Théorie métrique abstraite sans topologie.

W. J. TRJITZINSKY (Mattapoisett, Mass., U.S.A.) (*)

Résumé. — *Un développement dans un espace muni d'une mesure borélienne non négative des théorèmes généraux, en rapport avec des problèmes fondamentaux dans la théorie métrique, pour la plupart sans aucune topologie.*

1. — Introduction.

L'objet de l'Ouvrage actuel est de développer dans un espace muni d'une mesure borélienne non négative des théories abstraites, assez générales, relativement à plusieurs problèmes fondamentaux de la théorie métrique — sans recours à aucune topologie. Pourtant à plusieurs reprises nous donnons des applications topologiques des théorèmes généraux, de nature métrique, obtenus par la suite.

Parmi les propositions le plus fondamentales d'Analyse est le théorème de couverture de Vitali. DENJOY [1] (son Ouvrage (D*)) a présenté le vrai théorème de ce genre dans un espace abstrait, muni d'une mesure et dépourvu de topologie. Quelques remarques très importantes à cet égard se trouvent dans les Notes de DENJOY [2] (désignées par (D¹), (D²), (D³)). Ce théorème, dit Denjoy-Vitali, peut être considéré comme étant au sens exact. Dans les mémoires de l'auteur [3] et [4], désignés respectivement par (T) et (T*) et consacrés à la théorie métrique, des théorèmes de couverture Denjoy-Vitali approximatifs, c'est-à-dire à ε près, sont établis; ces théorèmes-ci suffisent pour la plupart des applications de la sorte qu'on s'attend à pouvoir faire comme une conséquence du théorème de Denjoy-Vitali exact. Notre contribution actuelle à ce sujet se trouve dans la section 4.

Nous faisons une étude essentiellement non-topologique de la mesure extérieure de Carathéodory (sections 5, 6, 7, 8); en partie cela se fait en utilisant quelques idées comprises dans une Note de N. BOURBAKI [5], (B²). Dans sa forme classique cette théorie se trouve, par exemple, dans le livre [6], (S), de S. SAKS. Les développements dans la Note (B⁰) sont pourtant de caractère topologique.

Dans la section 9 il s'agit des conditions pour la mesurabilité- Φ d'une fonction — en ce sens les développements y vont dans la direction d'un théorème de Lusin; mais dans celui-ci les conditions sont à ε près; la théorie dans la section 9 est purement non topologique et elle fait intervenir la classe de ensembles $K = K(\mathcal{F})$ introduite par l'auteur dans (T*; p. 60). Les théorèmes abstraits de la section 10

(*) Entrata in Redazione il 30 maggio 1972.

Cet ouvrage est dédié à la mémoire de notre fille JULIETTE.

peuvent être considérés comme étant vraiment au genre du théorème de Lusin; ces théorèmes, par eux-mêmes, ne font pas intervenir d'une façon directe, sauf dans quelques applications, la classe d'ensembles K ; la situation ici est plus générale et est fondée sur l'utilisation des familles dont il s'agit aux hypothèses 10.2, 10.3; à titre d'applications non topologiques (section 11) de la théorie générale, présentée dans la section 10, on retrouve en particulier le théorème au genre de Lusin qui survient dans (T^* , section 9). Vers la fin de la section 10 il y a des applications topologiques; en ce rapport il faut signaler un exemple très remarquable de Denjoy ((D^1) , (D^2)) qui fournit dans un espace topologique — même muni d'une distance compatible avec la topologie un cas où le théorème de Lusin est en défaut; dans cet exemple l'espace est de mesure infinie, mais dénombrablement mesurable, tandis que tout voisinage est de mesure infinie.

Dans la section 10 est établi un théorème abstrait, sans topologie, qui généralise le théorème classique de Vitali-Carathéodory (voir, par exemple, (S; p. 75)). Celui-ci admet une topologie et fait intervenir les notions de fonctions semi-continues. Dans la théorie actuelle on suppose que la mesure- Φ de l'espace considéré est finie et on utilise les familles d'ensembles $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ assujetties aux hypothèses 10.2, 10.3; moyennant ces familles on définit éventuellement certaines classes de fonctions qui, en tant que l'objet présent, jouent les rôles de fonctions semi-continues. Comme une application particulière non topologique on retrouve le théorème au genre de Vitali-Carathéodory qui a été donné dans (T^* ; section 10); celui-ci fait intervenir la classe d'ensembles $K = K(\mathcal{F})$.

Dans la section 2 nous faisons un exposé de divers faits et notions, qui se trouvent dans (D^*) et (T^*) et que l'on utilise dans la suite. Φ désignant une mesure borélienne non négative dans un espace U , on spécifie la notion d'un point et d'un ensemble *indéfiniment couverts* par une famille d'ensembles. Dans (2.1)-(2.1b) nous constatons ce que c'est un théorème de couverture Denjoy-Vitali à ε près (e.g. approximatif); une famille $G (=P)$ est régulière, si un tel théorème a lieu. L'idée de la *moyenne régularité* (2.2) – (2.2b) est due à Denjoy. La notion de la *simple régularité* d'une famille d'ensembles et le *caractère R.M.* (qui est pareil à celui de la moyenne régularité) sont spécifiés dans (2.3)-(2.5); ces propriétés interviennent dans l'hypothèse 2.6. Si une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles satisfait à une des conditions (2.7I), (2.7II) on peut définir la *classe* $K = K(\mathcal{F})$ *d'ensembles contenus dans* $\Delta(\mathcal{F})$ (définition 2.7). La famille K a été fondamentale dans quelques des développements métriques présentés dans (T^*); elle surviendra d'une façon importante par la suite. $K(\mathcal{F})$ jouit des propriétés (2.9) et, au cas de (2.6I) [(2.6II)], du caractère (2.10I), [(2.10II)]. Dans l'hypothèse (2.6I), (2.6II) et si $X (\subset \Delta(\mathcal{F}))$ est mesurable, l'énoncé (2.12) aura lieu; en plus, si l'on ajoute l'hypothèse (T^* ; 9.14), on aura la conclusion (2.13) plus précise. Enfin, A étant un ensemble dans $\Delta(\mathcal{F})$, on introduit sur A les classes de fonctions $C_i^\pm(\mathcal{F})$ ($i=0, 1$) (définition 2.15). Dans (3.1) on définit la notion d'une *suite* $G = \{E_n\}$ *d'ensembles associée avec un point* $x (\in \Delta(\mathcal{F}))$; une telle suite satisfait a (3.1a), (3.1b) et elle intervient dans les conditions nécessaire et suffisante (3.2)

pour que l'ensemble $\{x_0\}$, formé d'un seul point x_0 , appartienne à $K(\mathcal{F})$. Selon (3.3) $C_0^\pm(\mathcal{F}) \subset C_1(\mathcal{F})$. On montre (3.4) que dire $e \in K(\mathcal{F})$ équivaut à ce que $c_e(x) \in C_0(\mathcal{F})$ sur $F(=A(\mathcal{F}))$.

Dans la section 4 nous supposons que dans un espace U , muni d'une mesure borélienne $\varphi (\geq 0)$, il y a des familles d'ensembles $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$ (2.1) de sorte que les conditions d'un quelconque des théorèmes Denjoy-Vitali, à ε -près [(4.1)-(4.1b)], aient lieu. Puis on considère un espace V , où il y a une mesure borélienne $\varphi' (\geq 0)$; on admet des ensembles $U_0 (\subset U)$, $V_0 (\subset V)$, $\varphi(U_0) = \varphi'(V_0) = 0$, et une transformation T biunivoque entre les points de $U - U_0$ et de $V - V_0$ qui satisfait aux conditions de (4.2), ainsi qu'à l'hypothèse 4.4. Nous obtenons alors les conclusions (4.5)-(4.5c). Selon le théorème 4.7, dans les conditions indiquées, le théorème Denjoy-Vitali approximatif, admis dans U , se transforme par T en une proposition de la même sorte dans V (la remarque 4.7'); *c'est-à-dire, les conclusions d'un tel théorème se transforment en des conditions du même genre*. Une transformation T est dite spéciale (4.8), si $\varphi'(T(E)) = \varphi(E)$ pour tout $E (\subset U - U_0)$ mesurable- φ ; dans (4.8) nous donnons aussi un sens à la locution: les conditions d'un théorème de couverture, admis dans U , *se transforment par T* . A partir de (4.10) jusqu'à (4.19) nous examinons d'une façon détaillée lesquelles des conditions dans les théorèmes connus Denjoy-Vitali approximatifs « se transforment » par T , ou bien ne se transforment pas; *l'essentiel à noter est que ces conditions ne se transforment pas dans tous les théorèmes de couverture de la sorte indiquée*; par conséquent (4.9), *en principe, l'utilisation d'une transformation T présente une méthode puissante de génération de nouveaux théorèmes Denjoy-Vitali approximatifs, ou même exacts*. Enfin, dans la remarque 4.20 nous examinons le rapport entre un exemple de Denjoy [(D¹), (D²), (D³)] d'une transformation « spéciale » (4.8) et les développements actuels.

Dans un espace U quelconque, par définition Γ est une mesure extérieure de Carathéodory, si Γ remplit aux conditions (5; C₁), (5; C₂); ces conditions sont toujours admises. Dans les sections 5-8 à plusieurs reprises nous introduisons une troisième condition pour Γ afin qu'une certaine inclusion importante ait lieu, en rapport avec la Γ envisagée. On désigne par L_Γ (5.1) la famille d'ensembles mesurables- Γ . Une inclusion classique (5.2) $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$ (la famille borélienne) est valide dans un espace métrisable, sous la conditions C₃ de (S; p. 43). La Note (B⁰) est relativement à un espace (topologique) normal; dans un tel espace le caractère C₃ⁿ (5.3) équivaut à la condition (5.3'), dont il s'agit dans (B⁰). Ainsi, selon (B⁰), si U est normal, C₃ⁿ entraîne que toute fonction continue est mesurable- Γ ; pourtant il ne s'ensuit pas alors que $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$; évidemment, si U est métrisable, C₃ⁿ implique $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$; si U normal n'est pas métrisable, C₃ⁿ entraîne la conclusion dans (5.5). *La base pour une théorie abstraite, éventuellement non topologique, est présentée dans (5.6), ou les deux familles d'ensembles $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sont introduites*; $\mathcal{B}$ désigne la famille minimale complètement additive contenant $\mathcal{N}$. Le lemme 5.10 fondamental est dans l'hypothèse 5.7, remplissant C₃^{*} (5.8), ce qui mène au théorème 5.11 selon lequel, dans les conditions indiquées, $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$. Puis on considère le cas (5.13) $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ et on pose

$\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_\delta - \mathcal{N}$; on suppose que la famille $\tilde{\mathcal{N}}$ n'est pas vide; ensuite, dans l'hypothèse 5.15 et Γ satisfaisant à $\tilde{C}_3$ (5.16), on obtient le lemme 5.17; l'inclusion $L_\delta \supset \mathcal{B}$ (le théorème 5.18) en résulte. En continuant au cas (5.13), avec $\tilde{\mathcal{N}} \neq 0$, on examine dans (5.20)-(5.20b), d'une façon détaillée, la situation où l'hypothèse (5.15) est en défaut; ensuite on introduit l'hypothèse 5.21, comprenant le troisième caractère $\hat{C}_3$ pour Γ , on établit le lemme 5.22 qui correspond, puis on démontre l'inclusion $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$ (le théorème 5.25). Si $\mathcal{N}$ satisfait à (5.6) ou bien à (5.13), $C(\mathcal{N})$ [$C(\mathcal{N}_\delta)$] *dénotera la classe des fonctions remplissant* (6.1a); $F(\Gamma)$ *est la famille des fonctions mesurable- Γ* . On utilise une proposition fondamentale, qui se trouve dans (B^0 ; p.1311) et où il s'agit des conditions nécessaire et suffisante pour qu'une fonction numérique soit dans $F(\Gamma)$ (6.2). L'inclusion $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$ (comme aux théorèmes 5.11, 5.18, 5.25) entraîne $F(\Gamma) \supset C(\mathcal{N})$ (6.1); la réciproque est en défaut. Si $\mathcal{N}$ remplit (5.6), tandis que (6.3) a lieu pour $\mathcal{N}$ [pour $\mathcal{N}_\delta$], on introduit la notion d'un espace *pseudo-normal- $\mathcal{N}$* [*pseudo-normal- $\mathcal{N}_\delta$*] (définition 6.6); selon le théorème 6.8, si U est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ [$\mathcal{N}_\delta$] et Γ possède la propriété $C_3(\mathcal{N})$ [$C_3(\mathcal{N}_\delta)$] (6.7), on a $C(\mathcal{N})$ [$C(\mathcal{N}_\delta)$] $\subset \subset F(\Gamma)$. D'après (6.9), si $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13) et $\alpha \in \mathcal{N}$, la fonction caractéristique de α sera dans $C(\mathcal{N})$; si, en plus, (6.3) a lieu pour $\mathcal{N}$, U est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ (6.10). Avec $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ possiblement distinctes et (6.3) admise, on considère le caractère $\hat{C}_3(\mathcal{N})$ [$\hat{C}_3(\mathcal{N}_\delta)$] (6.11) et on établit le rapport (6.12) entre ce caractère et la propriété $C_3(\mathcal{N})$ [$C_3(\mathcal{N}_\delta)$]. Une variation de la théorie (6.1)-(6.12) est comprise dans les développements (6.13)-(6.22); il est à noter que dans la nouvelle théorie, si en plus $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, l'hypothèse 6.14 entraîne déjà que U est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ (6.20). Quelques applications topologiques sont indiquées à partir de (6.23) jusqu'à la fin de la section 6. Ayant en vue des applications non topologiques des théories précédentes, nous envisageons une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles comme indiquée dans le texte qui précède 7.2. On considère le cas où $\mathcal{M}$ est la famille d'enveloppes, relativement à $\mathcal{G}$; alors $\mathcal{N}$ est la famille de noyaux [voir (D*), (T) et (7.1) pour les définitions]; l'espace sera $\Delta(\mathcal{G})$. On note que ces familles $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ satisfont à (5.6) et, en général, ces familles sont distinctes. Les développements (7.2)-(7.8) comprennent une application, en rapport avec ce cas et en tant qu'une mesure extérieure de Carathéodory, des théories des sections 5, 6; une simplification survient, puisque $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}$. Des applications d'une autre sorte ont lieu au cas (7.9): $\mathcal{M} = \mathcal{N} = K$ ($= K(\mathcal{F})$) (2.7); les développements qui correspondent dans l'espace $\Delta(\mathcal{F})$ et qui font intervenir une mesure extérieure de Carathéodory, sont (7.9)-(7.26); (7.14) fournit un exemple pour lequel la famille d'ensembles $\mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ (7.13) n'est pas vide. Dans la section 8 on continue avec $\mathcal{M} = \mathcal{N} = K$ (7.9), mais on admet en plus une des hypothèses (2.6I), (2.6II), e.g. la *moyenne régularité* d'une sorte ou d'une autre; d'après le théorème 8.2, pour tout ensemble A ($\subset U = \Delta(\mathcal{F})$) un ensemble correspondant $\hat{A}$ (8.1) existe; cette proposition permet d'utiliser la définition 6.1 [$C(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{N}_\delta)$] $F(\Gamma)$, $\mathcal{N} = \mathcal{M} = K$ (5.13), *sans intervention de l'hypothèse* 6.3; on remplace $\hat{A}$ (sens de K ou de K_δ) par $\hat{A}$ (8.1); si $f \in C(K_\delta)$ [$C^+(K_\delta)$] et $A \subset U$, il existe un $\hat{A}$ pour lequel $\sup(A)f = \sup(\hat{A})f$ [$\inf(A)f = \inf(\hat{A})f$] (le lemme 8.5);

puis nous spécifions la notion d'un espace pseudo-normal- K_δ (8.6) (l'hypothèse 6.3 n'étant pas à présent nécessaire): selon le théorème 8.7, si U est pseudo-normal- K_δ et le troisième caractère pour Γ est $C_\delta(K_\delta)$ (6.7; $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$), on a $C(K_\delta) \subset F(\Gamma)$ ((6.1), (6.4)); une autre condition pour Γ est $\hat{C}_\delta(K_\delta)$ (8.8); l'énoncé (8.9) est relativement au rapport entre les propriétés $C_\delta(K_\delta)$, $\hat{C}_\delta(K_\delta)$. $\mathcal{F}$ satisfaisant encore à une des hypothèses (2.6I), (2.6II), on ajoute la condition (9.14) de l'Ouvrage (T*); ainsi (8.11) a lieu (voir (2.13)); d'après (8.13), pour tout ensemble $A, \subset U = \Delta(\mathcal{F})$, un $\hat{A}$ (définition 8.12) existe; selon le lemme 8.15, si f est dans $C^-(\hat{K})$ [$C^+(\hat{K})$] (8.12) et $A \subset U$, il y a un $\hat{A}$ tel que $\sup(\hat{A})f = \sup(A)f$ [$\inf(\hat{A})f = \inf(A)f$]; en vertu de (8.17) l'espace U est pseudo-normal- $\hat{K}^+$ (au sens de la définition 8.16); on définit aussi la notion de la pseudo-normalité- $\hat{K}$; on établit que, si Γ satisfait à $C_\delta(\hat{K}^+)$ (8.18), on a $C(\hat{K}) \subset F(\Gamma)$ (le théorème 8.19); selon le théorème 8.20, si U est pseudo-normal- K et Γ a la propriété $C_\delta(\hat{K})$ (8.18), il vient $C(\hat{K}) \subset F(\Gamma)$; enfin, l'énoncé (8.23) est concernant le rapport entre les troisièmes caractères pour Γ , à savoir $C_\delta(\hat{K})$ et $\hat{C}_\delta(\hat{K})$ (8.22).

Dans la section 9 on considère l'espace $U = \Delta(\mathcal{F})$ et la famille $K = K(\mathcal{F})$, tout en admettant le caractère de la moyenne régularité ou bien de R.M.; selon le théorème 9.4, si $f(x)$ est finie et mesurable sur un ensemble mesurable $H, \subset U$, il existe un ensemble $L = L(f), \subset H$, de la classe K_δ , tel que $\Phi(H - L) = 0$ et $f(x) \in C_\delta(L)$ (9.3). Pour développer une théorie générale de théorèmes au genre de *Lusin* nous introduisons une suite croissante d'ensembles $F_v (v = 1, 2, \dots)$, $\Phi(F_v) < \infty$, tels que la mesure de $F = \sum F_v$ peut être infinie; on associe avec F_v un couple de familles d'ensembles mesurables $\mathcal{N}^v, \mathcal{M}^v$, de sorte que $\mathcal{N}^v \uparrow, \mathcal{M}^v \uparrow$, tandis que les hypothèses 10.2, 10.3 soient satisfaites; le lemme 10.7 est concernant les familles d'ensembles $\mathcal{N}^*(F), \mathcal{M}^*(F)$ (10.4) et $\mathcal{M}^v, \mathcal{N}^v$ (10.6); selon (10.11) une f qui vaut une constante sur un A de $\mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*]$ est dans $C(\mathcal{N}^*)[C(\mathcal{M}^*)]$ (10.10) sur A ; si A et B disjoints sont dans $\mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*]$ et $f \in C(\mathcal{N}^*)[C(\mathcal{M}^*)]$ sur A et sur B , on a la même propriété sur $A + B$; l'énoncé (10.14) est relativement aux suites de fonctions de la classe $C^+(\mathcal{N}_\delta^*)[C^-(\mathcal{N}_\delta^*)]$ (10.10) qui, sur un N de $\mathcal{N}_\delta^*$, convergent sup.-uniformément [inf.-uniformément] (10.13); le théorème 10.16, au genre de *Lusin*, est pour le cas $\Phi(F) < \infty$ (l'énoncé (10.17) en est une conséquence); la proposition générale 10.18 est pour le cas où $\Phi(F)$ peut être infinie; un autre énoncé au genre de *Lusin* est le théorème 10.20, où intervient la famille d'ensembles $\tilde{\mathcal{N}}_\delta^*$ (10.19). À la suite de (10.21') jusqu'à la fin de la section 10 on fait des applications topologiques de la théorie précédente, y comprenant (10.30) l'exemple de *Denjoy*. Dans la section 11 il s'agit des applications non topologiques de la théorie générale de la section 10. D'abord on considère le cas de noyaux et d'enveloppes (l'énoncé 11.5). Puis on envisage une suite de familles d'ensembles $\mathcal{F}_v, \uparrow \mathcal{F}$ (11.6); on suppose que $\mathcal{F}$ est dénombrablement régulière-r.m. (11.7I), ou bien dénombrablement simplement régulière-R.M. (11.7II); on pose $F_v = \Delta(\mathcal{F}_v)$, $F = \sum F_v$; on a $\Phi(F_v) < \infty$, mais il se peut que $\Phi(F) = \infty$; $K^v = K(\mathcal{F}_v)$ (2.7); $K = \sum K^v$; il vient $\mathcal{N}^* = \mathcal{M}^* = K^*$ (cf. (10.4), (11.11)); la famille K^* satisfait aux propriétés (11.16); dans ce cas notre théorème

abstrait 10.18, au genre de Lusin, mène à la proposition (11.19), qui est de la même sorte (voir aussi la constatation (11.20)).

En admettant les conditions (10.15)-(10.15b) ($\Phi(F) < \infty$), nous désignons par $\mathcal{B}$ (12.3) la famille d'ensembles minimale, a.s. f (12.2), contenant $\mathcal{M}$. Moyennant les propositions préliminaires (12.4)-(12.8) on déduit (12.9): si les k_n ($n=1, 2, \dots$) sont des constantes, ≥ 0 , et les γ_n sont dans $\mathcal{B}$, $c_n(x)$ designant la fonction caractéristique de γ_n , il vient $\sum k_n c_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F ; la somme de deux fonctions qui sont dans $C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur A est de la même classe (12.10). Selon le théorème 12.12, si $f(x) \geq 0$ est mesurable sur F et $\varepsilon > 0$, il y a une fonction $h(x)$ de $C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F , telle que $h(x) \geq f(x)$ et $\int_F (h-f) d\Phi < \varepsilon$. En utilisant les propositions (12.8), (12.13), on obtient le lemme 12.14 selon lequel, si $a(x)$ et $b(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F et $d(x) = \min(a(x), b(x))$, il existe une fonction $D(x)$ satisfaisant à (12.14a). D'après le lemme 12.15': si $0 < k < \infty$ est une constante et $g(x) (\geq 0)$ est dans $C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - \xi_0$, où $\Phi(\xi_0) = 0$, il suit que la fonction $g^{-1}(x)^k$ appartient à $C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - \xi_0$. Le résultat principal de la section 12, qui est au genre du théorème Vitali-Carathéodory, est compris au théorème 12.15: étant donnée une fonction $f(x)$ mesurable sur F , il y a un ensemble e_0 , $\Phi(e_0) = 0$ et des suites de fonctions $\{i_n(x)\}$, $\{s_n(x)\}$, $i_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - e_0$, $s_n(x) \in C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - e_0$, de sorte qu'on ait (12.15a), (12.15b), (12.15c). Comme une conséquence de cette proposition on obtient l'énoncé (12.17), d'après lequel pour toute fonction $f(x)$ mesurable sur F , un couple de fonctions $h(x)$ (de C_2^+), $g(x)$ (de C_2^-) (définition 12.16) et un ensemble e_0 , $\Phi(e_0) = 0$, existent, tels que $f(x)$ vaut $h(x)$ et $g(x)$ sur $F - e_0$.

