# Ideali di definizione e morfismi di schemi henseliani (*).

FULVIO MORA (Genova) (**)

**Summary.** – *Given a pair* $(A, \mathfrak{M})$, *where* $A$ *is a complete ring with respect to* $\mathfrak{M}$*-adic topology, we can define the* formal spectrum *of* $A$: *this is the basic concept of the theory of* formal schemes (*see* [4], I, § 10). *In a similar way, given a Hensel pair* $(A, \mathfrak{M})$, *we can develope a theory of* Henselian schemes. *In this work we study some properties of Henselian schemes, like the existence of* definition ideals (*def.* 2.3) *which are useful to have a « good definition » of* morphisms (*def.* 3.10) *and, in particular, of* adic morphisms (*def.* 3.11). *At the end, after some remarks about henselian product of pairs, we prove the existence and uniqueness of product in the category of Henselian schemes* (*prop.* 4.7) *and we apply the above results to adic morphisms* (*prop.* 4.9).

## Introduzione.

In questo lavoro ci proponiamo di studiare le prime proprietà degli schemi henseliani sviluppando le teorie di S. GRECO (cfr. [3]) e H. KURKE (cfr. [5]), in analogia a quanto fatto da Grothendieck per gli schemi formali (cfr. [4], § 10). In particolare vengono definiti i morfismi di schemi henseliani e si prova l'esistenza e l'unicità del prodotto di schemi henseliani.

Nel n. 1, dopo alcuni richiami sulle $H$-coppie, si definisce lo *spettro henseliano* di una $H$-coppia e si studiano alcune proprietà delle fibre degli schemi henseliani.

Nel n. 2 si dà la nozione di *ideale di definizione* di una $H$-coppia (def. 2.3) e di uno schema henseliano (def. 2.10), concetto necessario per poter avere una « buona definizione » di *morfismo* di schemi henseliani (def. 3.10) senza fissare a priori un ideale privilegiato come [5], § 5; in particolare si definiscono i *morfismi adici* (def. 3.11) e si prova che l'immersione canonica dello schema indotto su un aperto nello schema henseliano stesso è un morfismo adico (teor. 3.13).

Nel n. 4 infine, si prova, dopo alcune considerazioni sul prodotto henseliano di coppie, l'esistenza del prodotto di schemi henseliani (prop. 4.7) e si applicano i risultati ottenuti ai morfismi adici (teor. 4.9).

**1.** – In questo paragrafo, dopo la definizione di spettro henseliano e di schema henseliano, si provano alcune proprietà degli schemi henseliani.

Per maggiori particolari cfr. [3], § 2.

---

(*) Entrata in Redazione il 26 novembre 1973.

(**) Durante la preparazione del presente lavoro, l'A. ha fruito di una borsa di studio del C.N.R.

Sia $(A, \mathfrak{m})$ una $H$-coppia ([2], def. 1.1) e sia $\mathfrak{X} = \operatorname{spec}(A/\mathfrak{m})$, gli aperti $\mathfrak{D}(f) = D(f) \cap \mathfrak{X}$ formano una base della topologia di $\mathfrak{X}$. Per ogni $f \in A$ sia $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D}(f)) = {}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f) = {}^hA_f$ l'henselizzazione di $A_f$ rispetto all'ideale $\mathfrak{m}A_f$ (cfr. [2]).
Si prova facilmente che $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è un prefascio di anelli.

TEOREMA 1.1. – *Nelle ipotesi precedenti si ha:*

a) *$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è un fascio;*

b) *per ogni $f \in A$, l'omomorfismo canonico ${}^hA_f \to \Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ è un isomorfismo di anelli. In particolare $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = A$.*

c) *per ogni $x \in \mathfrak{X}$, l'anello $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ è locale e il suo corpo residuo coincide con $k(x)$.*

DIM. – vedi [3] teor. 1.

DEFINIZIONE 1.2. – *Lo spazio anulato ora costruito $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ dicesi* spettro henseliano *dell'$H$-coppia $(A, \mathfrak{m})$ e si nota con* $\operatorname{sph}(A, \mathfrak{m})$. *Ogni spazio anulato isomorfo allo spettro henseliano di una $H$-coppia dicesi* schema henseliano affine. *Uno spazio anulato si dice* schema henseliano *se è localmente uno schema henseliano affine.*

OSSERVAZIONE. – Ogni schema affine $X = \operatorname{spec}(A)$ può essere considerato uno schema henseliano affine essendo isomorfo (come spazio anulato) a $\operatorname{sph}(A, (0))$.

PROPOSIZIONE 1.3. – *Siano $(A, \mathfrak{m})$ una $H$-coppia e $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \operatorname{sph}(A, \mathfrak{m})$, per ogni $f \in A$, lo spazio anulato $(\mathfrak{D}(f), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}|\mathfrak{D}(f)})$ è canonicamente isomorfo a $\operatorname{sph}({}^hA_f, \mathfrak{m}\,{}^hA_f) = (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

DIM. – È noto che ${}^hA_f/\mathfrak{m}\,{}^hA_f = A_f/\mathfrak{m}A_f$ (cfr. [2], th. 6.1. iii)), allora per [4], I, 1.2.5 e 1.2.6 si ha che gli spazi topologici $\mathfrak{Y}$ e $\mathfrak{D}(f)$ sono omeomorfi.
Basta allora provare che, per ogni aperto $\mathfrak{D}(g) \subset \mathfrak{D}(f)$ l'anello $\Gamma(\mathfrak{D}(g), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ si identifica a $\Gamma(\mathfrak{D}(g), \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, cioè che ${}^h(A_g, \mathfrak{m}A_g)$ si identifica *a* ${}^h((A_f)_{g/1}, \mathfrak{m}(A_f)_{g/1})$ dove $g/1$ è l'immagine canonica di $g$ in $A_f$: questo si vede facilmente con un uso ripetuto della proprietà universale dell'henselizzazione e degli anelli di frazioni, tenendo presente che esiste un isomorfismo canonico di coppie (*) tra $(A_g, \mathfrak{m}A_g)$ e $((A_f)_{g/1}, \mathfrak{m}(A_f)_{g/1})$.

