Le coordinate intrinseche e l'integrazione delle equazioni della meccanica dei continui.

FRANCA GRAIFF (Milano) (*)

Sunto. - Dopo aver definito le coordinate intrinseche in una generica varietà riemanniana viene costruita una variazione del tensore fondamentale che lascia invariate le coordinate stesse. Viene quindi dimostrato che la conoscenza di questa deformazione rende possibile la costruzione di un tensore doppio simmetrico avente data divergenza: cioè fornisce un integrale particolare delle equazioni della statica dei continui comunque curvi a due e tre dimensioni, in presenza di forze di campo.

Viene inoltre mostrato che tale integrale particolare serve per costruire l'integrale generale delle equazioni stesse, e delle analoghe in assenza di forze di campo. Si può ottenere così anche l'integrale generale delle equazioni della dinamica dei continui negli spazi-tempo della Relatività generale.

Introduzione.

Le equazioni indefinite:

$$(a) \quad q_{ik}{}^{,k} = F_i$$

$$(b) \quad p_{ik}{}^{,k} = 0$$

sono fondamentali nella meccanica dei continui. Esse sono infatti le condizioni di equilibrio di un continuo, comunque curvo, a due e tre dimensioni in assenza di sollecitazione attiva esterna (b), o soggetto ad una forza di campo F (a): p_{ik} e q_{ik} sono i corrispondenti tensori degli sforzi. Nello spazio-tempo rappresentato da un'opportuna varietà riemanniana a quattro dimensioni, le (b) sono le equazioni di moto di un continuo: p_{ik} ne è il tensore energetico che compendia la distribuzione di materia ed energia.

Il problema della loro integrazione è strettamente legato alle condizioni di compatibilità delle:

$$(c) \quad v_{ik} = s_{i|k} + s_{k|i}$$

nelle quali il vettore spostamento s sia considerato incognito.

(*) Entrata in Redazione il 19 aprile 1971.

Dato il carattere tensoriale delle tre equazioni (a), (b), (c), non esiste differenza formale tra il caso degli spazi a curvatura nulla o costante e quello delle varietà comunque curve.

Per varietà a curvatura nulla o costante, la soluzione delle (b) e le condizioni di compatibilità delle (c) sono note da tempo: esse sono il frutto di molti lavori, tra i quali, fondamentali, quelli di AIRY, ST. VENANT, MAXWELL, MORERA, BELTRAMI, FINZI.

Per varietà a due dimensioni comunque curve, FINZI aveva già dato le condizioni di compatibilità delle (c); io ho poi ripreso il problema completandolo ed indicando il metodo per risolverlo nel caso di varietà a tre e quattro dimensioni.

Ho anche già trattato il problema dell'equilibrio, in assenza di sollecitazione attiva esterna, affrontando singolarmente i vari casi: di superfici curve, di varietà a tre e quattro dimensioni.

Qui riprendo sistematicamente la questione per esporre un metodo generale di trattare i problemi dell'equilibrio (anche in presenza di forze di campo) e della congruenza in varietà generali riemanniane; metto in evidenza un profondo divario di comportamento tra le varietà a curvatura nulla o costante e varietà comunque curve; per queste ultime, ad esempio, la ricerca delle condizioni di compatibilità delle (c) deve essere preceduta dalla ricerca dello eventuale vettore spostamento s , che, se esiste, è unico; mentre la soluzione delle (b) deve essere preceduta, implicitamente o esplicitamente, dalla ricerca di un integrale particolare delle (a).

Questo divario di comportamento è dovuto essenzialmente al fatto che le varietà riemanniane generiche non ammettono spostamenti rigidi in sé: è quindi sempre possibile scegliere, come coordinate, degli invarianti intrinseci costruiti con il tensore di curvatura, cioè con il tensore fondamentale e con le sue derivate ordinarie. In tali sistemi di coordinate ("intrinseche"), le componenti covarianti e controvarianti di vettori e tensori risultano degli invarianti, e come tali possono essere trattate e derivate.

Ne segue che solo in un primo tempo le curvature di una varietà appaiono responsabili di difficoltà e complicazioni: in realtà, se adoperate in modo opportuno, esse facilitano la soluzione dei problemi considerati e ne rendono semplici, almeno concettualmente, le soluzioni.

In questa esposizione, faccio uso sistematico dei riferimenti intrinseci: dopo aver costruito una deformazione Ω^{ik} del tensore fondamentale che induce variazioni nulle agli invarianti scelti come coordinate intrinseche, osservo che il suo annullarsi dà le condizioni necessarie e sufficienti di congruenza.

In virtù delle proprietà di Ω^{ik} , dimostro che si può sempre costruire, mediante le componenti "intrinseche" della forza di campo F , un tensore doppio simmetrico soddisfacente le (a): questo integrale particolare serve poi sia per costruire l'integrale generale delle (a) che delle (b).

L'impostazione e formulazione di questi problemi non dipendono dal numero di dimensioni della varietà: ne dipendono invece la soluzione con i relativi casi particolari.

Così, dopo aver esposto, senza specificare il numero delle dimensioni, il metodo generale, tratto separatamente il problema dell'equilibrio per un continuo a due e tre dimensioni e quello della dinamica di un continuo nello spazio-tempo.

Ma il metodo è valido per un numero di dimensioni qualsiasi; è valido anche per varietà metriche nelle quali sia definita una derivazione tensoriale: esso può quindi essere usato sia negli Universi a cinque dimensioni introdotti da KALUZA e KLEIN per le teorie relativistiche della gravitazione e dell'elettromagnetismo, sia per gli spazi-tempo della teoria unitaria di EINSTEIN.

