forma Π_3 non è invariante, contrariamente a quanto avviene per la forma analoga Π_2 nel caso $p = 3$ (n. 15). Ma, se si considera il differenziale di $\overset{*}{\Pi}_3$ si trova per esso la *forma invariante*:

$$(59) \quad \mathcal{T}_4 = d\overset{*}{\Pi}_3 = -\frac{1}{64} \varepsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4} \tau_2^{a_1 a_2} \times \tau_2^{a_3 a_4}.$$

Differenziamo ora la (51). Avuto riguardo alle (52), (55), si ottiene:

$$(60) \quad d\tilde{\Theta}_3 = \tilde{\Omega}_4 + s^4 d\left[\frac{1}{s^2} \Pi_3\right].$$

⁽¹²⁾ La (52) si deduce al solito immediatamente dalla (51) ricordando la (38); ma la deduzione delle (51), (53), (54) richiede sviluppi un po' complessi.

Se poi $g_1(s^2)$ è al solito l'integrale dell'equazione differenziale (24) espresso dalla (28) per $p=4$, risulta, in base alle (38), (56), (59), (60):

$$\begin{aligned} d[g_1\tilde{\Theta}_3 - s^2g_1\overset{\circ}{\Pi}_3] &= \left\{ \frac{1}{2}s^2g'_1 + g_1 \right\} \tilde{\Omega}_4 - \{s^2g'_1 + 2g_1\} ds^2 \times \overset{\circ}{\Pi}_3 + g_1s^4d\overset{\circ}{\Pi}_3 \\ (61) \qquad &= f\tilde{\Omega}_4 - 2f ds^2 \times \overset{\circ}{\Pi}_3 + 2 \left[\int_{r^2}^{s^2} fs^2 ds^2 \right] \mathcal{T}_4. \end{aligned}$$

Si è ottenuta così una forma invariante regolare nel tubo T_n che costituisce una forma elementare associata al ciclo Δ_{n-4} . Ma, come già per $p=3$, tale forma non è unica. Se ne ottiene una più generale aggiungendo alla (61) il differenziale esatto invariante $d[h\overset{\circ}{\Pi}_3]$, dove la funzione $h(s^2)$ è dello stesso tipo considerato al n. 15. Posto qui: $h'(s^2) - 2f(s^2) = f_1(s^2)$, si ha allora la seguente *forma elementare invariante di 4° grado e classe v associata al ciclo Δ_{n-4}* :

$$f\tilde{\Omega}_4 + f_1 ds^2 \times \overset{\circ}{\Pi}_3 + \left[\int_{r^2}^{s^2} (2f + f_1) ds^2 \right] d\overset{\circ}{\Pi}_3 + 2 \left[\int_{r^2}^{s^2} fs^2 ds^2 \right] \mathcal{T}_4,$$

dove $f_1(s^2)$ è una funzione arbitraria soddisfacente alle stesse condizioni indicate alla fine del n. 15.

Discussione del caso semplice.

16. Abbiamo già detto (n. 6), cosa intendiamo per « caso semplice » ed abbiamo mostrato che, quand'esso si verifica, il tubo T_n costruito intorno a Δ_{n-p} può descriversi mediante le coordinate (y^a, z^x) , delle quali le y^a hanno validità in grande, mentre le z^x hanno validità locale.

Le equazioni $y^a = 0$ ($a = 1, \dots, p$) rappresentano Δ_{n-p} , e le $y^a = c^a$, essendo c^a costanti abbastanza prossime a zero, un ciclo $\bar{\Delta}_{n-p}$ prossimo a Δ_{n-p} , che può pensarsi come deformato di Δ_{n-p} . Due cicli $\bar{\Delta}_{n-p}$ diversi non hanno alcun punto comune fra loro, nè con Δ_{n-p} . Fissata una Σ_p e un punto $(c^1, \dots, c^p)$ su di essa, resta individuato un ciclo $\bar{\Delta}_{n-p}$ per il punto.

Possiamo dunque dire che, nel caso semplice, è soddisfatta la condizione seguente:

(S) Ogni ciclo Δ_{n-p} della base considerata in M_n può deformarsi in ∞^p modi, ed esiste qualche p -cella Σ_p incontrante semplicemente Δ_{n-p} in un punto P , in guisa che per ogni punto Q di Σ_p passa un ciclo $\bar{\Delta}_{n-p}(Q)$ deformato, due cicli distinti essendo privi di punti comuni. Quando Q tende a P , $\bar{\Delta}_{n-p}(Q)$ tende a Δ_{n-p} .

Nella (S) non v'è traccia della metrica introdotta in M_n . Ora, in una recente comunicazione [4], avevo già mostrato che, quando sia soddisfatta la

condizione (S), può conseguirsi il teorema di CARTAN-DE RHAM in modo pressochè immediato e senza l'uso di una metrica su M_n ⁽¹³⁾.

