Alcuni risultati di analisi spettrale per l'operatore di Laplace su insiemi non limitati (*) (**).

GIANFRANCO BOTTARO

Summary. - *In this work I study the spectrum and a system of generalized eigenfunctions for Laplace's operator in unbounded domains: the plane, the half plane, the plane layer, the exterior of a sphere.*

Introduzione.

Questo lavoro è dedicato allo studio dello spettro dell'operatore di Laplace in regioni non limitate, quali lo spazio, il semispazio, lo strato e l'esterno di una sfera.

Nel n. 1 si dà la definizione di integrale diretto di spazi hilbertiani [11] e l'enunciato di un teorema di VON NEUMANN [10].

Nel n. 2 si descrive un'idea di GÅRDING, in [6], che ci permette: nel n. 3 di riottenere alcuni risultati di natura hilbertiana, relativi alla diagonalizzazione dell'operatore di Laplace in tutto lo spazio, conseguiti da TALENTI in [17], nei n. 4 e 5 di rispondere alle analoghe questioni per lo stesso operatore in un semispazio, in uno strato e all'esterno di una sfera.

1. - Integrale diretto e teorema di Von Neumann.

DEFINIZIONE. - Sia:

1) Λ uno spazio topologico localmente compatto, separabile, su cui è definita una misura μ positiva, regolare di Borel

2) $\nu\colon \Lambda \to \{1, 2, \dots, \infty\}$ una funzione misurabile Borel.

3) $H(\lambda) = \left\{u(\lambda) \in \boldsymbol{C}^{\nu(\lambda)}\colon \sum_{j=1}^{\nu(\lambda)} |u_j(\lambda)|^2 < \infty\right\}$ per quasi ogni λ (rispetto a μ). $H(\lambda)$ è reso spazio di Hilbert (separabile) dal prodotto scalare $\big(u(\lambda), v(\lambda)\big)_{H(\lambda)} = \sum_{j=1}^{\nu(\lambda)} u_j(\lambda)\overline{v_j(\lambda)}$.

(*) Entrata in Redazione il 29 novembre 1973.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di Matematica e Fisica teorica » del C.N.R. presso l'Università degli Studi di Genova.

Consideriamo in $\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} H(\lambda)$ il sottinsieme $H_1 = \left\{u \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\times} H(\lambda)\right.$ tali che $u_j(\lambda)$ sia μ-misurabile per ogni indice j e $\left.\int\limits_\Lambda \|u(\lambda)\|^2 d\mu(\lambda) < \infty\right\}$.

Introduciamo in H_1 una relazione di equivalenza $\sim$, ponendo $u \sim v$ se $\int\limits_\Lambda \|u(\lambda) - v(\lambda)\|^2 d\mu(\lambda) = 0$ e dotiamo lo spazio quoziente $\hat{H} = H_1/\sim$ di una struttura hilbertiana mediante il prodotto scalare

$$(u, v)_{\hat{H}} = \int\limits_\Lambda \big(u(\lambda), v(\lambda)\big)_{H(\lambda)} d\mu(\lambda) .$$

Si prova, generalizzando il teorema di Fisher Riesz, che $\hat{H}$ diventa in tal modo spazio completo ed è facile controllare che esso è altresì separabile. Indicheremo tale spazio anche con le notazioni $\int\limits_\Lambda H(\lambda)\, d\mu$ e $L^2(\Lambda, \mu, \nu)$ e lo chiameremo spazio spettrale.

TEOREMA (cfr. [4]). – Sia A un operatore normale limitato su uno spazio di Hilbert separabile. Allora esiste uno spazio spettrale $\hat{H}$ ed una applicazione unitaria $U: H \to \hat{H}$ tale che, indicata con $f(A)$ l'immagine di f nell'isomorfismo di GELFAND NAIMARK [12 e 10] fra le classi di equivalenza di funzioni di Baire sullo spettro di A (ove $f \sim g$ significa $f = g$ quasi ovunque) e la corrispondente C^* algebra commutativa di operatori generata da A, si abbia:

$$\big(Uf(A)\, U^* v\big)(\lambda) = f(\lambda)\, v(\lambda) \qquad \text{per ogni } v \in \hat{H}$$

ed $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$. Nel seguito chiameremo U diagonalizzazione canonica di A. Con l'uso della trasformata di Cayley si può sostituire l'ipotesi A normale limitato con l'ipotesi A autoaggiunto.

VON NEUMANN ha dimostrato in questo teorema l'esistenza dell'operatore U; scopo di questa nota è invece costruirlo in alcuni casi particolari.

2. – Un'idea di Garding per ottenere la diagonalizzazione di un operatore differenziale a coefficienti costanti.

È ben noto che dato l'operatore autoaggiunto $D_k = \partial / i\partial x_k$ con dominio nelle $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tali che $D_k f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ (1) se $U: H = L^2(\mathbf{R}^n, |\ |) \to K = L^2(\mathbf{R}^n, |\ |/(2\pi)^n)$ (ove $|\ |$ indica l'usuale misura di Lebesgue) è la trasformata di Fourier, U è unitario e vale: $(UD_k U^*)\, v(\lambda) = \lambda_k v(\lambda)$, per ogni $v \in K$, tale che $U^* v \in \operatorname{dom} D_k$.

Più in generale, se $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è un polinomio reale $\Big($che nei successivi n. 3, 4, 5 sarà $p(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^2\Big)$, definiamo l'operatore $B = p(D_1, \dots, D_n)$, che è autoaggiunto se il

(1) $D_k f$ è intesa nel senso delle distribuzioni.

suo dominio è ristretto alle u tali che

$$u \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \qquad \int |(Uu)(\lambda)|^2 p^2(\lambda) \frac{d\lambda}{(2\pi)^n} < \infty \ (^1) .$$

Potremo dire che U diagonalizza B in modo non canonico, in quanto risulta

$$(UBU^* v)(\lambda) = p(\lambda) v(\lambda) .$$

Se ci limitiamo a considerare il caso in cui $p(\lambda) = \sum_{ij} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ ove $a_{ij} = a_{ji}$ e p è definito positivo, si può ottenere la diagonalizzazione canonica nel modo seguente: per ogni $t \in \boldsymbol{R}$ sia S_t la superficie (ellissoide eventualmente degenere) di equazione $p(\lambda) = t$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, e sia $N = \boldsymbol{R}_+$. Definiamo su S_t la misura $n-1$ dimensionale ω_t in modo che risulti $d\lambda = (2\pi)^n d\omega_t\, dt$.