1. - Varietà riemanniane riferite agli stessi parametri.

Ai fini di stabilire o di risolvere le equazioni di una teoria fisica che si intenda definita in una varietà riemanniana V_n con $n = 1, 2, 3, 4$, risultano di fondamentale importanza le operazioni che comportano variazioni al tensore fondamentale della V_n stessa, fatte a parità di parametri. Precisamente, indicata con:

$$(1) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad i, k = 1 \dots n$$

la metrica della V_n in un generico sistema di coordinate, si consideri una variazione δg_{ik} del tensore fondamentale, rappresentata dal tensore ξ_{ik} doppio, simmetrico, infinitesimo e, per ora, arbitrario. Mediante la:

$$(1') \quad ds'^2 = (g_{ik} + \xi_{ik}) dx^i dx^k$$

questa definirà una V'_n infinitamente prossima alla V_n data; attraverso le (1) e (1'), le due varietà sono riferite agli stessi parametri, non, in generale, alle stesse coordinate: in altre parole, la variazione ξ_{ik} non solo determina la varietà deformata V'_n ma stabilisce una corrispondenza puntuale tra le due varietà stesse, intendendosi corrispondenti due punti P di V_n e P' di V'_n definiti dagli stessi valori numerici dei parametri x^i .

Se δg_{ik} è la variazione funzionale del tensore fondamentale per una trasformazione infinitesima di coordinate:

$$(2) \quad x'^i = x^i - s^i$$

risulta, come è noto:

$$(3) \quad \delta g_{ik} = s_{i|k} + s_{k|i}$$

Questa variazione, che è la sola possibile quando si operi in spazi privi di curvature (euclidei o psedo-euclidei) stabilisce, attraverso le (2), una corrispondenza puntuale della varietà in sé stessa.

Allora due variazioni η_{ik} e ξ_{ik} che differiscano per una deformazione congruente, del tipo (3):

$$(4) \quad \eta_{ik} = \xi_{ik} - (s_{i|k} + s_{k|i})$$

definiscono la stessa varietà deformata, ma una diversa corrispondenza puntuale: quest'ultima può essere precisata con un'opportuna scelta del vettore s .

Tra le trasformazioni infinitesime di coordinate, definite dalle (2), particolare importanza hanno quelle che danno luogo ad una variazione nulla del tensore fondamentale, cioè quelle soddisfacenti le:

$$(5) \quad s_{i|k} + s_{k|i} = 0$$

Esse caratterizzano una corrispondenza puntuale della varietà in sé mediante uno spostamento rigido infinitesimo che, conservando le distanze, trasforma la metrica in sé stessa, conservando quindi il tipo di coordinate: ad es., nello spazio ordinario, se x^i sono le coordinate cartesiane di P , lo sono pure di P' rispetto al riferimento rigidamente spostato. L'importanza di queste particolari trasformazioni è dovuta al noto legame tra i vettori di KILLING, soluzioni delle (5) e le leggi di conservazione di una teoria fisica definita in una varietà V_n che ammette tali soluzioni, cioè spostamenti rigidi.

Nelle varietà riemanniane che non ammettono vettori di KILLING, ogni trasformazione infinitesima di coordinate dà luogo ad una variazione congruente, diversa da zero, del tensore fondamentale: non si può quindi stabilire una corrispondenza puntuale della varietà in sé che rispetti le coordinate.

Si può allora cercare di determinare in modo opportuno il vettore s nella (4) così che la varietà V_n e la sua deformata V'_n risultino riferite ad uno stesso tipo di coordinate intrinsecamente definite.

2. - Coordinate intrinseche e componenti intrinseche di vettori e tensori.

Si consideri una varietà riemanniana V_n , di metrica (1), che non ammetta vettori di KILLING: per questa si possono estendere le osservazioni e definizioni già fatte nel caso di una superficie che non ammetta spostamenti rigidi [1].

Come nel caso superficiale, per la V_n considerata esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della stessa ed ennuple di valori delle coordinate che danno alla metrica una certa forma: in assenza di vettori di KILLING inoltre, è sempre possibile determinare in più modi una ennupla di invarianti intrinseci A della V_n stessa, tra loro funzionalmente indipendenti; tali invarianti sono

deducibili dal tensore di curvatura: sono perciò costruiti con il tensore fondamentale e le sue derivate ordinarie. Per la loro indipendenza funzionale essi sono idonei a definire la posizione di un generico punto P : possono quindi essere scelti come coordinate «intrinseche». In questo riferimento, le componenti controvarianti di un vettore e di un tensore doppio simmetrico saranno individuate dai seguenti scalari:

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{a} & \bar{S}^r = s^i A_{ri} \\ \text{b} & \bar{S}^{pq} = S^{ik} A_{ri} A_{jk} \end{array}$$

Mediante formule analoghe alle (6b) si possono costruire le componenti controvarianti intrinseche del tensore fondamentale, così che, mediante queste e le solite regole dell'algebra tensoriale, risulta immediata la costruzione delle componenti covarianti intrinseche di un qualunque tensore, quando siano note quelle controvarianti. Le une e le altre sono rappresentate da scalari che hanno significato intrinseco in un generico riferimento: per questo motivo la rappresentazione dei tensori in un riferimento intrinseco risulta privilegiata.