PROPOSIZIONE 1.4. – *Nelle ipotesi della prop. 1.3. la fibra $\mathcal{O}_x$ è isomorfa all'anello locale ${}^h(A_{\mathfrak{p}_x}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{p}_x})$; in particolare $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}\mathcal{O}_x)$ è una $H$-coppia.*

DIM. – Poichè l'henselizzazione commuta con l'operazione di passaggio al limite diretto (cfr. [2], cor. 6.3) si ha:

$$(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}\mathcal{O}_x) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}_x} {}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f) = {}^h\Big(\varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}_x} (A_f, \mathfrak{m}A_f)\Big) = {}^h(A_{\mathfrak{p}_x}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{p}_x})$$

(*) Date due coppie $(A, \mathfrak{a})$ e $(B, \mathfrak{b})$ un omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ dicesi morfismo di coppie se $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$.

DEFINIZIONE 1.5. – *Sia* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *uno spazio anulato, un aperto* $U \subset \mathfrak{X}$ *si dice* aperto henseliano affine *se lo spazio anulato indotto da* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *su* $U$ *è uno schema henseliano affine.*

Dalla def. 1.2. e dalla prop. 1.3. si ha subito il seguente:

TEOREMA 1.6. – *Sia* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *uno schema henseliano, gli aperti henseliani affini formano una base della topologia di* $\mathfrak{X}$.

**2.** – In questo paragrafo diamo (in analogia a [4] 0 § 7 e I § 10.5) la nozione di *ideale di definizione* di una $H$-coppia e di uno schema henseliano (def. 2.3 e 2.10) ed enunciamo il teorema di esistenza del più grande ideale di definizione di uno schema henseliano (teor. 2.11).

PROPOSIZIONE 2.1. – *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una* $H$*-coppia. L'omomorfismo identico* $i\colon (A, \mathfrak{m}) \to (A, r(\mathfrak{m}))$ *induce un isomorfismo di spazi anulati* $j\colon \mathrm{sph}(A, r(\mathfrak{m})) \to \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$.

DIM. – $j$ induce on omeomorfismo tra gli spazi topologici $\mathrm{spec}(A/r(\mathfrak{m}))$ e $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$, inoltre per ogni $f \in A$, $i$ induce un isomorfismo di anelli tra ${}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f)$ e ${}^h(A_f, r(\mathfrak{m})A_f)$ (cfr. [2], prop. 8.6), quindi induce un isomorfismo di fasci di anelli; infine per [2] cor. 4.9 $(A, \mathfrak{m})$ è una $H$-coppia se e solo se $(A, r(\mathfrak{m}))$ è una $H$-coppia.

La proposizione precedente prova che due ideali con lo stesso radicale dànno luogo allo stesso schema henseliano affine, si ha quindi:

PROPOSIZIONE 2.2. – *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una* $H$*-coppia,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* $A$.
*Sono condizioni equivalenti:*

i) $(A, \mathfrak{a})$ *è una* $H$*-coppia e* $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{a}) = \mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$.

ii) $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{m})$.

iii) $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{a}) = \mathrm{spec}(A/\mathfrak{m})$.

iv) $\mathrm{sph}(A, \mathfrak{a})$ *è canonicamente isomorfo a* $\mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$.

DIM.

i) $\Rightarrow$ ii). Per [1] ch. II cor. 2 pag. 127, $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{m})$ se e solo se $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{m})$ cioè se e solo se $\mathrm{spec}(A/\mathfrak{a}) = \mathrm{spec}\,(A/\mathfrak{m})$.

ii) $\Leftrightarrow$ iii). Ovvio.

iii) $\Rightarrow$ iv). Ovvio per la prop. 2.1 poichè per ii) $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{m})$.

iv) $\Rightarrow$ i). Ovvio.

Si può allora dare la seguente:

DEFINIZIONE 2.3. – *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una* $H$*-coppia, un ideale* $\mathfrak{a}$ *di* $A$ *dicesi* ideale di definizione dell'$H$*-coppia* $(A, \mathfrak{m})$ *se verifica una delle condizioni equivalenti della prop.* 2.2.

Dalla prop. 2.2 e dalla def. 2.3 si ha immediatamente:

COROLLARIO 2.4. – *Sia* $(A, \mathfrak{m})$ *una H-coppia,* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* $A$. *Sono condizioni equivalenti*:

i) $\mathfrak{a}$ *è il più grande ideale di definizione di* $(A, \mathfrak{m})$.

ii) $\mathfrak{a}$ *è un ideale di definizione e* $A/\mathfrak{a}$ *è un anello ridotto.*

*Una H-coppia ammette sempre un più grande ideale di definizione e questo coincide con* $r(\mathfrak{m})$. *Tale ideale dicesi* ideale canonico.

Sia ora $(A, \mathfrak{m})$ una $H$-coppia, $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$. Si può associare a $\mathfrak{a}$ un prefascio $\tilde{\mathfrak{a}}$ di ideali di $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ponendo: $\tilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{D}(f)) = \mathfrak{a} \otimes_A {}^h(A_f)$ per ogni $f \in A$.

Vale allora il seguente teorema (cfr. [3] teor. 2):

TEOREMA 2.5. – *Con le notazioni precedenti si ha*:

*a)* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *è un fascio.*

*b) per ogni* $f \in A$, $\mathfrak{a} \otimes_A {}^h(A_f)$ *è isomorfo a* $\Gamma(\mathfrak{D}(f), \tilde{\mathfrak{a}})$. *In particolare* $\mathfrak{a} = \Gamma(\mathfrak{X}, \tilde{\mathfrak{a}})$.

*c) per ogni* $x \in \mathfrak{X}$ *si ha un isomorfismo canonico tra* $(\tilde{\mathfrak{a}})_x$ *e* $\mathfrak{a} \otimes_A \mathcal{O}_x$.

Per la piattezza dell'henselizzazione si ha poi che:

$$\mathfrak{a} \otimes_A {}^h(A_f) = \mathfrak{a}^h(A_f) .$$

COROLLARIO 2.6. – *Con le notazioni precedenti si possono identificare canonicamente il fascio* $(\mathfrak{a}^h A_f)^\sim$ *associato all'*${}^h A_f$*-modulo* $\mathfrak{a}^h A_f$, *e* $\tilde{\mathfrak{a}}|\mathfrak{D}(f)$ *per ogni* $f \in A$.

