Sobre la ecuación linealizada del vuelo supersónico.

Memoria di JULIO REY PASTOR (a Buenos Aires).

Sunto. - *Mediante integrales singulares (LEBESGUE-HOBSON) se demuestra rigurosamente la conocida solución del caso simétrico en el vuelo supersónico y se aborda el caso antisimétrico, todavía no resuelto satisfactoriamente. Se determina la zona no perturbada detrás del borde de salida del ala cilíndrica finita.*

1. Planteo del problema. — Si el movimiento tiene la dirección $-x$, elegido el borde de ataque como eje y , o sea si la corriente respecto del ala tiene la dirección $+x$ con velocidad v_i respecto del infinito, y velocidad absoluta v , función del punto $P(x, y, z)$ con las hipótesis de irrotacionalidad, y viscosidad nula, existe un potencial Φ del cual deriva el vector velocidad (Φ_x, Φ_y, Φ_z) y que satisface a una ecuación no lineal de 2º orden. Suponiendo que estos vectores difieren muy poco del vector constante $(v_i, 0, 0)$ conviene introducir el potencial de *perturbación* $\varphi = \Phi - v_i x$, cuyas componentes $\varphi_x = \Phi_x - v_i$, $\varphi_y = \Phi_y$, $\varphi_z = \Phi_z$ deben ser suficientemente pequeñas para poder prescindir de sus productos y hacer lineal la ecuación. Todavía no se ha estudiado la cuantía del error satisfactoriamente, pero lo cierto es que tales componentes son tanto menores cuanto más pequeña la pendiente del ala (que debe ser sensiblemente plana y muy poco inclinada) y estas condiciones que hacen posible la integración, coinciden afortunadamente con las que impone la realización física del vuelo supersónico.

La ecuación lineal a que satisfacen tanto el potencial φ como el Φ es:

$$(M^2 - 1)\varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz} \quad (M \text{ número de MACH, función de } v_i)$$

y por afinidad, multiplicando la coordenada x , resulta la ecuación clásica:

$$(1) \quad L(u) = u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0.$$

Las superficies superior e inferior del ala tienen ecuaciones $z = f^+(x, y)$, $z = f^-(x, y)$ sobre el recinto τ planta del ala, con la sola condición de ser muy pequeñas las derivadas f_x, f_y , para la validez de la ecuación lineal, siendo $f^+ \geq f^-$ en τ y $f^+ = f^-$ en el contorno.

Las condiciones iniciales impuestas por el problema físico son éstas

a) En el conoide Γ_0 de MACH, envolvente de los conos de semiapertura $\pi/2$ con vértices en el borde de ataque y dirigidos hacia atrás debe ser $\varphi = 0$.

b) En las dos caras del ala debe verificarse por la condición de tangencia: $\varphi_z = (v_i + \varphi_x)$, $f_x + \varphi_y f_y \approx v_i f_x$ dentro del segundo orden de aproximación

y refiriendo cada punto del ala a su proyección sobre el plano $z = 0$, las condiciones impuestas sobre las dos caras del recinto plano τ proyección horizontal del ala son:

$$\varphi_z^+(x, y, 0^+) = v_i f_x^+(x, y) \quad \varphi_z^-(x, y, 0^-) = -v_i f_x^-(x, y).$$

La resolución general del problema mixto se reduce a la de dos tipos especiales: *Problema simétrico*: (Ala simétrica sin inclinación). Sobre τ se verifica $f^+(x, y) = -f^-(x, y)$, $\varphi_z^+ = \varphi_z^-$; y por la simetría de las condiciones a) y b) debe ser dentro de Γ_0 : $\varphi(x, y, -z) = \varphi(x, y, z)$. *Problema antisimétrico*: (Ala sin espesor). Sobre τ es $f^-(x, y) = f^+(x, y)$, $\varphi_z^+ = -\varphi_z^-$ y por la antisimetría de las condiciones iniciales debe ser: $\varphi(x, y, -z) = -\varphi(x, y, z)$.