2. - Préliminaires.

Dans un espace U est donnée une mesure $\Phi(E) \geq 0$, fonction d'ensemble borélien, satisfaisant aux conditions de complete additivité et de soustractivité.

Si E est un ensemble quelconque, $\Phi_e(E)$ et $\Phi_i(E)$ désignerons respectivement les mesures extérieure et intérieure de E , d'accord avec (T; (2.1)); elles possèdent la propriété (T; (2.2)). Un point x est dit *indéfiniment couvert* (D*; p. 320) par une famille $\{e\}$ d'ensembles, s'il existe une suite e_n ($n=1, 2, \dots$) dans $\{e\}$ telle que $e_n \in x$ et $\Phi_e(e_n) \rightarrow 0$. Étant donnée une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles, $\Delta(\mathcal{F})$ sera l'ensemble des points x ($\in U$), chacun indéfiniment couvert par $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}(A)$ désignera la famille des ensembles de $\mathcal{F}$ joints à l'ensemble A .

Les ensembles de couverture dans le genre Denjoy-Vitali (D*), mais à ε -prés, sont les théorèmes 2.8, 3.3, 3.11, 4.4, 4.5 dans (T*). D'accord avec l'hypothèse 2.3 (T*) on envisage une famille $P = \{\omega\}$ d'ensembles ω qui peuvent être non mesurables- Φ ; $G = \{\gamma\}$ est une famille d'ensembles mesurables γ , qui sont en une correspondance biunivoque avec les ω de P :

$$(2.1) \quad \omega = \omega(\gamma), \quad \gamma = \gamma(\omega), \quad \gamma \leq \omega; \quad 0 < \Phi(\gamma) < \infty, \quad \Phi_e(D) < \infty$$

(où $D = \sum \gamma$); le cas d'intérêt est où $\Phi_e(\Delta(G)) > 0$.

Les familles P , G interviennent dans les théorèmes de Couverture que nous venons d'indiquer. Selon définition 4.18 (T*), *au cas $P = G$ on dira que G est une famille régulière lorsque un au moins des théorèmes de Couverture s'applique, avec $P = G$, c'est-à-dire G est telle que:*

(2.1a) $\Delta(G)$ est mesurable; étant donné un $\varepsilon > 0$, des $\gamma_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots$) *disjoints* existent de sorte que

(2.1b) $\Phi(\Delta(G) - \Delta(G) \sum \gamma_i) < \varepsilon$, $\Phi(\Delta(G) - \varepsilon < \Phi(\sum \gamma_i) < \Phi(\Delta(G)) + \varepsilon$.

Toute sous-famille d'une famille régulière est régulière.

(2.2) DÉFINITION DE LA MOYENNE RÉGULARITÉ (une notion de DENJOY) (T*; (5.15)). — Une famille $G = \{\gamma\}$ d'ensembles satisfaisant à (2.1) [il ne s'agit pas des ω] possède la *moyenne régularité* dans les conditions suivantes: si $\varepsilon > 0$ et $E, \subset \Delta(G)$, est mesurable, la famille $G(E)$ (famille des γ de G , joints à E) peut être réduite à une famille $G'(E)$, telle que

$$(2.2a) \quad E\Delta(G(E) - G'(E)) = 0$$

[e.g. il existe une fonction $c(x, E)$ (indépendant de γ), > 0 , de sorte que pour tout point x de E les γ de $G(E) - G'(E)$, contenant x , satisfont à $\Phi(k) \geq c(x, E)$];

$$(2.2b) \quad \Phi_*(\varrho'(E)) < \varepsilon, \quad \text{où} \quad \varrho'(E) = \Delta(G'(E)) - E.$$

On note que $E \subset \Delta(G'(E))$ [cf. le texte à la suite de (T*; 5.15, II)]. Si G est régulière (au sens (2.1)-(2.1b)), l'ensemble $\varrho'(E)$ dans (2.2b) sera mesurable et on y écrira $\Phi(\dots)$ pour $\Phi_*(\dots)$.

D'accord avec (T*; définition 8.1) mais avec une *seule* famille $\mathcal{F}_v$ (soit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$), on dira qu'une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles mesurables E est *simplement régulière*, si pour tout E de $\mathcal{F}$ on a

$$(2.3) \quad 0 < \Phi(E) < \infty,$$

et si, $\mathcal{F}'$ désignant une sous-famille quelconque de $\mathcal{F}$.

(2.3a) L'ensemble $S(\mathcal{F}')$ réunissant les E de $\mathcal{F}'$, est mesurable, $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$.

Une famille $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}'$) peut être indénombrable. On sait (T*; (8.4)):

(2.4) Si $\mathcal{F}$ est simplement régulière, $\Delta(\mathcal{F})$ est mesurable; de plus, si Ψ est une fonction réelle finie d'ensemble $E \in \mathcal{F}$, les dérivés $(\mathcal{F})\bar{D}\Psi(x)$, $(\mathcal{F})\underline{D}\Psi(x)$ sont mesurables sur $\Delta(\mathcal{F})$.

Ici $\Delta(\mathcal{F})$ est l'ensemble des points x tels qu'il existe une suite infinie E_n ($n = 1, 2, \dots$) de $\mathcal{F}$ de sorte que $E_n \ni x$ et $\Phi(E_n) \rightarrow 0$. Le cas d'intérêt est où $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) > 0$.

(2.5) DÉFINITION DES ENSEMBLES R.M. (T*; (8.5)). — On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ est R.M., régulière au sens moyenne, si $\mathcal{F}$ est simplement régulière [(2.3), (2.3a)] et si à tout ensemble X , $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et $\varepsilon > 0$ il correspond une famille $\mathcal{F}(X)$, $\subset \mathcal{F}(X)$ [e.g. $\mathcal{F}(X)$ est une certaine sous-famille d'ensembles de $\mathcal{F}$ joints à X], de sorte que

$$X \cdot \Delta(\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}'(X)) = 0, \quad \Phi(O - X) < \varepsilon, \quad \text{avec } O = \Delta(\mathcal{F}'(X)).$$

HYPOTHÈSE 2.6. — À certaines reprises nous procéderons dans une des deux conditions suivantes.

(2.6 I) $\mathcal{F}$ est régulière (au sens des théorèmes de Couverture) et $\mathcal{F}$ jouit de la moyenne régularité [(2.2)-(2.2b)];

(2.6 II) $\mathcal{F}$ est R.M. au sens de (2.5).

En tenant compte de (T*; section 9) on introduit

DÉFINITION 2.7. — Soit une $\mathcal{F}$ avec $\Phi_e(S(\mathcal{F})) < \infty$, telle qu'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite:

(2.7 I) $\mathcal{F}$ est régulière (au sens des théorèmes de Couverture);

(2.7 II) $\mathcal{F}$ est simplement régulière [(2.3)-(2.3a)];

alors on définit la classe $K(\mathcal{F})$ d'ensembles H , $\subset \Delta(\mathcal{F})$, tels qu'il existe une famille $\mathcal{F}^*$, $\subset \mathcal{F}$, généralement dépendant de H , de sorte que $H = \Delta(\mathcal{F}^*)$.

Si $H \in K(\mathcal{F})$, de sorte qu'il existe une famille $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ telle que $H = \Delta(\mathcal{F}^*)$, la notation

$$(2.8) \quad \mathcal{F}^* = \mathcal{F}(H) \subset^* \mathcal{F}(H)$$

indiquera l'inclusion au sens essentiel. Cela veut dire que les ensembles de $\mathcal{F}^*$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}(H)$, e.g. qui sont disjoints de H , ne peuvent couvrir indéfiniment aucun point et, de ce point de vue, sont dépourvu de rôle essentiel.

On se rappelle les fait suivants (T*; 9.2).

(2.9) L'ensemble vide et $F = \Delta(\mathcal{F})$ appartiennent à $K(\mathcal{F})$; aussi les compléments, relativement à F , les réunions finies et les produits finies d'ensembles dans $K(\mathcal{F})$ se trouvent dans $K(\mathcal{F})$. Les ensembles de $K(\mathcal{F})$ sont mesurables- Φ .

D'accord avec (T*; (9.5)) on conclut ainsi.

(2.10 I) Le caractère (2.6 I) équivaut à ce que $\mathcal{F}$ est régulière et qu'à tout ensemble mesurable X , $\subset \Delta(\mathcal{F})$, et $\varepsilon > 0$ il correspond un $O \in K(\mathcal{F})$, tel que $O \subset X$, $\Phi(O - X) < \varepsilon$.

(2.10 II) Ce caractère équivaut à ce que $\mathcal{F}$ est simplement régulière et que pour tout X , $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et $\varepsilon > 0$ il existe un O de $K(\mathcal{F})$, tel que $O \supset X$, $\Phi(O - X) < \varepsilon$.

Dans la suite on fait usage des familles d'ensembles:

$$(2.11) \quad K_\delta(\mathcal{F}), \quad K_\sigma(\mathcal{F}), \quad K_{\delta\sigma}(\mathcal{F}), \quad K_{\sigma\delta}(\mathcal{F}), \quad \dots;$$

ici, les produits et les sommes d'ensembles étant au plus dénombrablement infinies, il s'agit respectivement des produits d'ensembles de $K(\mathcal{F})$, des sommes d'ensembles de $K(\mathcal{F})$, des sommes d'ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$, des produits d'ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$, ...

Ces ensembles (2.11) sont mesurables; généralement les ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$ et de $K_\sigma(\mathcal{F})$ ne sont pas dans $K(\mathcal{F})$. Il est à noter qu'on ne parle des classes (2.11) que si une au moins des deux hypothèses (2.7I), (2.7II) a lieu.

Si une au moins des hypothèses (2.6I), (2.6II) a lieu, on conclut (T^* ; (9.7)) que pour tout ensemble mesurable $X \subset \Delta(\mathcal{F})$ on a

$$(2.12) \quad X = Q - X^0 = H + X_0, \quad \text{avec } Q \in K_\delta(\mathcal{F}), \quad H \in K_\sigma(\mathcal{F}), \quad \Phi(X^0) = \Phi(X_0) = 0;$$

ici $X^0 \subset Q$ et $HX_0 = 0$.

Si $\mathcal{F}$ satisfait à l'hypothèse 9.14 de (T^*) [ainsi, en particulier, une au moins des hypothèses (2.6I), (2.6II) est admise], pour tout $X \subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable il existe un $O \in K(\mathcal{F})$ tel que

$$(2.13) \quad \Phi(X - XO) = \Phi(O - OX) = 0.$$

La restriction comprise dans l'hypothèse (T^* ; 9.14) est bien légère.

D'une importance spéciale sont les classes (sur un $A \subset \Delta(\mathcal{F})$)

$$(2.14) \quad \begin{aligned} C_0^+(\mathcal{F}), C_0^-(\mathcal{F}), C_0(\mathcal{F}) &= C_0^+(\mathcal{F}) C_0^-(\mathcal{F}), \\ C_1^+(\mathcal{F}), C_1^-(\mathcal{F}), C_1(\mathcal{F}) &= C_1^+(\mathcal{F}) C_1^-(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

de fonctions numériques de point, définies comme il suit (T^* ; def. 9.4).

DÉFINITION 2.15. — Soit un $A \subset \Delta(\mathcal{F})$ mesurable ou non. Si $f(x)$ est une fonction réelle de point x sur A , envisageons pour tout c réel les ensembles

$$(2.15a) \quad H_c^+ = \{x \in A; f(x) \geq c\}, \quad H_c^- = \{x \in A; f(x) \leq c\}.$$

$C_0^+(\mathcal{F})$ (sur A) est la classe des fonctions $f(x)$, définies sur A , pour lesquelles

$$(2.15b) \quad H_c^+ = AP_c^+, \quad \text{avec } P_c^+ \in K(\mathcal{F}) \quad \text{pour tout } c \text{ réel};$$

pour définir $C_0^-(\mathcal{F})$ (sur A) on remplace (2.15b) par $H_c^- = AP_c^-$, avec $P_c^- \in K(\mathcal{F})$. En outre $C_1^+(\mathcal{F})$, $C_1^-(\mathcal{F})$ (sur A) sont les classes des f , définies sur A , telles que

$$(2.15c) \quad \begin{aligned} H_c^+ &= AP_c^+, \quad \text{avec } P_c^+ \in K_\delta(\mathcal{F}), \quad \text{pour } C_1^+(\mathcal{F}); \\ H_c^- &= AP_c^-, \quad \text{avec } P_c^- \in K_\delta(\mathcal{F}), \quad \text{pour } C_1^-(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

On dit que f est $C_0(\mathcal{F})$ [$C_1(\mathcal{F})$] sur A , si f appartient, sur A , aux deux classes $C_0^\pm(\mathcal{F})$ [$C_1^\pm(\mathcal{F})$].

En tenant compte des théorèmes 9.11, 10.11, dans (T*), dont l'un a la structure d'un théorème classique de Lusin et l'autre a la structure du théorème dit Vitali-Carathéodory, on note qu'au moins, en rapport avec ces deux théorèmes les ensembles de $K_\delta(\mathcal{F})$ jouissent du rôle d'ensembles fermés, tandis que les classes de fonctions

$$(2.16) \quad C_1^+(\mathcal{F}), \quad C_1^-(\mathcal{F}), \quad C_1(\mathcal{F})$$

jouissent respectivement des rôles de fonctions semi-continues supérieurement, de fonctions semi-continues inférieurement et de fonctions continues.

En tant que dans nos conditions actuelles il n'y a aucune topologie, les analogies indiquées plus haut sont très vagues et de très loin. Notons encore qu'au fur et à mesure qu'on considère $K_\delta(\mathcal{F})$ comme une classe d'ensembles qui se rapprochent d'ensembles fermés, on est mené à la considération de $K_\delta(\mathcal{F})$ comme une classe d'ensembles analogues aux ensembles ouverts [car le complément, relativement à $\Delta(\mathcal{F})$, d'un ensemble de $K_\delta(\mathcal{F})$ est dans $K_\delta(\mathcal{F})$]. Dans la suite on supposera toujours qu'au moins une des conditions (2.7I), (2.7II) est satisfaite, de sorte qu'on puisse définir la classe $K(\mathcal{F})$.

3. – Suites associées avec un point, les classes $C_0^\pm(\mathcal{F})$, $C_1^\pm(\mathcal{F})$.

On peut démontrer la constatation suivante.

(3.1) Étant donné un point x sur $\Delta(\mathcal{F})$, soit $G = \{E_n\}$ une suite telle que

$$E_n \in \mathcal{F}, \quad E_n \ni x, \quad \Phi(E_n) \rightarrow 0 \quad [\text{on dira que } G \text{ est associée avec } x].$$

Alors

$$(3.1a) \quad x \in \Delta(G), \quad \Delta(G) \in K(\mathcal{F}),$$

De plus, pour toute suite $G = \{E_n\}$ de $\mathcal{F}$ associée avec x , on a

$$(3.1b) \quad x \in \varliminf_n E_n (\leq \Delta(G) = \overline{\lim} E_n); \quad \Phi(x) = \Phi(\varliminf_n E_n) = 0.$$

On a $\Phi(x) = 0$ pour tout $x \in \Delta(\mathcal{F})$, dans tout cas.

L'énoncé (3.1a) est immédiat. En général l'ensemble $\Delta(G)$ n'est pas identique avec le point x . Quant à (3.1b), on note que $x \in E_1 E_2 \dots \subset \varliminf_n E_n$; la relation $\Delta(G) = \varliminf_n E_n$ s'ensuit car $\Phi(E_n) \rightarrow 0$. Or

$$\Phi(\varliminf_n E_n) \leq \varliminf_n \Phi(E_n) = 0, \quad \text{d'où } \Phi(\varliminf_n E_n) = 0 \text{ et } \Phi(x) = 0.$$

(3.2) *Pour qu'un point x sur $\Delta(\mathcal{F})$ soit un ensemble de $K(\mathcal{F})$ il faut et il suffit qu'il existe une suite $G=\{E_n\}$ de $\mathcal{F}$, associée avec x , telle que $x=\Delta(G)$.*

En effet, si x est un ensemble de $K(\mathcal{F})$, il existe une famille $\mathcal{F}^*, \subset \mathcal{F}$, telle que $x=A(\mathcal{F}^*)$; donc des $E_n \in \mathcal{F}^*$, existent tels que $E_n \in x$ et $\Phi(E_n) \rightarrow 0$; aucun point $y \neq x$ n'est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}^*$, d'où $\{E_n\}$ ne couvre indéfiniment aucun point $y \neq x$, e.g. $\Delta\{E_n\}=x$, $G=\{E_n\}$ étant une suite, associée avec x , telle que $x=\Delta(G)$. La réciproque est immédiate.

(3.3) *Soit A un ensemble dans $F=A(\mathcal{F})$. Pour les fonctions numériques, définies sur A , on a les inclusions*

$$C_0^+(\mathcal{F}) \subset C_1(\mathcal{F}), \quad C_0^-(\mathcal{F}) \subset C_1(\mathcal{F}) \quad (\text{sur } A).$$

En effet, si $f \in C_0^-(\mathcal{F})$ sur A , il vient (definition 2.15)

$$H_c^- = \{x \in A; f(x) \leq c\} = AP_c^-, \quad \text{avec } P_c^- \in K(\mathcal{F});$$

à fortiori: $P_c^- \in K_\delta(\mathcal{F})$, donc $f \in C_1^-(\mathcal{F})$ sur A (cf. (2.15c)). Notons que

$$\{x \in A; f(x) > c\} = \{A - H_c^- = A \cdot [F - P_c^-]\}, \quad \text{avec } F - P_c^- \in K(\mathcal{F}).$$

On obtient

$$H_c^+ = \{x \in A; f(x) \geq c\} = \prod_{n=1}^{\infty} \{x \in A; f(x) > c - 1/n\} = \prod A \cdot Q_n, \quad Q_n \in K(\mathcal{F}),$$

d'où

$$H_c^+ = AP_c^+, \quad \text{avec } P_c^+ \in K_\delta(\mathcal{F}).$$

Par là $f \in C_1^+(\mathcal{F})$ sur A ; f est aussi dans $C_1^-(\mathcal{F})$ sur A , donc $f \in C_1(\mathcal{F})$ sur A et l'inclusion $C_0^-(\mathcal{F}) \subset C_1(\mathcal{F})$ (sur A) s'ensuit. De même pour l'autre inclusion dans (3.3).

(3.4) Soit un ensemble $H, \subset F$. Pour que $H \in K(\mathcal{F})$ il faut et il suffit que $c_H \in C_0(\mathcal{F})$ (sur F), c_H désignant la fonction caractéristique de H .

Supposons que $H \in K(\mathcal{F})$. Pour H_c^- (2.15a), avec $A=F$ et $f(x)=c_H(x)$, on obtient

$$H_c^- = F \text{ (si } c \geq 1), \quad H_c^- = F - H \text{ (si } 0 \leq c < 1), \quad H_c^- = 0 \text{ (si } c < 0).$$

Les ensembles $F, F-H, 0$ sont dans $K(\mathcal{F})$, donc $c_H \in C_0^-(\mathcal{F})$. Quant'à H_c^+ , pour $A=F$ et $f(x)=c_H(x)$, il vient

$$H_c^+ = 0 \text{ (si } c > 1), \quad H_c^+ = H \text{ (si } 0 < c \leq 1), \quad H_c^+ = F \text{ (so } c \leq 0).$$

0, H, F , étant dans $K(\mathcal{F})$, $c_H(x) \in C_0^+(\mathcal{F})$. Ainsi $H \in K(\mathcal{F})$ entraîne $c_H \in C_0(\mathcal{F})$ (sur F). Réciproquement, supposons que $c_H \in C_0(\mathcal{F})$ (sur F). Puisque $c_H \in C_0^-(\mathcal{F})$, on a $H_c^- = \{x \in F; c_H(x) \leq c\}$ dans $K(\mathcal{F})$; en particulier, $H_c^- = F - H \in K(\mathcal{F})$, d'où $H \in K(\mathcal{F})$. (3.4) s'ensuit. On note que $c_H(x) \in C_0^-(\mathcal{F})$ [resp. $C_0^+(\mathcal{F})$] entraîne $c_H(x) \in C_0^+(\mathcal{F})$ [resp. $C_0^-(\mathcal{F})$], e.g. entraîne $c_H(x) \in C_0(\mathcal{F})$. Ou bien d'une autre façon: une fonction de $C_0^-(\mathcal{F})$ [resp. $C_0^+(\mathcal{F})$], définie sur F et y ne prenant que les valeurs 0, 1, est nécessairement dans $C_0(\mathcal{F})$.

4. - Les théorèmes Denjoy-Vitali exacts et approximatifs.

Les familles d'ensembles $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$ (2.1) étant possiblement distinctes, on aura un théorème de couverture, au sens à ε -prés, dès que les conditions sont telles qu'on ait les conclusions suivantes:

(4.1) Les ensembles $H = \Delta(P)$, $H_0 = \Delta(G)$ sont mesurables- φ ; $H_0 \subset H$, $\varphi(H_0) = \varphi(H)$. Étant donné un $\varepsilon > 0$ on peut trouver une suite dénombrable γ_i ($i = 1, 2, \dots$) d'ensembles disjoints, $\gamma_i \in G$, de sorte que

$$(4.1a) \quad \varphi(H - H\Gamma) < \varepsilon, \quad \text{où } \Gamma = \sum \gamma_i;$$

$$(4.1b) \quad \varphi(H) - \varepsilon < \varphi(\Gamma) < \varphi(H) + \varepsilon.$$

REMARQUE (4.1'). - On admet toujours que $\varphi(\gamma) \rightarrow 0$ entraîne $\varphi_c(\omega(\gamma)) \rightarrow 0$ (ce qui implique $H_0 \subset H$).

Les conditions intervenant dans une quelconque des constatations (T; (5.2)), (T*; (2.8)), (T*; (3.3)), (T*; (4.4)), (T*; (4.5)) suffisant pour qu'on ait (4.1)-(4.1b).

Dans un théorème de Couverture du genre indiqué la propriété (4.1a) est primaire et le caractère (4.1b) est secondaire.

(4.2) Envisageons dans un espace V une mesure $\varphi' \geq 0$, de la même sorte que le mesure φ dans l'espace U ; supposons que les ensembles $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ existent, tels que

$$\varphi(U_0) = 0, \quad \varphi'(V_0) = 0,$$

et que T est une transformation ponctuelle réalisant une correspondance biunivoque entre les points de $U - U_0$ et de $V - V_0$:

$$x' = T(x) \text{ (pour } x \in U - U_0), \quad x = T^{-1}(x');$$

de plus admettons que $E[E'] \subset U - U_0$ [$V - V_0$], mesurable- φ [$-\varphi'$] entraîne $T(E)$ [$T^{-1}(E')$] mesurable- φ' [$-\varphi$]; ici la mesurabilité- φ [$-\varphi'$] est entendue au sens fini.