DIM. – Per il teor. 2.5. $\Gamma(\mathfrak{D}(f), \tilde{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}^h(A_f)$, inoltre, tenuto conto della prop. 1.3, per ogni $\mathfrak{D}(g) \subset \mathfrak{D}(f)$ si ha

$$\Gamma(\mathfrak{D}(g), \tilde{\mathfrak{a}}|\mathfrak{D}(f)) = \mathfrak{a}^h(A_g) = \mathfrak{a}^h({}^h(A_f)_{g/1}) = \mathfrak{a}^h(A_f) \otimes_{{}^h A_f} {}^h({}^h(A_f)_{g/1}) = \Gamma(\mathfrak{D}(g), (\mathfrak{a}^h A_f)^\sim) .$$

In modo analogo a quanto accade per gli schemi formali (cfr. [4], 10.5.1) si hanno i seguenti:

DEFINIZIONE 2.7. – *Un fascio* $\mathfrak{J}$ *di ideali di* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ *dicesi* ideali di definizione *dello schema henseliano affine* $\mathfrak{X}$ *se, per ogni* $x \in \mathfrak{X}$ *esiste un intorno aperto di* $x$ *del tipo* $\mathfrak{D}(f)$ *tale che* $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(f)$ *sia della forma* $\mathfrak{a}_f^\sim$ *dove* $\mathfrak{a}_f$ *è un ideale di definizione della coppia* ${}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f)$.

TEOREMA 2.8. – *Sia* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *uno schema henseliano affine e sia* $\mathfrak{J}$ *un ideale di definizione di* $\mathfrak{X}$, *allora ogni punto* $x \in \mathfrak{X}$ *ammette un sistema fondamentale di intorni del tipo* $\mathfrak{D}(g)$ *tali che* $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(g)$ *è della forma* $(\mathfrak{a}_g)^\sim$ *con* $\mathfrak{a}_g$ *ideale di definizione della coppia* ${}^h(A_g, \mathfrak{m}A_g)$.

DIM. – Per la def. 2.7. fissato $x$ esiste $f \notin \mathfrak{p}_x$ tale che $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(f) = (\mathfrak{a}_f)^{\sim}$ con $r(\mathfrak{a}_f) = r(\mathfrak{m}^h A_f)$; sia ora $\mathfrak{D}(g)$ un intorno di $x$ contenuto in $\mathfrak{D}(f)$, poichè per la prop. 1.3 $\mathfrak{D}(f)$ può essere considerato uno schema henseliano affine con la struttura indotta da $\mathfrak{X}$, possiamo sempre supporre $f = 1$ e quindi $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a}$ con $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{m})$, d'altronde per [2] th. 8.3. si ha che $r(\mathfrak{a}^h A_g) = (r(\mathfrak{a}))^h A_g = (r(\mathfrak{m}))^h A_g = r(\mathfrak{m}^h A_g)$ quindi $\mathfrak{a}^h A_g$ è di definizione per la coppia ${}^h(A_g, \mathfrak{m}A_g)$ ma per il teor. 2.6 $(\mathfrak{a}^h A_g)^{\sim} = \mathfrak{J}|\mathfrak{D}(g)$, da cui la tesi.

COROLLARIO 2.9. – *Se $\mathfrak{J}$ è un ideale di definizione per lo schema henseliano affine $\mathfrak{X}$, allora $\mathfrak{J}_x$ è un ideale di definizione della coppia $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}\mathcal{O}_x)$.*

DIM. – Segue subito dal teor. 2.8. tenuto conto del fatto che l'operazione di radicale commuta con quella di limite diretto e ricordando che $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}\mathcal{O}_x)$ si può ottenere come limite diretto delle coppie ${}^h(A_g, \mathfrak{m}A_g)$ al variare di $\mathfrak{D}(g)$ nel sistema fondamentale di intorni del teor. 2.8.

Si può allora generalizzare la definizione 2.7 al caso di schemi henseliani qualsiasi, si ha allora:

DEFINIZIONE 2.10. – *Sia $\mathfrak{X}$ uno schema henseliano, un fascio $\mathfrak{J}$ di ideali di $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ dicesi* ideale di definizione *di $\mathfrak{X}$ se ogni punto $x \in \mathfrak{X}$ ammette un intorno aperto henseliano affine $U$ tale che $\mathfrak{J}|U$ sia di definizione per lo schema henseliano affine indotto da $\mathfrak{X}$ su $U$.*

OSSERVAZIONE. – Si può provare che se $\mathfrak{J}$ è ideale di definizione di uno schema henseliano $\mathfrak{X}$, lo spazio anulato $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ è uno schema usuale.

A conclusione di questo paragrafo enunciamo il seguente teorema che verrà provato nel paragrafo successivo (cfr. 3.9):

TEOREMA 2.11. – *Sia $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ uno schema henseliano, allora esiste un ideale di definizione $\mathfrak{J}$ di $\mathfrak{X}$, tale che lo schema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$ è ridotto. Tale ideale dicesi* ideale canonico *dello schema $\mathfrak{X}$.*

Un teorema analogo al teor. 2.11 per gli schemi formali è provato da GROTHENDIECK in [4] I prop. 10.5.4. nel caso in cui $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ sia uno schema formale *localmente noetheriano.*

**3.** – In questo numero, dopo alcune considerazioni sui morfismi di coppie, necessarie per provare il teor. 2.11 (cfr. cor. 3.9), si definiscono i *morfismi* di schemi henseliani (def. 3.10) e i morfismi *adici* (def. 3.11). Infine si prova che l'immersione canonica di un aperto di uno schema henseliano è un morfismo adico (teor. 3.13).

Siano $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ due $H$-coppie e sia $\varphi\colon (B, \mathfrak{n}) \to (A, \mathfrak{m})$ un morfismo di coppie (cfr. nota a pag. 2), la funzione continua indotta da $\varphi$, ${}^a\varphi\colon \operatorname{spec}(A) \to \operatorname{spec}(B)$ applica allora $\mathfrak{X} = \operatorname{sph}(A, \mathfrak{m})$ in $\mathfrak{Y} = \operatorname{sph}(B, \mathfrak{n})$, dal momento che la controimmagine mediante $\varphi$ di un ideale primo di $A$ contenente $\mathfrak{m}$ è un ideale primo di $B$ contenente $\mathfrak{n}$. Tale applicazione continua sarà ancora notata con ${}^a\varphi$.