En el caso general, cualesquiera que sean las superficies f^+ e f^- puede escribirse:

$$\begin{aligned} f^+ &= F^+ + G^+ & F^+ &= F^- = \frac{1}{2}(f^+ + f^-) \\ f^- &= F^- + G^- & G^+ &= -G^- = \frac{1}{2}(f^+ - f^-) \end{aligned}$$

y la solución del problema general se obtiene sumando las soluciones del problema simétrico (G) y del antisimétrico (F).

Mediante imágenes hidráulicas, acústicas, etc, se ha llegado a la solución del problema simétrico expresada por la integral (2) y el método de VOLTERRA demuestra que no puede haber otra, pero falta demostrar rigurosamente que ésta cumple las condiciones iniciales y satisface a la ecuación; la dada por GUNN mediante método operacional, no es satisfactoria. La teoría de integrales singulares nos permite llenar esta laguna. La solución del problema antisimétrico puede hacerse también rigurosamente para alas cilíndricas, generalizando así la solución bien conocida del caso bidimensional (longitud infinita); y así logramos delimitar la zona no perturbada para el caso de ala finita, habiéndonos referido por brevedad al caso simétrico. En cuanto a las diversas soluciones que hemos obtenido para el problema general antisimétrico, así como la dada por el método de VOLTERRA y por algún otro ensayo, ninguna es satisfactoria y todas exigen más profundo análisis. En una memoria extensa que aparecerá en «Collectanea Mathematica» nos ocuparemos de este problema y desarrollaremos las conclusiones resumidas en esta breve nota.

2. Problema simétrico. — Partiendo de la solución elemental $(x^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ correlativa de la $1/r$ del potencial newtoniano, se forma la familia de soluciones elementales $[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - z^2]^{-\frac{1}{2}}$ válidas para todo $(\xi, \eta, 0)$ dentro del cono de vértice $P(x, y, z)$, dirigido hacia adelante, es decir, sobre el recinto D interceptado sobre τ por ese cono: $(x - \xi)^2 \geq (y - \eta)^2 + z^2$. La inte-

gral definida sobre ese segmento hiperbólico D :

$$(2) \quad \varphi(x, y, z) = \iint_D \frac{\lambda(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - z^2}}$$

es convergente, pero no es aplicable la regla de derivación bajo el signo.

Como tampoco es eficaz la regla de DARBOUX que considera la integral como parte real de una integral compleja sobre recinto invariable y también presenta dificultades el método de « parte finita » de HADAMARD, nos parece lo más conveniente aplicar el teorema fundamental de las integrales singulares (v. HOBSON, vol. II), previo este cambio de variables:

$$u^2 = (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 \quad v = (x - \xi) + (y - \eta)$$

que transforma D en segmento circular $u^2 + (v - x)^2 \leq x^2$, $u \geq z$.

La integral del núcleo transformado se calcula muy elementalmente:

$$(3) \quad \iint_D \frac{du \cdot dv}{\sqrt{u^2 - z^2}} \frac{u}{v} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dw}{w + x} \sqrt{\alpha^2 - w^2} \quad (\alpha^2 = x^2 - z^2)$$

y racionalizada se llega al valor $\pi(x - |z|)$.

Es obvio que el valor de esta integral se puede calcular también directamente sin pasar a las variables u, v , pero así se logra reducir las dos líneas singulares que pasan por el punto (x, y) al solo punto $u = v = 0$; y este cambio será útil en otros problemas conexos.

Tanto para la expresión (2) del potencial simétrico, como para el antisimétrico, logramos derivar las expresiones del tipo $\iint_D \lambda(u, v) k(u, v, z) du \cdot dv$ formando el cociente incremental y calculando el límite de la integral análoga, de núcleo $K = \frac{\Delta k}{|z|}$. En el problema simétrico, la integral de este núcleo según el cálculo anterior, vale:

$$(4) \quad \iint_D K(u, v, z) du \cdot dv = -\pi$$

y sólo falta ver que la integral sobre todo dominio que excluya el punto singular tiende a 0 para $z \rightarrow 0$. El mismo cálculo realizado para la integración (3) permite evaluar la integral en el intervalo (h, α) siendo fijo el extremo inferior: $|h| < x$. Poniendo $\sqrt{\alpha^2 - w^2} = \alpha - wt$ resulta:

$$\left[2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} t - 2z \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x t + \alpha}{z} + \frac{2\alpha}{1 + t^2} \right]_{t_0}^1$$

con extremo inferior $t_0 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - h^2}}{h} = t_1 + o(z)$, $t_1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - h^2}}{h}$.