Allorchè la varietà M_n sia una superficie o una varietà 3-dimensionale, si può sempre soddisfare alla condizione (S), giacchè è allora di necessità $n = 1$ o $p = n - 1$, casi che abbiamo già segnalati al n. 6. Si vede anche subito che può soddisfarsi (S) quando M_n sia prodotto topologico di varietà sulle quali la (S) sia già soddisfatta. Basta invero assumere come cicli fondamentali in M_n quelli che, nell'inseguire il prodotto topologico, provengono dai cicli fondamentali delle varietà fattori del prodotto che soddisfanno ad (S).

In [4] avevo anche osservato che la condizione che M_n sia orientabile è necessaria perchè si possa soddisfare (S). D'altronde l'orientabilità di M_n è condizione essenziale per il teorema di CARTAN-DE RHAM che ci interessa. Ora si potrebbe pensare che l'orientabilità di M_n fosse anche sufficiente per la validità di (S). Ed anzi, io avevo espresso la presunzione intuitiva che così fosse.

Ma B. SEGRE, in occasione della mia citata comunicazione, ha per il primo affacciato dubbi in proposito esponendo talune considerazioni tendenti a mostrare come improbabile l'anzidetta presunzione. In seguito, grazie ad una semplice osservazione di G. ZAPPA, ho potuto dare alcuni esempi in contrario, che passo ad esporre.

17. L'osservazione di G. ZAPPA è questa. Sopra una superficie algebrica, che, considerata dal punto di vista topologico, è una varietà 4-dimensionale orientabile, esistono 2-cicli orientabili i quali hanno un indice di KRONECKER d'intersezione con se stessi diverso da zero. Sono tali p. es. i 2-cicli che rappresentano le curve algebriche sezioni piane della superficie (pensata nello spazio ordinario) in quanto l'indice di KRONECKER relativo uguaglia, com'è noto, l'ordine della superficie. Uno di questi cicli, Δ_2 , non è perciò suscettibile di venir deformato in un ciclo, $\bar{\Delta}_2$, privo di intersezioni con Δ_2 , chè altrimenti sarebbe $(\Delta_2, \Delta_2) = (\Delta_2, \bar{\Delta}_2) = 0$.

Se ne traggono immediatamente gli esempi che c'interessano. Il più semplice è già offerto dalla riemanniana del piano proiettivo complesso. Infatti su tale varietà non v'è che un sol ciclo 2-dimensionale indipendente, Δ_2 , che è omologo ad una retta del piano, ond'è $(\Delta_2, \Delta_2) = 1$, *comunque si scelga il ciclo base* Δ_2 .

Lo stesso ragionamento è valido per la riemanniana M_{4m} di uno spazio proiettivo complesso S_{2m} , nei riguardi della base $2m$ -dimensionale che è costituita da un sol ciclo Δ_{2m} omologo all'immagine di un S_m di S_{2m} .

⁽¹³⁾ Il ragionamento allora fatto è sostanzialmente lo stesso di quello del n. 6, Oss. 2^a. La metrica di M_n non ha invero alcuna funzione essenziale in questo caso. Se ne prescinde subito costruendo innanzi tutto un tubo T_n intorno a Δ_{n-p} come luogo dei cicli $\bar{\Delta}_{n-p}(Q)$ al variare di Q sulla cella Σ_p . Se poi $y^1, \dots, y^p$ sono coordinate *qualunque* in Σ_p , un punto variabile in T_n può individuarsi mediante le coordinate (y^a, z^a) , delle quali le z^a hanno al solito validità locale. Il ragionamento prosegue poi come nel passo citato del n. 6.

Se si considera invece una superficie quadrica complessa la cui riemanniana M_4 , com'è ben noto, è equivalente al prodotto topologico di due superficie sferiche reali Σ' , Σ'' , si vede che può assumersi in M_4 una base 2-dimensionale costituita sia da cicli che soddisfanno la condizione (S), sia da cicli che non la soddisfanno.

Una base del primo tipo è data dai 2-cicli $\Delta^1 = \Sigma' \times P''$, $\Delta^2 = P' \times \Sigma''$ essendo P' , P'' punti di Σ' , Σ'' . Invero, basta per soddisfare (S) assumere come cicli deformati di Δ^1 , Δ^2 , i cicli $\bar{\Delta}^1 = \Sigma' \times \bar{P}''$, $\bar{\Delta}^2 = \bar{P}' \times \Sigma''$, dove $\bar{P}'$, $\bar{P}''$ siano punti degli intorni di P' , P'' su Σ' , Σ'' .

Una base del secondo tipo è invece quella costituita dai cicli Δ^1 , $\Delta^1 + \Delta^2$. Infatti, con convenienti orientazioni di Σ' , Σ'' , $\Sigma' \times \Sigma''$, si ha immediatamente

$$(\Delta^1, \Delta^1) = (\Delta^2, \Delta^2) = 0, \quad (\Delta^1, \Delta^2) = (\Delta^2, \Delta^1) = 1.$$

Il ciclo $\Delta^1 + \Delta^2$ non soddisfa allora (S), poichè, tenuto conto delle precedenti, risulta

$$(\Delta^1 + \Delta^2, \Delta^1 + \Delta^2) = 2(\Delta^1, \Delta^2) = 2.$$

Non v'è difficoltà a sostituire, se si vuole, il ciclo riducibile $\Delta^1 + \Delta^2$ con un ciclo irriducibile, p. es. l'immagine di una conica della quadrica rappresentata da $\Sigma' \times \Sigma''$.