(4.3) *Admettons que les familles $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$, où $\omega \subset U - U_0$, sont telles que dans l'espace U il y ait un théorème de couverture (4.1)-(4.1b).*

Désignons par $P' = \{\omega'\}$, $G' = \{\gamma'\}$ les familles d'ensembles $\omega' = T(\omega)$, $k' = T(\gamma)$, ω décrivant P et γ décrivant G ; aux relations $\omega = \omega(k)$, $\gamma = \gamma(\omega)$ correspondent les relations $\omega' = \omega'(\gamma')$, $\gamma' = \gamma'(\omega')$ et l'on aura $\gamma' \subset \omega' \subset V - V_0$; les γ (de P) étant mesurables- φ , les γ' (de P') seront mesurables- φ' .

Notre objet actuel est de trouver des conditions sur la transformation T pour que (4.3) entraîne un théorème de couverture, dans l'espace V , figurant les familles P' , G' , ce théorème ayant lieu au moins au sens primaire. Nous introduisons

HYPOTHÈSE 4.4. — T étant assujettie à (4.2), supposons que les propriétés

$$(a) \quad E \subset U - U_0, \quad E \text{ mesurable-}\varphi, \quad \varphi(E) > 0,$$

impliquent pour l'ensemble $E' = T(E)$:

$$(b) \quad \varphi'(E') > 0 \quad (\text{nécessairement } E' \subset V - V_0).$$

et, réciproquement, que les relations

$$(c) \quad E' \subset V - V_0, \quad E' \text{ mesurable-}\varphi',$$

entraînent, pour l'ensemble $E = T^{-1}(E')$, l'inégalité $\varphi(E) > 0$. De plus, admettons que les relations

$$(d) \quad E_n \subset U - U_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \varphi_e(E_n) \rightarrow 0,$$

entraînent

$$(e) \quad \varphi'_e(E'_n) \rightarrow 0, \quad \text{où } E'_n = T(E_n);$$

si

$$(f) \quad E'_n \subset V - V_0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{et} \quad \varphi'_e(E'_n) \rightarrow 0,$$

on aura

$$(g) \quad \varphi_e(E_n) \rightarrow 0, \quad \text{où } E_n = T^{-1}(E'_n).$$

REMARQUE 4.4'. — On observe qu'il y a de la dualité entre les propriétés de la transformation T (de la sorte qu'on vient de spécifier) et de son inverse T^{-1} . Les ensembles minces de $U - U_0$ vont en des ensembles minces de $V - V_0$; et réciproquement.

Dans ces conditions il vient:

$$(4.5) \quad 0 < \varphi'(\gamma') < \infty; \quad \varphi'(\gamma') \rightarrow 0 \text{ entraîne } \varphi'_e(\omega'(\gamma')) \rightarrow 0; \quad \Delta(G') \subset \Delta(P').$$

Pour démontrer la seconde propriété envisageons des γ'_n ($n=1, 2, \dots$) de G' tels que $\varphi'(\gamma'_n) \rightarrow 0$; d'après $[(f), (g)]$ $\varphi(\gamma_n) \rightarrow 0$, où $\gamma_n = T^{-1}(\gamma'_n)$; vu la remarque (4.1') on obtient $\varphi_e(\omega_n(\gamma_n)) \rightarrow 0$; en raison de $[(d), (e)]$ $\varphi'_e(\omega'_n(\gamma'_n)) \rightarrow 0$ [ici $\omega'_n(\gamma'_n) = T(\omega_n(\gamma_n))$, $\gamma'_n = T(\gamma_n)$]. La troisième partie de (4.5) s'ensuit de la seconde. Montrons maintenant que

$$(4.5a) \quad \Delta(T(P)) = T(\Delta(P)) ; \quad \Delta(T(G)) = T(\Delta(G)) .$$

Soit un $x' \in \Delta(P')$, où $P' = T(P)$; des ω'_n de P' existent ($n=1, 2, \dots$), tels que $\omega'_n \ni x$ et $\varphi'_e(\omega'_n) \rightarrow 0$; d'après $[(f), (g)]$ les $\omega_n (= T^{-1}(\omega'_n))$, qui contiennent $x = T^{-1}(x')$, ont. $\varphi_e(\omega_n) \rightarrow 0$, par là $x \ni \Delta(P)$; en appliquant T à la dernière inclusion, il vient $x' \in T(\Delta(P))$, ainsi $\Delta(P') \subset T(\Delta(P))$. Or envisageons un $x' \in T(\Delta(P))$; alors $x = T^{-1}(x') \in \Delta(P)$; des ω_n de P existent, tels que $\omega_n \ni x$ et $\varphi_e(\omega_n) \rightarrow 0$; en raison de $[(d), (e)]$ $\varphi'_e(\omega'_n) \rightarrow 0$, où $\omega'_n = T(\omega_n) \in P'$ et $\omega'_n \ni T(x) = x'$; par conséquent $x' \in \Delta(P')$; on obtient $T(\Delta(P)) \subset \Delta(P')$. La première relation (4.5a) s'ensuit. La seconde partie de (4.5a) s'établit de la même façon. Plus généralement: *on aura*

$$(4.5a') \quad \Delta(T(Q)) = T(\Delta(Q)) ,$$

dès que Q est une famille quelconque d'ensembles $q \in U - U_0$, avec $\varphi_e(q) > 0$ et $\Delta(Q)$ est l'ensembles des points x indéfiniment couverts par Q , e.g. de x tels que des q_n (de Q) existent de sorte que $q_n \ni x$ et $\varphi_e(q_n) \rightarrow 0$.

Les ensembles $H = \Delta(P)$, $H_0 = \Delta(G)$ étant mesurables- φ (4.1) selon hypothèse, en raison de (4.5a) et de (4.2) il suit que

$$(4.5b) \quad H' = \Delta(P') = T(H) , \quad H'_0 = \Delta(G') = T(H_0) , \quad \text{où } P' = T(P) , \quad G' = T(G) ,$$

et que les ensembles H' , H'_0 sont mesurables- φ . De plus

$$(4.5c) \quad H'_0 \subset H' , \quad \varphi'(H'_0) = \varphi'(H') .$$

En effet les relations $H_0 \subset H$, $\varphi(H - H_0) = 0$, (4.5b) et (4.4) entraînent la première relation (4.5c) et $H' - H'_0 = T(H - H_0)$, $\varphi'(H' - H'_0) = 0$.

La propriété primaire pour les familles $P' = \{\omega'\}$, $G' = \{\gamma'\}$, qui correspond à la relation (4.1a) à présent admise, aussi aura lieu; c'est-à-dire:

(4.6) Étant donné un $\varepsilon' > 0$, on peut trouver des γ'_n (de G') disjoints, de sorte que

$$\varphi'(H' - H' \Gamma') < \varepsilon' , \quad \text{où } \Gamma' = \sum_1^\infty \gamma'_n , \quad H' = \Delta(P') .$$

Cela s'ensuit en vertu de $[(d), (f)]$ dans (4.4), en prenant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, en choisissant des γ_n (de G) disjoints afin de satisfaire (4.1a) pour cet ε , puis en posant $\gamma'_n = T(\gamma_n)$.

(4.6a) Les γ'_n dans l'énoncé (4.6) peuvent être choisis de sorte qu'en même temps la propriété secondaire, correspondant à (4.1b), ait lieu:

$$\varphi'(H') - \varepsilon' < \varphi'(\Gamma') < \varphi'(H') + \varepsilon', \quad \Gamma' = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n.$$

D'après (4.1b) il suit que

$$\varphi(\Gamma) = \varphi(H) + \varphi(\Gamma - H\Gamma) - \varphi(H - \Gamma H) < \varphi(H) + \varepsilon,$$

d'où $\varphi(\Gamma - H\Gamma) < \varepsilon + \varphi(H - \Gamma H)$; ainsi (4.1a): $\varphi(\Gamma - H\Gamma) < 2\varepsilon$. En raison de [(d), (f)], dans (4.4), pour ε suffisamment petit il vient $\varphi'(\Gamma' - H'\Gamma') < \varepsilon'$, tandis que (4.6) aussi a lieu; il suivra que

$$(a_1) \quad \varphi'(\Gamma') < \varphi'(H'\Gamma') + \varepsilon' \leq \varphi'(H') + \varepsilon'.$$

Or

$$H' \subset \Gamma' + (H' - \Gamma'H'); \quad \varphi'(H') \leq \varphi'(\Gamma') + \varphi'(H' - \Gamma'H') < \varphi'(\Gamma') + \varepsilon'$$

(vu (4.6)), e.g.

$$(a_2) \quad \varphi'(H') - \varepsilon' < \varphi'(\Gamma'),$$

Les inégalités dans (4.6a) ont été réalisées. En résumé, nous avons établi le résultat suivant.

THÉORÈME 4.7. — *Admettons que $U, V, U_0, V_0, \varphi, \varphi'$ et une transformation T satisfont aux conditions (4.2), (4.4). Supposons que dans l'espace U il y a un théorème de couverture, à ε -près, (4.1)-(4.1b). En posant*

$$P' = \{\omega'\} = T(P), \quad G' = \{\gamma'\} = T(G), \quad H' = \Delta(P'), \quad H'_e = \Delta(G'),$$

on aura

$$(4.7a) \quad H' = T(H), \quad H'_0 = T(H_0), \quad \text{où } H = \Delta(P), \quad H_0 = \Delta(P_0); \quad \varphi'(H'_0) = \varphi'(H').$$

De plus, à tout $\varepsilon' > 0$, des γ'_n ($n = 1, 2, \dots$), $\in G'$, disjoints correspondent de sorte que

$$(4.7b) \quad \varphi'(H' - H' \sum \gamma'_n) < \varepsilon', \quad \varphi'(H') - \varepsilon' < \varphi'(\sum \gamma'_n) < \varphi'(H') + \varepsilon'.$$

REMARQUE 4.7'. — Ce théorème signifie que, dans les conditions indiquées, le théorème de couverture (4.1)-(4.1b), à ε -près (e.g. au sens approximatif), dans l'espace U , se transforme moyennant T en un théorème de couverture, de la même sorte, dans l'espace V ; en particulier (cas $P = G$), la famille *régulière* (au même sens) G dans U se transforme en une famille G' qui est *régulière* dans V .

(4.8) $U, V, U_0, V_0, \varphi, \varphi'$ étant des espaces, des ensembles et des mesures, comme on a indiqué plus haut, on dira dans le reste de la section actuelle que T est une transformation entre $U - U_0$ et $V - V_0$, si T satisfait aux conditions (4.2), (4.4). Une telle transformation sera dite *spéciale*, si $\varphi'(T(E)) = \varphi(E)$ pour tout E mesurable- φ contenu dans $U - U_0$. On dira que les hypothèses d'un théorème de couverture, donné dans U [avec $\omega \subset U - U_0$ et avec les conclusions (4.1)-(4.1b)], se transforment par T , si moyennant la transformation T ces hypothèses prennent dans $V - V_0$ une forme de la même sorte.

(4.9) Nous allons montrer qu'en général les hypothèses dans les divers théorèmes de couverture (dans $U - U_0$) connus (sans intervention de transformation) ne « se transforment » pas toutes par une transformation T (entre $U - U_0$ et $V - V_0$). L'utilité de ce fait consiste en ce que dans tout cas particulier de cette sorte on a (dans $V - V_0$) un nouveau théorème de couverture — au sens que les hypothèses y survenant [moyennant T appliquée aux conditions dans les théorèmes connus (dans $U - U_0$)] ne sont pas parmi les conditions suffisantes connues [e.g. connues d'une façon directe, sans l'intervention de transformations].

(4.10) $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$, avec $\gamma = \gamma(\omega) \subset \omega = \omega(\gamma) \subset U - U_0$, étant des familles d'ensembles qui interviennent dans un quelconque des théorèmes de couverture, les relations

$$0 < \varphi(\gamma) < \infty, \quad \varphi_e(\omega(\gamma)) \rightarrow 0 \quad (\text{lorsque } \varphi(\gamma) \rightarrow 0)$$

se transforment, ce qui est déjà vérifié dans (4.5).

(4.10a) Avec $D = \sum \gamma$ (γ décrivant G) et $D' (= T(D)) = \sum \gamma'$ ($\gamma' = T(\gamma)$ parcourant $G' = T(G) = \{T(\gamma)\}$), la propriété $\varphi_e(D) < \infty$ se transforme, e.g. $\varphi'_e(D') < \infty$; En effet il existe un ensemble E ($\subset U - U_0$), contenant D et de mesure- φ finie. on aura $D' \subset T(E)$, la mesure- φ' de $T(E)$ aussi étant finie, donc $\varphi'_e(D') (\leq \varphi'(T(E)))$ est finie.

(4.10b) $\varphi_e(\Delta(G)) > 0$ entraîne $\varphi'_e(\Delta(G')) > 0$ [eventuellement $\Delta(G)$, $\Delta(G')$ sont mesurables, respectivement $-\varphi$ et $-\varphi'$]. En effet, si on a $\varphi'(\Delta(G')) = 0$, d'après (4.5a') il suivra

$$0 = \varphi[T^{-1}(\Delta(G'))] = \varphi[\Delta(T^{-1}(G'))] = \varphi(\Delta(G)),$$

ce qui est une contradiction.

(4.10c) Soit $P(\gamma)$ [$G(\gamma)$] la famille des ensembles de P [de G] joints à un γ particulier de G ; posons

$$\varrho(\gamma) = \Delta(P(\gamma)) - \gamma \Delta(P(\gamma)), \quad \varrho^0(\gamma) = \Delta(G(\gamma)) - \gamma \Delta(G(\gamma));$$

les « operations » ϱ , ϱ^0 se transforment, e.g. (en raison de (4.5a'))

$$\begin{aligned} T(\varrho(\gamma)) &= \Delta[T(P(\gamma))] - T(\gamma) \Delta[T(P(\gamma))] = \\ &= \Delta(P'(\gamma')) - \gamma' \Delta(P'(\gamma')) = \varrho'(\gamma'), \quad \gamma' = T(\gamma), \end{aligned}$$

où $P'(\gamma')$ est la famille des ensembles de $P' = T(P)$ joints à γ' ; de même pour $\varrho^0(\dots)$.

(4.10d) $a > 1$ étant une constante et un $\gamma \in G$, posons

$$\begin{aligned} (1_0) \quad \Omega^a(\gamma) &= \sum \hat{\omega}, \quad [\hat{\omega} = \omega(\hat{\gamma}) \in P, \hat{\gamma} \in G, \hat{\omega}\gamma \neq 0; \varphi(\hat{\gamma}) < a\varphi(\gamma)], \\ \Omega^{0,a} &= \sum \hat{\gamma}, \quad [\hat{\gamma} \in G, \hat{\gamma}\gamma \neq 0; \varphi(\hat{\gamma}) < a\varphi(\gamma)]; \end{aligned}$$

on dira que l'opération Ω^a se transforme, si une $a' > 1$ existe telle que

$$\begin{aligned} (2_0) \quad T(\Omega^a(\gamma)) &= \Omega^{a'}(\gamma') = \sum \hat{\omega}', \\ [\hat{\omega}' = \hat{\omega}(\hat{\gamma}') \in P', \hat{\gamma}' \in G', \hat{\omega}'\gamma' \neq 0; \varphi'(\hat{\gamma}') < a'\varphi'(\gamma')], \end{aligned}$$

où $\omega' = T(\omega)$, $\hat{\gamma}' = T(\hat{\gamma})$, $\gamma' = T(\gamma)$; on fait une pareille remarque relativement à l'opération $\Omega^{0,a}$. Lorsque la transformation T est spéciale, les opérations Ω^a , $\Omega^{0,a}$ se transforment (en opération dans V , avec $a' = a$); en général ces transformations ne se transforment pas.

(4.10d') Envisageons le cas où, a étant une constante > 1 , une $a' (> 1)$ existe de sorte que

$$(1^0) \quad \varphi'(T(\hat{\gamma})) < a'\varphi'(T(\gamma)) \quad \text{entraîne} \quad \varphi(\hat{\gamma}) < a\varphi(\gamma),$$

dès que $\hat{\gamma}$ et γ sont dans G ; alors on aura

$$(2^0) \quad \Omega^{a'}[T(\gamma) \subset T[\Omega^a(\gamma)], \quad \Omega^{0,a'}[T(\gamma)] \subset T[\Omega^{0,a}(\gamma)].$$

En effet, d'après (4.10d)

$$(3^0) \quad T[\Omega^a(\gamma)] = \sum \hat{\omega}', \quad [\hat{\omega}' = \omega'(\hat{\gamma}') \in P', \hat{\gamma}' \in G', \hat{\omega}'\gamma' \neq 0; \varphi(\hat{\gamma}') < a\varphi(\gamma)],$$

(4^0) $\Omega^{a'}[T(\gamma)]$ = la réunion des $\hat{\omega}'$ indiquée au troisième membre de ((4.10d) (2₀)); pour les $\hat{\gamma}'$ et le γ' qui surviennent dans l'expression pour $\Omega^{a'}[T(\gamma)]$ on a

$$\varphi'(\hat{\gamma}') = \varphi'(T(\hat{\gamma})) < a'\varphi'(\gamma') = a'\varphi'(T(\gamma));$$

d'après (1⁰) correspondamment on aura $\varphi(\hat{\gamma}) < a\varphi(\gamma)$, ce qui veut dire que tout $\hat{\omega}'$ dans (4⁰) est un $\hat{\omega}'$ intervenant au second membre dans (3⁰); d'où

la première conclusion dans (2°); on démontre de la même manière la seconde inclusion (2°). L'hypothèse ((4.10d'), (1°)) est moins restrictive que l'exigence que l'opération Ω^a [ou bien $\Omega^{0,a}$] se transforme au sens de (4.10d). Pourtant, en général, même la condition (4.10d') n'a pas lieu.

(4.10e) Envisageons dans $U - U_0$ l'hypothèse suivante: il existe une $\eta(\varepsilon)$, positive pour $\varepsilon > 0$, $\eta(\varepsilon) \downarrow 0$ pour $\varepsilon \downarrow 0$, de sorte que les relations

$$(1') \quad \gamma_i \in G \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \text{les } \gamma_i \text{ disjoints,} \quad \varphi(\gamma_i) < \eta(\varepsilon)$$

entraînent

$$(2') \quad \varphi_e\left(\sum_i \varrho(\gamma_i)\right) < \varepsilon \quad \left[\text{ou bien } \varphi_e\left(\sum_i \varrho^0(\gamma_i)\right) < \varepsilon\right];$$

ici $\varrho(\dots)$, $\varrho^0(\dots)$ sont définis selon (4.10c). Cette hypothèse se transforme.

Avant d'établir la constatation (4.10e) notons que les caractères (4.4; d, e), (4.4; f, g) peuvent être exprimés ainsi: il existe $\sigma(\varepsilon)$, > 0 pour $\varepsilon > 0$, $\sigma(\varepsilon) \downarrow 0$ pour $\varepsilon \downarrow 0$, de sorte que, τ désignant la fonction inverse de σ ,

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varphi'_e(T(E)) < \sigma(\varepsilon)(E \subset U - U_0) &\quad \text{entraîne } \varphi_e(E) < \varepsilon, \\ \varphi_e(E) < \tau(\xi) &\quad \text{implique } \varphi'_e(T(E)) < \xi. \end{aligned}$$

Soient un $\xi > 0$ et des γ'_i ($i = 1, 2, \dots$) de G' disjoints, tels que

$$(1_1) \quad \varphi'(\gamma'_i) < \eta'(\xi) = \sigma[\eta(\tau(\xi))],$$

les fonctions η , σ , τ étant celles introduites plus haut, σ et τ étant inverses l'une de l'autre. En posant $\gamma_i = T^{+1}(\gamma'_i)$, il vient (4.10e):

$$(2_1) \quad \sum \varrho(\gamma'_i) = \sum \varrho(T(\gamma_i)) = T[\sum \varrho(\gamma_i)]; \quad \varphi'_e(\sum \varrho(\gamma'_i)) = \varphi'_e[T(\sum \varrho(\gamma_i))].$$

D'après (4.11) il suit de (1₁) que $\varphi(\gamma_i) < \eta(\tau(\xi))$; en raison de ((4.10e), (1')). ((4.10e), (2')) on aura $\varphi_e(\sum \varrho(\gamma_i)) < \tau(\xi)$, ce qui en vertu de (4.11) et de (2₁) entraîne

$$(3_1) \quad \varphi'_e(\sum \varrho(\gamma_i)) < \xi \quad (\text{une conséquence de (1}_1)).$$

On procède de la même façon avec $\varrho^0(\dots)$ au lieu de $\varrho(\dots)$. Ainsi la proposition (4.10e) est vérifiée.

(4.12) Dans le mémoire (T*) survient l'hypothèse (T*; 2.5*), qui est comme il suit: étant donné un $\varepsilon > 0$, admettons que des $\eta_n = \eta_n(\varepsilon) > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lim_n \eta_n = 0$ existent de sorte que les relations

- (a) γ_i^n ($i=1, 2, \dots$), $\in G$ sont disjoints pour tout $n > 0$ fixe, $\varphi(\gamma_i^n) < \eta_n$ ($i, n = 1, 2, \dots$) impliquent
- (b)
$$\sum_i \varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i^n) \right) < \varepsilon \quad [\text{ou bien le même avec } \varrho^0(\dots)].$$

Cette hypothèse est équivalente à la condition ((4.10e), (1')), ((4.10e), (2')).

Admettons l'hypothèse (T*; 2.5*); ainsi il y a des fonctions $\eta_n(\varepsilon)$, comme on a indiqué plus haut, de sorte que (a) entraîne (b). Choisissons comme $\eta(\varepsilon)$ une fonction quelconque telle que

$$0 < \eta(\varepsilon) \leq \eta_1(\varepsilon) \text{ pour } \varepsilon > 0, \quad \eta(\varepsilon) \downarrow 0 \text{ pour } \varepsilon \downarrow 0.$$

[on peut prendre une $\eta_m(\varepsilon)$ ($m > 0$) quelconque, avec un m fixe, au lieu de $\eta_1(\varepsilon)$]; soient des γ_i ($i=1, 2, \dots$) de G disjoints, $\varphi(\gamma_i) < \eta(\varepsilon)$; posons $\gamma_i^1 = \gamma_i$, tandis que pour $n > 1$ envisageons des γ_i^n ($n=1, 2, \dots$) dans G , disjoints pour n fixe, tels que $\varphi(\gamma_i^n) < \eta_n(\varepsilon)$. Alors, d'après l'hypothèse (T*; 2.5*) admise, il vient

$$\varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i) \right) + \sum_{n>1} \varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i^n) \right) < \varepsilon;$$

en particulier, $\varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i) \right) < \varepsilon$, e.g. on a montré que la condition [((4.10e), (1')), ((4.10e), (2'))] a lieu. Réciproquement, admettons l'hypothèse [((4.10a), (1')), ((4.10e), (2'))]. Il existe alors une $\eta(\varepsilon)$ (> 0 pour $\varepsilon > 0$), $\downarrow 0$ avec ε , telle que (1') entraîne (2'). Posons $\eta_n(\varepsilon) = \eta(\varepsilon 2^{-n})$ ($n=1, 2, \dots$); on aura $\eta_n(\varepsilon) > 0$ (pour $\varepsilon > 0$), $\lim_n \eta_n(\varepsilon) = 0$. Envisageons des γ_i^n satisfaisant à ((4.12); (a)). Les relations $\varphi(\gamma_i^n) < \eta_n(\varepsilon) = \eta(\varepsilon 2^{-n})$ impliquent, en vertu de l'hypothèse (4.10e), l'inégalité $\varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i^n) \right) < \varepsilon 2^{-n}$; donc

$$\sum_n \varphi_e \left(\sum_i \varrho(\gamma_i^n) \right) < \sum \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon,$$

ce qui est la conclusion ((4.12); (b)). De même avec $\varrho^0(\dots)$ au lieu de $\varrho(\dots)$. La proposition (4.12) est établie.