D'altra parte, per affrontare problemi che richiedono anche la derivazione tensoriale, è comodo poter lavorare in un riferimento qualsiasi: si possono conciliare i vantaggi delle componenti intrinseche con le esigenze della generalità del riferimento, osservando che, in virtù delle formule di trasformazione delle componenti covarianti, un vettore ed un tensore doppio simmetrico potranno esprimersi, in un riferimento generico, nel seguente modo:

$$(7) \quad \begin{array}{ll} \text{a} & s_i = \bar{s}_r A_{ri} \\ \text{b} & S_{ik} = \bar{S}_{pq} A_{ri} A_{jk} \end{array}$$

L'estensione delle (6) e (7) per tensori di ordine qualsiasi è immediata.

3. — Varietà riemanniane riferite alle stesse coordinate intrinseche e condizioni di congruenza.

Nella V_n sopra considerata, siano A gli n invarianti intrinseci scelti come coordinate «intrinseche»; siano δA le loro variazioni, dovute ad una variazione ξ_{ik} del tensore fondamentale. Le n eguaglianze.

$$(8) \quad \delta A = A_{ri} s^i$$

risultano identità se ξ_{ik} è congruente: esse, attraverso le variazioni δA rivelano

lo spostamento s che dà luogo alla deformazione ξ^{ik} ; *definiscono* invece un vettore s se ξ^{ik} è arbitrario. Nell'uno e nell'altro caso le (8) forniscono direttamente le componenti controvarianti intrinseche di s che risulta quindi univocamente determinato, essendo le δA linearmente indipendenti tra loro: nel caso allora che la (c) ammetta una soluzione, questa è unica. Per le (8) tale vettore risulterà espresso mediante ξ^{ik} e le sue derivate tensoriali: l'ordine massimo di queste coinciderà con l'ordine massimo delle derivate ordinarie di g_{ik} che compaiono negli invarianti A .

La trasformazione infinitesima di coordinate, definita dal vettore s :

$$(2) \quad x'^i = x^i - s^i$$

dà luogo ad una variazione congruente:

$$(3) \quad v^{ik} = s^{i/k} + s^{k/i}$$

del tensore fondamentale costruita con ξ^{ik} e le sue derivate; essa stabilisce una corrispondenza puntuale P, P' della varietà in sè: al punto P di coordinate intrinseche A corrisponde il punto P' caratterizzato, attraverso le (2) dagli stessi valori numerici A , che però non coincidono con i valori numerici delle sue coordinate intrinseche.

Si consideri ora la deformazione seguente:

$$(9) \quad \Omega^{ik} \equiv \xi^{ik} - (s^{i/k} + s^{k/i}) \equiv \xi^{ik} - v^{ik}$$

essendo s il vettore definito dalle (8): Ω^{ik} è quindi costruita con la sola ξ^{ik} e le sue derivate covarianti. Per la linearità delle (8) e delle (9) inoltre, essa determinerà una variazione nulla agli n invarianti intrinseci A , soddisferà quindi alle n identità:

$$(10) \quad \delta A \equiv 0$$

Segue che la deformazione Ω^{ik} stabilisce tra la V_n considerata e la sua deformata V'_n di metrica:

$$ds'^2 = (g_{ik} + \Omega_{ik}) dx^i dx^k$$

una corrispondenza che rispetta le coordinate intrinseche: punti corrispondenti P di V_n e P' di V'_n sono caratterizzati dagli stessi valori numerici delle coordinate intrinseche.

Se la varietà considerata è generica, la scelta di n invarianti intrinseci non è unica: non è quindi unico il criterio atto a stabilire delle coordinate intrinseche e definire, mediante le (8) e (9) una deformazione che le rispetti.

Si consideri allora una seconda ennupla di invarianti intrinseci B funzionalmente indipendenti tra loro e dalla prima ennupla; se δB sono le loro variazioni dovute a ξ^{ik} , le:

$$(8') \quad \delta B = B_{\mu} v^{\mu}$$

risulteranno ancora identità se ξ^{ik} è congruente, nel qual caso i due vettori s e v rivelati dalle (8) e (8') devono coincidere; per ξ^{ik} generico invece, le (8') definiscono un secondo vettore v diverso da s e quindi una deformazione:

$$(9') \quad \psi^{ik} = \xi^{ik} - (v^{i/k} + v^{k/i})$$

che conserva gli n invarianti B . Come Ω^{ik} , anche ψ^{ik} risulta espressa mediante ξ^{ik} e le sue derivate tensoriali.

Se ξ^{ik} è congruente, i due vettori dati dalle (8) e (8') coincidono, Ω^{ik} e ψ^{ik} sono nulle; viceversa, se Ω^{ik} è nulla, la deformazione congruente v^{ik} definita dalla (3) coincide con ξ^{ik} che è quindi congruente e dovuta allo spostamento s dato dalle (8); questo deve allora coincidere con lo spostamento v dato dalle (8'), quindi anche ψ^{ik} è nulla. Di conseguenza le equazioni:

$$(11) \quad \Omega^{ik} = 0$$

$$(11') \quad \psi^{ik} = 0$$

risultano le condizioni di congruenza necessarie e sufficienti, tra loro equivalenti.

Le n equazioni:

$$(12) \quad w^i \equiv s^i - v^i = 0$$

sono anch'esse condizioni di congruenza, necessarie, non, in generale, sufficienti: sono tali nel caso di una superficie [1]. Esse implicano un legame lineare tra le due ennuple di variazioni δA e δB .

4. — Un tensore doppio simmetrico di data divergenza.