Nello spazio di Hilbert $H_t = L^2(S_t, \omega_t)$ sia $\{h_j(t, \lambda)\}_{j \in N}$ un sistema o.n.c.. Consideriamo $L = \int_N H_t\, dt$ (n. 1) e definiamo $V\colon L^2(\boldsymbol{R}^n, |\ |/(2\pi)^n) \to L$ mediante l'uguaglianza $(Vv)_j(t) = \int_{S_t} v(\lambda)\overline{h_j(t, \lambda)}\, d\omega_t$, ove $v \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ e $j \in \boldsymbol{N}$ e prolungato per continuità su $L^2(\boldsymbol{R}^n)$, (di fatto è isometrico come proveremo ora di seguito). Indicato allora con V^* l'operatore aggiunto di V, per ogni $w \in L$ risulta:

$$(V^* w)(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(p(\lambda), \lambda)\, w_j(p(\lambda)) ,$$

la serie convergendo ovviamente in K (^{2}). Infatti:

$$(v, V^* w)_K = (Vv, w)_L = \int_N \sum_{j=1}^{\infty} (Vv)_j(t)\overline{w_j(t)}\, dt =$$

$$= \int v(\lambda) \overline{\sum_{j=1}^{\infty} h_j(p(\lambda), \lambda)\, w_j(p(\lambda))}\, \frac{d\lambda}{(2\pi)^n} = \Big(v, \sum_{j=1}^{\infty} h_j(p(\lambda), \lambda)\, w_j(p(\lambda))_K\Big) .$$

Proviamo adesso che V è unitario facendo vedere che è isometrico e surgettivo.

Sia $v \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, allora

$$\|Vv\|_K^2 = \int_N \sum_{j=1}^{\infty} |(v(\lambda), h_j(t, \lambda))|^2\, dt = \int_N \|v(\lambda)\|^2_{L^2(S_t,\omega_t)}\, dt =$$

$$= \int_N \int_{S_t} |v(\lambda)|^2\, d\omega_t\, dt = \int |v(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{(2\pi)^n} = \|v\|_K^2 ,$$

(^{1}) $\int f(\lambda)\, d\lambda$ significa $\int_{\boldsymbol{R}^n} f(\lambda)\, d\lambda$, essendo $d\lambda$ la misura di Lebesgue su $\boldsymbol{R}^n$.

(^{2}) Con $w_j(t)$ si sono indicati i coefficienti di Fourier di $w(t)$ rispetto al sistema o.n.c.

V è isometrico. Verifichiamo che V è surgettivo, facendo vedere che $VV^* = id$. Risulta infatti

$$VV^* w_k(t) = \int_{S_t} \sum_{j=1}^{\infty} h_j(p(\lambda), \lambda) w_j(p(\lambda)) \overline{h_k(p(\lambda), \lambda)}\, d\omega_t =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} w_j(t) \int_{S_t} h_j(t, \lambda) \overline{h_k(t, \lambda)}\, d\omega_t = w_k(t)\,, \qquad \text{per ogni } w \in L\,.$$

Allora $W = VU: H \to L$ è unitaria e diagonalizza B canonicamente. Infatti: se $u \in \operatorname{dom} B$

$$(WBu)_j(t) = \big(VUp(D_1, \ldots, D_n)u\big)_j(t) = \int_{S_t} p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(Uu)(\lambda)\overline{h_j(t, \lambda)}\, d\omega_j(\lambda) =$$

$$= \int_{S_t} t(Uu)(\lambda)\overline{h_j(t, \lambda)}\, d\omega_j(\lambda) = t(VUu)(t) = t(Wu)(t)\,.$$

Inoltre se $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$,

$$(Wu)_j(t) = \int_{S_t} \int \exp\left[-i(x, \lambda)\right] u(x)\, dx\, \overline{h_j(t, \lambda)}\, d\omega_t(\lambda)\,.$$

Allora $(Wu)_j(t)$ si può scrivere $(Wu)_j(t) = \langle u, \varphi_j(t)\rangle$ con $\varphi_j(t)$ distribuzione. Tale distribuzione è un'autosoluzione generalizzata [1] per B, e cioè verifica $\langle Bu, \varphi_j\rangle = t\langle u, \varphi_j\rangle$ per ogni $u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. Risulta infatti:

$$\langle Bu, \varphi_j\rangle = (WBu)_j = \lambda(Wu)_j = \lambda\langle u, \varphi_j\rangle\,.$$

Le distribuzioni $\varphi_j(t)$ si riducono a funzioni di classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, anche se non appartenenti a L^2 (perchè se B è ellittico S_t è compatto).

Risulta infatti

$$\varphi_j(t, x) = \int_{S_t} \exp\left[i(x, \lambda)\right] h_j(t, \lambda)\, d\omega_t\,.$$

3. – Diagonalizzazione dell'operatore di Laplace.

Considero in $\boldsymbol{R}^n$ l'operatore:

1) $\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \partial^2/(\partial x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (\partial/i\partial x_j)^2$ il cui polinomio caratteristico è $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = |\lambda|^2$. Come si è detto nel n. 3 la condizione perchè

2) Δ sia autoaggiunto in $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ è che abbia dominio nelle $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ tali che $\hat{f}(\lambda)|\lambda|^2 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, cioè tali che $(1 + |\lambda|^2)\hat{f}(\lambda) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, cioè abbia per dominio lo spazio di Sobolev $W^{2,2}(\boldsymbol{R}^n)$.