Vogliamo provare che $\varphi$ induce un morfismo di spazi anulati tre $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$, cioè che $\varphi$ induce un morfismo di fasci da $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

A tale scopo premettiamo il seguente lemma:

LEMMA 3.1. – *Sia* $\varphi: (B, \mathfrak{n}) \to (A, \mathfrak{m})$ *un morfismo di coppie e sia* $g \in B$. *Allora* $\varphi$ *induce un morfismo di coppie*

$$\varphi_g: {}^h(B_g, \mathfrak{n}B_g) \to {}^h(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)}) .$$

DIM. – Sia $f_g: B_g \to A_{\varphi(g)}$ l'omomorfismo indotto da $\varphi$, così definito: $f_g(b/g^n) = \varphi(b)/\varphi(g^n)$, si verifica senza difficoltà che $f_g$ è un morfismo di coppie tra $(B_g, \mathfrak{n}B_g)$ e $(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)})$. Per la proprietà universale dell'henselizzazione (cfr. [2] def. 1.7) esiste un unico morfismo di coppie $\bar{\varphi}$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(B_g, \mathfrak{n}B_g) \arrow[r] \arrow[d, "f_g"] & {}^h(B_g, \mathfrak{n}B_g) \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\
(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)}) \arrow[r] & {}^h(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)})
\end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

dove i morfismi orizzontali sono i morfismi canonici (di coppie) da un anello alla sua henselizzazione. Allora $\varphi_g = \bar{\varphi}$ è il morfismo cercato.

Il morfismo così ottenuto è compatibile con le restrizioni corrispondenti al passaggio da $g$ a un multiplo di $g$ (le restrizioni sono morfismi di coppie). Inoltre $\mathfrak{D}(\varphi(g)) = {}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(g))$.

Tenendo conto del teor. 1.1.*b*) si ha così un omomorfismo di fasci di anelli $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \to ({}^a\varphi)_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ (cfr. [4], $0_{\mathrm{I}}$, 3.2.5.), che indicheremo con $\tilde{\varphi}$. Si è così determinato un morfismo di spazi anulati $F = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi}): \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$.

OSSERVAZIONE. – Si è già notato (prop. 2.1.) che, data una $H$-coppia $(A, \mathfrak{m})$ esiste un isomorfismo di spazi anulati tra $\mathrm{sph}(A, r(\mathfrak{m}))$ e $\mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$, in generale cioè, gli spazi anulati $\mathrm{sph}(A, \mathfrak{a})$ e $\mathrm{sph}(A, \mathfrak{a}')$ sono isomorfi ogniqualvolta $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}'$ sono ideali di definizione per l'$H$-coppia $(A, \mathfrak{m})$.

Nel seguito (salvo avviso contrario) per evitare ambiguità data una $H$-coppia $(A, \mathfrak{m})$ assumeremo sempre che $\mathfrak{m}$ è l'ideale di definizione *canonico*, cioè $\mathfrak{m} = r(\mathfrak{m})$.

PROPOSIZIONE 3.2. – *Siano* $(A, \mathfrak{m})$ *e* $(B, \mathfrak{n})$ *due H-coppie con* $\mathfrak{m}$ *e* $\mathfrak{n}$ *gli ideali di definizione canonici, siano* $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ *e* $\mathfrak{Y} = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$. *Condizione necessaria e sufficiente un morfismo di spazi anulati* $u = (\psi, \theta): \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *sia della forma* $({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$ *dove* $\varphi: (B, \mathfrak{n}) \to (A, \mathfrak{m})$ *è un morfismo di coppie, è che per ogni* $x \in \mathfrak{X}$, $\theta_x^\#: (\mathcal{O}_{\psi(x)}, \mathfrak{n}\mathcal{O}_{\psi(x)}) \to (\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}\mathcal{O}_x)$ *sia un omomorfismo locale e di coppie.* (cfr. [4], $O_{\mathrm{I}}$, 3.7.1. per la definizione di $\theta^\#$).

DIM. – La condizione è ovviamente necessaria perchè il limite diretto di morfismi di coppie è ancora di coppie.

Viceversa sia $u = (\psi, \theta)$ un morfismo che verifica le condizioni dell'enunciato, $\theta$ definisce un omomorfismo di anelli

$$\varphi = \Gamma(\theta): B = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = A .$$

Si prova con facili calcoli che $\varphi$ è un morfismo di coppie tra $(B, \mathfrak{n})$ e $(A, \mathfrak{m})$. Inoltre per ogni $g \in B$ è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} B = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \arrow[r, "\varphi = \Gamma(\theta)"] \arrow[d] & \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = A \arrow[d] \\ {}^h(B_g, \mathfrak{n}B_g) = \Gamma(\mathfrak{D}(g), \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \arrow[r, "\Gamma(\theta_{\mathfrak{D}(g)})"] & \Gamma\big((\mathfrak{D}\varphi(g)), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\big) = {}^h(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)}) \,. \end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

e per la proprietà universale dell'henselizzazione ([2], def. 1.7.) si ha $\theta_{\mathfrak{D}(g)} = \tilde{\varphi}_{\mathfrak{D}(g)}$, quindi per [4], $O_{\mathrm{I}}$, 3.2.5. si ha $\theta = \tilde{\varphi}$. Infatti i morfismi canonici (di coppie) verticali del diagramma 3.2.1. si fattorizzano attraverso $B_g$ e $A_{\varphi(g)}$ e per il lemma 3.1 è unico il morfismo $\bar{\varphi} = \varphi_g$ che chiude il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} (B, \mathfrak{n}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & (A, \mathfrak{m}) \arrow[d] \\ (B_g, \mathfrak{n}B_g) \arrow[r, "f_g"'] \arrow[d] & (A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)}) \arrow[d] \\ {}^h(B_g, \mathfrak{n}B_g) \arrow[r, "\bar{\varphi} = \varphi_g"'] & {}^h(A_{\varphi(g)}, \mathfrak{m}A_{\varphi(g)}) \,. \end{tikzcd} \tag{3.2.2}$$

Infine, poichè $\theta_x^\#$ è locale, per passaggio al quoziente possiamo dedurre un monomorfismo tra i corpi residui che (teor. 1.1.*c*)) sono $k(\psi(x))$ e $k(x)$. Segue allora facilmente che per ogni $x \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}_{\psi(x)} = \mathfrak{p}_{a_{\varphi(x)}}$, cioè l'applicazione continua indotta da $\varphi$ tra $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ coincide con $\psi$.

Possiamo così dare la seguente definizione di morfismo di schemi henseliani affini analoga a quella data in [4], *I*, 10.2.2. per i morfismi di schemi formali affini.

DEFINIZIONE 3.3. – *Un morfismo di spazi anulati verificante la condizione della prop.* 3.2. *dicesi* morfismo di schemi henseliani affini.

Dalla definizione precedente si ha subito:

COROLLARIO 3.4. – *I funtori* $(A, \mathfrak{m}) \to \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e $\mathfrak{X} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *definiscono una equivalenza tra la categoria delle H-coppie e la categoria duale della categoria degli schemi henseliani affini.*

Il cor. 3.4. afferma cioè che, fissati $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e $\mathfrak{Y} = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$ esiste una corrispondenza biunivoca canonica tra i morfismi di spazi anulati di $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ locali e di coppie sulle fibre e i morfismi di coppie da $(B, \mathfrak{n})$ in $(A, \mathfrak{m})$ (le $H$-coppie sono considerate con l'ideale di definizione *canonico*).