Per le identità (10) alle quali soddisfa la variazione Ω^{ik} definita dalla (9), è sempre possibile costruire un tensore doppio simmetrico $Q_{ik} \neq 0$, soddisfacente

la seguente condizione:

$$(13) \quad \int_{\tau} \Omega^{ik} Q_{ik} d\tau = 0$$

essendo τ una regione della varietà riemanniana V_n considerata, ed ammettendo che, sul contorno di τ , ξ_{ik} sia nulla, assieme ad s .

Per il metodo dei moltiplicatori arbitrari di LAGRANGE, Q_{ik} soddisferà la (13) per la particolare variazione Ω^{ik} , quando soddisferà, per una qualunque variazione ξ^{ik} , nulla al contorno di τ , la seguente equazione:

$$(13') \quad \int_{\tau} (\xi^{ik} Q_{ik} - a \delta A) d\tau = 0$$

dove le a sono n moltiplicatori arbitrari, δA le variazioni degli n invarianti intrinseci dovute a ξ^{ik} .

a) Si trovano subito le identità alle quali soddisfa Q_{ik} , imponendo che la (13') sia verificata per una deformazione congruente generica:

$$(13'') \quad \int_{\tau} (2s^{i/k} Q_{ik} - a A_{;i} s^i) d\tau = 0$$

e, dovendo questa valere per qualunque s (nullo al contorno di τ) dovrà essere:

$$(14) \quad -2Q_{ik}{}^{;k} = a A_{;i}$$

cioè le componenti intrinseche della divergenza di Q_{ik} coincidono, (a meno del fattore $-\frac{1}{2}$) con i moltiplicatori arbitrari a ; in altre parole: Q_{ik} è un integrale particolare della (14), dove le a si intendono date.

b) Per costruire Q_{ik} , basta esplicitare, nella (13'), le variazioni δA esprimendole mediante ξ^{ik} ; con il solito metodo di integrazione per parti, trascurando sempre gli integrali sul contorno, risulterà:

$$(15) \quad \int_{\tau} a \delta A d\tau = \int_{\tau} \xi^{ik} Q_{ik}(a) d\tau.$$

$Q_{ik}(a)$ risulta quindi costruito, oltre che con la metrica, con gli n moltiplicatori arbitrari a e con le loro derivate tensoriali.

Dall'espressione generica di $Q_{ik}(a)$, si possono ottenere n particolari tensori A_{ik} soddisfacenti le:

$$(14') \quad -2A_{ik}{}^{/k} = A_{ik}.$$

Basterà porre, volta per volta, in $Q_{ik}(a)$ tutti i moltiplicatori arbitrari nulli, tranne l'eresimo che si porrà uguale a 1: ogni tensore A_{ik} sarà allora espresso mediante il solo tensore fondamentale e le sue derivate ordinarie.

Per quanto si è rilevato al paragrafo precedente, queste considerazioni valgono per ogni ennupla di invarianti intrinseci atti a costituire coordinate intrinseche.

La scelta di due ennuple, funzionalmente non legate, così che le loro variazioni non siano linearmente legate, darà luogo alla costruzione di due tensori $Q_{ik}(a)$ e $P_{ik}(b)$ essenzialmente diversi.

5. - Struttura del più generale tensore doppio simmetrico a divergenza nulla.

Dopo le considerazioni precedenti, risulta chiara la struttura del più generale tensore doppio simmetrico soddisfacente le:

$$(b) \quad p_{ik}{}^{/k} = 0.$$

TRUESDELL [2] ha dimostrato che, se $\Omega^{ik} = 0$ sono le condizioni di congruenza, se S_{ik} è un generico tensore doppio simmetrico, in condizioni di regolarità p_{ik} soddisfa la:

$$(16) \quad \int_{\tau} (\xi^{ik} p_{ik} - \Omega^{ik} S_{ik}) d\tau = 0$$

per ogni ξ^{ik} , quando si trascurino gli eventuali integrali sul contorno di τ , regione della varietà considerata.

Esplicitando Ω^{ik} secondo le (9), ricordando che il vettore s è definito dalle (8), e indicando con d le componenti intrinseche della divergenza di S_{ik} , risulta:

$$\int [\xi^{ik} (p_{ik} - S_{ik}) - 2d\delta A] d\tau = 0$$

e, per la (15):

$$(16') \quad \int_{\tau} \xi^{ik} [p_{ik} - S_{ik} - 2Q_{ik}(d)] d\tau = 0$$

Dovendo questa essere verificata per qualunque ξ^{ik} , il piú generale tensore soluzione delle (b) è dato dalla :

$$(17) \quad p_{ik} = S_{ik} + 2Q_{ik}(d).$$

Esso risulta quindi somma di due tensori: il primo arbitrario, il secondo costruito applicando un operatore differenziale alla divergenza del primo.

Per quanto è stato detto, due tensori S_{ik} ed S'_{ik} soddisfacenti la :

$$S'_{ik} = S_{ik} + 2Q_{ik}(a)$$

dove a sono n scalari arbitrari, daranno luogo allo stesso tensore p_{ik} : cioè, nella (17), il tensore arbitrario S_{ik} , « potenziale » di p_{ik} , risulta definito a meno del tensore $Q_{ik}(a)$.

6. - Casi particolari.

Il teorema di TRUESDELL, precedentemente usato, assicura la più completa generalità alla soluzione trovata, qualora le $\Omega^{ik} = 0$ siano le condizioni di congruenza necessarie e sufficienti.

Per condizioni di congruenza solo necessarie, si troveranno particolari soluzioni delle (b): esse corrisponderanno ad una particolare scelta del « potenziale » S_{ik} , cioè dei moltiplicatori arbitrari.