La diferencia de integrales (3) en intervalo (h, α) resulta ser $o(z)$ con evaluaciones muy elementales y por tanto la integral (4) sobre el dominio parcial D , deducido del D por la acotación $v > x - h$, tiende a 0 para $z \rightarrow 0$.

Cumplidas así las dos condiciones del teorema fundamental de las integrales singulares resulta $\varphi_s(x, y, 0) = \pi\lambda(x, y)$. Siendo conocida esta función, por la condición inicial (b), e igual, dentro del 2º orden de aproximación, a $vif_\infty(x, y)$ basta sustituir en (2) $\lambda(\xi, \eta) = -\frac{v_i}{\pi} f'_\xi(\xi, \eta)$ para llegar rigurosamente a la clásica fórmula que resuelve en general el problema simétrico.

Conviene observar, que el valor del potencial φ , y por tanto del vector velocidad, en cada punto interior al conoide Γ_0 , no depende de toda el ala, sino solamente de la parte de ella interior al cono anterior de MACH con vértice en aquel punto. Esta circunstancia, especialmente en el caso de ala cilíndrica, nos permitirá demostrar la existencia de una zona más o menos extensa detrás del borde de salida, en que el régimen es uniforme, como veremos al final de esta nota.

3. Caso de ala cilíndrica. — La demostración de la fórmula (2) que resuelve el problema simétrico, es inmediata cuando el ala es cilíndrica, y generaliza el resultado bien conocido del caso bidimensional (ala cilíndrica infinita) en que por conocerse la integral general de la ecuación de D'ALEMBERT, la solución resulta ser $\varphi = -vif(x - |z|)$ en el intervalo $(0, \alpha)$, siendo α la anchura del ala. En efecto, la integración de (2) respecto de η es inmediata, y se llega a:

$$(4) \quad \varphi(x, y, z) = \iint_D \frac{\lambda(\xi, \eta) d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - z^2}} = \pi \int_0^{x-|z|} \lambda(\xi) d\xi$$

para satisfacer a la condición (b) basta poner $\lambda(\xi) = -\frac{v_i}{\pi} f'(\xi)$ y se llega a aquella misma solución, mientras que para $x - |z| \geq \alpha$ resulta $\varphi = 0$, por ser $f(0) = f(\alpha) = 0$.

Si P está dentro de Γ_0 , pero no está dentro del conoide *reducido* Γ'_0 , que se deduce suprimiendo los conos cuyos vértices son las puntas Q'_0 y Q''_0 del ala subsiste la fórmula (2), pero su integral es más complicada, debiendo distinguirse varios casos. Si el cono de P contiene las puntas Q'_0 y Q'_1 de la derecha, anterior y posterior resulta integrando por partes:

$$(5) \quad \varphi = \frac{v_i(l - \xi)}{\pi} \int_0^\alpha f(\xi) \frac{x - \xi}{[(x - \xi)^2 - z^2] \sqrt{(x - \xi)^2 - (l - \gamma)^2 - z^2}} d\xi$$

siendo α la anchura y $2l$ la envergadura del ala. Análogas fórmulas resultan cuando el cono de P contiene las puntas de la izquierda Q''_0 y Q''_1 , o bien contiene solamente una punta, o bien tres, o las cuatro.

Para el problema antisimétrico elegiremos un núcleo impar, resultando satisfactoria la fórmula:

$$(6) \quad \varphi = \iint_D \mu'(\xi) \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{z}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} d\xi \cdot d\eta$$

que integrada respecto de η y calculada después la integral singular que resulta dividiendo por z , conduce a este resultado: $\varphi_z(x, y, 0) = \pi\mu(0) - \pi\mu'(x)$.