(4.13) L'hypothèse (T*; 2.5), e.g. ((4.12), (a), (b)), se transforme.

Cette constatation suit des énoncés (4.12), (4.10e).

(4.14) Envisageons les théorèmes de couverture approximatifs (T; 5.2), (T; (6.1)), généralisés au sens de (T*; Remarque 2.5"). Ainsi les hypothèses seront les suivantes.

- (a) les ensembles des familles $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$ jouissent des propriétés indiquées dans (4.10), (4.10a) et $\varphi_e(\Delta(G)) > 0$;
- (b) la propriété ((4.10e); (1'), (2')) a lieu [ici, au cas du théorème (T; 6.1), e.g. si $P = G$, on remplace $\varrho(\dots)$ par $\varrho^0(\dots)$ (4.10e)];

- (c) pour quelques constantes $1 < a < b$ on a $\varphi_e(\Omega^a(\gamma)) < b\varphi(\gamma)$ (4.10d) pour tout γ de G [pour le théorème (T; 6.1) on remplace $\Omega^a(\dots)$ par $\Omega^{0,a}$ (4.10d)].

Les conditions (a), (b) se transforment, mais en général (c) ne se transforme pas.

La conclusion que nous venons d'indiquer découle des énoncés (4.10), (4.10a), (4.10b) (pour (a)), (4.10e) (pour (b)), (4.10d) (pour (c)).

(4.15) *Au théorème (T*; 2.8) de couverture approximative les hypothèses sont comme il suit:*

- (a) $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$ sont comme dans (4.10), (4.10a) et $\varphi_e(\Delta(G)) > 0$;
- (b) la propriété ((4.10e); (1'), (2')) est valide, avec $\varrho^0(\dots)$ (4.10e) au lieu de $\varrho(\dots)$;
- (c) avec quelques $b > a > 1$, on a $\varphi_e(\Omega^{0,a}(k)) < b\varphi(\gamma)$ (4.10d) pour tout $\gamma \in G$;
- (d) $\varphi(\Delta(P) - \Delta(G)) = 0$.

Les caractères (a), (b), (d) se transforment, tandis qu'en général (c) ne se transforme pas.

Pour (a), (b), (c) cela est une conséquence des propriétés (4.10), (4.10a), (4.10b), (4.10e), (4.10d). Quant à (d), notons que d'après (4.5a), en posant $P' = T(P)$, $G' = T(G)$, il vient

$$\Delta(P') - \Delta(G') = T[\Delta(P) - \Delta(G)];$$

en raison de l'hypothèse 4.4 on aura $\varphi(\Delta(P') - \Delta(G')) = 0$, e.g. (d) se transforme;

(4.16) Les hypothèses survenant au théorème (T*; 3.3) de couverture approximative sont les suivantes:

- (a) les conditions (4.15; a);
- (b) la propriété ((4.10e); (1'), (2')) avec $\varrho(\dots)$ (4.10e);
- (c) avec une $a > 1$, $\lim_N \varphi_e\left(\sum_{n>N} \Omega^a(\gamma_n)\right) = 0$ (4.10d), dès que les γ_n ($n = 1, 2, \dots$), $\in G$, sont disjoints.

Les conditions (a), (b) se transforment, mais généralement (c) ne se transforme pas.

Cette affirmation relativement à (a) a été vérifiée plus haut; pour (b) elle suit de (4.10e); pour (c) l'énoncé découle de (4.10d). Dans la situation particulière, où une constante $a' (> 1)$ existe de sorte que la propriété ((4.10d'); (1⁰)) ait lieu, d'après ((4.10d'); (2⁰)) on aura

$$\sum_{n>N} \Omega^{a'}[T(\gamma_n)] \subset \sum_{n>N} T[\Omega^a(\gamma_n)] = T\left[\sum_{n>N} \Omega^a(\gamma_n)\right];$$

en tenant compte du caractère ((4.4); (d), (e)) de T , la condition (e) entraînera

$$\varphi'_e\left(\sum_{n>N} \Omega^{a'}[T(\gamma_n)]\right) \rightarrow 0 \quad \text{pour } N \rightarrow \infty;$$

e.g. dans ce cas restreint la condition ((4.16); (e)) se transforme.

En examinant la démonstration du théorème 4.5 dans (T*) on est mené à une formulation légèrement différente de cet énoncé, que voici.

(4.17) On admet les conditions (A), (B), (C) ci-après.

(A) Les familles $P = \{\omega\}$, $G = \{\gamma\}$ sont assujetties à (4.10), (4.10a) et $\varphi_e(\Delta(G)) > 0$.

(B) La propriété ((4.10e); (1'), (2')) a lieu avec $\varrho(\dots)$.

(C) Une $a > 1$ étant donnée, pour tout $\varepsilon > 0$ des suites $\{\gamma_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) existent, les γ_n (de G) étant disjoints, de sorte que:

$$(I) \quad \varphi_e(\theta) < \varepsilon/2, \quad \text{où } \theta = \sum \varrho(\gamma_n) \text{ (4.10e);}$$

$$(II) \quad \Delta(P) - \theta - I \cdot \Delta(P) \subset \Omega_N^a \quad (N = 1, 2, \dots), \quad \text{où } \Omega_N^a = \sum_{n>N} \Omega^a(\gamma_n), \quad I = \sum \gamma_n;$$

$$(III) \quad \lim_N \varphi_e(\Omega_N^a) < \varepsilon/2.$$

Ces conditions entraînent les conclusions (4.1), (4.1a), (4.1b) d'un théorème approximatif de couverture.

REMARQUE (4.17'). — On note que, dans les conditions (A), (B) seules, l'existence des suites (γ_n) satisfaisant à (C, I) est déjà assurée; par exemple, un tel choix de $\{\gamma_n\}$ peut être réalisé en procédant selon (T; p. 6-10), avec les modifications indiquées à la suite de (T*; (4.2a)); de plus pour un tel choix de $\{\gamma_n\}$ l'inclusion (C, II) aussi aura lieu d'elle-même. L'importance et l'intérêt de l'Exemple 4.8 dans (T*; p. 27-36) consiste en ce qu'il présente une famille $G [= P]$ satisfaisant aux conditions du théorème (4.17), de telle manière que l'on peut trouver une suite $\{\gamma_n\}$ ($\gamma_n \in G$), correspondant à $\varepsilon > 0$ et remplissant les conditions (C, I), (C, II), (C, III), cette suite d'ailleurs n'étant pas construite d'accord avec les procédés (modifiés) (T; p. 6-10); en plus, pour cet exemple les hypothèses d'aucun autre théorème de couverture ne sont pas satisfaites.

(4.18) Concernant les conditions survenant au théorème de couverture (4.17) on constate les faits suivants:

les hypothèses (A) et (B) se transforment (ce qui a été vérifié plus haut); la condition (C, I) se transforme; les conditions (C, II), (C, III) en général ne se transforment pas.

En effet, si les γ_n sont les ensembles d'une suite intervenant dans (C), on aura les $\gamma'_n = T(\gamma_n) \in G'$ [$= T(G)$] et les γ'_n seront disjoints; de plus $\theta' = T(\theta) = \sum \varrho(\gamma'_n)$, donc d'après (4.11) l'inégalité (C, I) entraîne $\varphi'_e(\theta') = \varphi'_e(T(\theta)) < \sigma(\xi/2)$ [$\sigma(\dots)$, $\tau(\dots)$ (4.11) sont inverses l'une de l'autre]. Si $\varepsilon > 0$ est donné, prenons $\xi > 0$ suffisamment petit de sorte que $\sigma(\xi/2) \leq \varepsilon/2$; ainsi (C, I) se transforme. La constatation relativement à (C, II) et à (C, III) s'ensuit essentiellement parce que les $\Omega^a(\gamma_n)$, donc Ω_N^a , ne se transforment pas (4.10d). *L'énoncé (4.18) est vérifié.*

REMARQUE (4.18'). — Envisageons le cas inverse à celui survenant dans ((4.10d'); (1°)), à savoir:

une $a' (> 0)$ existe telle que les relations

$$\hat{\gamma}' \in G', \quad \gamma' \in G', \quad \varphi(T^{-1}(\hat{\gamma}')) < a\varphi(T^{-1}(\gamma'))$$

entraînent $\varphi'(\hat{\gamma}') < a'\varphi'(\gamma')$.

En ce cas, en procédant comme dans la démonstration de ((4.10d'); (2°)), on obtient

$$\Omega^a(T^{-1}(\gamma')) \subset T^{-1}(\Omega^{a'}(\gamma')) ;$$

en posant $\Omega_N^{a'} = \sum (n > N) \Omega^{a'}(\gamma'_n)$, $\gamma'_n = T(\gamma_n)$, et en admettant (C, II) il viendra:

$$(a) \quad T(\Omega_N^a \subset \Omega_N^{a'}), \quad \Delta(P') - \theta' - \Gamma' \Delta(P') \subset \Omega_N^{a'}, \quad \Gamma' = T(\Gamma) = \sum \gamma'_n.$$

Ainsi dans le théorème (4.17) la condition (C, II) se transforme au cas où l'inverse de ((4.10d'); (1°)) a lieu. Enfin, si ((4.10d'); (1°)) a lieu au sens inverse ainsi qu'au sens direct originel, e.g. si des constantes positives a, a' existent de sorte que les relations $\hat{\gamma} \in G, \gamma \in G, \varphi'(\hat{\gamma})/\varphi'(\gamma) < a'$ équivalent à $\varphi(\hat{\gamma})/\varphi(\gamma) < a$ [ici $\hat{\gamma}' = T(\hat{\gamma}), \gamma' = T(\gamma)$], dans ce cas toutes les hypothèses au théorème (4.17) se transforment. Pour vérifier il ne reste qu'établir que, étant donné un $\xi > 0$, la relation ((4.17); (C, III)), admise pour une suite de $\gamma_n (\in G)$ disjoints, impliquera

$$(b) \quad \lim_N \varphi'_e(\Omega_N^{a'}) < \frac{\xi}{2} \quad [\Omega_N^{a'} \text{ défini dans (a)}],$$

pourvu que $\varepsilon (> 0)$ soit suffisamment petit. D'après ((4.10d'); (1°), (2°)) (sens direct)

$$\Omega^{a'}(\gamma'_n) \subset T(\Omega^a(\gamma_n)), \quad \Omega_N^{a'} \subset \sum_{n>N} T(\Omega^a(\gamma_n)) = T(\Omega_N^a);$$

en raison de (C, III) et de (4.11) il suit

$$\varphi'_e(\Omega_N^{a'}) \subset \varphi'_e(T(\Omega_N^a)) < \gamma \left(\frac{\varepsilon}{2} \right);$$

l'inégalité (b) résulte en prenant $\varepsilon (> 0)$ tel que $\sigma(\varepsilon/2) \leq \xi/2$, e.g. $0 < \varepsilon \leq 2\sigma_{-1}(\xi/2) = 2p(\xi/2)$.

(4.19) *Les développements présentés jusqu'ici constituent une vérification de la proposition (4.9); d'accord avec cet énoncé on a un moyen puissant de génération de théorèmes nouveaux de couverture de Denjoy-Vitali, soit au sens exact, soit au sens approximatif.*

REMARQUE 4.20. — Dans les Notes (D¹), (D²), (D³) de DENJOY se trouve un exemple très important d'une transformation T , *spéciale* au sens de la remarque 4.7'. Dans cet exemple U est l'espace euclidien U , de dimension un ; V est un certain espace métrique contenu dans U_3 ; la mesure φ (dans U_1) est euclidienne au sens de Borel-Lebesgue; V est dénombrablement mesurable; la mesure- φ' de tout voisinage dans V est infinie; chaque ensemble $\gamma' = T(\gamma)$ de $G' = T(G)$ est extrêmement dispersé. En examinant les développements présentés plus haut dans la section actuelle, on observe que les hypothèses de chaque théorème de couverture (exact ou approximatif), à présent connu, « se transforment » (au sens de (4.8)) moyennant toute transformation « spéciale ». Pourtant, il est concevable qu'on puisse éventuellement établir dans un espace U un théorème (*) de couverture, dont les hypothèses ne « se transforment » pas (au sens de (4.8)) par toute transformation « spéciale »; si c'était le cas, moyennant de certaines transformations spéciales il serait alors possible d'obtenir des théorèmes de couverture nouveaux — en procédant à partir des hypothèses du théorème (C). Il serait d'intérêt de poursuivre cette idée en rapport avec l'exemple de Denjoy — avec $U = U_1$; e.g., d'établir d'abord dans $U = U_1$ un théorème (C) (du genre indiqué), de sorte que la transformation T de Denjoy [(D¹), (D²), (D³)] ne transforme pas (au sens de (4.8)) toutes les hypothèses survenant dans (*); de cette façon on poussera l'étude des théorèmes de couverture encore plus loin.

5. — La mesure extérieure de Carathéodory.

Étant donné un espace quelconque U , on dira que Γ est une mesure extérieure de Carathéodory (cf. (S; Chap. II)), si $\Gamma(X) \geq 0$ est définie pour tout ensemble X de U , si $\Gamma(0) = 0$ et Γ satisfait aux propriétés:

$$(5; C_1) \quad X \subset Y \text{ entraîne } \Gamma(X) \leq \Gamma(Y);$$

$$(5; C_2) \quad \Gamma(\sum X_n) \leq \sum \Gamma(X_n) \text{ pour toute suite d'ensembles } X_n.$$

Un ensemble est *mesurable- Γ* [mesurable par rapport à Γ , satisfaisant à (5; C₁) et à (5; C₂)], si

$$(5.1) \quad P \subset E, \quad Q \subset CE(=U-E) \quad \text{entraînent} \quad \Gamma(P+Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q);$$

on désigne par L_I la famille d'ensembles mesurables- I ; la famille L_I est complètement additive (au sens de (S; p. 7)). Pour une mesure extérieure I de Carathéodory (assujettie à (5; C_1, C_2)) les résultats des sections 4, 5, 6 de (S; Chap. II) sont tous valides.

(5.) Si U est un espace métrique (muni de la topologie compatible avec la distance), et si dans U I est une mesure extérieure de Carathéodory satisfaisant à une condition convenable C_3 [voir par exemple C_3 dans (S; p. 43)], on aura $L_I \supset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ désigne la famille d'ensembles boréliens.

(5.3) Si U est un espace topologique (possiblement non métrique) normal, la Note (B⁰) s'applique. Formulons une condition C_3^n comme il suit:

$$(5.3; C_3^n) \quad P \subset F_1, Q \subset F_2, \text{ les } F_i \ (i=1, 2), \text{ fermés disjoints, entraînent} \\ I(P+Q) = I(P) + I(Q).$$

Si U est normal, le caractère C_3^n équivaudra au suivant:

$$(5.3') \quad \text{l'existence d'une fonction continue } g(x), \text{ telle que } g(x)=1 \text{ (sur } P) \text{ et} \\ g(x)=0 \text{ (sur } Q), \text{ entraîne } I(P+Q) = I(P) + I(Q).$$

(5.4) Comme une conséquence de (B⁰), si I est une mesure extérieure de Carathéodory dans un espace normal U et si I satisfait à C_3^n , il suivra que toute fonction $f(x)$ continue est mesurable- I [e.g. l'ensemble $\{x; f(x) > a\}$ appartient à la famille L_I pour tout a réel].

Est-ce qu'alors $L_I \supset \mathcal{B}$ (la famille d'ensembles boréliens)? Une telle inclusion reviendrait à ce que tout ensemble O ouvert appartient à L_I [en tant que la famille est complètement additive et $\mathcal{B}$ est la plus petite famille complètement additive qui contient les ensembles ouvertes (fermés)]. Or cette inclusion ne suit pas du résultat dans (B⁰) qu'on vient d'indiquer. En effet, si O est un ensemble ouvert il ne suit nécessairement pas qu'une fonction $f(x)$ continue existe telle que $O = \{x; f(x) > 0\}$; dans les conditions de (B⁰), seulement ceux des ensembles ouverts O seront mesurables- I (e.g. $\in L_I$) pour lesquels une $f(x)$ continue existe de sorte que $O = \{x; f(x) > 0\}$. Au cas d'un espace U métrisable de caractère C_3^n entraîne $L_I \supset \mathcal{B}$. $\mathcal{U}$ normal est nécessairement un espace complètement régulier; par conséquent:

si x_0 est un point dans un O ouvert, il existe une fonction $f(x)$ continue, dont les valeurs sont dans $[0, 1]$, $f(x_0)=1$ et $f(x)=0$ sur CO ($=\mathcal{U}-O$). Soit Q un ensemble fermé, $Q \neq 0$ et $Q \neq U$. Il se peut que $Q \notin L_I$; $O=CQ$ ouvert sera non vide et $\neq 0$; soit un point $x_0 \in O$; il existe une $f(x)$ continue, $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(x_0)=1$, $f(x)=0$ sur Q ; l'ensemble $F=\{x; f(x)=0\}$ sera fermé et $F=Q$; $F \neq U$, car $f(x_0) > 0$. En admettant C_3^n , d'après (5.4) f sera mesurable- I , donc $F \in L_I$. On conclut ainsi,

(5.5) Soient U un espace normal et I une mesure extérieure de Carathéodory satisfaisant à C_3^n (5.3); alors pour tout ensemble fermé Q , non vide et distinct de U , il existent des ensembles F fermés, distincts de U et tels que $F \supset Q$ et $F \in L_I$.

Moyennant les complémentaires il y a un énoncé analogue concernant les ensembles ouverts.

Maintenant, sans l'hypothèse que U soit un espace topologique, nous procédons d'une manière plus générale.

(5.6) *Dans un espace U admettons l'existence de deux familles d'ensembles, $\mathcal{N} = \{E\}$ et $\mathcal{M} = \{G\}$, avec les propriétés suivantes. Le complément CE d'un E de $\mathcal{N}$ est dans $\mathcal{M}$; le complément CG d'un G de $\mathcal{M}$ est dans $\mathcal{N}$; $\mathcal{N}[\mathcal{M}]$ contient les produits finis et les réunions finies d'ensembles de $\mathcal{N}$ [de $\mathcal{M}$]. L'ensemble vide et l'espace entier $\mathcal{U}$ appartiennent à la fois à $\mathcal{N}$ et à $\mathcal{M}$.*

Comme une conséquence, l'inclusion G (de $\mathcal{M}$) $\subset$ E (de $\mathcal{N}$) entraîne $E - G \in \mathcal{N}$.

HYPOTHÈSE 5.7. — *Étant donné un espace U muni des familles $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ d'accord avec (5.6), admettons en plus que pour tout G non vide de $\mathcal{M}$ des E_n et des G_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$) existent, tels que*

$$(5.7a) \quad E_n \in \mathcal{N}, \quad G_{n+1} \in \mathcal{M}, \quad E_n \subset G, \quad E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}, \quad \lim E_n = G.$$

Si Γ est une mesure extérieure de Carathéodory [donc assujettie à (5; C_1, C_2)] dans un espace U satisfaisant à (5.7), on pourra envisager une condition C_3^* de la manière suivante:

$$(5.8; C_3^*) \quad P \subset E_1 \text{ (de } \mathcal{N}), \quad Q \subset E_2 \text{ (de } \mathcal{N}), \quad E_1 E_2 = 0,$$

entraînent $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.