Ad esempio, per ciascuna delle condizioni di congruenza (11), espresse mediante le componenti intrinseche :

$$(11a) \quad \bar{\Omega}^{pq} = \Omega^{ik} A_{[i} A_{k]} = 0$$

si trova una particolare soluzione della (b) corrispondente al potenziale :

$$S_{ik}^* = S(A_{[i} A_{k]} + A_{[i} A_{k]})$$

con S arbitrario.

Ricordando la scomposizione di un generico tensore doppio simmetrico, avente componenti covarianti intrinseche $\bar{S}_{pq} = \bar{S}_{qp}$:

$$(7b) \quad S_{ik} = \bar{S}_{pq} A_{[i} A_{k]}$$

si può concludere che l'integrale generale trovato risulta la somma degli integrali particolari trovati per ognuna delle $\binom{n+1}{2}$ condizioni di congruenza (11a).

Per la condizione di congruenza :

$$\Omega^{ik}a_{ik} = 0$$

si ottiene quella particolare soluzione delle (b) costruita con un potenziale isotropo :

$$S_{ik} = \lambda g_{ik}$$

con λ arbitrario. Per $\lambda = 1$, p_{ik} coincide col tensore fondamentale ; per $\lambda = A$, si trovano n tensori costruiti con il solo tensore fondamentale e con le sue derivate ordinarie, deducibili quindi dal tensore di curvatura.

Tra le soluzioni della (b) rientra anche un tensore costruito nel seguente modo : scelta una seconda ennupla di invarianti intrinseci B , sia $P_{ik}(b)$ il tensore ottenuto operando sugli n scalari arbitrari b secondo il paragrafo (4), soddisfacente quindi la :

$$(14') \quad -2P_{ik}^{/k} = bA_{/i}.$$

Posto ora :

$$S_{ik} = P_{ik}(b)$$

il corrispondente tensore, soluzione della (b), risulta :

$$(18) \quad p_{ik} = P_{ik}(b) + Q_{ik}(a)$$

dove le due ennuple di scalari a e b sono legate dalle n equazioni lineari :

$$(19) \quad aA_{/i} + bB_{/i} = 0.$$

Il tensore (18) corrisponde alle condizioni (12) di congruenza.

Esso risulta anche il più generale quando tali condizioni, oltre che necessarie, sono anche sufficienti, come nel caso di una superficie.

7. - Soluzione delle equazioni indefinite della statica di una membrana tesa su di una generica superficie e soggetta a sollecitazione attiva esterna.

Le equazioni indefinite di equilibrio di una membrana tesa su di una superficie prestabilita sono, come è noto :

$$(a) \quad q_{ik}^{/k} = F_i$$

dove q_{ik} è il tensore degli sforzi, F_i la sollecitazione specifica attiva esterna.

Se la superficie non ammette vettori di KILLING, il metodo esposto nel paragrafo (4) fornisce un integrale particolare della (a): in questo caso, infatti, la curvatura gaussiana K ed il quadrato del suo gradiente: $H \equiv K_{;i}K^{;i}$ soddisfano la:

$$(20) \quad \varepsilon^{ik}K_{;i}H_{;k} \neq 0$$

Gli invarianti K e H possono essere assunti come coordinate intrinseche (*).

Se F_H e F_K sono le componenti covarianti intrinseche della sollecitazione attiva F_i , un integrale particolare $\bar{q}_{ik}$ della (a) dovrà soddisfare l'identità rispetto a ξ_{ik} :

$$(21) \quad \int_{\sigma} (F_K \delta K + F_H \delta H) d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\sigma} \xi^{ik} \bar{q}_{ik} d\sigma$$

Se si interpreta ξ^{ik} come tensore di deformazione (congruente), la (21) è la forma che il principio dei lavori virtuali dà alle condizioni di equilibrio (a): per uno spostamento virtuale, nullo al contorno di σ , il lavoro della sollecitazione attiva $\mathbf{F}$ deve equilibrare il lavoro delle forze interne attive (lavoro di deformazione). A quest'ultimo contribuisce infatti solo un integrale particolare della (a), che differisce dall'integrale generale per un tensore a divergenza nulla.

Per ottenere l'espressione esplicita di $\bar{q}_{ik}$, si ricorda che è:

$$\delta K = -\frac{1}{2}(\Delta_2 \theta + K\theta - \xi_{ik}^{;ik}); \quad \theta = \xi_{ik} \alpha^{ik}$$

$$\delta H = (2\delta K)_{;i}K^{;i} - \xi^{ik}K_{;i}K_{;k}.$$

Trascurando sempre gli integrali sul contorno, si ottiene:

$$\int_{\sigma} (F_K \delta K + F_H \delta H) d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\sigma} \xi^{ik} [2F_H K_{;i}K_{;k} + \alpha_{ik}(\Delta_2 \varphi + K\varphi) - \varphi_{;ik}] d\sigma$$

avendo posto:

$$(22) \quad \varphi = F_K - 2(F_H K_{;j})^{;j}.$$

(*) Nel caso che H e K siano funzionalmente dipendenti e quindi non soddisfino la (20), si può assumere come secondo parametro intrinseco $\Delta_2 K = K_{;ik}g^{ik}[1]$. Qui per la soluzione esplicita della (a) viene considerato solo il primo caso.

Una soluzione particolare della (a) sarà allora data da :

$$(23) \quad \overline{q}_{ik}(F_K, F_H) = 2F_H K_{|i} K_{|k} + \alpha_{ik}(\Delta_2 \varphi + K\varphi) - \varphi_{|ik}$$

dove φ è dato dalle (22).