Forme invarianti di Wirtinger.

18. Sia $S_m(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m)$ lo spazio proiettivo complesso m -dimensionale, e ξ^k coordinate omogenee in esso. Ricordiamo che entro la varietà reale M_{2m} immagine di S_m , può introdursi (MANOURY, FUBINI, STUDY) una metrica riemanniana invariante rispetto al gruppo delle omografie di S_m in sè che lascia fissa la forma quadratica hermitiana

$$H = \xi^0 \bar{\xi}^0 + \xi^1 \bar{\xi}^1 + \dots + \xi^m \bar{\xi}^m,$$

essendo $\bar{\xi}^k$ il complesso coniugato di ξ^k .

Tale metrica può scriversi nel modo semplice, indicato da KAEHLER,

$$ds^2 = 4 \frac{\partial^2 \log H}{\partial \xi^h \partial \bar{\xi}^k} d\xi^h d\bar{\xi}^k,$$

con la solita convenzione di somma.

Siccome i numeri di BETTI di dimensione dispari della varietà M_{2m} sono tutti nulli e quelli di dimensione pari valgono 1 (VAN DER WAERDEN), non v'è da considerare in M_{2m} altro che una forma differenziale indipendente che risolve il problema esistenziale di CARTAN-DE RHAM per ogni valore pari del grado p . È noto che si possono assumere come forme risolventi le forme invarianti considerate da WIRTINGER [9]:

$$\omega_2 = 2i \frac{\partial^2 \log H}{\partial \xi^h \partial \bar{\xi}^k} d(\xi^h, \bar{\xi}^k), \quad \omega_4 = \frac{1}{2!} \omega_2 \times \omega_2 = \frac{1}{2!} (\omega_2)^2, \dots, \quad \omega_{2(m-1)} = \frac{1}{(m-1)!} (\omega_2)^{m-1}.$$

Come abbiamo detto al n. 1, riteniamo che le forme di WIRTINGER rientrano nella classe delle forme elementari invarianti costruite nelle pagine precedenti (per $p \leq 4$). In realtà abbiamo per il momento verificato questa affermazione soltanto per $p=2$, $m=2$ e $p=4$, $m=6$. Ci limitiamo perciò ad accennarne molto brevemente.

Posto $p=2q$, come unico ciclo base del gruppo di BETTI di dimensione $2m-2q$ in M_{2m} , si assuma il ciclo $\Delta_{2m-2q} = M_{2m-2q}$ immagine di uno spazio lineare S_{m-q} di S_m . Si dimostra allora, innanzi tutto, che le varietà geodetiche ortogonali a Δ_{2m-2q} sono le immagini M_{2q} degli S_q di una stella che ha per sostegno un S_{q-1} sghembo con il fissato S_{m-q} . La cella geodetica $\Sigma_{2q}(P)$ con centro in un punto P di Δ_{2m-2q} risulta perciò contenuta in una tale M_{2q} . Se ora si assume il raggio r delle Σ_{2q} uguale alla massima distanza, π , di due punti di M_{2m} , ogni Σ_{2q} viene ad esaurire la corrispondente M_{2q} , e il tubo T_{2m} descritto dalle $\Sigma_{2q}(P)$ al variare di P su Δ_{2m-2q} esaurisce l'intera varietà M_{2m} . Il contorno di T_{2m} si ripiega su se stesso e si abbassa di dimensione, riducendosi alla varietà M_{2q-2} immagine del predetto S_{q-1} , e perdendo così il carattere di frontiera.

Con una conveniente scelta delle funzioni arbitrarie che entrano nella espressione della forma elementare invariante associata a Δ_{2m-2q} e definita nel tubo $T_{2m} = M_{2m}$, si ottiene appunto la forma di WIRTINGER ω_{2q} (a meno di una inessenziale costante moltiplicativa dipendente dalla condizione vincolativa d), che si è assunta nella definizione di forma elementare; n. 5).

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. CARTAN, « Comptes rendus », 187 (1928), pag. 196.
- [2] W. V. D. HODGE, *The Theory and Appl. of Harmonic Integrals*, London (1941).
- [3] S. LEFSCHETZ, *Topology*, New York (1930).
- [4] E. MARTINELLI, Comunicazione al III Congresso U.M.I. in Pisa (1948), riprodotta in « Bollettino U.M.I. », s. 3^a, 4 (1949).
- [5] G. DE RHAM, « Journal Math. pures et appl. », 10 (1931), pag. 115.
- [6] F. SEVERI, *Lezioni di analisi*, Bologna (1942), Vol. II.
- [7] H. WEYL, « Math. Zeitschrift », 12 (1922), pag. 154.
- [8] H. WHITNEY, « Annals of Math. », 37 (1936), pag. 645.
- [9] W. WIRTINGER, « Monatshefte für Math. u. Phys. », 44 (1936), pag. 343.