DÉFINITION 5.9. — *Désignons par $\mathcal{B}$ la plus petite famille complètement additive contenant $\mathcal{N}$.*

LEMME 5.10. — *Soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory dans un espace U satisfaisant à (5.6), (5.7); supposons que Γ possède la propriété C_3^* (5.8). Soit un ensemble Q non vide contenu dans un G de $\mathcal{M}$. Alors en posant $Q_n = Q E_n$, où les E_n (de $\mathcal{N}$) sont des ensembles dont il s'agit dans (5.7a), il vient $\lim_n \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q)$.*

Soient G_{n+1} ($n \geq 1$) des ensembles satisfaisant à (5.7a); posons $e_n = Q_{n+1} - Q_n = Q(E_{n+1} - E_n)$. On a

$$(1_0) \quad Q_{2n+1} \subset e_2 + e_4 + \dots + e_{2n-2} + e_{2n}, \quad Q_{2n} \subset e_1 + e_3 + \dots + e_{2n-3} + e_{2n-1}, \quad Q_n \uparrow Q.$$

Pour un $K > 1$ considérons les ensembles $e_{2K-2} = Q(E_{2K-1} - E_{2K-2})$, $e_{2K} = Q \cdot (E_{2K+1} - E_{2K})$. On a $E_{2K-1} \subset G_{2K}$ (de $\mathcal{M}$) $\subset E_{2K}$;

$$(2_0) \quad e_{2K-2} \subset E_{2K-1} \subset G_{2K};$$

$$(3_0) \quad e_{2K} \subset E_{2K+1} - E_{2K} \subset E_{2K+1} - G_{2K}.$$

D'après la remarque qui précède (5.7), $E_{2K+1} - G_{2K} \in \mathcal{N}$. Ainsi $[(2_0), (3_0)]$ e_{2K-2} et e_{2K} sont respectivement contenus dans des ensembles disjoints, appartenant à $\mathcal{N}$; donc, en vertu de la propriété C_3^* (5.8), il vient

$$\Gamma(e_{2K-2} + e_{2K}) = \Gamma(e_{2K-2}) + \Gamma(e_{2K});$$

de même

$$\Gamma(e_{2K-3} + e_{2K-1}) = \Gamma(e_{2K-3}) + \Gamma(e_{2K-1}) \quad (K > 1).$$

Par conséquent (1₀)

$$(4_0) \quad \begin{aligned} \Gamma(Q_{2n+1}) &\geq \Gamma(e_2) + \Gamma(e_4) + \dots + \Gamma(e_{2n-2}) + \Gamma(e_{2n}), \\ \Gamma(Q_{2n}) &\geq \Gamma(e_1) + \Gamma(e_3) + \dots + \Gamma(e_{2n-3}) + \Gamma(e_{2n-1}). \end{aligned}$$

On note que (puisque $E_n \uparrow G$)

$$\begin{aligned} G = E_{2n} + [(E_{2n+1} - E_{2n}) + (E_{2n+3} - E_{2n+2}) + \dots] + \\ + [(E_{2n+2} - E_{2n+1}) + (E_{2n+4} - E_{2n+3}) + \dots]; \end{aligned}$$

donc

$$Q = Q_{2n} + (e_{2n} + e_{2n+2} + \dots) + (e_{2n+1} + e_{2n+3} + \dots).$$

D'après (5; C_2)

$$\Gamma(Q) \leq \Gamma(Q_{2n}) + r_n + \varrho_n, \quad \text{où} \quad r_n = \sum_{K \geq n} \Gamma(e_{2K}), \quad \varrho_n = \sum_{K \geq n} \Gamma(e_{2K+1}).$$

Si les séries $\sum \Gamma(e_{2K})$, $\sum \Gamma(e_{2K+1})$ convergent, on aura $r_n \rightarrow 0$ et $\varrho_n \rightarrow 0$; alors

$$(5_0) \quad \Gamma(Q) \leq \lim_n \Gamma(Q_{2n}) = \lim_n \Gamma(Q_n) \quad (\text{car } Q_n \uparrow).$$

Au cas contraire, par exemple si $\sum \Gamma(e_{2K})$ diverge, en raison de (4⁰) on a

$$(6_0) \quad \lim_n \Gamma(Q_{2n+1}) = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_n \Gamma(Q_n) = +\infty;$$

L'inégalité (5⁰) sera valide dans tous les cas. *Le lemme 5.10 est établi.*

THÉORÈME 5.11. — *Soit U un espace satisfaisant à (5.6), (5.7), muni d'une mesure Γ extérieure de Carathéodory remplissant la propriété C_3^* (5.8). Alors L_Γ (la famille d'ensembles mesurables- Γ) $\supset \mathfrak{B}$ (Définition 5.9).*

Puisque la famille L_Γ est complètement additive, il suffit de démontrer que $L_\Gamma \supset \mathcal{N}$. L'ensemble vide et l'espace entier U sont mesurables- Γ ; ainsi envisageons un E de $\mathcal{N}$, non vide et distinct de U ; $G = CE$ sera dans $\mathcal{M}$, $G \neq 0$, $G \neq U$. Soient

P, Q des ensembles non vides tels que $P \subset E, Q \subset G$. D'accord avec (5.7a), on associe avec G des ensembles $E_n \in \mathcal{N}$ et $G_{n+1} \in \mathcal{M}$. Posons $Q_n = Q \cdot E_n$; selon le lemme 5.10 $\lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q)$. On a

$$Q_n \subset E_n \subset G = CE, \quad P \subset E, \quad E_n E = 0;$$

ainsi Q_n et P sont respectivement contenus dans deux ensembles disjoints, appartenant à $\mathcal{N}$; par conséquent C_3^* (5.8) s'applique et il vient

$$\Gamma(P + Q) \geq \Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q_n),$$

d'où

$$\Gamma(P + Q) \geq \Gamma(P) + \lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q);$$

e.g. (d'après (5; C_2)) $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$. On conclut que E (de $\mathcal{N}$) est mesurable- Γ . *Le théorème est vérifié.*

REMARQUE (5.12). — *Envisageons les cas où dans les développements à partir de (5.6) on a $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, e.g. que le complément de tout ensemble de $\mathcal{M}$ (de $\mathcal{N}$) est un ensemble de $\mathcal{M}$ (de $\mathcal{N}$). Si l'espace U est muni d'une telle famille $\mathcal{M}$, l'hypothèse (5.7) aura lieu d'elle-même: pour tout $G (\neq 0)$ de $\mathcal{M}$ (5.7a) sera valide avec $E_n = G_{n+1} = G$. Si, en plus, Γ est dans U une mesure extérieure de Carathéodory, le caractère C_3^* (5.2) prendra la forme:*

$$(5.12; C_3^*) \quad (1^\circ) \text{ les relations } P \subset E_1 \text{ (de } \mathcal{M}), Q \subset E_2 \text{ (de } \mathcal{M}), E_1 \cdot E_2 = 0, \text{ entraînent}$$

$$(2^\circ) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q).$$

Cette condition C_3^* équivaut à dire:

$$(3^\circ) \quad \text{les inclusions } P \subset E \text{ (de } \mathcal{M}), Q \subset CE \text{ impliquent } (2^\circ),$$

ce qui revient à $E \in L_\Gamma$, e.g. à ce que $L_\Gamma \supset \mathcal{M}$, donc que $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$ (définition 5.9).

Par conséquent, au cas considéré, la théorie (5.6)-(5.11) est sans l'intérêt, si l'on l'applique directement.

Continuons avec le cas $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, envisagé dans la remarque (5.12). Ainsi on considère le cas suivant.

(5.13) Dans l'espace U il existe une famille $\mathcal{N} = \{E\}$ d'ensembles tels que $E \in \mathcal{N}$ implique $CE \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ contient les produits finis et les réunions finies de ses ensembles; l'ensemble vide et l'espace U sont dans $\mathcal{N}$.

Par conséquent les relations $E_1 \in \mathcal{N}, E_2 \in \mathcal{N}, E_1 \supset E_2$ entraînent $E_1 - E_2 [= E_1 \cdot CE_2] \in \mathcal{N}$.

DÉFINITION 5.14. — Soit $\mathcal{N}_\delta [N_\sigma]$ la famille des produits [réunions] dénombrables d'ensembles de $\mathcal{N}$; posons

$$(5.14a) \quad \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_\delta - \mathcal{N}.$$

HYPOTHÈSE 5.15. — Ayant admis (5.13), supposons que pour tout G non vide de $\mathcal{N}_\delta$ des E_n et des G_{n+1} existent, de sorte que

$$(5.15a) \quad E_n \in \tilde{\mathcal{N}}, \quad G_{n+1} \in \mathcal{N}_\sigma, \quad E_n \subset G, \quad E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}, \quad \lim E_n = G,$$

[l'implication est que la famille $\tilde{\mathcal{N}}$ (5.14a) n'est pas vide].

Γ étant une mesure extérieure de Carathéodory, donc satisfaisant à (5; C_1, C_2), admettons en outre qu'elle possède la propriété $\tilde{C}_3$ suivante:

(5.16; $\tilde{C}_3$) les relations $P \subset E_1$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$), $Q \subset E_2$ (de $\mathcal{N}_\delta$), $E_1 E_2 = 0$, impliquent

$$\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q).$$

LEMME 5.17. — Admettons que l'espace U possède les propriétés (5.13), (5.15). Soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory, dans U , jouissant du caractère $\tilde{C}_3$ (5.16). Si un ensemble Q non vide est contenu dans un G de $\mathcal{N}_\sigma$ et les E_n (ainsi que les G_{n+1}) sont d'accord avec (5.15a), en posant $Q_n = Q E_n$ on obtient $\lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q)$.

Nous procédons comme dans la démonstration du lemme 5.10. $e_n = Q_{n+1} - Q_n$;

$$(1^0) \quad Q_{2n+1} \supset e_2 + e_4 + \dots + e_{2n}, \quad Q_{2n} \supset e_1 + e_3 + \dots + e_{2n-1}, \quad Q_n \uparrow Q.$$

D'après (5.15a) $E_{2K-1} \subset G_{2K}$ (de $\mathcal{N}_\sigma$) (si $K > 1$); par conséquent

$$(2^0) \quad e_{2K-2} \subset E_{2K-1} \subset G_{2K};$$

$$(3^0) \quad e_{2K} \subset E_{2K+1} - E_{2K} \subset E_{2K+1} - G_{2K}.$$

Or $E_{2K+1} = \prod E_K^1$, $G_{2K} = \sum K_K^1$, les E_K^1 et les H_K^1 étant dans $\mathcal{N}$; donc

$$E_{2K+1} - G_{2K} = \prod_1 E_K^1 \cdot C \sum H_K^1 = \prod_1 E_K^1 \cdot \prod_1 C H_K^1 \in \mathcal{N}_\delta,$$

puisque $C H_K^1 \in \mathcal{N}$. Ainsi (avec $K > 1$ fixe) les deux ensembles e_{2K-2} , e_{2K} sont respectivement contenus dans E_{2K-1} (de $\tilde{\mathcal{N}}$) et $E_{2K+1} - G_{2K}$ (de $\mathcal{N}_\delta$), les deux derniers ensembles étant disjoints. En raison de $\tilde{C}_3$ (5.16) il s'ensuit que

$$\Gamma(e_{2K-1} + e_{2K}) = \Gamma(e_{2K-2}) + \Gamma(e_{2K}); \quad \text{aussi} \quad \Gamma(e_{2K-3} + e_{2K-1}) = \Gamma(e_{2K-3}) + \Gamma(e_{2K-1}).$$

Dès lors on procède comme dans la preuve du lemme 5.10 [de (4°) à (6°)], et on vérifie le lemme 5.17.

THÉOREME 5.18. — *Soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory jouissant du caractère $\tilde{C}_3$ (5.16) dans un espace U possédant les propriétés (5.13), (5.15). Alors $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ dénote la famille complètement additive minimale contenant $\mathcal{N}$.*

Pour démontrer envisageons un E non vide de $\mathcal{N}_\delta$, distinct de U . Alors $G = CE \in \mathcal{N}_\sigma$; G sera non vide, $G \neq U$. Considérons $P \neq 0$, $Q \neq 0$, tels que $P \subset E$, $Q \subset G$. D'accord avec (5.15a) on associe avec G des ensembles $E_n \in \tilde{\mathcal{N}}$, $G_{n+1} \in \mathcal{N}_\sigma$, contenus dans G ; $E_n \uparrow G$; posons $Q_n = QE_n$. En vertu du lemme 5.17 $\lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q)$. Or (avec un $n > 0$ fixe) les ensembles Q_n , P sont respectivement contenus dans des ensembles disjoints, à savoir: E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$) et E (de $\mathcal{N}_\delta$). En raison de la propriété $\tilde{C}_3$ (5.16) il vient $\Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q_n)$; donc $\Gamma(P + Q) \geq \Gamma(P) + \Gamma(Q_n)$; en laissant $n \rightarrow \infty$, on obtient $\Gamma(P + Q) \geq \Gamma(P) + \Gamma(Q)$, e.g. (d'après (5; C_2)) $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$. Par conséquent tout E de $\mathcal{N}_\delta$ est dans L_Γ [on note que l'ensemble vide, ainsi que l'espace U lui-même, appartiennent à L_Γ , même sans la condition $\tilde{C}_3$]. Il suit que $L_\Gamma \supset \mathcal{N}$, donc $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$, ce qui vérifie le théorème.

REMARQUE (5.19). — *Si dans la formulation de la condition $\tilde{C}_3$ (5.16) on remplaçait la famille $\tilde{\mathcal{N}}$ par $\mathcal{N}_\delta$ ($\subset \tilde{\mathcal{N}}$), la théorie (5.13)-(5.18) deviendrait sans objet. En effet, dans ce cas envisageons un $E \in \mathcal{N}$; d'après le caractère $\tilde{C}_3$ modifié les relations*

$$P \subset E, \quad Q \subset CE \quad (CE \text{ étant nécessairement dans } \mathcal{N}, \subset \mathcal{N}_\delta)$$

entraînerait $E \in L_\Gamma$; cela reviendrait à ce que $\mathcal{N} \subset L_\Gamma$, donc $\mathcal{B} \subset L_\Gamma$.

(5.20) *En admettant (5.13) et en supposant que la famille $\tilde{\mathcal{N}}$ (5.14a) est non vide, envisageons le cas où l'hypothèse (5.15) n'est pas réalisée, e.g. qu'il y a des $G, \neq 0$, de $\mathcal{N}_\sigma$ pour lesquels la condition (5.15a) est en défaut; soit $\mathcal{A}_0$ la famille des ensembles non vides de $\mathcal{N}_\delta$ pour chacun desquels la propriété (5.15a) manque; par hypothèse la famille $\mathcal{A}_0$ est non vide. On a*

$$(5.20a) \quad \mathcal{N}_\sigma = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1;$$

ici $\mathcal{A}_1$ est la famille des ensembles de $\mathcal{N}_\delta$, comprenant l'ensemble vide et les ensembles de $\mathcal{N}_\delta$ chacun possédant la propriété (5.15a). Examinons de plus près la famille $\mathcal{A}_0$; on observe que

$$(5.20b) \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2,$$

les familles $\mathcal{D}_i$ étant disjointes; $\mathcal{D}_0$ consiste des G (de $\mathcal{A}_0$) sans sous-ensembles dans $\tilde{\mathcal{N}}$; $\mathcal{D}_1$ est formée des G (de $\mathcal{A}_0$), tels que G contient des sous-ensembles dans $\tilde{\mathcal{N}}$, mais qu'il n'y ait pas de E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\uparrow G$; $\mathcal{D}_2$ comprend les G (de $\mathcal{A}_0$) tels qu'il y a des E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\uparrow G$, mais tels que pour aucune suite E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$), $\downarrow G$, il n'y ait pas de G_{n+1} (de $\mathcal{N}_\sigma$) satisfaisant à $E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

HYPOTHÈSE 5.21. — Envisageons la situation (5.20)-(5.20b). Pour les ensembles G non vides de $\mathcal{A}_1$ la condition (5.15a) est réalisable. Soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory avec la propriété $\hat{C}_3$, comprenant (I)-(III) ci-après:

- (I) les relations $G \in \mathcal{D}_2$, $P \subset E_1$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset G$, $Q \subset E_2$ (de $\mathcal{N}_{\delta\sigma}$), $E_1 E_2 = 0$, entraînent $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$;
- (II) les relations $G \in \mathcal{A}_1$, $P \subset E_1$ (de $\tilde{\mathcal{N}}$) $\subset G$, $Q \subset E_2$ (de $\mathcal{N}_\delta$), $E_1 E_2 = 0$, impliquent $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.

De plus admettons que

- (III) les relations $E \in \mathcal{N}$, $E \subset G$ (de $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$) entraînent $E \in L_\Gamma$.

LEMME 5.22. — Dans les conditions de l'hypothèse 5.21, si un ensemble Q non vide est contenu dans un G de $\mathcal{D}_2$ et les E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$) constituent une suite associée avec G (e.g. $E_n \uparrow G$), alors en posant $Q_n = Q E_n$ il vient $\lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q)$.

Nous suivons les procédés des démonstrations des lemmes 5.10, 5.17. Pour les $e_n = Q_{n+1} - Q_n$ on obtient la formule (1°) (à la suite de (5.17)). Si $K > 1$, il vient

$$(1') \quad E_{2K-1} \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}) \subset E_{2K} \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}), \quad e_{2K-2} \subset E_{2K-2}, \quad e_{2K} \subset E_{2K+1} - E_{2K}.$$

Or

$$E_{2K+1} = \prod_{s=1}^{\infty} E^s, \quad E_{2K} = \prod_{v=1}^{\infty} H^v, \quad E^s \in \mathcal{N}, \quad H^v \in \mathcal{N};$$

les E^s et les H^v peuvent varier avec K ; on déduit

$$E_{2K+1} - E_{2K} = \left[\prod_s E^s \right] \cdot C \prod_v H^v = \left[\prod_s E^s \right] \cdot \sum_v C H^v = \sum_v \left[(C H^v) \cdot \left(\prod_s E^s \right) \right] \in \mathcal{N}_{\delta\sigma},$$

car $C H^v \in \mathcal{N}$; ici $\mathcal{N}_{\delta\sigma}$ est la famille formée des réunions dénombrables d'ensembles de $\mathcal{N}_\delta$. Pour un $K > 1$ fixe, d'après (1') e_{2K-2} , e_{2K} sont contenus dans les deux ensembles disjoints

$$E_{2K-1} \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}), \quad E_{2K+1} - E_{2K} \text{ (de } \mathcal{N}_{\delta\sigma});$$

les derniers ensembles sont dans G (de $\mathcal{D}_2$). La condition ((5.21); (I)) s'applique; donc

$$(2') \quad \Gamma(e_{2K-2} + e_{2K}) = \Gamma(e_{2K-2}) + \Gamma(e_{2K}),$$

et de la même façon:

$$\Gamma(e_{2K-3} + e_{2K-1}) = \Gamma(e_{2K-3}) + \Gamma(e_{2K-1}) \quad (K = 2, 3, \dots).$$

À partir de (2'), la démonstration du lemme s'achève en procédant d'accord avec la partie (4₀)-(6₀) de la preuve du lemme 5.10.

LEMME 5.23. Admettons l'hypothèse 5.21. Soient un $Q (\neq 0)$ contenu dans un G de $\mathcal{A}_1$ (5.20a) et les E_n (de $\tilde{\mathcal{N}}$) les ensembles associés avec G selon (5.15a). Alors

$$\lim_n \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q), \quad \text{où} \quad Q_n = QE_n.$$

Cela s'ensuit de ((5.21); (II)) et du lemme 5.17.

(5.24) Si la famille $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ (5.20) est non vide et $G \in \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$, G sera mesurable- Γ [car $G = \sum E^v$, $E^v \in \mathcal{N}$ et, selon ((5.21); (III)), E^v est mesurable- Γ].

THÉORÈME 5.25. — Soit $\mathcal{B}$ la famille complètement additive minimale contenant $\mathcal{N}$, les conditions de l'hypothèse (5.21) étant admises (ainsi Γ jouit de la propriété $\hat{C}_3$). Alors $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$.

Envisageons un E non vide de $\mathcal{N}$, tel que $G = CE$ est aussi non vide; on aura $G \in \mathcal{N}$. En tenant compte de (5.20)-(5.20b), on observe que G appartient à une des familles $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{A}_1$. Si la famille $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ est non vide et $G \in \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$, en raison de ((5.21); (III)) G est mesurable- Γ , donc $E = CG \in L_\Gamma$.

Si $G = CE \in \mathcal{D}_2$, considérons

$$(1_1) \quad P \neq 0, \quad Q \neq 0, \quad P \subset E, \quad Q \subset G.$$

Des E_n (de $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}_\delta - \mathcal{N}$) ($n=1, 2, \dots$) existent tels que $E_n \uparrow G$. D'après le lemme 5.22

$$(2_1) \quad \lim \Gamma(Q_n) = \Gamma(Q), \quad \text{où} \quad Q_n = QE_n.$$

On note que

$$Q_n \subset E_n \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}) \subset G \text{ (de } \mathcal{D}_2) \quad \text{et} \quad P \subset E \text{ (de } \mathcal{N}), \quad E_n E = 0.$$

Par là, en vertu de ((5.21); (I)) $\Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q_n)$; donc (2₁)

$$(3_1) \quad \Gamma(P + Q) \geq \lim \Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

e.g. $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$, ce qui est une conséquence de (1₁). Cela veut dire:

$$(4_1) \quad \text{tout } G \text{ de } \mathcal{D}_2 \text{ est mesurable-}\Gamma, \text{ ainsi que les compléments de ces ensembles.}$$

Si la famille $\mathcal{A}_1$ contient des ensembles non vides, considérons le cas où $G = CE$ [$E \in \mathcal{N}$, $E \neq 0$, $G \neq 0$] appartient à $\mathcal{A}_1$. Selon (5.20a) la propriété (5.15a).

subsiste pour l'ensemble G , e.g. des G_n et des E_n ($n=1, 2, \dots$) existent tels que

$$E_n \in \tilde{\mathcal{N}}, \quad G_{n+1} \in \mathcal{N}_\sigma, \quad E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}, \quad E_n \uparrow G;$$

envisageons encore des ensembles P, Q assujettis à (1₁); $Q_n = QE_n$. On observe que

$$Q_n \subset E_n \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}) \subset G \text{ (de } \mathcal{A}_1) \quad \text{et} \quad P \subset E \text{ (de } \mathcal{N}), \quad E_n E = 0;$$

or $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_\delta$, donc ((5.21); (II)) s'applique et on obtient $\Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q_n)$. D'après le lemme 5.23 il en résulte que $\lim \Gamma(P + Q_n) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$; les relations (3₁) suivent au cas présent: $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$. Par conséquent

(5₁) tout G de $\mathcal{A}_1$ est mesurable- Γ (ainsi que $CG = E$).

D'après (4₁), (5₁) et de la constatation, donné plus haut relativement à tout G (de $\mathcal{N}$) $\in \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$, il suit que $\mathcal{N} \subset L_R$. *La conclusion du théorème en découle.*

REMARQUE (5.26). — La théorie développée à partir de (5.20) n'a de portée que si la famille $\mathcal{D}_2 + \mathcal{A}_1$ est non vide, e.g. cette théorie est sans objet au cas où $\mathcal{N}_\sigma = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$. Soit un E (de $\tilde{\mathcal{N}}$) contenu dans un G (de $\mathcal{D}_2$); alors $E = \prod E_n$, $E_n \in \mathcal{N}$ et $CE = \sum CE_n \in \mathcal{N}_\delta$, en effet $CE \in \mathcal{N}_\sigma - \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{\delta\sigma}$; d'après ((5.21); (I)) les relations

$$P \subset E \text{ (de } \tilde{\mathcal{N}}) \subset G \text{ (de } \mathcal{D}_2), \quad Q \subset CE \text{ (de } \mathcal{N}_{\delta\sigma})$$

entraînent $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$, e.g.

(5.26') tout E (de $\tilde{\mathcal{N}}$), contenu dans un G (de $\mathcal{D}_2$), est mesurable- L_R ; pourtant de ((5.21); (I)) il ne suit pas directement que

(5.26'') tout E (de $\mathcal{N}$), contenu dans un G (de $\mathcal{D}_2$), appartient à L_R ; le dernier fait est déduit au cours de la preuve du théorème 5.25.

6. — La mesure extérieure de Carathéodory (suite).

Nous introduisons

DÉFINITION 6.1. — Soit $\mathcal{N}$ la famille d'ensembles dont il s'agit dans une des deux définitions présentées dans la section précédente: à savoir (5.6) et (5.13). On désignera par $C(\mathcal{N})$ [$C(\mathcal{N}_\delta)$] la classe des fonctions numériques $f(x)$, définies dans l'espace U , telles que

(6.1a) l'ensemble $[x; \pm f(x) \geq \alpha] \in \mathcal{N}$ [$\in \mathcal{N}_\delta$] pour tout α réel.

Notéons par $F(\Gamma)$ la famille des fonctions mesurables- Γ (e.g. $f(x) \in F(\Gamma)$ veut dire $[x; f(x) > \alpha] \in L_\Gamma$ pour tout α).

Nous sera utile le résultat qui se trouve dans (B*; p. 1311) et qui, en s'appuyant sur notre terminologie, est le suivant:

(6.2) Soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory (satisfaisant donc à (5; C_1) et à (5; C_2)) dans un espace U . Pour qu'une fonction numérique $f(x)$, définie dans U , appartienne à $F(\Gamma)$ il faut et il suffit que

$$\inf_A f > \sup_B f \quad \text{entraîne} \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B).$$

$\mathfrak{B}$ étant la famille complètement additive minimale contenant $\mathcal{N}$, dans chacun des trois théorèmes 5.11, 5.18, 5.25, en admettant les conditions qui conviennent à chacun cas, on constate l'inclusion $L_\Gamma \supset \mathfrak{B}$ (ce qui équivaut à $L_\Gamma \supset \mathcal{N}$). Or dès qu'on a $L_\Gamma \supset \mathfrak{B}$, il suivra que $F(\Gamma) \supset C(\mathcal{N})$ (6.1); cela résulte tout de suite des définitions; pourtant la réciproque n'est pas vraie.