Questo integrale particolare risulta quindi espresso, oltre che da elementi intrinseci della membrana considerata, dalle componenti covarianti intrinseche F_K e F_H della sollecitazione attiva esterna e dalle loro derivate tensoriali fino alle terze.

L'integrale generale della (a) si otterrà aggiungendo a $\overline{q}_{ik}$ il più generale tensore a divergenza nulla, già esplicitamente ottenuto, col metodo esposto nel paragrafo 5, in altra Nota; [1].

Quindi, se S_{jk} è un generico tensore doppio simmetrico, se d_K e d_H sono le componenti covarianti intrinseche della sua divergenza, l'integrale cercato può essere espresso brevemente :

$$(24) \quad q_{ik} = S_{ik} + \overline{q}_{ik}[(F_K - d_K), (F_H - d_H)].$$

Per quanto è già stato osservato al paragrafo 4, S_{ik} risulta definito a meno di un tensore $\overline{q}_{ik}(a_K, a_H)$, costruito con due funzioni arbitrarie a_K, a_H : cioè il potenziale S_{ik} con il quale si costruisce il tensore degli sforzi, è determinato a meno di un integrale particolare della (a), corrispondente ad una sollecitazione attiva generica, di componenti covarianti intrinseche a_K, a_H : queste possono essere scelte in modo da ridurre la completa arbitrarietà di S_{ik} : se si sceglie $2a_H = -\overline{S}_{11}$, si può sostituire, per la (23), al generico S_{ik} un S'_{ik} avente nulla la componente intrinseca $\overline{S}_{11}$, arbitrarie le altre due. A sua volta S'_{ik} sarà determinato a meno di una particolare soluzione (23), corrispondente ad una forza di campo di componenti intrinseche $a_K, 0$.

Tra i tensori di sforzo $\overline{q}_{ik}$ prima costruiti, ha particolare interesse quello corrispondente ad una sollecitazione attiva di componenti covarianti intrinseche costanti (in particolare una di esse può essere nulla); indicate queste con k e h , per la (23) risulta :

$$(23') \quad \overline{q}_{ik}(k, h) = 2h K_{|i} K_{|k} + \alpha_{ik}(\Delta_2 \varphi + K\varphi) - \varphi_{|ik}$$

essendo :

$$(22') \quad \varphi = k - 2h\Delta_2 K$$

La (23') suggerisce poi un particolare tensore intrinseco a divergenza nulla :

$$p_{ik} = H\alpha_{ik} - \overline{q}_{ik}(0, 1).$$

Esso risulta costruito con il solo tensore fondamentale e con le sue derivate ordinarie fino alle quarte.

8. - Soluzione delle equazioni indefinite della statica dei continui comunque curvi, in presenza di forze di campo.

L'equazione indefinita:

$$(a) \quad q_{ik}{}^{jk} = F_i$$

considerata in una varietà riemanniana a tre dimensioni, di metrica (1), è ancora l'equazione indefinita di equilibrio di un corpo continuo, comunque curvo, soggetto ad una forza di campo $\mathbf{F}$: q_{ik} è ancora il tensore degli sforzi: [3]. Le stesse (a) interessano anche la Relatività Generale; infatti una sezione spaziale dell'Universo riemanniano relativistico è una varietà riemanniana a tre dimensioni; per tale varietà, può essere utile allora la conoscenza di un integrale della (a): questo, a sua volta, permette la costruzione del più generale tensore a divergenza nulla.

Se la V_3 considerata non ammette vettori di KILLING, allora, mediante il tensore di RIEMANN contratto R_{ik} , si possono sempre definire tre invarianti intrinseci tra loro funzionalmente indipendenti. Siano questi:

$$(25) \quad \begin{aligned} A &= R_{ik} a^{ik} \\ A &= R_{ik} R^{ik} \\ A &= R_{ik} R^{ij} R_j{}^k. \end{aligned}$$

Se F_r sono le componenti intrinseche della forza di campo $\mathbf{F}$, un integrale particolare della (a), $\overline{q_{ik}}$, dovrà soddisfare, in condizioni di regolarità, l'identità rispetto a ξ^{ik} :

$$\int_{\tau} F \delta A = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \xi^{ik} \overline{q_{ik}} d\tau$$

dove l'integrale si intende eseguito in una regione τ di V_3 e dove la deformazione ξ^{ik} si intende sempre nulla sul contorno di τ .

Per le (25) risulta identicamente:

$$(26) \quad F \delta A = (\delta R_{ik} - R_i{}^j \xi_{jk}) v^{ik}$$

dove:

$$(27) \quad v_{ik} = F a_{ik} + 2 F R_{ik} + 3 F R_{ks} R_i{}^s.$$

Essendo

$$(28) \quad \delta R_{ik} = \frac{1}{2} [\theta_{/ik} + \xi_{ik/s} - \xi_{is/k} - \xi_{ks/i}] \quad \theta = \xi_{ik} \alpha^{ik}$$

trascurando sempre gli integrali sul contorno, si ottiene:

$$\int_{\tau} F \delta A d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \xi^{ik} [2R_i{}^j v_{jk} - v_{pq}{}^{/pq} \alpha_{ik} - v_{ik/s} + v_{is/k} + v_{ks/i}] d\tau.$$

Una soluzione particolare della (a) sarà allora la:

$$(29) \quad \bar{q}_{ik}(F) = 2R_i{}^j v_{jk} - v_{pq}{}^{/pq} \alpha_{ik} - v_{ik/s} + v_{is/k} + v_{ks/i}$$

dove il tensore simmetrico v_{ik} non è arbitrario, ma costruito con la sollecitazione attiva, secondo le (27): si osserva che tale tensore ha le stesse direzioni principali di R_{ik} . L'integrale particolare trovato risulta espresso, oltre che da elementi intrinseci della V_3 , dalla sollecitazione attiva e dalle sue derivate tensoriali fino alle seconde ⁽²⁾.