È noto [11] che esiste un sistema o.n.c. in L^2 della sfera unitaria di $\boldsymbol{R}^n$ costituito da armoniche sferiche che si possono denotare y_{kj}, ove $k \in \boldsymbol{N}$ è il grado del polinomio armonico da cui provengono e

$$j = 1, \ldots, N(k, n) = \frac{n + 2k - 2}{n + k - 2} \binom{n + k - 2}{k},$$

che è il numero di armoniche sferiche lineramente indipendenti di grado k in dimensione n. Volendo allora definire un sistema o.n.c. per $L^2(S_t, \omega_t)$, ove ω_t, che è stata definita nel n. 2, è tale che $d\omega_t = t^{n/2-1}/2(2\pi)^n dS_1$ (essendo dS_1 l'elemento di area sulla sfera unitaria) poniamo ovviamente (¹) $h_{kj}(t, \lambda) = 2(2\pi)^{n/2} t^{\frac{1}{2}-n/4} y_{kj}(\tilde{\lambda})$ con $\tilde{\lambda} = \lambda/|\lambda|$. Ora $(Wf)_{kj}(t) = \big(f, \varphi_{kj}(t)\big)$ ove (n. 2)

$$\varphi_{kj}(t) = \int\limits_{|\lambda|^2 = t} \exp[i(x, \lambda)] h_{kj}(t, \lambda)\, d\omega_t = \int\limits_{|\lambda|^2 = t} \exp[i(x, \lambda)] \sqrt{2}(2\pi)^{n/2} t^{\frac{1}{2}-n/4} y_{kj}(\tilde{\lambda})\, d\omega_t$$

che è ben definito, perchè l'ultimo membro è l'integrale su un compatto di una funzione continua. Utilizzando ([17], pag. 31) l'eguaglianza:

$$\exp[\pm i(x, \lambda)] = (2\pi)^{n/2} \sum_{kj} (\pm i)^k y_{kj}(\tilde{\lambda}) y_{kj}(\tilde{x}) \frac{J_{n/2+k-1}\big(|x|\,|\lambda|\big)}{\big(|x|\,|\lambda|\big)^{n/2-1}} \tag{2}$$

si ottiene

$$\varphi_{kj}(t) = \sqrt{2}(2\pi)^{n/2} t^{\frac{1}{2}-n/4} \int\limits_{|\lambda|=1} \sum_{k'j'} (2\pi)^{n/2} i^{k'} \frac{J_{n/2+k-1}\big(|x|\sqrt{t}\big)}{\big(|x|\sqrt{t}\big)^{n/2-1}} y_{k'j'}(\tilde{x}) y_{k'j'}(\tilde{\lambda}) y_{kj}(\tilde{\lambda}) \frac{t^{n/2-1}}{2(2\pi)^{n/2}} dS_1(\tilde{\lambda})$$
$$= \frac{i^k}{\sqrt{2}} |x|^{1-n/2} J_{n/2+k-1}\big(|x|\sqrt{t}\big) y_{kj}(\tilde{x}) .$$

Si osservi che è lecito scambiare i segni di serie e integrale in quanto la convergenza della serie a secondo membro di (2) è uniforme sui compatti e si ricordi che la successione delle funzioni y_{kj} è un sistema o.n.

Le $\varphi_{kj}(\cdot, t) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, poichè $|x|^k y_{kj}(x)$ è un polinomio e

$$\big(|x|\sqrt{t}\big)^{1-k-n/2} J_{n/2+k-1}\big(|x|\sqrt{t}\big)$$

è una funzione trascendente intera in $t|x|^2$. Inoltre poichè $|J_{n/2+k-1}(r)| = O(r^{-\frac{1}{2}})$ ([19], pag. 199), si ha che $\varphi_{kj} \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ per $p > 2n/(n-1)$. (Cfr. Il Teorema 2 di [17], pag. 192).

Rileviamo anche che $\varphi_{kj} \notin L^2(\boldsymbol{R}^n)$; pertanto sono soltanto autofunzioni generalizzate di $(-\Delta)$, in quanto operatore su $W^{2,2}(\boldsymbol{R}^n)$. Serviamoci ora della eguaglianza:

(¹) La scelta si è fatta per normalizzare h_{kj} su $L^2(S^a)$; infatti

$$\|h_{kj}\|_{L^2(S_t)} = \int\limits_{S_t} |\sqrt{2}(2\pi)^{n/2} t^{\frac{1}{2}-n/4} y_{kj}(\tilde{\lambda})|^2 d\omega_t = \int\limits_{|\lambda|=1} |y_{kj}|^2 dS_1 = 1 .$$

$f(x) = (W^* Wf)(x)$ già provata nel n. 2 per ottenere la sintesi spettrale di f e dello stesso n. 2, ricordiamo le formule

$$(Wf)(t) = \sum_{kj} \left[\int_{S_t} \left(\lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} f(x) \exp\left[-i(x,\lambda)\right] dx \right) \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right] h_{kj}(t,\lambda)$$

per ogni $f \in H = L^2(\boldsymbol{R}^n, |\;|)$ il limite essendo fatto in $K = L^2(\boldsymbol{R}^n, |\;|/(2\pi)^n)$ la serie convergendo in $L = \int_N H_t\, dt$.

$$(W^* g)(x) = \lim_{s\to\infty} \int_{S(0,s)} \exp\left[i(x,\lambda)\right] \sum_{kj} \left[\left(\int_{S_{|\lambda|^2}} g(|\lambda|^2, \lambda) \overline{h_{kj}(|\lambda|^2, \lambda)}\, d\omega_t \right) h_{kj}(|\lambda|^2, \lambda) \right] \frac{d\lambda}{(2\pi)^n}$$

per ogni $g \in L$ ove il limite è fatto in H e la serie converge in K. Cominciamo col provare che per ogni $f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ è lecito scrivere

$$(Wf)(t) = \sum_{kj} \left[\lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} f(x) \overline{\varphi_{kj}(t,x)}\, dx \right] h_{kj}(t,\lambda)$$

ove il limite è preso in $L^2(N)$ e la serie converge in L: infatti posto $\hat{f}_r(\lambda) = \int_{S(0,r)} f(x) \exp\left[-i(x,\lambda)\right] dx$ si ha