Come caso particolare della prop. 3.2. si ha:

CORLLARIO 3.5. – *Sia* $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$, *sia f un elemento di A. Allora l'immersione canonica dello schema henseliano affine indotto da* $\mathfrak{X}$ *su* $\mathfrak{D}(f)$ *corrisponde al morfismo* *canonico di coppie*

$$(A, \mathfrak{m}) \to {}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f)\,.$$

COROLLARIO 3.6. – *Nelle ipotesi della prop. 3.2. siano $h \in B$ e $k \in A$ tali che $k$ è multiplo di $\varphi(h)$. Si ha allora $\big($poichè $\psi(\mathfrak{D}(k)) \subset \mathfrak{D}(h)\big)$ che la restrizione di $u$ a $\mathfrak{D}(k)$ è l'unico morfismo $v$ che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D}(k) & \xrightarrow{v} & \mathfrak{D}(h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow[u]{} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

*dove le frecce verticali sono le immersioni canoniche.*

DIM. – $v$ corrisponde all'unico morfismo di coppie $\varphi' : {}^h(B_h) \to {}^h(A_k)$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} (B, \mathfrak{n}) & \xrightarrow{\varphi} & (A, \mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B_h, \mathfrak{n}B_h) & \xrightarrow{\varphi''} & (A_k, \mathfrak{m}A_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^h(B_h, \mathfrak{n}B_h) & \xrightarrow{\varphi'} & {}^h(A_k, \mathfrak{m}A_k) \end{array} \tag{3.6.1}$$

dove, posto $k = g \cdot \varphi(h)$, si definisce $\varphi''(b/h^n) = \varphi(b)/\varphi(b^n) = \big(g^n \cdot \varphi(b)\big)/k^n$.

I seguenti teoremi 3.7 e 3.8. ci permetteranno di dimostrare il teor. 2.11 del n. 2 che afferma l'esistenza di un « più grande » ideale di definizione in uno schema henseliano qualsiasi.

TEOREMA 3.7. – *Sia $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e sia $U$ un aperto di $\mathfrak{X}$ tale che $(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U) = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$ con $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideali di definizione canonici. Allora il morfismo di spazi anulati indotto dall'immersione $j: U \to \mathfrak{X}$, induce un morfismo di coppie $\varphi: (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$; inoltre $\varphi(\mathfrak{m})B = \mathfrak{n}$ e $j = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$.*

DIM. – Posto $X = \mathrm{spec}(A)$, $Y = \mathrm{spec}(B)$ si ha che $U = Y \cap \mathfrak{X}$. Allora per ogni $f \in A$ tale che $D(f) \subset Y$, $\mathfrak{D}(f) \subset U$; sia $\varphi: A \to B$ l'omomorfismo di anelli indotto da $j$ e sia $s: B \to A_f$ l'omomorfismo indotto dall'immersione di $D(f)$ in $Y$, allora è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \quad \swarrow_{s} & \\ & A_f & \end{array}$$

Si verifica facilmente che esiste un isomorfismo di coppie tra $(A_f, \mathfrak{m}A_f)$ e $(B_{\varphi(f)}, \mathfrak{n}B_{\varphi(f)})$ e poichè $\mathfrak{D}(f)$ è omeomorfo a $\mathfrak{D}(\varphi(f))$ e $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sono gli ideali canonici, si possono identificare $\mathfrak{m}A_f$ e $\mathfrak{n}B_{\varphi(f)}$. Allora per ogni $x \in U$ l'omomorfismo indotto da $\varphi$ sulle fibre è un morfismo di coppie tra $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{n}\mathcal{O}_x)$ e $((\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)_x, \mathfrak{n}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U)_x)$, quindi per [1] ch. II cor. 3 pag. 112 si ha che $\varphi(\mathfrak{m})B = \mathfrak{n}$. Infine dalla prop. 3.2. si ha subito $j = ({}^a\varphi, \tilde{\varphi})$.

Il teorema precedente mostra che i morfismi di spazi anulati indotti dalle restrizioni sugli aperti (henseliani) affini di uno schema henseliano $\mathfrak{X}$, inducono morfismi di coppie tra le $H$-coppie (con l'ideale canonico) associate a ciascun aperto. Allora fissato un punto $x$ di $\mathfrak{X}$, consideriamo la famiglia $\mathfrak{U}$ degli intorni aperti henseliani affini di $x$. Per ogni $U \in \mathfrak{U}$ sia $(A_U, \mathfrak{m}_U)$ l'$H$-coppia corrispondente: la famiglia di coppie così ottenuta forma un sistema diretto di anelli e ideali. Si ha allora:

Teorema 3.8. – *Con le notazioni precedenti* $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}_x)$ *è una $H$-coppia e* $\mathfrak{m}_x$ *ne è l'ideale canonico di definizione.*

Dim. – $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}_x) = \varinjlim (A_U, \mathfrak{m}_U)$ al variare di $U$ in $\mathfrak{U}$ e poichè il limite diretto di $H$-coppie è una $H$-coppia (cfr. [2], th. 6.3.) si ha la tesi; d'altra parte il limite diretto di anelli ridotti è ridotto quindi per il cor. 2.4 $\mathfrak{m}_x$ è il più grande ideale di definizione.

Possiamo ora provare il teor. 2.11:

Corollario 3.9. – *Sia* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *uno schema henseliano allora esiste un ideale di definizione* $\mathfrak{I}$ *di* $\mathfrak{X}$ *tale che lo schema* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})$ *è ridotto.*

Dim. – Supponiamo dapprima che $\mathfrak{X}$ sia affine. Sia allora $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e sia $\mathfrak{I}$ il fascio di ideali associato all'ideale canonico di $(A, \mathfrak{m})$ allora per ogni $x \in \mathfrak{X}$ la fibra $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})_x = ({}^h(A_{\mathfrak{p}_x}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{p}_x})/r(\mathfrak{m})^h A_{\mathfrak{p}_x})$ è un anello ridotto, quindi $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I})$ è uno schema ridotto. In gnerale se $U \supset V$ sono aperti henseliani affini basta provare che l'ideale di definizione canonico $\mathfrak{I}_U$ di $U$ induce l'ideale di definizione canonico $\mathfrak{I}_V$ di $V$ e ciò segue subito dal teor. 3.7.