HYPOTHÈSE 6.3. — À certaines reprises on considérera une des deux conditions suivantes. Pour tout ensemble A il existe un ensemble $\hat{A}$ tel que $A \subset \hat{A}$, $\hat{A} \in \mathcal{N}$ [$\in \mathcal{N}_\delta$], tandis que les relations

$$A \subset E \subset \hat{A}, \quad E \in \mathcal{N} \text{ } [\in \mathcal{N}_\delta] \quad \text{entraînent} \quad E = \hat{A}.$$

Autrement dit, dans un cas on admet que tout ensemble A est contenu dans un ensemble de $\mathcal{N}$ minimal; dans l'autre cas A est contenu dans un ensemble de $\mathcal{N}_\delta$ minimal. Si U est un espace topologique et $\mathcal{N}$ est la famille des ensembles fermés, la première condition sera remplie; dans ce cas pour tout ensemble A , il vient $\hat{A} = \bar{A}$ (la fermeture de A).

(6.4) Désignerons par $C^-(\mathcal{N})$ [$C^-(\mathcal{N}_\delta)$] la classe des fonctions $f(x)$, définies dans U , telles que

(6.4a) l'ensemble $[x; f(x) \leq \alpha] \in \mathcal{N}$ [$\in \mathcal{N}_\delta$] pour tout α réel;
 $C^+(\mathcal{N})$ [$C^+(\mathcal{N}_\delta)$] sera la classe des $f(x)$ pour lesquelles

(6.4b) l'ensemble $[x; f(x) \geq \alpha] \in \mathcal{N}$ [$\in \mathcal{N}_\delta$] pour tout α réel.

En tenant compte de la définition 6.1, on observe que

$$(6.4') \quad C(\mathcal{N}) = C^+(\mathcal{N}) \cap C^-(\mathcal{N}), \quad C(\mathcal{N}_\delta) = C^+(\mathcal{N}_\delta) \cap C^-(\mathcal{N}_\delta).$$

LEMME 6.5. $\mathfrak{N}$ Soit la famille $\mathcal{N}$ assujettie à (5.6); admettons la condition de l'hypothèse 6.3 faisant intervenir $\mathcal{N}$ [$\mathcal{N}_\delta$]. Si $f \in C^-(\mathcal{N})$ [$\in C^-(\mathcal{N}_\delta)$] et si A est

un ensemble quelconque, on aura $\sup(A)f = \sup(\hat{A})f$; de même, si $f \in C^+(\mathcal{N})$ [$\in C^+(\mathcal{N}_\delta)$], il viendra $\inf(A)f = \inf(\hat{A})f$.

En effet, au cas où $f \in C^-(\mathcal{N})$ [$\in C^-(\mathcal{N}_\delta)$], en posant $c = \sup(A)f$ on obtient

$$f(x) \leq c \quad \text{sur } A, \quad E_c = [x; f(x) \leq c] \in \mathcal{N} \quad [\in \mathcal{N}_\delta].$$

Or $A \subset E_c$; selon la définition de $\hat{A}$ (6.3) il en résulte que $A \subset \hat{A} \subset E_c$, d'où $\sup(\hat{A})f \leq c$; pourtant l'inclusion $A \subset \hat{A}$ entraîne $c \leq \sup(\hat{A})f$, e.g. la conclusion du lemme est vérifiée pour le cas considéré. Le reste de l'énoncé se démontre de la même façon.

DÉFINITION 6.6. — Admettons que l'espace U est muni d'une famille $\mathcal{N}$ remplissant (5.6) et que la condition (6.3) pour $\mathcal{N}$ [pour $\mathcal{N}_\delta$] a lieu; on dira que U est *pseudo-normal*- $\mathcal{N}$ [*pseudo-normal*- $\mathcal{N}_\delta$], si les relations A et B disjoints sont dans $\mathcal{N}$ [dans $\mathcal{N}_\delta$] entraînent l'existence d'une fonction g de $C(\mathcal{N})$ [de $C(\mathcal{N}_\delta)$] (6.1) telle que

$$g(x) = 0 \quad \text{sur } A, \quad g(x) = 1 \quad \text{sur } B.$$

(6.7) On dira qu'une mesure extérieure de Carathéodory, qui satisfait donc à (5; C_1) et à (5; C_2), dans l'espace U jouit de la *propriété* $C_3(\mathcal{N})$ [$C_3(\mathcal{N}_\delta)$], si l'existence d'une fonction g de $C(\mathcal{N})$ [de $C(\mathcal{N}_\delta)$], telle que $g = 0$ (sur A) et $g = 1$ (sur B), entraîne l'égalité $\Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$.

THÉORÈME 6.8. — Dans un espace U *pseudo-normal*- $\mathcal{N}$ [$-\mathcal{N}_\delta$] (définition 6.6) soit Γ une mesure extérieure de Carathéodory, assujettie à (5; C_1), (5; C_2), $C_3(\mathcal{N})$ [$C_3(\mathcal{N}_\delta)$] (6.7). Alors (définition 6.1)

$$(6.8a) \quad C(\mathcal{N}) \subset F(\Gamma) \quad [C(\mathcal{N}_\delta) \in F(\Gamma)].$$

Soient une fonction f et des ensembles A, B tels que

$$(1_0) \quad f \in C(\mathcal{N}) [\in C(\mathcal{N}_\delta)], \quad \inf_A f > \sup_B f.$$

D'après la partie suffisante de (6.2) le théorème sera prouvé, si l'on montre que (1₀) entraîne $\Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$. Vu (6.4')

$$f \in C^+(\mathcal{N}) \quad [\in C^+(\mathcal{N}_\delta)] \quad \text{et} \quad f \in C^-(\mathcal{N}) \quad [\in C^-(\mathcal{N}_\delta)].$$

En raison du lemme 6.5

$$(2_0) \quad \inf(\hat{A})f = \inf(A)f > \sup(B)f = \sup(\hat{B})f,$$

où les ensembles $\hat{A}, \hat{B}$ sont définis d'accord avec (6.3); en tenant compte de (2₀) on

constate que

$\hat{A}, \hat{B}$ sont disjoints; ils sont dans $\mathcal{N}$ [dans $\mathcal{N}_\delta$].

L'espace U étant pseudo-normal- $\mathcal{N}$ [$-\mathcal{N}_\delta$], il existe une fonction $g(x)$:

$$g(x) \in C(\mathcal{N}) \quad [\in C(\mathcal{N}_\delta)],$$

$$g(x) = 0 \text{ sur } A \text{ (en effet sur } \hat{A}), \quad g(x) = 1 \text{ sur } B \text{ (en effet sur } \hat{B}).$$

L'application de la propriété $C_3(\mathcal{N}) [C_3(\mathcal{N}_\delta)]$ de Γ mène à l'égalité $\Gamma[A + B] = \Gamma(A) + \Gamma(B)$; par conséquent $f \in F(\Gamma)$. Le théorème est vérifié.

(6.9) *Admettons (5.6) au cas où $\mathcal{N} = \mathcal{M}$; e.g. (5.13) a lieu. Alors, si $A \in \mathcal{N}$, on aura (6.1):*

$$C_A(x) \text{ (la fonction caractéristique de } A) \in C(\mathcal{N}).$$

Cela se démontre de la même façon que dans la partie correspondante de l'énoncé (3.4), en tenant compte du fait que $K(\mathcal{F})$ est une famille $\mathcal{N}$, dont il s'agit à présent, et que les classes de fonctions $C^\pm(\mathcal{F})$ (définition 2.15, avec A y remplacé par U), correspondent aux classes $C^\pm(\mathcal{N})$ (6.4)-(6.4').

(6.10) *Au cas $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13) et si l'hypothèse 6.3, pour $\mathcal{N}$, a lieu, l'espace U sera pseudo-normal- $\mathcal{N}$.*

En effet, si des ensembles A, B disjoints sont dans $\mathcal{N}$, la fonction $g(x) = c_A(x)$ appartiendra à $C(\mathcal{N})$ (6.9) et l'on aura $g(x) = 1$ sur A , $g(x) = 0$ sur B ($\subset CA$); d'où la conclusion.

Revenons au cas où les familles $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ peuvent être distinctes. *En admettant toujours l'hypothèse 6.3, avec la designation $\hat{A}$ au sens de $\mathcal{N}$ [de $\mathcal{N}_\delta$], envisageons le caractère*

(6.11) $\hat{C}_3(\mathcal{N}) [\hat{C}_3(\mathcal{N}_\delta)]$: « P, Q sont tels que les ensembles $\hat{P}, \hat{Q}$ au sens de $\mathcal{N}$ [de $\mathcal{N}_\delta$] sont disjoints » entraîne $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.

On vérifie la proposition suivante.

(6.12) *La propriété $\hat{C}_3(\mathcal{N}) [\hat{C}_3(\mathcal{N}_\delta)]$ (6.11) entraîne $C_3(\mathcal{N}) [C_3(\mathcal{N}_\delta)]$ (6.7); si en outre l'espace U est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ [$-\mathcal{N}_\delta$], il vient que le caractère $C_3(\mathcal{N}) [C_3(\mathcal{N}_\delta)]$ implique $\hat{C}_3(\mathcal{N}) [\hat{C}_3(\mathcal{N}_\delta)]$.*

Admettons $\hat{C}_3(\mathcal{N}) [\hat{C}_3(\mathcal{N}_\delta)]$ et considérons un couple d'ensembles A, B pour lesquels une fonction g de $C(\mathcal{N})$ [de $C(\mathcal{N}_\delta)$] existe de sorte que $g = 0$ (sur A) et $g = 1$ (sur B). Or (6.4'); d'après le lemme 6.5

$$0 = \sup(A)g = \inf(A)g = \sup(\hat{A})g = \inf(\hat{A})g, \quad \text{d'où} \quad g = 0 \text{ sur } \hat{A};$$

de même $g=1$ sur $\hat{B}$; ici les notations $\hat{A}, \hat{B}$ sont pour $\mathcal{N} [\mathcal{N}_\delta]$; $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont dans $\mathcal{N} [\mathcal{N}_\delta]$ et sont disjoints; en vertu du caractère $\hat{C}_s(\mathcal{N}) [\hat{C}_s(\mathcal{N}_\delta)]$ $\Gamma(A+B)=\Gamma(A)+\Gamma(B)$. La première partie de l'énoncé (6.12) est établie. Soit l'espace U pseudo-normal- $\mathcal{N}$ [$-\mathcal{N}_\delta$]; admettons $C_s(\mathcal{N}) [C_s(\mathcal{N}_\delta)]$ (6.7) et envisageons un couple d'ensembles P, Q tels que $\hat{P}, \hat{Q}$ au sens de $\mathcal{N}$ [de $\mathcal{N}_\delta$] sont disjoints. D'après la définition 6.6 il existe une $g(x)$ de $C(\mathcal{N})$ [de $C(\mathcal{N}_\delta)$] telle que $g(x)=0$ sur $\hat{P}$, $g(x)=1$ sur $\hat{Q}$; donc $g(x)=0$ sur P , $g(x)=1$ sur Q ; en vertu de $C_s(\mathcal{N}) [C_s(\mathcal{N}_\delta)]$ il en résulte que $\Gamma(P+Q)=\Gamma(P)+\Gamma(Q)$, ce qui démontre la seconde partie de (6.12).

Voici une variation sur la théorie (6.1)-(6.12). $\mathcal{N}$ est la famille d'ensembles intervenant dans (5.6) — parfois dans (5.13).

(6.13) Soit $\mathcal{N}_\sigma$ la famille formée des réunions dénombrables d'ensembles de $\mathcal{N}$. $C^-(\mathcal{N}_\sigma)$ sera la classe des fonctions $f(x)$, définies dans U , pour lesquelles

$$(6.13a) \quad \text{l'ensemble } [x; f(x) \leq \alpha] \in \mathcal{N}_\sigma \text{ pour tout } \alpha \text{ réel};$$

posons $C[N]=C^-(\mathcal{N}_\sigma) C^+(\mathcal{N}_\delta)$ (6.4b).

Remplaçons l'hypothèse 6.3 par la suivante.

HYPOTHÈSE 6.14. — Pour tout ensemble A il existe un $\hat{A}$ de $\mathcal{N}_\delta$, $\hat{A} \supset A$, tel que les relations

$$A \subset E \subset \hat{A}, \quad E \in \mathcal{N}_\delta \text{ impliquent } E = \hat{A} \text{ (e.g. l'hypothèse 6.3 pour } \mathcal{N}_\delta);$$

en outre il existe un $\tilde{A}$ de $\mathcal{N}_\sigma$, $\tilde{A} \supset A$, de sorte que les relations

$$A \subset E \subset \tilde{A}, \quad E \in \mathcal{N}_\sigma \text{ entraînent } E = \tilde{A}.$$

REMARQUE 6.14'. — Si la deuxième partie de l'hypothèse 6.14 a lieu, il est impossible que $\tilde{A} - A$ contienne un ensemble non vide G ed $\mathcal{M}$. En effet, supposons qu'un tel G existe; on obtient $E = \tilde{A} - G = \tilde{A} \cdot (U - G)$, $U - G \in \mathcal{N}$, donc $E \in \mathcal{N}_\delta$; en outre, $A \subset E \subset \tilde{A}$ et $E \neq \tilde{A}$; on a abouti à une contradiction. Supposons que (a) $A' \in \mathcal{N}_\sigma$, $A' \supset A$ et que $A' - A$ ne contienne aucun sous-ensemble non vide de la forme $\alpha \cdot \beta$, où $\alpha \in \mathcal{N}$ et $\beta \in \mathcal{M}_\delta$; alors (b) A' est un ensemble $\tilde{A}$. Sinon il existe un E (de $\mathcal{N}_\sigma$), $A \subset E \subset A'$, $E \neq A'$; $A' = \sum \alpha_v$, $E = \sum e_n$, $\alpha_v \in \mathcal{N}$, $e_n \in \mathcal{N}$;

$$A' - E \text{ (non vide)} = (\sum \alpha_v) \cdot \beta, \quad \text{où } \beta = \prod C e_n;$$

pour un v_0 l'ensemble $\alpha_{v_0} \cdot \beta$ est non vide; $A' - A \supset \alpha_{v_0} \cdot \beta$, où $\alpha_{v_0} \in \mathcal{N}$ et $\beta \in \mathcal{M}_\delta$; il y a une contradiction; donc (a) entraîne (b).

LEMME 6.15. — Dans les conditions données plus haut, si $f \in C^-(\mathcal{N}_\sigma)$ (6.13) et A est un ensemble quelconque, on obtient $\sup(A)f = \sup(\tilde{A})f$; si $f \in C^+(\mathcal{N}_\delta)$, on aura $\inf(A)f = \inf(\hat{A})f$.

La deuxième partie a été établie dans le lemme 6.5. En outre, si $f \in C^-(\mathcal{N}_\sigma)$, il vient

$$f(x) \leq c = \sup(A)f \text{ sur } A, \quad E_c = [x; f(x) \leq c] \in \mathcal{N}_\sigma;$$

$A \subset E_c$; de plus l'ensemble $\tilde{A}$ (l'hypothèse 6.14) satisfait à $A \subset \tilde{A} \subset E_c$, par là $\sup(\tilde{A})f \leq c$; or $c = \sup(A)f \leq \sup(\tilde{A})f$ (car $A \subset \tilde{A}$). Le lemme est démontré.

DÉFINITION 6.16. — La famille $\mathcal{N}$ dans l'espace U satisfaisant à (5.6) et l'hypothèse 6.14 admise, on dira que U est en espace *pseudo-normal-N*, si les relations $A \cdot B = 0$, $A \in \mathcal{N}_\delta$, $B \in \mathcal{N}_\sigma$ impliquent l'existence d'une fonction g , telle que $g \in C[N]$ (6.13), $g=1$ sur A , $g=0$ sur B . L'espace U est dit *pseudo-normal-N au sens restreint*, si dans la définition qu'on vient de donner les inclusions $A \in \mathcal{N}_\delta$, $B \in \mathcal{N}_\sigma$ sont remplacées par la condition: A et B sont chacun de la forme $\alpha\beta$, où $\alpha \in \mathcal{N}$ et $\beta \in \mathcal{N}_\sigma$.

(6.17) Pour une mesure extérieure Γ de Carathéodory la troisième propriété sera $C_2[N]$:

on a $\Gamma(A+B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$, dès qu'il existe une fonction g , telle que $g \in C[N]$ (6.13), $g=0$ sur A et $g=1$ sur B .

THÉORÈME 6.18. — Admettons que l'espace U est *pseudo-normal-N* (définition 6.16) et qu'une mesure extérieure Γ de Carathéodory est assujettie à $C_3[N]$ (6.17). Alors $C[N] \subset F(\Gamma)$ (définition 6.1), op $C[N] = C^-(\mathcal{N}_\sigma) C^+(\mathcal{N}_\delta)$.

Envisageons une fonction f et des ensembles A , B de sorte que

$$(1^\circ) \quad f \in C[N], \quad \inf_A f > \sup_B f.$$

On a

$$f \in C^+(\mathcal{N}_\delta) \quad \text{et} \quad f \in C^-(\mathcal{N}_\sigma).$$

En vertu du lemme 6.15 et de (1^o)

$$\inf(\hat{A})f = \inf(A)f > \sup(B)f = \sup(\tilde{B})f.$$

Ainsi

$$\hat{A} \cdot \tilde{B} = 0, \quad \hat{A} \in \mathcal{N}_\delta, \quad \tilde{B} \in \mathcal{N}_\sigma.$$

Puisque l'espace U est *pseudo-normal-N*, il existe une fonction g , telle que

$$(2^\circ) \quad g \in C[N], \quad g=1 \text{ sur } \hat{A} \text{ (donc sur } A), \quad g=0 \text{ sur } \tilde{B} \text{ (donc sur } B).$$

En tenant compte du caractère $C_s[N]$ de Γ et de (2°) il suit:

$$(3^0) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B), \quad \text{ce qui est une conséquence de (1°).}$$

D'après la partie suffisante de la proposition (6.2) et en tant que (1°) implique (3°), on conclut que toute fonction f de $C[N]$ est mesurable- Γ , e.g. que $C[N] \subset F(\Gamma)$. *Le théorème est vérifié.*

Pareille à la constatation (6.9) est la suivante.

(6.19) *Envisageons le cas $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13). Alors pour A de la famille $\mathcal{N}_\delta$:*

$$c_A(x) \text{ (la fonction caractéristique de } A) \in C[N] \text{ (6.13).}$$

Pour un α réel considérons l'ensemble H_α^- (2.15a) en y posant $A = U$ et $f(x) = c_A(x)$; ainsi $H_\alpha^- = [x \in U; c_A(x) \leq \alpha]$ et

$$H_\alpha^- = U \text{ (si } \alpha \geq 1), \quad H_\alpha^- = U - A \text{ (si } 0 \leq \alpha < 1), \quad H_\alpha^- = \emptyset \text{ (si } \alpha < 0).$$

ici U et l'ensemble vide appartiennent à $\mathcal{N}$, tandis que $U - A \in \mathcal{N}_\sigma$, e.g. les trois ensembles sont tous dans $\mathcal{N}_\sigma$. Par conséquent [(6.13), (6.13a)] $c_A(x) \in C^-(\mathcal{N}_\sigma)$. En outre pour l'ensemble $H_\alpha^+ = [x \in U; c_A(x) \geq \alpha]$ il vient

$$H_\alpha^+ = \emptyset \text{ (si } \alpha > 1), \quad H_\alpha^+ = A \text{ (si } 0 < \alpha \leq 1), \quad H_\alpha^+ = U \text{ (si } \alpha \leq 0);$$

ces trois ensembles sont dans $\mathcal{N}_\delta$; donc (6.4b) $c_A(x) \in C^+(\mathcal{N}_\delta)$. Par conséquent $c_A(x) \in C^-(\mathcal{N}_\sigma) \cap C^+(\mathcal{N}_\delta)$, ce qui démontre l'énoncé (6.19).

(6.20) *Si $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13) et l'hypothèse 6.14 est remplie, l'espace U sera pseudo-normal- N .*

En effet soient A et B , tels que $A \cdot B = \emptyset$, $A \in \mathcal{N}_\delta$, $B \in \mathcal{N}_\sigma$; d'après (6.19) la fonction $c_A(x)$ caractéristique de A appartient à $C[N]$; pour cette fonction on a

$$g = 1 \text{ sur } A, \quad g = 0 \text{ sur } B \text{ (car } B \subset U - A);$$

d'où (définition 6.16) la conclusion dans (6.20).

Supposons maintenant que les familles $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ (5.6) puissent être distinctes; en admettant l'hypothèse 6.14 considérons le caractère $\hat{C}_s[N]$ d'une mesure extérieure de Carathéodory

$$(6.21) \quad C_s[N]: \text{ « } P, Q \text{ sont tels que } \hat{P}\hat{P} \text{ et } \hat{Q}\hat{Q} \text{ sont disjoints »}$$

implique $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.

On obtient le résultat suivant.

(6.22) $\hat{C}_s[N]$ implique $C_s[N]$ (6.17). Si l'espace U est pseudo-normal- N au sens restreint (définition 6.16), la réciproque est valide] $C_s[N]$ entraîne $\hat{C}_s[N]$.

En effet supposons que Γ possède la propriété $\hat{C}_s[N]$; envisageons des ensembles A, B pour lesquels une fonction g existe de sorte que

$$(1') \quad g \in C[N], \quad g=0 \text{ sur } A, \quad g=1 \text{ sur } B.$$

Selon (6.13) $g \in C^-(\mathcal{N}_\sigma)$ et $g \in C^+(\mathcal{N}_\delta)$; en vertu du lemme 6.15

$$(2') \quad 0 = \sup(A)g = \inf(A)g = \sup(\tilde{A})g = \inf(\hat{A})g;$$

par conséquent

$$(3') \quad 0 = \inf(\hat{A})g \leq \inf(\tilde{A}\hat{A})g \leq \sup(\tilde{A}\hat{A})g \leq \sup(\tilde{A})g = 0,$$

donc $g=0$ sur $\tilde{A}\hat{A}$; de même, en remplaçant dans (2'), (3') $0, A, \tilde{A}, \hat{A}$ respectivement par $1, B, \tilde{B}, \hat{B}$, il vient $g=1$ sur $\tilde{B}\hat{B}$. Il suit que les ensembles $\tilde{A}\hat{A}, \tilde{B}\hat{B}$ sont disjoints. Ainsi (6.21):

$$(4') \quad \Gamma(A+B) = \Gamma(A) + \Gamma(B),$$

ce qui est une conséquence de (1'); donc Γ jouit du caractère $C_s[N]$ (6.17). La première partie de (6.22) est vérifiée. Supposons maintenant que l'espace U est pseudo-normal- N au sens restreint (6.16) et que Γ satisfait à $C_s[N]$ (6.17). Avec les notations intervenant dans l'hypothèse 6.14 considérons des ensembles

$$(1_1) \quad P, Q \text{ tels que } \tilde{P}\hat{P}, \tilde{Q}\hat{Q} \text{ sont disjoints.}$$

On note que $\tilde{P}\hat{P}$ et $\tilde{Q}\hat{Q}$ sont de la forme $\alpha\beta$, où $\alpha \in \mathcal{N}_\delta$ et $\beta \in \mathcal{N}_\sigma$. D'où il existe une g de $C[N]$ telle que:

$$(2_1) \quad g=1 \text{ sur } \tilde{P}\hat{P} \text{ (donc sur } P) \text{ et } g=0 \text{ sur } \tilde{Q}\hat{Q} \text{ (donc sur } Q).$$

En vertu de la propriété $C_s[N]$, (2₁) entraîne $\Gamma(P+Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$. Ceci étant une conséquence de (1₁), on s'aperçoit que Γ jouit de la propriété $\hat{C}_s[N]$ (6.21). L'énoncé (6.22) est démontré.