$$(Wf)(t) = \sum_{kj} \left[\int_{S_t} \lim_{r\to\infty} \hat{f}_r(\lambda) \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right] h_{kj}(t,\lambda) = \sum_{kj} \left[\lim_{r\to\infty} \int_{S_t} \hat{f}_r(\lambda) \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right] h_{kj}(t,\lambda)$$

poichè

$$\left\| \int_{S_t} \lim_{r\to\infty} \hat{f}_r(\lambda) \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t - \int_{S_t} \hat{f}_r(\lambda) \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right\|^2_{L^2(N)} =$$

$$= \int_N \left| \int_{S_t} \left[\lim_{r\to\infty} \hat{f}_r(\lambda) - \hat{f}_r(\lambda) \right] \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right|^2 dt \leqslant \int_N \left\| \lim_{r\to\infty} \hat{f}_r(\lambda) - \hat{f}_r(\lambda) \right\|^2_{L^2(S_t)} dt$$

$$= \left\| \lim_{r\to\infty} \hat{f}_r(\lambda) - \hat{f}_r(\lambda) \right\|^2_K$$

infinitesimo per $r \to \infty$. Allora utilizzando il teorema di Fubini

$$(Wf)(t) = \sum_{kj} \left[\lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} f(x) \left(\int_{S_t} \exp\left[-i(x,\lambda)\right] \overline{h_{kj}(t,\lambda)}\, d\omega_t \right) dx \right] h_{kj}(t,\lambda) =$$

$$= \sum_{kj} \left[\lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} f(x) \overline{\varphi_{kj}(t,x)}\, dx \right] h_{kj}(t,\lambda)\,.$$

Veniamo allora alla sintesi spettrale, vogliamo cioè provare che, indicato con

$$(Wf)_{kj}(t) = \lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} f(x) \overline{\varphi_{kj}(t,x)}\, dx\,,$$

si ha

$$f(x)=\lim_{s\to\infty}\int_0^s\sum_{kj}(Wf)_{kj}(t)\varphi_{kj}(t,x)\,dt$$

ove il limite è fatto in H e la serie converge in $L^1([0,s])$. Infatti

$$f(x)=(W^*Wf)(x)=\lim_{s\to\infty}\int_{S(0,s)}\exp[i(x,\lambda)]\cdot$$

$$\cdot\sum_{kj}\Big[\int_{S_{|\lambda|^2}}\Big(\sum_{k'j'}(Wf)_{k'j'}(|\lambda|^2)\,h_{k'j'}(|\lambda|^2,\lambda)\,\overline{h_{kj}(|\lambda|^2,\lambda)}\Big)d\omega_t\Big]\,h_{kj}(|\lambda|^2,\lambda)\,\frac{d\lambda}{(2\pi)^n}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int_{S(0,s)}\exp[i(x,\lambda)]\sum_{kj}(Wf)_{kj}(|\lambda|^2)\,h_{kj}(|\lambda|^2,\lambda)\,\frac{d\lambda}{(2\pi)^n}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int_0^s\Big[\int_{S_t}\sum_{kj}(Wf)_{kj}(t)h_{kj}(t,\lambda)\exp[i(x,\lambda)]\,d\omega_t\Big]\,dt=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int_0^s\sum_{kj}(Wf)_{kj}(t)\Big[\int_{S_t}\exp[i(x,\lambda)]\,h_{kj}(t,\lambda)\,d\omega_t\Big]\,dt$$

ove la serie converge in $L^1([0,s])$, infatti

$$\Big\|\int_{S_t}\sum_{kj}(Wf)_{kj}(t)\,h_{kj}(t,\lambda)\exp[i(x,\lambda)]\,d\omega_t-$$

$$-\sum_{\substack{j=1\dots N(k,n)\\ k\leqslant p}}\int_{S_t}(Wf)_{kj}(t,\lambda)h_{kj}(t,\lambda)\exp[i(x,\lambda)]\,d\omega_t\Big\|_{L^1([0,s])}=$$

$$=\int_0^s\Big|\int_{S_t}\sum_{\substack{j=1\dots N(k,n)\\ k>p}}(Wf)_{kj}(t)h_{kj}(t,\lambda)\exp[i(x,\lambda)]\,d\omega_t\Big|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\Big\{\int_0^s\int_{S_t}\Big|\sum_{\substack{j=1\dots N(k,n)\\ k>p}}(Wf)_{kj}(t)h_{kj}(t,\lambda)\Big|^2d\omega_t\,dt\Big\}^{\frac12}\,|S(0,s)|^{\frac12}$$

infinitesima per $p\to\infty$. Allora

$$f(x)=\lim_{s\to\infty}\int_0^s\sum_{kj}(Wf)_{kj}(t)\varphi_{kj}(t,x)\,dt\,.$$

Tale integrale coincide esattamente con l'espressione di $P(s)\,f$ data nel teorema 4 di [17] pag. 200.

OSSERVAZIONE. – Per il laplaciano iterato $(-\Delta)^m$ si procede analogamente, solo si considerano le S_t definite dall'equazione $|\lambda|=t^{1/2m}$. Allora si hanno le seguenti modifiche

$$h_{kj}(t,\lambda)=\sqrt{2m}\,(2\pi)^{n/2}t^{\frac{1}{2}-n/4m}y_{kj}(\tilde{\lambda})$$

per cui

$$\varphi_{kj}(t,x)=\frac{i^k}{\sqrt{2m}}t^{(1-m)/2m}|x|^{1-n/2}J_{n/2+k-1}\big(|x|t^{1/2m}\big)y_{kj}(\tilde{x})\,.$$

4. – Laplaciano nel semispazio e nello strato.