Come al solito, l'integrale generale della (a) si otterrà aggiungendo a $\bar{q}_{ik}$ il più generale tensore a divergenza nulla costruito secondo le (17).

Quindi, se S_{ik} è un generico tensore simmetrico, se d sono le componenti covarianti intrinseche della sua divergenza, l'integrale cercato può essere brevemente espresso:

$$(30) \quad q_{ik} = S_{ik} + \bar{q}_{ik}(F - d).$$

Esso risulta quindi costruito mediante un tensore arbitrario e le sue derivate fino alle terze, e mediante la forza di campo e le sue derivate fino alle seconde. Ancora S_{ik} è definito a meno di un tensore $q_{ik}(\alpha)$, costruito con tre scalari arbitrari α .

Se, al posto degli invarianti A , si considerano gli invarianti principali ω del tensore di RIEMANN contratto, non si ottiene un integrale particolare della (a) diverso da quello ora trovato (29). Infatti gli invarianti A e ω sono legati dalle seguenti identità: [5]

⁽²⁾ Questo integrale particolare è già stato da me implicitamente usato per costruire il più generale tensore a divergenza nulla [4].

$$\begin{aligned}
 A &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\
 (31) \quad A &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \\
 A &= \omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_3^3
 \end{aligned}$$

Se gli A sono funzionalmente indipendenti, gli ω sono distinti; per le (31), le variazioni δA e $\delta \omega$ sono linearmente legate dalle:

$$(31') \quad a \delta A = \alpha' \delta \omega$$

dove le a e le α' sono legate dalle formule di trasformazione delle componenti covarianti di un vettore, per effetto della trasformazione di coordinate (31). Operando quindi nel solito modo sulla combinazione $\alpha' \delta \omega$, si otterrà ancora la soluzione particolare (29).

Per trovare allora un integrale particolare della (a) diverso dal (29), è necessario prendere in considerazione tre invarianti intrinseci non legati ai precedenti A . Poichè, in una V_3 , il tensore di RIEMANN contratto esaurisce l'intero tensore di RIEMANN, una seconda terna di invarianti andrà definita mediante combinazioni con i gradienti dei primi. Si potrà, ad es., considerare la terna B definita dalle:

$$(32) \quad B = \Delta_1 A.$$

Operando nel solito modo, risulta:

$$\int b \delta B = -\frac{1}{2} \int \xi^{ik} [\bar{q}_{ik}(\alpha') + 2b A_{[i} A_{/k}] d\tau$$

avendo posto:

$$(33) \quad \alpha' = -2(b A_{[i})^{/i}.$$

Un secondo integrale particolare delle (a) sarà quindi dato dalle:

$$(34) \quad q_{ik}^*(b) = \bar{q}_{ik}(\alpha') + 2b A_{[i} A_{/k}]$$

dove le α' sono definite dalle (33) e le b sono le componenti covarianti intrinseche della forza di campo, nel riferimento intrinseco B .

Affinchè $q_{ik}^*(b)$ e $\overline{q}_{ik}(a)$ forniscano due soluzioni particolari della (a) in corrispondenza ad una stessa forza di campo, b e a devono soddisfare le tre relazioni lineari

$$(35) \quad bB_{ir} = aA_{ri}.$$

Ne segue che il tensore:

$$(36) \quad p_{ik} = q_{ik}^*(b) - \overline{q}_{ik}(a)$$

può rappresentare il tensore degli sforzi in assenza di forze di campo. Esso, soluzione delle (b), corrisponde alle condizioni (12) di congruenza, necessarie, non sufficienti, in questo caso.

Se le componenti covarianti intrinseche della sollecitazione attiva F sono costanti (in particolare due di esse possono essere nulle), si otterranno, mediante le (29) o (34), particolari soluzioni delle (a) costruite essenzialmente con il solo tensore fondamentale e le sue derivate ordinarie. Ad esempio, alla forza di campo:

$$F_i = \lambda A_{i1}$$

con λ costante, corrisponde la soluzione particolare:

$$(29') \quad \overline{q}_{ik}(h, 0, 0) = 2\lambda R_{ik}.$$

Mediante questa, o altre analoghe, particolari soluzioni, si possono ottenere, servendosi delle (35) e (36), tensori a divergenza nulla, costruiti soltanto con elementi intrinseci della varietà considerata.

9. - Integrazione delle equazioni della dinamica dei continui.

Nello spazio-tempo della Relatività generale, la cui metrica indico con la (1), l'equazione indefinita:

$$(b) \quad p_{ik}^{/k} = 0$$

rappresenta le equazioni di moto di un continuo: p_{ik} ne è il tensore energetico.

Gli integrali particolari della (a) interessano, in questo caso, solo per costruire, con il solito metodo, il più generale tensore soddisfacente le (b).