Dal teor. 3.8 segue allora che, dato uno schema henseliano, si può associare ad ogni suo punto una coppia henseliana che ne rappresenta la fibra in quel punto, perciò, analogamente a quanto accade per gli schemi formali (cfr. [4], *I*, 10.4.5) si possono definire i morfismi di schemi henseliani:

Definizione 3.10. – *Siano* $\mathfrak{X}$ *e* $\mathfrak{Y}$ *due schemi henseliani, dicesi* morfismo di schemi henseliani *ogni morfismo di spazi anulati che induca un morfismo di coppie locale sulle fibre.*

Osservazione. – La definizione precedente riformula, in modo più corretto la def. 2 di [3] che chiamava morfismi di schemi henseliani i morfismi di spazi anulati che inducevano omomorfismi locali sulle fibre.

Si verifica facilmente che la def. 3.10. è equivalente alla seguente definizione che non tiene conto esplicitamente della struttura di coppie sulle fibre.

Definizione 3.10.1. – *Siano* $\mathfrak{X}$ *e* $\mathfrak{Y}$ *due schemi henseliani, dicesi* morfismo di schemi henseliani *ogni morfismo* $u = (\psi, \theta)$ *di spazi anulati tale che per ogni ricoprimento* $(U_i)$

*di $\mathfrak{X}$ con aperti henseliani affini, esiste un ricoprimento $(V_i)$ di $\mathfrak{Y}$ con aperti henseliani affini per cui si abbia:*

i) $\psi(U_i) \subset V_i$ *per ogni* $i$,

ii) $u|_{U_i}$ *è indotto da un morfismo di coppie* $f_i\colon \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *dove gli ideali sono gli ideali canonici delle $H$-coppie associate a $U_i$ e $V_i$.*

Dalla prop. 3.2. segue subito che 3.10 implica 3.10.1, il viceversa si prova facilmente considerando il ricoprimento di $\mathfrak{X}$ formato dagli intorni aperti henseliani affini di ogni suo punto.

OSSERVAZIONE. – Poichè la composizione di morfismi di coppie è ancora di coppie la composizione di morfismi di schemi henseliani è ancora un morfismo di schemi henseliani, gli schemi henseliani formano quindi una categoria.

DEFINIZIONE 3.11. – *Siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ due schemi henseliani, un morfismo di schemi henseliani $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ dicesi* adico *se esiste un ideale di definizione $\mathfrak{J}$ di $\mathfrak{Y}$ tale che $f^*(\mathfrak{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ sia un ideale di definizione per $\mathfrak{X}$.*

TEOREMA 3.12. – *Siano $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ due schemi henseliani, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morfismo* adico *allora per ogni ideale di definizione $\mathfrak{J}'$ di $\mathfrak{Y}$ $f^*(\mathfrak{J}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è di definizione per $\mathfrak{X}$.*

DIM. – Per la def. 2.10. ci si può ridurre al caso affine, sia allora $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$ con $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ ideali di definizione canonici. Sia $\varphi\colon (B, \mathfrak{n}) \to (A, \mathfrak{m})$ il morfismo di coppie indotto da $f$ e sia $\mathfrak{J}$ l'ideale di definizione di $\mathfrak{Y}$ tale che $f^*(\mathfrak{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è di definizione per $\mathfrak{X}$. Per ogni $y \in \mathfrak{Y}$ esistono due intorni $\mathfrak{D}(h)$ e $\mathfrak{D}(h')$ di $y$ tali che $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(h) = \tilde{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(h') = \mathfrak{a}'$ con $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}'$ ideali di definizione rispettivamente di ${}^h(B_h, \mathfrak{n}B_h)$ e ${}^h(B_{h'}, \mathfrak{n}B_{h'})$ allora in $\mathfrak{D}(hh')$ si ha che $h|\mathfrak{D}(hh') = \tilde{\mathfrak{b}}$ e $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(hh') = \tilde{\mathfrak{b}}'$ con $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ ideali di definizione dell'$H$-coppia ${}^h(B_{hh'}, \mathfrak{n}B_{hh'})$ (cfr. teor. 2.8). Considerando la struttura di schema henseliano affine indotta da $\mathfrak{Y}$ su $\mathfrak{D}(hh')$ e tenendo conto del fatto che ${}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{D}(hh')) = \mathfrak{D}(\varphi(hh'))$ si può sempre supporre $hh' = 1$ cioè $\mathfrak{D}(hh') = \mathfrak{Y}$.

Si ha allora $\mathfrak{J} = \tilde{\mathfrak{b}}$ e $\mathfrak{J}' = \tilde{\mathfrak{b}}'$ con $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ ideali di definizione di $(B, \mathfrak{n})$, ora, per ipotesi, $f^*(\mathfrak{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = (\varphi(\mathfrak{b})A)^\sim$ è di definizione, quindi $r(\varphi(\mathfrak{b})A) = \mathfrak{m} = r\big(\varphi(r(\mathfrak{b}))A\big)$ (*) ma $r(\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{b}')$ quindi si ha $r(\varphi(\mathfrak{b}')A) = \mathfrak{m}$ cioè $\varphi(\mathfrak{b}')A$ è di definizione, allora $f^*(\mathfrak{J}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ è di definizione per $\mathfrak{X}$.

Si può allora provare la seguente importante proprietà:

TEOREMA 3.13. – *Sia $\mathfrak{X}$ uno schema henseliano, $U$ un aperto di $\mathfrak{X}$ l'immersione canonica dello schema henseliano indotto da $\mathfrak{X}$ su $U$, $j\colon \big(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|U\big) \to (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ è un morfismo* adico *di schemi henseliani.*

DIM. – Sia $\mathfrak{V} = (V_i)$ un ricoprimento con aperti henseliani affini di $U$ e completiamolo ad un ricoprimento $\mathfrak{W} = (V_i) \cup (W_k)$ con aperti henseliani affini di $\mathfrak{X}$.

(*) In generale se $g\colon A \to A'$ è un omomorfismo di anelli si ha $r(g(\mathfrak{a})A') = r\big(g(r(\mathfrak{a}))A'\big)$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $A$.

Si vede subito che è verificata la def. 3.10.1. perchè, per il teor. 3.7. la restrizione a ciascun $V_i$ è indotta da un morfismo di coppie. Inoltre se $\mathfrak{J}$ è un ideale di definizione di $\mathfrak{X}$, $j^*(\mathfrak{J})$ è di definizione per $U$, infatti, poichè per la def. 2.10. ci si può ridurre a caso affine, la tesi segue immediatamente dal teor. 3.7.