Une raison particulière pour laquelle la théorie (6.13)-(6.22) est d'intérêt consiste en ce qu'au cas $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13) l'hypothèse 6.14 implique que l'espace U est pseudo-normal- N (16.20).

Dans la section 5 les considérations qui précèdent (5.6) sont de la nature topologique. On note la constatation (5.4) qui survient d'après l'article (B⁰); la re-

marque (5.5) se rattache à la question de l'existence d'ensembles fermés appartenant à L_T .

(6.23) Si U est un espace topologique, en désignant par $\mathcal{N}$ la famille d'ensembles fermés et par $\mathcal{M}$ la famille d'ensembles ouverts, on observe que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ satisfont aux conditions (5.6); de plus, l'hypothèse 5.7 équivaudra à la condition suivante:

(6.23') pour tout G non vide ouvert des E_n ($n=1, 2, \dots$) fermés existent tels que $E_n \subset G$, $E_n \subset E_{n+1}^0$ (=l'intérieur de E_{n+1}), $E_n \uparrow G$.

On note que l'espace métrique, muni de la topologie compatible avec la distance, constitue un exemple (plutôt spécial) satisfaisant à la condition (6.23').

En tenant compte de (6.23), en admettant l'hypothèse (6.23') et le caractère (C_3^*) (5.8) pour Γ , on aura les conséquences comprises au lemme 5.10 et au théorème 5.11; ainsi, dans les circonstances indiquées, L_T contient la famille $\mathcal{B}$ d'ensembles boréliens.

REMARQUE 6.24. — Dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ (5.13) et $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}$, e.g. la famille $\tilde{\mathcal{N}}$ (5.14a) est vide, les deux théories (5.15)-(5.18) et (5.20)-(5.25) seront sans objet. Dans ce cas $\mathcal{N}_\sigma = \mathcal{N}$; en effet, si $E = \sum E_n$ ($E_n \in \mathcal{N}$), on aura $CE = \prod CE_n$ ($CE_n \in \mathcal{N}$), $CE \in \mathcal{N}_\delta$, donc $CE \in \mathcal{N}$ et $E \in \mathcal{N}$. Une telle situation survient, si U est un espace topologique pour lequel la famille $\mathcal{N}$ d'ensembles fermés est identiques avec la famille d'ensembles ouverts; dans ce cas $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}_\sigma$.

Considérons le cas de U topologique, $\mathcal{N}[\mathcal{M}]$ étant la famille des ensembles fermés [ouverts]. En tant que $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}$, $C^\pm(\mathcal{N}) = C^\pm(\mathcal{N}_\delta)$ (6.4). $C^-(\mathcal{N})$ [$C^+(\mathcal{N})$] est la classe des fonctions semi-continues inférieurement [supérieurement]; $C(\mathcal{N})$ est la classe des fonctions continues; $\mathcal{B}$ est la famille des ensembles boréliens. Les deux définitions de $\hat{A}$, présentées dans l'hypothèse 6.3, se confondent entre elles; on a $\hat{A} = \bar{A}$ (la fermeture de A); de plus le caractère « U est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ [pseudo-normal- $\mathcal{N}_\delta$] » veut dire « U est normal (au sens usuel) ». Enfin, au cas de U topologique le théorème 6.8 se réduit au résultat principal de l'article (B^o).

7. — Applications non-topologiques des théories précédentes.

Une application non topologique des théories sur la mesure extérieure de Carathéodory, présentées dans les deux sections précédentes, est fournie par la famille $\mathcal{N}$ de *noyaux* — auquel cas $\mathcal{M}$ sera la famille correspondante d'*enveloppes*. De tels ensembles ont été introduits pour la première fois par A. DENJOY — voir son (D*); ces ensembles sont utiles en rapport avec le théorème exact de couverture de Denjoy-Vitali, dans quelques développements fondamentaux sur dérivation et intégration. D'une façon plus générale les noyaux et les enveloppes (ainsi que des conséquences correspondantes) surviennent dans (T), en rapport avec les théorèmes de couverture approximatifs. Autrement dit, on peut le faire avec profit dès qu'il y a un théo-

rème au genre Denjoy-Vitali — soit exact, soit à ε -pres (voir la section 4). En outre, dans (T), l'auteur a fait aussi usage d'enveloppes et de noyaux sans lien direct avec le théorèmes de couverture, mais plutôt en rapport avec des familles d'ensembles dites *simplement régulières* (voir la définition dans (T; p. 34)).

Soit $\Phi (\geq 0)$ une mesure dans un espace U , comme on l'a introduite au commencement de la section 2. On introduit des familles $G = \{\gamma\}$, $P = (\omega)$, comme on a indiqué dans (2.1); en considérant le cas $P = G$ on spécifie le caractère d'une famille G *régulière* [(2.1a), (2.1b)]; une famille d'ensembles (mesurables- Φ) est dite *simplement régulière*, si elle remplit les conditions (2.3), (2.3a). Avec G soit régulière, soit simplement régulière, supposons que $\Delta(G)$ [l'ensemble des points indéfiniment couverts par G , qui est nécessairement mesurable- Φ] soit de mesure positive; pour tout ensemble E contenu dans $\Delta(G)$ formons

(7.1) $\sigma(E) = \Delta[G(E)] - E$ (l'ensemble des points étrangers à E , indéfiniment couverts par la familles $G(E)$) d'ensembles de G joints à E). On dira que $E (\subset \Delta(G))$ est *noyau* (relativement à G), si $\Phi(\sigma(E)) = 0$. Un ensemble $E (\subset \Delta(G))$ sera dit *enveloppe*, si $\Delta(G) - E$ est noyau.

(7.2) *La famille G étant comme spécifiée plus haut, envisageons dans l'espace $\Delta(G)$ la famille $\mathcal{N}$ des noyaux et la famille $\mathcal{M}$ des enveloppes — relativement à G . Alors pour l'espace $\Delta(G)$ et les familles $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ les conditions (5.6) sont remplies.*

Cela s'ensuit des propriétés connues de noyaux et d'enveloppes [voir, par exemple, (T; p. 23)]. On remarque pourtant qu'au cas actuel les produits dénombrables d'ensembles de $\mathcal{N}$ sont dans $\mathcal{N}$ et les réunions dénombrables d'ensembles de $\mathcal{M}$ appartiennent à $\mathcal{M}$. Si G est régulière au sens de (D*) ou bien au sens du théorème de couverture (approximatif) dans (T), tout ensemble formé d'un seul point sera noyau, e.g. appartiendra à $\mathcal{N}$.

L'hypothèse 5.7 prend au cas (7.2) la forme suivante:

si O est une enveloppe non vide, des noyaux F_n et des enveloppes O_{n+1} existent de sorte que

$$(7.3) \quad F_n \subset O_{n+1} \subset F_{n+1} \subset O, \quad \lim F_n = O.$$

Γ désignant une mesure extérieure de Carathéodory (satisfaisant à (5; C_1, C_2)) dans l'espace $\Delta(G)$, la troisième condition pour Γ , à savoir C_3^* (5.8), prend la forme:

$$(7.4; C_3^*) \quad P \subset F_1, \quad Q \subset F_2,$$

où F_1 et F_2 sont des noyaux disjoints, impliquent $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$.

Moyennant le théorème 5.11 on conclut que les conditions (7.3), (7.4; C_3^*) entraînent l'inclusion $L_\Gamma \supset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est la famille minimale complètement additive contenant les noyaux.

Continuous avec les familles $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ assujetties à (7.2). D'après une propriété de noyaux on a $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\delta$. Les développements (6.1)-(6.8) s'appliquent avec $C^\pm(\mathcal{N}_\delta) = C^\pm(\mathcal{N})$, $C(\mathcal{N}_\delta) = C(\mathcal{N})$. Les deux définitions de l'ensemble $\hat{A}$, à partir d'un ensemble A , se confondent. Admettons l'hypothèse (6.3); cela revient à ce que pour tout A ($\subset \Delta(G)$) il existe un noyau $\hat{A}$, qui contient A et tel que les inclusions

$$(7.5) \quad A \subset E \subset \hat{A}, \quad E \in \mathcal{N}, \quad \text{entraînent } E = \hat{A}.$$

Dire qu'un espace $\Delta(G)$ est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ (ce qui équivaut à « pseudo-normal- $\mathcal{N}_\delta$ » revient à ce que :

(7.6) la condition (7.5) a lieu, tandis que pour tout couple de noyaux disjoints A , B il existe une fonction g de $C(\mathcal{N})$, telle que $g(x) = 0$ sur A , $g(x) = 1$ sur B .

La troisième condition pour la mesure extérieure de Carathéodory [déjà satisfaisant à (5; C_1) et à (5; C_2)] sera la suivante :

$$(7.7; C_3(\mathcal{N})) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B),$$

dès qu'il existe une fonction g de $\mathcal{N}$, telle que $g = 0$ sur A et $g = 1$ sur B .

Enfin, d'après le théorème 6.8, au cas (7.2) on obtient la constatation suivante.

(7.8) Admettons que $\Delta(G)$ est un espace pseudo-normal- $\mathcal{N}$ (7.6) et que Γ remplit les conditions (5; C_1), (5; C_2), $C_3(\mathcal{N})$ (7.7); alors $C(\mathcal{N}) \subset F(\Gamma)$, e.g. toute fonction de $C(\mathcal{N})$ sera mesurable- Γ .

On note que dans la condition (7.5) le résultat (6.12) s'applique, si $\mathcal{N}$ est la famille de noyaux. A présent nous laissons de côté l'élucidation de diverses façons pour réaliser les conditions (7.3), (7.5).

Rappelons-nous de la famille $K = K(\mathcal{F})$ d'ensembles (définition 2.7), dont il s'agit dans les sections 2, 3 et dont l'importance capitale dans la théorie métrique a été établie dans (T*). À certaines reprises on fait usage de cette famille en rapport avec le caractère de la « moyenne régularité », dû à Denjoy.

(7.9) Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles dans l'espace U qui définit la classe $K = K(\mathcal{F})$ d'ensembles (2.7); supposons que $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) > 0$. La classe K constitue dans l'espace $\Delta(\mathcal{F})$ une famille $\mathcal{N}$ d'ensembles satisfaisant à (5.6) si l'on pose $\mathcal{M} = \mathcal{N}$; e.g. $\mathcal{N} = K$ remplit les conditions (5.13).

Cette proposition suit de l'énoncé (2.9); on note que les ensembles de cette famille $\mathcal{N}$ sont mesurables- Φ .

En supposant que la famille $\mathcal{N}_\delta (= K_\delta)$ est distincte de $\mathcal{N} (= K)$, posons $\tilde{K} = \mathcal{N}_\delta - \mathcal{N}$. L'hypothèse 5.15 prendra la forme :

pour tout E non vide de K_σ il y a des E_n et des G_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$), tels que

$$(7.10) \quad E_n \in \tilde{K}, \quad G_{n+1} \in K_\sigma, \quad E_n \subset E, \quad E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}, \quad \lim E_n = E.$$

La troisième condition $\hat{C}_3$ (5.16) pour une mesure extérieure Γ dans l'espace $\Delta(\mathcal{F})$ sera :

$$(7.11; \hat{C}_3) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

dès que $P \subset E_1$ (de $\tilde{K}$), $Q \subset E_2$ (de K_δ), $E_1 E_2 = 0$.

En vertu du théorème 5.18 il suit que les conditions (7.10), (7.11; $\hat{C}_3$) impliquent

$$(7.12) \quad L_F \supset \mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ étant la famille minimale complètement additive contenant K ($=K(\mathcal{F})$).

(7.13) Soit $\mathcal{N} = K$ d'accord avec (7.9); supposons que $\tilde{K}$ ($=K_\sigma - K$) est non vide et considérons le cas où la propriété (7.10) n'a pas lieu pour tout E non vide de K_σ ; on désigne par $\mathcal{A}_0$ la famille des ensembles non vides de K_σ pour lesquels (7.10) est en défaut et par $\mathcal{A}_1$ la famille $K_\sigma - \mathcal{A}_0$. À la façon de (5.20b) il vient $\mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$; $\mathcal{D}_0$ désigne la famille des ensembles de $\mathcal{A}_0$, chacun dépourvu de sous-ensembles appartenant à $\tilde{K}$; $\mathcal{D}_1$ consiste de E de $\mathcal{A}_0$ dont chacun possède des sous-ensembles dans $\tilde{K}$, tandis qu'il n'y a pas de E_n (de $\tilde{K}$) $\uparrow E$; enfin $\mathcal{D}_2$ est formée des E de $\mathcal{A}_0$ de sorte que des E_n (de $\tilde{K}$) existent tels que $E_n \uparrow E$, tandis que pour aucune suite E_n de cette espèce il n'y ait pas de G_{n+1} (de K_σ) satisfaisant à $E_n \subset G_{n+1} \subset E_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$).

Si la famille $\mathcal{A}_0$ (7.13) était vide, on aurait $K_\sigma = \mathcal{A}_1$ satisfaisant à la condition (7.10) et le cas ne serait pas nouveau. Or l'énoncé (3.2) présente une condition nécessaire et suffisante pour que un point x de $\Delta(\mathcal{F})$, considéré comme un ensemble, appartienne à la famille K ($=K(\mathcal{F})$). Si x_0 est un point tel que l'ensemble $\{x_0\}$ est dans K , il suivra que $\{x_0\} \in \mathcal{D}_0$ (7.13). En effet, nous avons supposé que la famille $\tilde{K}$ ($=K_\sigma - K$) est non vide; les seuls sous-ensembles de $\{x_0\}$ sont l'ensemble vide et $\{x_0\}$ lui-même — tous les deux appartiennent à K , donc ces deux ensembles sont étrangers à $\tilde{K}$; ainsi $\{x_0\}$ ne contient aucun sous-ensemble de $\tilde{K}$, e.g. $\{x_0\} \in \mathcal{D}_0$. Par conséquent, s'il y a des points x de $\Delta(\mathcal{F})$ pour chacun desquels l'ensemble $\{x\} \in K$, la famille $\mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ (7.13) sera non vide (en tant que $\mathcal{D}_0 \neq 0$). Voici un exemple pour lequel $\mathcal{D}_0 \neq 0$.

(7.14) Dans le plan U on considère la famille $\mathcal{F}$ dont il s'agit dans (T; 10.3), y désignée par $G = \{\gamma\}$ [voir (T; p. 27-29)], la métrique Φ étant l'aire euclidienne.

Cette famille $\mathcal{F}$ est régulière au sens du théorème de couverture approximative survenant dans (T), mais ne l'est pas au sens du théorème Denjoy-Vitali exact. On a $\Delta(\mathcal{F}) = [0, 1] + \{0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$ (T; (10.2)). Tout ensemble formé d'un seul point $(x', 0)$, où $0 \leq x' \leq 1$, appartient à $K(\mathcal{F})$ (donc la famille $\mathcal{D}_0$ est non vide). Si $0 < x_0 < 1$, $c_0 > 0$, $0 \leq x_0 - c_0$, $x_0 + c_0 \leq 1$, on définit E_0 ($=\gamma_0$) (T; (10.1)) comme

l'ensemble

$$(1_0) \quad \{(x, y); x_0 - c_0(1 - y)^{\alpha_0} \leq x \leq x_0 + c_0(1 - y)^{\alpha_0}, 0 \leq y \leq 1\} = E(x_{20} - c_0, x_0 + c_0);$$

la frontière de E_0 contient le segment linéaire $[x_0 - c_0, x_0 + c_0] \subset [0, 1]$; α_0 est défini selon (T; (10.1b)), comme une certaine fonction de c_0 . La famille $\mathcal{F} = \{E\}$ consiste des ensembles $E(x - c, x + c)$, où $0 < x < 1$, $c > 0$, et $0 \leq x - c, x + c \leq 1$; ici le α qui survient est α_0 avec c au lieu de c_0 . Pour vérifier la constatation en italique, qui précède, considérons une suite d'ensembles

$$(2_0) \quad \begin{aligned} E(x', x_n) \text{ (si } 0 \leq x' < 1), \quad & \text{où } x' < x_n \leq 1, \quad x_n \rightarrow x'; \\ E(x_n, 1) \text{ (si } x' = 1), \quad & \text{où } 0 \leq x_n < 1, \quad x_n \rightarrow 1. \end{aligned}$$

On observe que

$$(x', 0) = \Delta(\{E(x', x_n)\}) \text{ (si } 0 \leq x' < 1), \quad (x', 0) = \Delta\{E(x_n, 1)\} \text{ (si } x' = 1).$$

En formant les ensembles (2_0) , par exemple si $0 \leq x' < 1$, on définit $E(x', x_n)$ en accord avec (1_0) , où l'on pose $x_n = \frac{1}{2}(x' + x_n)$ et $c_n = \frac{1}{2}(x_n - x')$, le nombre $\alpha_0 = \alpha_n$ étant spécifié selon (T; (10.1b)) en fonction de c_0 . Ainsi pour l'exemple (7.14) tout point $(x', 0)$, où $0 \leq x' \leq 1$, constitue un ensemble de $K(\mathcal{F})$. *Aucun point (x', y') , avec $0 < x' < 1$, $0 < y' \leq 1$, considéré comme un ensemble, n'est dans $K(\mathcal{F})$.* En effet, si des ensembles $E_n = E(x'_n, x''_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) de $\mathcal{F}$ contiennent le point (x', y') , $0 \leq x'_n < x' < x''_n < 1$, et si $\Phi(E_n) \rightarrow 0$, e.g. si $x'_n - x''_n \rightarrow 0$, on obtiendra $\Delta(\{E_n\}) =$ le segment linéaire $\{(x', y); 0 \leq y \leq 1\}$, qui contient le point (x', y') , mais qui comprend aussi d'autres points.

Revenons à la situation (7.13), où chacune des familles

$$(7.15) \quad \tilde{K} (= K_\delta - K), \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2,$$

est non vide. *Admettons ensuite l'hypothèse 5.21*; pour les ensembles E non vides de $\mathcal{A}_1$ la propriété (7.10) sera valide. *On suppose qu'une mesure Γ extérieure de Carathéodory (remplissant (5; C_1, C_2)) jouit de la propriété $\hat{C}_3$ (voir (I), (II) par la suite):*

$$(I) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

dès que $P \subset E_1$ (de $\tilde{K}$) $\subset G$ (de $\mathcal{D}_2$), $Q \subset E_2$ (de $K_{\delta\delta}$), $E_1 E_2 = 0$;

$$(II) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

lorsque $P \subset E_1$ (de $\tilde{K}$) $\subset G$ (de $\mathcal{A}_1$), $Q \subset E_2$ (de K_δ), $E_1 E_2 = 0$; en outre on suppose que

$$(III) \quad E \subset L_T, \quad \text{lorsque } E \in K \text{ et } E \subset G \text{ (de } \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1).$$

Le théorème 5.25 s'applique et on conclut ainsi.

(7.16) *Considérons la famille $K = K(\mathcal{F})$ d'accord avec (7.9); admettons (7.13), (7.15); soit la mesure extérieure Γ assujettie aux conditions ((7.15); (I), (II), (III)). Alors $L_T \supset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est la famille minimale complètement additive contenant K .*

Faisons maintenant l'application des développements de la section 6 à la classe $K = K(\mathcal{F})$ (7.9) d'ensembles, situés dans l'espace $\Delta(\mathcal{F})$. On note qu'il y a équivalence entre les classes de fonctions $C_0^\pm(\mathcal{F})$, $C_1^\pm(\mathcal{F})$ [la définition 2.15, où l'on pose $A = \Delta(\mathcal{F})$] et les classes $C^\pm(K)$, $C^\pm(K_\delta)$ [(6.4)-(6.4b), où $K = K(\mathcal{F}) = \mathcal{N}$]:

$$(7.17) \quad C_0^\pm(\mathcal{F}) = C^\pm(K), \quad C_1^\pm(\mathcal{F}) = C^\pm(K_\delta), \quad C_0(\mathcal{F}) = C(K), \quad C_1(\mathcal{F}) = C(K_\delta).$$

L'énoncé (6.9) s'applique pour $\mathcal{N} = K$. Admettons l'hypothèse 6.3 pour K :

(7.18) Pour tout $A \subset \Delta(\mathcal{F})$ il existe un ensemble $\hat{A}$, tel que $A \subset \hat{A}$, $\hat{A} \in K$ et que les relations $A \subset E \subset \hat{A}$, $E \in K$, impliquent $E = \hat{A}$. Selon la proposition (6.10) il suivra que l'espace $\Delta(\mathcal{F})$ est pseudo-normal- K au sens de la définition 6.6. La troisième propriété $C_3(K)$ pour une mesure extérieure Γ de Carathéodory sera:

$$(7.19; C_3(K)) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B),$$

lorsqu'il existe une fonction g de $C(K)$, telle que $g = 0$ sur A et $g = 1$ sur B .

Le théorème 6.8 s'applique comme il suit.

(7.20) Dans les conditions (7.18), (7.19; $C_3(K)$) on a $C(K) \subset F(\Gamma)$ [e.g. toute fonction de la classe $C(K)$ (7.17) est mesurable- Γ].

Continuons avec $\mathcal{N} = K = K(\mathcal{F})$ (7.9) et admettons la condition (7.18); envisageons la propriété suivante

$$(7.21; \hat{C}_3(K)) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

lorsque les ensembles $\hat{P}$, $\hat{Q}$ au sens de (7.18) sont disjoints.

Cela étant, en tenant compte de (6.12) et du fait que l'espace $\Delta(\mathcal{F})$ est déjà pseudo-normal- K , on conclut ainsi.

(7.22) Dans les conditions qu'on vient d'indiquer les caractères $\hat{C}_3(K)$ (7.21), $C_3(K)$ (7.19) d'une mesure extérieure Γ de Carathéodory sont équivalentes.

Remplaçons maintenant la condition (7.18) par l'hypothèse 6.3 au sens de $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$.

(7.23) Pour tout $A \subset \Delta(\mathcal{F})$ il y a un ensemble $\hat{A} \supset A$, $\hat{A} \in K_\delta$, tel que les inclusions $A \subset E \subset \hat{A}$, $E \in K_\delta$, entraînent $E = \hat{A}$.

Correspondamment la troisième propriété $C_3(K_\delta)$ pour Γ sera:

$$(7.24; C_3(K_\delta)) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B),$$

lorsqu'il existe une g de $C(K_\delta)$ prenant respectivement les valeurs 0, 1 sur A , B .

D'après le théorème 6.8 on conclut ainsi.