Se la varietà non ammette vettori di KILLING, mediante il tensore di RIEMANN contratto si possono definire quattro invarianti intrinseci, tra loro

indipendenti :

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & \underset{1}{A} = R_{ik} a^{ik} \\
 & \underset{2}{A} = R_{ik} R^{ik} \\
 & \underset{3}{A} = R_{ik} R^{ij} R_j^k \\
 & \underset{4}{A} = R_{ik} R_{pq} R^{ip} R^{kq} .
 \end{aligned}$$

Se a sono quattro scalari arbitrari, risulta identicamente, come per la V_3 ;

$$(38) \quad \underset{r}{a} \delta \underset{r}{A} = (\delta R_{ik} - R_{ij} \xi_{ik}^j) \underset{r}{v}^{ik}$$

dove si è posto :

$$(39) \quad \underset{r}{v}_{ik} = \underset{1}{a} a_{ik} + \underset{2}{2a} R_{ik} + \underset{3}{3a} R_{ij} R_{,k}^j + \underset{4}{4a} R_{ij} R_{kq} R^{jq} .$$

Poichè la variazione δR_{ik} coincide con la (28), segue che il tensore (29), già trovato per la V_3 , ma costruito col tensore (39) soddisfa la :

$$(40) \quad [\overline{q_{ik}(a)}]_{\underset{r}{r}}^{/k} = \underset{r}{a} A_{|i}_{\underset{r}{r}} .$$

Se quindi S_{ik} è un generico tensore doppio simmetrico, se $\underset{r}{d}$ sono le componenti covarianti intrinseche della sua divergenza, il più generale tensore dello spazio-tempo considerato, soddisfacente la (b) sarà :

$$(41) \quad p_{ik} = S_{ik} - \overline{q_{ik}}_{\underset{r}{r}}(\underset{r}{d}).$$

Esso risulta quindi somma di due tensori doppi simmetrici: il primo arbitrario, il secondo ottenuto applicando un operatore differenziale del secondo ordine alla divergenza del primo: come al solito, questo risulta definito a meno di $\underset{r}{q_{ik}}(\underset{r}{a})$ essendo $\underset{r}{a}$ quattro scalari arbitrari.

In una varietà a quattro dimensioni, una seconda quaterna di invarianti intrinseci può ricavarsi dal tensore di RIEMANN: se con gli indici $A, B, \dots$ si intende indicare una coppia di indici i, k di emisimmetria, se con R_{AB} si intende il tensore di RIEMANN, tale quaterna può essere :

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & \underset{1}{B} = R_{AB} R^{AB} \\
 & \underset{2}{B} = R_{AB} R_C^A R^{BC}
 \end{aligned}$$

$$(37') \quad \begin{aligned} B &= R_{AB} R_{CD} R^{AC} R^{BD} \\ B &= R_{AB} R_{CD} R^{AC} R^B{}_E R^{ED} . \end{aligned}$$

Risulta identicamente :

$$(38') \quad b \delta B = \delta R_{iA}^j a_{ji} \chi^{iA} - \xi^{ik} R_{ijA} \chi_k^{jA}$$

dove si è posto :

$$(39') \quad \chi_{AB} = \underset{1}{2b} R_{AB} + \underset{2}{3b} R_{AC} R^C{}_B + \underset{3}{4b} R_{AC} R_{BD} R^{CD} + \underset{4}{5b} R_{AE} R_{BC} R^{DE} R_D{}^C .$$

Il tensore χ_{AB} sopra definito, costruito linearmente con i quattro moltiplicatori arbitrari b , ha le stesse proprietà algebriche del tensore di RIEMANN. Ricordando che è ;

$$(42) \quad \delta R_{iA}^j = \frac{1}{2} g^{js} [\xi_{is/hk} - \xi_{is/kh} + \xi_{hs/ik} - \xi_{hs/ki} + \xi_{ik/sh} - \xi_{ik/ks}]$$

si ottiene, con il solito procedimento, il tensore doppio simmetrico :

$$(43) \quad q_{ik}^*(b) = 2R_{ijB} \chi_k^{jB} - 2(\chi_{iqhk} + \chi_{kqhi})^{/hq}$$

soddisfacente le :

$$(44) \quad [q_{ik}^*(b)]^{/k} = b B_{/i} .$$

Si può quindi dare un'altra forma all'integrale generale delle (b) :

$$(41') \quad p_{ik} = S'_{ik} - q_{ik}^*(d').$$

In corrispondenza a particolari scelte dei « potenziali » S_{ik} e S'_{ik} , si otterranno particolari soluzioni delle (b); ad esempio, per :

$$S_{ik} = A g_{ik} \quad S'_{ik} = B g_{ik}$$

si troveranno tensori intrinseci della varietà stessa, tra i quali il tensore di RICCI-EINSTEIN.

Per :

$$S_{ik} = q_{ik}(b)$$

si otterrà ancora una soluzione della (b) qualora siano soddisfatte le quattro equazioni lineari;

$$aA_{\beta i} - bB_{\beta i} = 0.$$

La scelta di una determinata soluzione tra le molte che si offrono dipende dal problema che viene proposto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. GRAIFF, *L'indeterminazione delle funzioni di sforzo per membrane comunque curve*, Ann. Mat., to. LXXXIV, (1970), pp. 321-340.
 - [2] C. TRUESDELL, *General solution for the stress in a curved membrane*, Proc. Acad. of Sc. (U. S. A.), vol. 43, (1957), pp. 1070-1072.
 - [3] B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6) vol XIX, (1934), pp. 578-584, pp. 620-623.
 - [4] F. GRAIFF, *Soluzione generale delle equazioni indefinite della meccanica dei continui*, Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett., vol. 93, (1959), pp. 325-333.
 - [5] M. PASTORI, *Significato degli invarianti intrinseci di un tensore doppio simmetrico*, Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett., vol. LXXX, (1948), pp. 7-17.
-