**4.** – In questo paragrafo proviamo l'esistenza e l'unicità del prodotto di schemi henseliani (prop. 4.7.), applicando poi i risultati ottenuti ai morfismi adici (prop. 4.9.)

A) *Prodotto henseliano di coppie.*

Siano $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ coppie con $A$ e $B$ algebre su un anello $C$. Consideriamo la coppia

$$(T, \mathfrak{b}) = \big(A \otimes_C B, (\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_C B) + \mathrm{Im}(A \otimes_C \mathfrak{n}))\big)\,,$$

dove $\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_C B)$ e $\mathrm{Im}(A \otimes_C \mathfrak{n})$ indicano, rispettivamente, le immagini canoniche di $\mathfrak{m} \otimes_C B$ e di $A \otimes_C \mathfrak{n}$ in $A \otimes_C B$.

È immediato verificare che gli omomorfismi canonici $\alpha: A \to T$ e $\beta: B \to T$ sono $C$-morfismi di coppie rispetto agli ideali considerati.

Sia ora ${}^h(T, \mathfrak{b})$ l'henselizzazione di $(T, \mathfrak{b})$ e sia $\varphi: (T, \mathfrak{b}) \to {}^h(T, \mathfrak{b})$ il morfismo di di coppie canonico: per composizione abbiamo i $C$-morfismi di coppie $\varrho: (A, \mathfrak{m}) \to {}^h(T, \mathfrak{b})$ *e* $\sigma: (B, \mathfrak{n}) \to {}^h(T, \mathfrak{b})$ definiti da $\varrho = \varphi \circ \alpha$, $\sigma = \varphi \circ \beta$.

Con le notazioni precedenti la terna $({}^h(T, \mathfrak{b}), \varrho, \sigma)$ gode della seguente proprietà universale, analoga a quella di [4], $O_{\mathrm{I}}$, 7.7.6. per i completamenti:

PROPOSIZIONE 4.1. – *Per ogni H-coppia* $(R, \mathfrak{r})$ *dove* $R$ *è una C-algebra e per ogni coppia di C-morfismi (di coppie)* $u: (A, \mathfrak{m}) \to (R, \mathfrak{r})$ *e* $v: (B, \mathfrak{n}) \to (R, \mathfrak{r})$ *esiste un unico C-morfismo di coppie* $w: {}^h(T, \mathfrak{b}) \to (R, \mathfrak{r})$ *tale che* $u = w \circ \varrho$ *e* $v = w \circ \sigma$.

DIM. – Poichè esiste un unico $C$-morfismo $w_0: A \otimes_C B \to R$ tale che $u(a) = w_0(a \otimes 1)$ e $v(b) = w_0(1 \otimes b)$ basterà provare che $w_0$ è di coppie, poi per la proprietà universale dell'henselizzazione (cfr. [2], def. 1.7.) esiste un unico morfismo di coppie $w: {}^h(T, \mathfrak{b}) \to R, \mathfrak{r})$ tale che $w_0 = w \circ \varphi$.

Per ipotesi $u(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{r}$ e $v(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{r}$, quindi $w_0(\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_C B) + \mathrm{Im}(A \otimes_C \mathfrak{n})) \subset \mathfrak{r}$ perciò $w$ è di coppie. Allora esiste un unico $C$-morfismo di coppie $w$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & (A, \mathfrak{m}) \arrow[dl, "\varrho"'] \arrow[dr, "u"] & \\
{}^h(T, \mathfrak{b}) \arrow[rr, "w"] & & (R, \mathfrak{r}) \\
 & (B, \mathfrak{n}) \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINIZIONE 4.2. – *Date due H-coppie $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ con $A$ e $B$ algebre su un anello $C$, dicesi prodotto henseliano di $(A, \mathfrak{m})$ e $(B, \mathfrak{n})$ l'H-coppia*

$$^h\big(A \otimes_C B, \big(\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_C B) + \mathrm{Im}(A \otimes_C \mathfrak{n})\big)\big) .$$

B) *S-schemi henseliani e prodotto di S-schemi henseliani.*

DEFINIZIONE 4.3. – *Sia $(S, \mathcal{O}_S) = S$ uno schema henseliano, si dice che il dare uno schema henseliano $\mathfrak{X}$ e un morfismo di schemi henseliani $f\colon \mathfrak{X} \to S$ definisce un* $S$-schema henseliano, *ovvero uno schema henseliano* sopra $S$; *$f$ dicesi* morfismo strutturale.

OSSERVAZIONE. – Uno schema henseliano può sempre essere considerato come schema henseliano *sopra* $\mathrm{sph}(\mathbb{Z}, (0))$.

DEFINIZIONE 4.4. – *Se $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ sono due S-schemi henseliani, un morfismo (di schemi henseliani) $u\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ si dice* $S$-morfismo *se il diagramma*:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & \mathfrak{Y} \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

*(dove le frecce oblique sono i morfismi strutturali) è commutativo.*

Con le precedenti definizioni, per ogni fissato $S$, gli $S$-schemi henseliani formano una categoria e indicheremo con $\mathrm{Hom}_S(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ l'insieme degli $S$-morfismi dell' $S$-schema Henseliano $\mathfrak{X}$ nell $S$-schema henseliano $\mathfrak{Y}$.

Si ha subito il seguente:

COROLLARIO 4.5. – *Sia $\mathfrak{X}$ un S-schema henseliano, $v\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morfismo di schemi henseliani, il morfismo composto $\mathfrak{X}' \xrightarrow{v} \mathfrak{X} \to S$ definisce su $\mathfrak{X}'$ una struttura di S-schema henseliano. In particolare ogni schema henseliano indotto su un aperto $U$ di $\mathfrak{X}$ può essere considerato come S-schema henseliano per mezzo dell'immersione canonica.*

Si può ora definire la nozione di prodotto di due $S$-schemi henseliani nella categoria degli $S$-schemi henseliani (*).

---

(*) Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $X$ e $Y$ due oggetti di $\mathcal{C}$, si dice che $X$ e $Y$ ammettono un prodotto in $\mathcal{C}$ se il funtore controvariante $F\colon T \mapsto \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$ di $\mathcal{C}$ nella categoria degli insiemi, è *rappresentabile* (un oggetto che lo rappresenta è formato da un oggetto $Z \in \mathcal{C}$ e da una coppia di morfismi $p\colon Z \to X$ e $q\colon Z \to Y$). Per maggiori dettagli cfr. [4] $0_{\mathrm{I}}$, § 1.2.