Consideriamo il Laplaciano avente come dominio $\{f\in W^{2,2}(\Omega),\ (\partial f/\partial x_n),\ (x_1,\dots,x_{n-1},0)=0$ nel senso delle tracce$\}$ ove $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n,\ x_n>0\}$. Definiamo l'operatore $U\colon L^2(\Omega)\to L^2(\boldsymbol{R}^n)$ mediante $(Uf)(\lambda)=\int\limits_{\Omega}f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx$, se $f\in C_0^\infty(\Omega)$ ove $\varphi(x,\lambda)=\exp\Big[-i\sum\limits_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\Big]\cos\lambda_n x_n$ e prolungato su $L^2(\Omega)$ per continuità. Poichè combinazioni lineari delle funzioni $f(x)=g(x_1,\dots,x_{n-1})h(x_n)$, $\big(g\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1}),\ h\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+)\big)$ sono dense in $L^2(\Omega)$, si ha che U è unitario, grazie anche al teorema di Parseval ed alla proprietà della trasformazione cos ([5], cap. XIII). Inoltre U diagonalizza l'operatore con autovalore $|\lambda|^2$; infatti indicato con $\Delta_{n-1}=\sum\limits_{j=1}^{n-1}\partial^2/\partial x_j^2$ si ha $\Delta=\Delta_{n-1}+\partial^2/\partial x_n^2$: allora se $f\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ (che è denso nel dominio dell'operatore considerato cfr. [3], lemma 10, pag. 50 con qualche breve modifica) risulta

$$\begin{aligned}U(-\Delta)f&=\int\exp\Big[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\Big]\cos\lambda_nx_n(-\Delta)f(x)\,dx=\\&=\int\bigg[(-\Delta_{n-1})\exp\Big[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\Big]\cos\lambda_nx_n-\exp\Big[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\Big]\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\cos\lambda_nx_n\Big)\bigg]f(x)\,dx=\\&=(\lambda_1^2+\dots+\lambda_{n-1}^2+\lambda_n^2)\int\exp\Big[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\Big]\cos\lambda_nx_nf(x)\,dx=|\lambda|^2(Uf)(\lambda)\,.\end{aligned}$$

Basta allora applicare la V del n. 3 per ottenere la diagonalizzazione canonica e in modo analogo la sintesi spettrale.

Prendiamo in considerazione il laplaciano avente come dominio $\{f\in W^{2,2}(\Omega)\colon f(x_1,\dots,x_{n-1},0)=f(x_1,\dots,x_{n-1},l)=0$ nel senso delle tracce$\}$ ove $\Omega=\{(x_1,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n\ 0<x_n<l\}$. Sia $M=\{m\pi/l,\ m\in\boldsymbol{N}\}$ e definiamo l'operatore

$$U\colon L^2(\Omega)\to L^2(\boldsymbol{R}^{n-1}\times M)$$

tale che

$$(Uf)\Big(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\frac{m\pi}{l}\Big)=\int\limits_{\Omega}f(x)\varphi\Big(x,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\frac{m\pi}{l}\Big)\,dx$$

ove

$$\varphi\left(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \frac{m\pi}{l}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1} x_j\lambda_j\right] \operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_n, \qquad \text{se } f \in C_0^\infty(\Omega)$$

e prolungato su $L^2(\Omega)$ per continuità.

Come precedentemente U è unitario; proviamo che diagonalizza l'operatore con autovalori $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 + (m^2\pi^2)/l^2$.

Sia $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, che è denso nl dominio dell'operatore considerato, [3] lemma 10 pag. 50,

$$(U(-\Delta)f)(\lambda) = \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1} x_j\lambda_j\right]\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_n\right)(-\Delta)f(x)\,dx =$$

$$= \int\left[(-\Delta_{n-1})\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_n\right) + \exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_n\right)\right]f(x)\,dx$$

$$= \left(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\int\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1}x_j\lambda_j\right]\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_n\right)f(x)\,dx =$$

$$= \left(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)(Uf)(\lambda).$$

Per ottenere la diagonalizzazione canonica basta costruire un operatore V come nel n. 2, osservando però che essendo ora $p(\boldsymbol{R}^{n-1}\times M) = [(\pi/l)^2, \infty)$ l'integrale diretto è ora:

$$\int_{(\pi/l)^2}^{\infty} L^2(S_t)\,dt, \qquad \text{ove} \qquad S_t = \{\lambda \in \boldsymbol{R}^{n-1}\times M : p(\lambda) = t\}.$$

Analogamente a quanto si è visto nel n. 3 si ottiene la sintesi spettrale.

5. – Laplaciano all'esterno di S_{a^2}.

Studiamo ora il laplaciano avente dominio $\{f \in W^{2,2}(\Omega) : f = 0$ su S_{a^2} nel senso delle tracce$\}$ essendo $\Omega = \boldsymbol{R}^n \setminus \overline{S(0, a)}$. Occorre ora modificare la definizione della U del n. 2 ed anzi avremo bisogno di introdurla per mezzo di alcune funzioni supplementari.

Consideriamo $U_a : L^2(\Omega) \to L^2(\boldsymbol{R}^n)$ definito ponendo per $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(U_a f)(\lambda) = \int_\Omega f(x)\overline{F_a(x, \lambda)}\,dx$$

ove

$$F_a(x, \lambda) = w_a(x, \lambda, |\lambda|), \qquad w_a(x, \lambda, l) = \exp[i(x, \lambda)] + v_a(x, \lambda, l);$$

$$v_a(x, \lambda, l) = -\sum_{kj}(2\pi)^{n/2} i^k \frac{y_{kj}(\tilde{x})y_{kj}(\tilde{\lambda})}{(|x|\,|\lambda|)^{n/2-1}} J_{n/2+k-1}(a|\lambda|)\frac{H_{n/2+k-1}(|x|l)}{H_{n/2+k-1}(al)}$$

(con J_ν e H_ν si sono indicate le funzioni di Bessel di prima e terza specie [19] e v_a è considerata per $x\in\bar{\Omega}$, $\lambda\in\boldsymbol{R}^n$, $l\in\boldsymbol{C}$ tale che $l^2=\mu+i\varepsilon$, $\mu\geqslant 0$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$, $\operatorname{Im} l\geqslant 0$). Ci sarà utile mettere in evidenza alcuni fatti relativi a v_a: innanzitutto che v_a è ben definita: proviamo perciò prechè la serie che la definisce è convergente.