Para lograr de acuerdo con la condición (b) que resulte $v_{if}'(x)$ basta adoptar por tanto la expresión:

$$\varphi = \frac{-v_i}{n} \iint_D f''(\xi) \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{z}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} d\xi \cdot d\eta - (\operatorname{sg} z) v_{if}'(0)(x - |z|)$$

habiéndose introducido el sumando x , para lograr la anulación de φ sobre los planos $x = \pm z$,

4. Zona no perturbada. — El hecho, previsto por la integración de la ecuación lineal del problema bidimensional, y comprobado experimentalmente, en alas muy alargadas, de que la perturbación del campo vectorial uniforme queda confinada a la región situada entro el conoide de la arista de ataque, formado por dos planos y el engendrado por la arista de salida, formado por otros dos planos paralelos, subsistiendo la uniformidad del campo detrás de este segundo conoide, hace sospechar que en el caso de ala rectangular de envergadura cualquiera $2l$, la perturbación no llenará todo el conoide Γ_0 de ataque y quedará una zona más o menos amplia, detrás de la arista de salida en que el régimen seguirá siendo uniforme.

Este problema tridimensional es más complicado que el de ala cilíndrica infinita, por no disponer de la integral general de la ecuación en forma sencilla, como acontecía en aquel problema plano. Sin embargo la solución explícita (2) para el caso simétrico, nos permite llegar a conclusión muy sencilla, delimitando la zona no perturbada, cuya existencia acusan los experimentos en túnel, sin precisar su extensión. La comprobación de nuestras conclusiones, aunque sólo sea para el caso de ala cilíndrica, afianzaría la validez de la teoría lineal, mientras que un desacuerdo notable obligaría a revisarla, para delimitar su alcance.

Refiriéndonos por brevedad al tipo de ala cilíndrica finita, la integración (4) cuando el punto P es interior al conoide de salida Γ_1 y al conoide reducido Γ_0 , exige adoptar el intervalo de integración $(0, a)$ y resulta $f(a) - f(0)$, luego el campo de velocidades es uniforme.

Las condiciones analíticas necesarias para la validez de este cálculo son

$$1) \quad \sqrt{x^2 - z^2} \leq l - |y| \quad 2) \quad x - z \geq a$$

la primera expresa que los extremos Q_0 , Q''_0 del borde de ataque no son interiores al cono característico de vértice P y por tanto el intervalo de integra-

ción en η para cada ξ es toda la cuerda interior al cono. Esto se verifica para todo $0 \leq \xi \leq a$, en virtud de la condición 2).

La condición 1) equivale a estas dos:

$$1') \quad x^2 - (y - l)^2 - z^2 \leq 0 \quad 2') \quad x^2 - (y + l)^2 - z^2 \leq 0$$

que significan: el punto P no es interior a ninguno de los dos conos de MACH de vértices Q' y Q'' , puntas del borde de ataque.

Queda así delimitada la zona de validez del cálculo anterior, en la cual es $\varphi = 0$. Suponiendo, como suele acontecer, $l > a$, esta zona no perturbada es una región conexa, simétrica respecto del plano horizontal, en forma de cuña parcial del diedro de MACH engendrado por la recta del borde de salida, con una arista de longitud $2(l - a)$, parte de este borde de salida; y tiene dos puntos cuspidales simétricos respecto del plano horizontal, situados en los citados planos de MACH; puntos cuspidales cuyas coordenadas son:

$$\left(\frac{b^2 + a^2}{2a}, 0; \pm \frac{b^2 - a^2}{2a} \right).$$

Es claro que al pasar de la ecuación simplificada (1) a la ecuación lineal de coeficiente $(M^2 - 1)$ la abertura de los conos (ángulo de MACH) disminuye al crecer M , y la zona no perturbada se prolonga hacia atrás; por otra parte, la anchura de esta zona crece con la envergadura l , de modo tal, que para todo M , tiende hacia el diedro posterior de MACH, cuyos puntos van quedando todos en esa zona no perturbada, para $l \rightarrow \infty$.