PROPOSIZIONE 4.6. – *Siano* $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ *e* $\mathfrak{Y} = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$ *due schemi henseliani affini sopra* $S = \mathrm{sph}(C, \mathfrak{a})$. *Sia* $\mathfrak{Z} = \mathrm{sph}\big({}^h(T, r(\mathfrak{b}))\big)$, *dove*

$$(T, \mathfrak{b}) = \big(A \otimes_C B, \big(\mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes_C B) + \mathrm{Im}(A \otimes_C \mathfrak{n})\big)\big)$$

*e siano* $p$ *e* $q$ *gli* $S$*-morfismi di schemi henseliani corrispondenti ai* $C$*-morfismi canonici di coppie* $\varrho\colon (A, \mathfrak{m}) \to {}^h(T, r(\mathfrak{b}))$ *e* $\sigma\colon (B, \mathfrak{n}) \to {}^h(T, r(\mathfrak{b}))$. *Allora la terna* $(\mathfrak{Z}, p, q)$ *è un* prodotto *degli* $S$*-schemi henseliani* affini $\mathfrak{X}$ *e* $\mathfrak{Y}$.

DIM. – Per il cor. 3.4. basta verificare che, data una $H$-coppia $(R, \mathfrak{r})$ con $R$ algebra su $C$, se ad ogni $C$-morfismo di coppie $\varphi\colon {}^h(T, r(\mathfrak{b})) \to (R, \mathfrak{r})$ associamo la coppia $(\varphi \circ \varrho, \varphi \circ \sigma)$ si definisce una bigezione da $\mathrm{Hom}_C\big({}^h(T, r(\mathfrak{b})), (R, \mathfrak{r})\big)$ sopra $\mathrm{Hom}_C\big((A, \mathfrak{m}), (R, \mathfrak{r})\big) \times \mathrm{Hom}_C\big((B, \mathfrak{n}), (R, \mathfrak{r})\big)$: questo risulta subito dalla proprietà universale del prodotto henseliano di coppie (cfr. prop. 4.1.).

Allora, ripetendo la dimostrazione fatta da Grothendieck per gli schemi usuali (cfr. [4] *I*, 3.2.1.) sostituendo agli schemi affini (risp. agli aperti affini) gli schemi henseliani affini (risp. gli aperti henseliani affini) e applicando la prop. 4.6 anzichè la prop. 3.2.1.3. di [4], possiamo provare il seguente:

TEOREMA 4.7. – *Dati due* $S$*-schemi henseliani* $\mathfrak{X}$ *e* $\mathfrak{Y}$ *esiste il prodotto* $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{Y}$.

Dal teor. 4.7. si ha subito, con una dimostrazione simile a quella di [4] I, 3.2.3., il seguente corollario:

COROLLARIO 4.8. – *Sia* $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{Y}$, $p\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ *e* $q\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ *le proiezioni canoniche* $f$ *e* $g$ *i morfismi strutturali di* $\mathfrak{X}$ *e* $\mathfrak{Y}$, *sia* $U$ *un aperto di* $S$, $V$ (*risp.* $W$) *un aperto di* $\mathfrak{X}$ (*risp. di* $\mathfrak{Y}$) *contenuto in* $f^{-1}(U)$ (*risp. in* $g^{-1}(U)$) *allora il prodotto* $V \times_U W$ *si identifica canonisamente allo schema henseliano indotto da* $\mathfrak{Z}$ *sull'aperto* $p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W)$ (*considerato come* $U$*-schema henseliano*).

OSSERVAZIONE. – Enunciati analoghi a 4.6., 4.7., 4.8. valgono anche per gli schemi formali (cfr. [4], *I*, 10.7.).

Proviamo ora un teorema che lega il prodotto henseliano e i morfismi adici:

TEOREMA 4.9. – *Siano* $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *e* $(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$ *due schemi henseliani,* $\mathfrak{J}$ *un ideale di definizione di* $\mathfrak{X}$, $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J})$, $f\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *un morfismo adico* (*cfr.* 3.11.). *Allora* $(X', \mathcal{O}_{X'}) = (\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/f^*(\mathfrak{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$ *è il prodotto henseliano di* $\mathfrak{X}'$ *e* $X$ *su* $\mathfrak{X}$.

DIM. – Per il cor. 4.8. ci si può ridurre al caso affine: siano allora $\mathfrak{X} = \mathrm{sph}(A, \mathfrak{m})$ e $\mathfrak{X}' = \mathrm{sph}(B, \mathfrak{n})$, sempre per le proprietà del prodotto si può supporre anche $\mathfrak{J} = \tilde{\mathfrak{a}}$ con $\mathfrak{a}$ ideale di definizione per $(A, \mathfrak{m})$ (in caso contrario basta considerare il ricoprimento di $\mathfrak{X}$ fatto con gli aperti del tipo $\mathfrak{D}(f)$ tali che $\mathfrak{J}|\mathfrak{D}(f)$ sia generato da un ideale di definizione della coppia ${}^h(A_f, \mathfrak{m}A_f)$ e si applica il cor. 4.8. incollando i prodotti ottenuti).

Si ha allora $X = \mathrm{sph}(A/\mathfrak{a}, \mathfrak{m}/\mathfrak{a})$ e poichè $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}$ segue che $X = \mathrm{sph}\big(A/\mathfrak{a}, (0)\big)$. Per definizione si ha

$$\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} X = \mathrm{sph}\Big({}^h\big((B \otimes_A A/\mathfrak{a}), r(\mathrm{Im}(\mathfrak{n} \otimes_A A/\mathfrak{a}))\big)\Big) = \mathrm{sph}\Big({}^h\big(B/\mathfrak{a}B, \mathfrak{n}/r(\mathfrak{a}B)\big)\Big) ,$$

ma per ipotesi $r(\mathfrak{a}B) = \mathfrak{n}$ e quindi si ha

$$X = \mathrm{sph}\big(B/\mathfrak{a}B, (0)\big) = \big(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}/f^*(\mathfrak{J})\,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}\big) = (X', \mathcal{O}_{X'}) .$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Algebre Commutative*, ch. I et II, Hermann, Paris, 1961.
[2] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, Trans. A.M.S., **144** (1969), pp. 43-65.
[3] S. GRECO, *Sulla nozione di preschema henseliano*, Rend. Accademia Naz. dei Lincei, **50** (1971), pp. 78-81.
[4] A. GROTHENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[5] H. KURKE, *Grundlagen der Theorie der Henselschen Ringe und Schemata und ihrer Anwendungen*, Tesi, Humboldt Universitat zu Berlin, 1969.