Allo scopo cominciamo col notare che esiste una costante M (indipendente da ν e da $x\in\Omega$) tale che sia $|H_\nu(|x|l)/H_\nu(al)|\leqslant M$ per ogni

$$l\in T=\{l\in\boldsymbol{C}\colon \operatorname{Re}(l)\geqslant 0, \operatorname{Im}(l)\geqslant 0\}\ .$$

Ciò può essere dedotto tenendo presente ([19], pag. 78, 511) che la funzione $\varphi(l)=$ $=H_\nu(|x|l)/H_\nu(al)$ è olomorfa in $\mathring{T}$, allora il suo massimo modulo in domini del tipo $T\cap\{l\colon |l|<R\}$ è assunto sulla frontiera, e quindi l'uniforme limitetazza in T di $\varphi(l)$ rispetto ad x e V segue dalla stima:

$$H_\nu(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac12}\exp\left[i\left(z-\frac12\nu\pi-\frac14\pi\right)\right]\left(1+O\left(\frac1z\right)\right)$$

([19], pag. 198) e dal fatto che le funzioni $t\mapsto H_\nu(|x|t)$ e $t\mapsto H_\nu(|x|it)$ sono decrescenti in $\boldsymbol{R}_+$ ([19], pag. 487-185).

Osserviamo ora che è:

$$\sum_{kj}(2\pi)^{n/2}\, i^k\frac{y_{kj}(\tilde{x})y_{kj}(\tilde{\lambda})}{(|x|\,|\lambda|)^{n/2-1}}J_{n/2+k-1}(a|\lambda|)=\left(\frac{a}{|x|}\right)^{n/2-1}\exp\left[i(\lambda, a\tilde{x})\right]$$

e proviamo che tale serie converge assolutamente in $\Omega\times\boldsymbol{R}^n$. Da [19], pag. 49 si ha

$$|J_\nu(t)|\leqslant\frac{|\frac12 t|^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\exp\left[|\operatorname{Im} t|\right]\ ,$$

da [15], pag. 32

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2-1)}\sum_{j=1}^{N(k,n)}y_{kj}(\tilde{x})y_{kj}(\tilde{\lambda})=\left(\frac{n}{2}+k-1\right)C_k^{n/2-1}\left(\cos\frac{(x,\lambda)}{|x|\,|\lambda|}\right)$$

e da [9], pag. 222

$$|C_m^k\cos\varphi|\leqslant 2^{2m+k}\ ,$$

mettendo assieme queste disuguaglianze si ottiene:

$$\left|\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2-1)}\,i^k\sum_{j=1}^{N(k,n)}\frac{y_{kj}(\tilde{x})y_{kj}(\tilde{\lambda})}{(|x|\,|\lambda|)^{n/2-1}}J_{n/2+k-1}(a|\lambda|)\right|\leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant\frac{2^{n/2+k-1}}{(|x|\,|\lambda|)^{n/2-1}}\,\frac{(|\lambda|a)^k}{\Gamma(n/2+k)}\leqslant\frac{2^{n/2+k-1}}{\Gamma(n/2+k)}(|\lambda|a)^k\ .$$

Ciò prova la convergenza assoluta in $\Omega\times\mathbf{R}^n\times T$ della serie che definisce $v_a(x,\lambda,l)$ e la continuità della funzione stessa.

Inoltre per (2) $v_a(x,\lambda,l)=-\exp[i(x,\lambda)]$ su S_{a^2}, in modo che $w_a(x,\lambda,l)=0$ su S_{a^2}. Infine $v_a(x,\lambda,l)\in L^p(\Omega)$ per $p>2n/(n-1)$, come subito si verifica, rifacendo uso della (3) e del principio di massimo applicato alla funzione

$$\psi(l)=\frac{|x|^{\frac12}H_{n/2+k-1}(|x|l)}{a^{\frac12}H_{n/2+k-1}(al)}$$

su domini del tipo sopra considerato, quando si tenga presente le proprietà di decrescenza delle funzioni $t\mapsto t^{\frac12}H_\nu(|x|t)$ e $t\mapsto t^{\frac12}H_\nu(|x|it)$ in $\mathbf{R}_+$ ([19], pag. 446 e 206).

Osserviamo che $v_a(\cdot,\lambda,l)$ è autosoluzione (generalizzata) di $-\Delta$ con autovalore l^2. A questo scopo verifichiamo con un ben noto classico ragionamento (che riportiamo per comodità del lettore) che lo è la funzione $g_l(|x|)\,h(x)=y_{kj}(\tilde{x})\big(H_{n/2+k-1}(|x|l)/|x|^{n/2-1}\big)$ ove $g_l(|x|)=|x|^{-(n/2+k-1)}H_{n/2+k-1}(|x|l)$ e $h(x)=|x|^k y_{kj}(\tilde{x})$. Infatti

$$\Delta(g_l(|x|)h(x)=g_l(|x|)\Delta h(x)+2\frac{g_l'(|x|)}{|x|}\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)+h(x)\left(g_l''(|x|)+\frac{n-1}{|x|}g_l'(|x|)\right).$$

Ma $\Delta h(x)=0$ perchè $h(x)$ è polinomio armonico; $\sum_{j=1}^n x_j(\partial h/\partial x_j)(x)=kh(x)$, essendo $h(x)$ polinomio omogeneo di grado k.

Si perviene dunque alle seguenti identità:

$$(\Delta+l^2)\left(y_{k_j}(x)\frac{H_{n/2+k-1}(|x|l)}{|x|^{n/2-1}}\right)=\Delta\big(g_l(|x|)h(x)\big)+l^2\big(g_l(|x|)h(x)\big)\Big)=$$

$$=h(x)\left[g_l''(|x|)+\frac{n+2k-1}{|x|}g_l'(|x|)+l^2g_l(|x|)\right]=$$

$$=h(x)\left[\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\left(\frac{n}{2}+k\right)|x|^{-(n/2+k-1)}H_{n/2+k-1}(|x|l)+\right.$$

$$+2\left(\frac{n}{2}+k-1\right)l|x|^{-(n/2+k)}H'_{n/2+k-1}(|x|l)+l^2|x|^{-(n/2+k-1)}H''_{n/2+k-1}(|x|l)+$$

$$-(n+2k-1)\left(\frac{n}{2}+k-1\right)|x|^{-(n/2+k-1)}H_{n/2+k-1}(|x|l)+(n+2k-1)l|x|^{-(n/2+k)}H'_{n/2+k-1}(|x|l)+$$

$$\left.+l^2|x|^{n/2+k-1}H_{n/2+k-1}(|x|l)\right]=h(x)l^2|x|^{-(n/2+k-1)}\cdot$$

$$\cdot\left[H''_{n/2+k-1}(|x|l)+\frac{H_{n/2+k-1}(xl)}{|x|l}+\left(1-\left(\frac{n}{2}+k-1\right)^2\frac{1}{l^2|x|^2}\right)H_{n/2+k-1}(|x|l)\right]$$

che è appunto nullo.

Vogliamo ora provare che per ogni $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$ e $l \in \boldsymbol{C}$ valgono le seguenti relazioni

$$\left|\frac{\partial v_a}{\partial |x|} - i|\lambda| v_a\right| = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}(n-1)}}\right) \quad \text{e} \quad v_a(x, \lambda, l) = 0\left(\frac{\exp[-(\operatorname{Im} l)|x|]}{|x|^{\frac{1}{2}(n-1)}}\right) \qquad \text{per } |x| \to \infty ,$$

la prima delle quali è nota sotto il nome di condizione di radiazione di Sommerfeld.

Per far questo occorre derivare sotto il segno di serie e dunque abbiamo bisogno della convergenza uniforme della serie delle derivate, questa si prova tenendo conto che: $H'_\nu(z) = H_{\nu-1}(z) - (\nu/z) H_\nu(z)$ ([19], pag. 74), del fatto che $H_\nu(|x|\,|\lambda|)$ è funzione crescente di ν ([19], pag. 444) e tenendo conto della stima precedente (3).

Allora operando sugli addenti, poichè $H_{\nu-1}(z) - H_{\nu+1}(z) = 2H'_\nu(z)$ ([19], pag. 74) e

$$H_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8iz} + 0\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right)$$

([19], pag. 198) se $|z| \to \infty$

si ha che:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{H_{n/2+k-1}(|x|\,|\lambda|)}{|x|^{n/2-1}} - i|\lambda|\,\frac{H_{n/2+k-1}(|x|\,|\lambda|)}{|x|^{n/2-1}}\right) = 0 .$$

La condizione di Sommerfeld è allora verificata, essendo $1/|H_\nu(a|\lambda|)|$ limitato al variare di ν ([19], pag. 511, 444), il che fa sì che per la (3)

$$\sum_{kj} (2\pi)^{n/2}\, i^k \frac{y_{kj}(\tilde{x}) y_{kj}(\tilde{\lambda})}{(|x|\,|\lambda|)^{n/2-1}} \frac{J_{n/2+k-1}(a|\lambda|)}{H_{n/2+k-1}(a|\lambda|)}$$

converga assolutamente. Il secondo comportamento enunciato per $v_a(x, \lambda, l)$ all'∞ segue anch'esso facilmente dalle precedenti stime.

Serviamoci delle proprietà precedenti per provare che U_a è unitaria: la surgettività segue da [8] per $n = 3$ (ma il ragionamento può essere esteso al caso generale [2]) oppure da [15]. Proviamo che U_a è isometria.

Ora sia $H(x, \cdot, l) (\in L^1 \cap L^2)$ la funzione di Green del problema

$$\begin{cases} (-\Delta - l^2)\, u = f \\ u = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(per l'esistenza v. [14] pag. 655) e sia $u(x, \lambda, l) = \check{H}(x, \cdot, l)$, ove $H(x, y, l)$ si intende prolungata o fuori di Ω e $\check{}$ è l'antitrasformata di Fourier. Vogliamo ora provare che è:

$$(2\pi)^{n/2}(|\lambda|^2 - l^2)\, u(x, \lambda, l) = \exp[i(x, \lambda)] + v_a(x, \lambda, l) .$$

Infatti $(-\Delta - l^2)[\exp[i(y, \lambda)] + v_a(y, \lambda, l)] = (|\lambda|^2 - l^2) \exp[i(y, \lambda)]$, moltiplicando ambo i membri per $H(x, y, l)$ e integrando in dy si ottiene

$$\int H(x, y, l)(-\Delta - l^2)[\exp[i(y, \lambda)] + v_a(y, \lambda, l)]\, dy = (|\lambda|^2 - l^2)\int H(x, y, l) \exp[i(y, \lambda)]\, dy$$

da cui la relazione voluta, poichè la funzione di Green è il nucleo dell'inverso di $-\Delta - l^2$.

Dal teorema di Parseval, otteniamo:

$$(4)\qquad \int H(z, x, l)\overline{H(z, y, l)}\, dz = \frac{1}{(2\pi)^n(l^2 - \bar{l}^2)}\cdot$$
$$\cdot \int \left[\frac{1}{|\lambda|^2 - l^2} + - \frac{1}{|\lambda|^2 - \bar{l}^2}\right] w_a(x, \lambda, l)\overline{w_a(x, \lambda, l)}\, d\lambda\,.$$

Moltiplichiamo ora i due membri per $\overline{f(x)}\, f(y)$, integriamo su $\Omega \times \Omega$ in $dx\, dy$ e moltiplichiamo ancora per $l^2 - \bar{l}^2$. Dal primo membro si ottiene $(l^2 - \bar{l}^2)(R_{\bar{l}^2} f, R_{l^2} f) = (l^2 - \bar{l}^2)(R_{\bar{l}^2} R_{l^2} f, f) = ((R_{l^2} - R_{\bar{l}^2}) f, f)$ avendo utilizzato la prima equazione risolvente ([7], pag. 16). Ora si definisce

$$\Phi_a(\lambda, l) = (2\pi)^{-n/2} \int_\Omega \overline{w_a(x, \lambda, l)}\, f(x)\, dx\,, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Sia $l^2 = \mu + i\varepsilon$: per $\mu \in [\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ vale la diseguaglianza:

$$\int \frac{1}{(1 + |\lambda|^2)^2} |\Phi_a(x, \lambda, l)|^2\, d\lambda \leqslant M\,,$$

ove M non dipende da l ([15], pag. 130) e $\Phi_a(\lambda, l) \mapsto \int f \cdot \overline{F}_a\, dx$ se $l \to |\lambda|$. Poichè l'integrando del secondo membro di (4):

$$\frac{2i\varepsilon}{(|\lambda|^2 - \mu)^2 + \varepsilon^2} w_a(x, \lambda, \sqrt{\mu + i\varepsilon})\overline{w_a(x, \lambda, \sqrt{\mu + i\varepsilon})}$$

è integrabile in λ, si perviene alla relazione:

$$(R_{\mu + i\varepsilon} - R_{\mu - i\varepsilon}) f, f) = \int \frac{2i\varepsilon}{(|\lambda|^2 - \mu)^2 + \varepsilon^2} |\Phi_a(\lambda, \sqrt{\mu + i\varepsilon})|^2\, d\lambda\,.$$

Per [14], pag. 183

$$\frac{1}{2}[((E_\beta + E_{\beta - 0}) f, f) - ((E_\alpha + E_{\alpha - 0}) f, f)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\alpha^\beta ((R_{\mu + i\varepsilon} - R_{\mu - i\varepsilon}) f, f)\, d\mu\,.$$

Utilizzando allora il teorema di Fubini si ottiene:

$$\frac{1}{2}((E_\beta + E_{\beta - 0}) f, f) - ((E_\alpha + E_{\alpha - 0}) f, f) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int d\lambda \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{(|\lambda|^2 - \mu)^2 + \varepsilon^2} |\Phi_a(\lambda, \sqrt{\mu + i\varepsilon})|^2\, d\mu\,.$$

È lecito portare il limite sotto il primo segno di integrale [15], pag. 129. Tenuto conto di [18], pag. 31 si ottiene:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left((E_\beta + E_{\beta-0})f, f\right) - \left((E_\alpha + E_{\alpha-0})f, f\right)\right] = \int\limits_{\sqrt{\alpha}\leqslant|\lambda|\leqslant\sqrt{\beta}} \left|\int f\cdot \overline{F}_a\, dx\right|^2 d\lambda\,.$$

Se ora si fa tendere α a β $\left((E_\beta - E_{\beta-0})f, f\right) = 0 \Rightarrow E_\beta = E_{\beta-0}$, cioè non esistono autosoluzioni.

Allora $\left((E_\beta - E_\alpha)f, f\right) = \int\limits_{\sqrt{\alpha}\leqslant|\lambda|\leqslant\sqrt{\beta}} \left|\int f\cdot \overline{F}_a\, dx\right|^2 d\lambda$, e se si fa tendere α a 0, β ad ∞, si ottiene: $\|f\|_2^2 = \int \left|\int f\cdot \overline{F}_a\, dx\right|^2 d\lambda$ per ogni $f \in C_0^\infty(\Omega)$, quindi U_a è isometria.

Per ogni $f \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ (che è denso nel dominio dell'operatore considerato, [3] lemma 10, pag. 50) vale $U_a(-\Delta)f = |\lambda|^2 U_a f$, infatti

$$U_a(-\Delta)f(\lambda) = \int_\Omega (-\Delta)f(x)\overline{F_a(x,\lambda)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{(-\Delta)F_a(x,\lambda)}\, dx = \\ = |\lambda|^2 \int_\Omega f(x)\overline{F_a(x,\lambda)}\, dx = |\lambda|^2 U_a f(\lambda)$$

poichè

$$(-\Delta)F_a(x,\lambda) = (-\Delta)\Big(\exp[i(x,\lambda)] + v_a(x,\lambda,|\lambda|)\Big) = \\ = |\lambda|^2\Big(\exp[i(x,\lambda)] + v_a(x,\lambda,|\lambda|)\Big) = |\lambda|^2 F_a(x,\lambda)\,.$$

Basta allora applicare l'operatore V considerato nel n. 2 per ottenere la diagonalizzazione canonica, ed un sistema di autofunzioni generalizzate.

BIBLIOGRAFIA

[1] JU. M. BEREZANSKII, *Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint operator*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[2] G. F. BOTTARO, *Alcuni risultati di analisi spettrale per operatori differenziali a coefficienti costanti su insiemi non limitati*, Le Matematiche, **29** (1974), pp. 20-41.

[3] F. E. BROWDER, *On the spectral theory of elliptic differential operator*, Math. Ann., **142** (1961), pp. 22-130.

[4] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, vol. II, Interscience, 1963.

[6] L. GÅRDING, *Eigenfunction expansions*, pp. 303-325 di: BERS - JOHN - SHECTER, *Partial Differential Equations*, Interscience, New York, 1964.

[7] E. HILLE - R. S. PHILIPS, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, 1957.

[8] T. IKEBE, *Orthogonality of the eigenfunctions for the exterior problem connected with $-\Delta$*, Arch. Rat. Mech. Anal., **19** (1965), pp. 71-73.

[9] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - R. P. SONI, *Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics*, III edition, Springer-Verlag, 1960.

[10] K. MAURIN, *Methods of Hilbert spaces*, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1967.
[11] C. MULLER, *Spherical harmonics*, Lectures notes in mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[12] J. VON NEUMANN, *On rings of operators. Reduction theory*, Ann. Math., (2) **50** (1949), pp. 401-485.
[13] F. RIESZ - B. SZ. NAGY, *Leçon d'analyse fonctionelle*, Akademiai Kado, 1953.
[14] V. I. SMIRNOV, *A course of higher Mathematics*, vol. IV: *Integral equations and partial differential equations*, Pergamon Press, Londra, 1964.
[15] N. A. SHENK, *Eigenfunction expansion and scattering theory for the wave equation in an exterior region*, Arch. Rat. Mech. Anal., **21** (1966), pp. 120-150.
[16] M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert spaces and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 15, 1932.
[17] G. TALENTI, *Spectrum of the Laplace operator acting in* $L^p(\boldsymbol{R}^n)$, Symp. Math. VII, Academic Press (1971), pp. 185-232.
[18] T. C. TITCHMARSH, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.
[19] G. N. WATSON, *A treatise of the theory of Bessel functions*, The Macmillan Company, New York, 1948.