(7.25) *Supposons que les conditions (7.23), $C_s(K_\delta)$ (7.24) sont valides. Si en plus l'espace $U (= \Delta(\mathcal{F}))$ est pseudo-normal- K_δ (définition 6.6, où $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$), il vient $C(K_\delta) \subset F(I)$ (6.1).*

On note que dans cette proposition on fait expressément l'hypothèse que U soit pseudo-normal- K_δ , ce caractère n'étant pas une conséquence de (7.23). La propriété $\hat{C}_s(K_\delta)$ sera: $\Gamma(P+Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$, dès que $\hat{P} \cdot \hat{Q} = 0$ (sens de (7.23)). En vertu de (6.12) ((7.23) étant admis): $\hat{C}_s(K_\delta)$ implique $C_s(K_\delta)$; si, de plus, U est pseudo-normal- K_δ , la réciproque sera valide.

La classe de fonctions $C[N] = C^-(K_\sigma) C^+(K_\delta)$ est définie d'accord avec (6.13)-(6.13a) notons (7.17) que $C^+(K_\delta) = C_1^+(\mathcal{F})$ [la définition 2.15, où $A = \Delta(\mathcal{F})$]. Nous faisons l'hypothèse 6.14, avec $\mathcal{N} = K$; si $A \subset \Delta(\mathcal{F})$, les désignations $\hat{A}$, $\tilde{A}$ seront au sens de (6.14). En tant que $K = \mathcal{N} = \mathcal{M}$ (e.g. (5.13) a lieu), en vertu de l'énoncé (6.20) il suit que $U = \Delta(\mathcal{F})$ est un espace pseudo-normal- $\mathcal{N}$ (définition 6.16, où $\mathcal{N} = K$). Le théorème 6.18 s'applique comme il suit.

(7.26) *Dans les conditions et avec les notations qu'on vient de spécifier, si une mesure extérieure Γ de Carathéodory a la propriété $C_s[N]$ (6.17), il s'ensuivra que $C[N] \subset F(I)$.*

Cet énoncé ne fait pas intervenir expressément la condition que l'espace soit pseudo-normal- $\mathcal{N}$. Considérons le caractère $C_s[N]$ (6.21) de Γ , en admettant toujours l'hypothèse 6.14, ainsi que les notations y comprises: $K = \mathcal{N} = \mathcal{M}$; selon la proposition (6.22) on conclut que $\hat{C}_s[N]$ suffit pour $C_s[N]$; en outre, si l'espace $U = \Delta(\mathcal{F})$ est pseudo-normal- $\mathcal{N}$ au sens restreint [définition 6.16, avec $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$, $\mathcal{N}_\sigma = K_\sigma$] la propriété $C_s[N]$ implique $\hat{C}_s[N]$.

Pour le présent nous laissons de côté l'élucidation des conditions sur la famille d'ensembles $\mathcal{F}$ pour que les diverses propriétés de la famille $K = K(\mathcal{F})$ soient réalisables.

8. - La régularité moyenne en rapport avec la mesure extérieure de Carathéodory.

Dans la section actuelle on continue avec une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles et l'espace $U = \Delta(\mathcal{F})$, d'accord avec (7.9); ainsi $\mathcal{N} = \mathcal{M} = K(\mathcal{F})$ et on écrit $K = K(\mathcal{F})$; pourtant à présent on admet une au moins des deux conditions (2.6I), (2.6II); c'est-à-dire, on fait intervenir le caractère de la régularité moyenne (le cas de (2.6I)), ou bien le caractère $R.M.$ (au cas de (2.6II)), qui est au genre de la régularité moyenne. Notons que $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) < \infty$.

DÉFINITION 8.1. - Dans les conditions qu'on vient d'introduire, pour tout ensemble A dans $U = \Delta(\mathcal{F})$ désignons par $\hat{A}$ tout ensemble tel que

$$(8.1a) \quad \hat{A} \in K_\delta, \quad \hat{A} \subset A, \quad \Phi(\hat{A}) = \Phi_\delta(A) \quad (\text{mesure extérieure-}\Phi \text{ de } A).$$

THÉOREME 8.2. — *En admettant les conditions données plus haut, il suit que pour tout ensemble A dans U un ensemble correspondant $\hat{A}$ existe.*

Notons d'abord que l'énoncé (2.12) s'applique; ainsi pour tout X ($\subset \Delta(\mathcal{F})$) mesurable- Φ des ensembles Q, H, X^0, X_0 existent tels que

$$(1^0) \quad Q \in K_\delta, \quad H \in K_\sigma, \quad H \subset X \subset Q;$$

$X_0 = Q - X$ et $X_0 = X - H$ étant minces- Φ .

D'après la définition de la mesure extérieure Φ_e , pour tout n ($= 1, 2, \dots$) il existe un ensemble A_n mesurable- Φ tel que

$$(2^0) \quad A \subset A_n, \quad \Phi(A_n) < \Phi_e(A) + 1/n;$$

on fait en sorte que $A_n \downarrow$. En vertu de (1⁰) on trouve des ensembles $Q_n, H_n, X_n^0, X_{n,0}$ tels que

$$(3^0) \quad Q_n \in K_\delta, \quad H_n \in K_\sigma, \quad H_n \subset A_n \subset Q_n;$$

$X_n^0 = Q_n - A_n$ et $X_{n,0} = A_n - H_n$ étant minces- Φ .

On obtient (2⁰):

$$(4^0) \quad \Phi_e(A) = \lim \Phi(A_n) = \Phi(A^*), \quad \text{où} \quad A^* = \prod A_n, \quad A^* \supset A;$$

A^* est mesurable- Φ [cela veut dire que la mesure extérieure Φ_e est « régulière »]. On vérifie l'inclusion

$$\alpha = \prod Q_n - \prod A_n \subset [\prod Q_n] \cdot [\sum X_n^0] = \beta;$$

$\Phi(X_n^0) = 0$, d'où $\Phi(\beta) = 0$ et α est mince- Φ ; ainsi [(3⁰), (4⁰)]:

$$Q^* = \prod Q_n \in K_\delta, \quad Q^* \supset A^* \supset A, \quad \Phi(Q^*) = \Phi(A^* + \alpha) = \Phi(A^*) = \Phi_e(A).$$

On s'aperçoit que Q^* est un ensemble $\hat{A}$ conformément à la définition 8.1. *Le théorème est établi.*

(8.3) Désignons par $\check{A}$ tout ensemble tel que

$$\check{A} \in K_\sigma, \quad \check{A} \subset A, \quad \Phi(\check{A}) = \Phi_i(A) \quad (\text{mesure intérieure-}\Phi \text{ de } A).$$

Pour tout ensemble A dans $U = \Delta(\mathcal{F})$ un ensemble $\check{A}$ existe.

Avec un X ($\subset U$) mesurable- Φ envisageons des ensembles de la sorte intervenant dans (1⁰). Pour tout n ($= 1, 2, \dots$) on trouve un ensemble B_n mesurable- Φ

tel que

$$(5^0) \quad B_n \subset A, \quad \Phi_i(A) - 1/n < \Phi(B_n) \quad (\leq \Phi_i(A)) ;$$

choisissons les $B_n \uparrow$. D'après (1⁰), avec $X = B_n$, des ensembles $X_{n,0}$, H_n existent tels que

$$H_n \in K_\sigma, \quad H_n \subset B_n, \quad X_{n,0} = B_n - H_n, \quad \Phi(X_{n,0}) = 0.$$

Il vient (5⁰):

$$\Phi_i(A) = \lim_n \Phi(B_n) = \Phi(B_*), \quad B_* = \sum B_n, \quad B_* \subset A ;$$

on note l'inclusion

$$\gamma = \sum B_n - \sum H_n \subset [\prod (U - H_n)] \cdot \sum X_{n,0} = \delta ;$$

or $\Phi(\delta) = 0$, donc $\Phi(\gamma) = 0$ et

$$H_* = \sum H_n \in K_\sigma, \quad H_* \subset B_* \subset A, \quad \Phi(H_*) = \Phi(B_* - \gamma) = \Phi(B_*) = \Phi_i(A).$$

Par conséquent H_* est un ensemble $\check{A}$ correspondant à A , d'où la conclusion dans (8.3).

REMARQUE 8.4. — Les ensembles $\hat{A}$, $\check{A}$ dont il s'agit au théorème 8.2 et à (8.3) ne sont pas uniques. Pour un ensemble A donné soit par exemple B un $\hat{A}$:

$$B \in K_\delta, \quad B \supset A, \quad \Phi(B) = \Phi_e(A) ;$$

on a $B = \prod B_n$, B_n (de K) $\downarrow$, $B_n \supset A$; posons

$$D = \prod (B_n + D_n), \quad \text{où } D_n \in K, \quad D_n - D_n B_n \neq 0, \quad \Phi(D_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On note que $D \in K_\delta$, $A \subset B \subset D \subset B_n + D_n$ ($n = 1, 2, \dots$); ainsi

$$\Phi_e(A) \leq \Phi(D) \leq \Phi(B_n + D_n) = \Phi(B_n), \quad \Phi(D) \leq \lim \Phi(B_n) = \Phi(B) = \Phi_e(A) ;$$

il vient $\Phi(D) = \Phi_e(A)$. Tout ensemble D construit de cette façon est un $\hat{A}$. On peut obtenir des exemples où $D \neq B$.

Nous utilisons la définition 6.1 [$\mathcal{C}(\mathcal{N})$, $\mathcal{C}(\mathcal{N}_\delta)$, $F(I)$] avec $\mathcal{N} = K = K(\mathcal{F})$, $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ (5.13)] et l'énoncé 6.2 (B⁰; p. 1311). Pourtant l'hypothèse 6.3 est laissée de côté; elle est remplacée par le théorème 8.2; au lieu de $\hat{A}$ (soit au sens K , soit au sens K_δ) on aura des ensembles $\hat{A}$ (la définition 8.1).

LEMME 8.5. — Si $f \in C^-(K_\delta)$ [$C^+(K_\delta)$] (6.4)-(6.4b) et si $A \subset U = \Delta(\mathcal{F})$ est un ensemble quelconque, alors il y a un ensemble $\hat{A}$ tel que

$$\sup(A)f = \sup(\hat{A})f \quad [\inf(A)f = \inf(\hat{A})f].$$

Si, par exemple, f est dans $C^-(K_\delta)$, c'est que

$$(1_0) \quad E_\alpha = [\alpha; f(x) \leq \alpha] \in K_\delta \quad \text{pour tout } \alpha \text{ réel.}$$

Sur A , $f(x) \leq c = \sup(A)f$; or $A \subset E_c$ (1₀). Soit B un $\hat{A}$:

$$B \in K_\delta, \quad B \supset A, \quad \Phi(B) = \Phi_e(A);$$

posons $D = BE_c$; on obtient:

$$(2_0) \quad D \in K_\delta, \quad D \supset A; \quad \Phi_e(A) \leq \Phi(D) \leq \Phi(B) = \Phi_e(A);$$

d'où

$$(3_0) \quad \Phi(D) = \Phi_e(A).$$

Les relations (2₀), (3₀) signifient que D est un ensemble $\hat{A}$; de plus (1₀)

$$A \subset D \subset E_c, \quad \sup(D)f \leq c, \quad c \leq \sup(D)f$$

(car $A \subset D$), e.g. $\sup(D)f = \sup(A)f$. Le reste du lemme s'établit de la même façon.

DÉFINITION 8.6. — On dira que l'espace $U = \Delta(\mathcal{F})$ est *pseudo-normal*- K_δ , si les relations $A \in K_\delta$, $B \in K_\delta$, $A \cdot B = 0$, impliquent l'existence d'une fonction g de $C(K_\delta)$ telle que $g(x) = 0$ sur A et $g(x) = 1$ sur B .

C'est la même définition que celle dans (6.6) (pour $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$), *sauf qu'à présent l'hypothèse 6.3 est omise.*

THÉORÈME 8.7. — Soit l'espace U *pseudo-normal*- K_δ (8.6). Admettons comme la troisième propriété d'une mesure extérieure de Carathéodory Γ dans U le caractère $C_\delta(K_\delta)$, d'accord avec (6.7) pour $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$. Alors $C(K_\delta) \subset F(\Gamma)$ (définition 6.1, 6.4).

Envisageons un couple d'ensembles A , B et une fonction f , tels que

$$(1_1) \quad f \in C(K_\delta), \quad \inf(A)f > \sup(B)f.$$

f appartient simultanément à $C^-(K_\delta)$ et à $C^+(K_\delta)$ [(6.4)-(6.4')]. En vertu du lemme 8.5 il y a un D , qui est un $\hat{A}$, et un E , qui est un $\hat{B}$, pour lesquels

$$(2_1) \quad \inf(D)f = \inf(A)f > \sup(B)f = \sup(E)f.$$

Par conséquent les ensembles D, E sont disjoints; $D \in K_\delta, E \in K_\delta$. L'espace U est pseudo-normal- K_δ ; donc il existe une fonction g de $C(K_\delta)$ telle que

$$g=0 \text{ sur } A \text{ (sur } D), \quad g=1 \text{ sur } B \text{ (sur } E).$$

Puisque Γ jouit de la propriété $C_3(K_\delta)$ (6.7), il suit que

$$(3_1) \quad \Gamma(A+B) = \Gamma(A) + \Gamma(B).$$

C'est-à-dire, (1₁) entraîne (3₁). En vertu de la proposition (6.2) on conclut que f (de $C(K_\delta)$) $\in F(\Gamma)$, ce qui est la conclusion du théorème.

Dans les conditions intervenant plus haut envisageons une troisième condition $\hat{C}_3(K_\delta)$ pour une mesure extérieure Γ de Carathéodory

$$(8.8) \quad (\hat{C}_3(K_\delta)) \quad \Gamma(P+Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

lorsque des ensembles $\hat{P}, \hat{Q}$ (définition 8.1) existent tels que $\hat{P} \cdot \hat{Q} = 0$.

Examinons le rapport entre les caractères $C_3(K_\delta)$ (6.7) et $\hat{C}_3(K_\delta)$.

(8.9) $\hat{C}_3(K_\delta)$ implique $C_3(K_\delta)$; si, en plus, $U = \Delta(\mathcal{F})$ est pseudo-normal- K_δ (définition 8.6), $C_3(K_\delta)$ entraîne $\hat{C}_3(K_\delta)$.

Si $\hat{C}_3(K_\delta)$ a lieu, soient A et B des ensembles tels qu'une g fonction de $C(K_\delta)$ existe: $g=0$ (sur A), $g=1$ (sur B). Selon le lemme 8.5 et puisque $g \in C^+(K_\delta)$ et $g \in C^-(K_\delta)$, on déduit que des ensembles $\hat{A}, \hat{B}$ (définition 8.1) existent de sorte que

$$0 = \sup(A)g = \inf(A)g = \sup(\hat{A})g = \inf(\hat{A})g;$$

il suit que $g=0$ sur l'ensemble $\hat{A}$ qui intervient; aussi

$$1 = \sup(B)g = \inf(B)g = \sup(\hat{B})g = \inf(\hat{B})g,$$

donc sur l'ensemble $\hat{B}$ qui survient on a $g=1$. Par conséquent ces ensembles $\hat{A}, \hat{B}$ sont disjoints. Le caractère $\hat{C}_3(K_\delta)$ a présent admis donne $\Gamma(A+B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$. D'après la définition 6.7 (pour $\mathcal{N}_\delta = K_\delta$) il en découle que la propriété $C_3(K_\delta)$ a lieu. *La première partie de (8.9) est établie.* Supposons maintenant que Γ jouit de la propriété $C_3(K_\delta)$; soit U pseudo-normal- K_δ . Considérons des ensembles P, Q tels qu'un $\hat{P}$ et un $\hat{Q}$ existent qui sont disjoints. En vertu de la définition 8.6 et en tant que $\hat{P}, \hat{Q}$ sont dans K_δ , il y a une fonction g de $C(K_\delta)$, $g=0$ sur $\hat{P}$, $g=1$ sur $\hat{Q}$; ainsi $g=0$ sur P , $g=1$ sur Q ; d'après $C_3(K_\delta)$ (6.7) il vient $\Gamma(P+Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$; c'est-à-dire, $\hat{C}_3(K_\delta)$ (8.8) s'ensuit. *L'énoncé (8.9) est vérifié.*

(8.10) *Procédons maintenant en supposant que la famille $\mathcal{F}$ satisfait à une au moins des hypothèses (2.6I), (2.6II), comme auparavant, mais ajoutons en plus l'hypothèse 9.14 du mémoire (T*).*

On sait qu'alors (2.13):

(8.11) Pour tout ensemble $X, \subset U = \Delta(\mathcal{F})$, mesurable- Φ il y a un ensemble E de $K(\mathcal{F}) = K$ de sorte que $\Phi(X - XE) = \Phi(E - EX) = 0$. En posant $X_0 = X - XE$, $X_0 = E - EX$, il vient que

$$(8.11a) \quad \Phi(X^0) = \Phi(X_0) = 0, \quad E - X^0 \subset X \subset E + X_0.$$

Soit $A, \subset U$, un ensemble quelconque; Φ_* étant une mesure extérieure régulière, il existe un ensemble A^* mesurable- Φ , tel que $A^* \supset A$ et $\Phi_*(A) = \Phi(A^*)$; selon (8.11) il y a un ensemble (qui est non unique), que nous désignons par A' , tel que

$$(1') \quad A' \in K, \quad \Phi(X^0) = \Phi(X_0) = 0 \quad \text{où} \quad X^0 = A^* - A^*A', \quad X_0 = A' - A'A^*;$$

on obtient

$$(2') \quad A - AA' \subset X_0, \quad A' - A'A = X^0 + (A' - A)A'.$$

Donc $\Phi(A - AA') = 0$. Pourtant la seconde relation n'entraîne pas $\Phi(A' - A'A) = 0$ [car, si A est non-mesurable- Φ , l'ensemble $A^* - A$ ne peut pas être mince- Φ ; dans ce cas il se peut que AA' est non-mesurable, alors $(A^* - A)A'$ n'est pas mesurable- Φ , donc n'est pas mince- Φ]. Or (1'): $A' = A'A^* + X^0 = (A^* - X_0) + X^0$; d'où

$$(3') \quad \Phi(A') = \Phi(A^*) = \Phi_*(A).$$

DÉFINITION 8.12. - Désignons par $\dot{K}$ la famille d'ensembles $E + v$, E parcourant la famille d'ensembles $\{E\}$ de $K = K(\mathcal{F})$ et les $v (\subset U)$ étant minces- Φ . Si $A (\subset U)$ est un ensemble quelconque, dénotons par $\dot{A}$ tout ensemble tel que $\dot{A} \subset \dot{K}$, $\dot{A} \supset A$, $\Phi(\dot{A}) = \Phi_*(A)$. On notera par $C^-(\dot{K})$ [$C^+(\dot{K})$] la famille des fonctions $f(x)$, définies dans U , telles que pour tout α réel:

$$(8.12a) \quad E_\alpha = [x; f(x) \leq \alpha] \in \dot{K} \quad [H_\alpha = [x; f(x) \geq \alpha] \in \dot{K}].$$

(8.13) Admettons les conditions (8.10). Alors pour tout $A, \subset U$, un $\dot{A}$ (définition 8.12) existe.

Pour démontrer procédons à partir de A comme indiqué en rapport avec (1')-(3'). On a

$$A + A' = A' + v, \quad v = A - AA', \quad \Phi(v) = 0$$

(ce qui a été noté à la suite de (2')) ;

$$A' \in K, \quad \text{d'où} \quad A + A' \in \dot{K}^* ;$$

en outre $A + A' \supset A$ et (3') :

$$\Phi(A + A') = \Phi(A' + v) = \Phi(A') = \Phi_e(A) ;$$

c'est-à-dire, $A + A'$ est un ensemble $\dot{A}^*$, ce qui vérifie la proposition (8.13).

(8.14) Étant donné un A ($\subset U$), si B_1 et B_2 sont des ensembles $\dot{A}^*$, le même sera vrai de l'ensemble $B = B_1 \cdot B_2$.

On a $B_i = \beta_i + v_i$, $\beta_i \in K$, $\Phi(v_i) = 0$, $\Phi(B_i) = \Phi(\beta_i) = \Phi_e(A)$; de plus $B = \beta_1 \beta_2 + v$, $\Phi(v) = 0$, e.g. $B \in \dot{K}^*$. Puisque $B_i \subset A$, il vient $B \supset A$, d'où

$$(1) \quad \Phi(B) = \Phi(\beta_1 \beta_2) \geq \Phi_e(A) .$$

En tant que $\beta_1 \beta_2 \subset \beta_i$, on obtient

$$(2) \quad \Phi(\beta_1 \beta_2) \leq \Phi(\beta_i) = \Phi_e(A) .$$

De (1), (2) il suit que $\Phi(B) = \Phi_e(A)$; e.g. B est un ensemble $\dot{A}^*$.

LEMME 8.15. — Soient $f \in C^-(\dot{K})$ [$C^+(\dot{K})$] (définition 8.12) et A ($\subset U$) un ensemble quelconque. Il existe alors un $\dot{A}^*$ pour lequel

$$\sup(A)f = \sup(\dot{A}^*)f \quad [\inf(A)f = \inf(\dot{A}^*)f] .$$

Considérons le cas $f \in C^-(\dot{K})$, c'est-à-dire

$$(1_1) \quad E_\alpha = [x; f(x) \leq \alpha] \in \dot{K}^* \quad \text{pour tout } \alpha \text{ réel} .$$

En posant $c = \sup(A)f$, on obtient $A \subset E_c$ (1₁). Désignons par B un $\dot{A}^*$ $D = BE_c$. On note que

$$(2_1) \quad B \in \dot{K}^* ; \quad B = \beta + v, \quad \beta \in K, \quad \Phi(v) = 0 ; \quad B \supset A ; \quad \Phi(B) = \Phi_e(A) .$$

$E_c = \gamma_c + v_c$, $\gamma_c \in K$, $\Phi(v_c) = 0$; d'où $D = \beta \gamma_c + v'$, $\beta \gamma_c \in K$, $\Phi(v) = 0$; ainsi $D \in \dot{K}^*$. De plus (2₁): $A \subset D \subset B$, $\Phi_e(A) \leq \Phi(D) \leq \Phi(B) = \Phi_e(A)$, d'où $\Phi(D) = \Phi_e(A)$. Par conséquent D est un $\dot{A}^*$. En outre: $D \subset E_c$, donc $\sup(D)f \leq c$, tandis que l'inclusion $A \subset D$ entraîne $c \leq \sup(D)f$. Ainsi $c = \sup(D)f$, ce qui est la partie du lemme pour $\sup(\dots)f$. Le reste se démontre de la même façon.

REMARQUE 8.15'. — Si $f \in C(\dot{K}) = C^-(\dot{K}) C^+(\dot{K})$ et $A (\subset U)$ est quelconque, il existe un $\dot{A}$ pour lequel à la fois

$$(3_1) \quad \sup(A)f = \sup(\dot{A})f, \quad \inf(A)f = \inf(\dot{A})f.$$

En effet d'après le lemme 8.15 on trouve des B_i ($i=1, 2$), chacun un $\dot{A}$, de sorte que

$$(4_1) \quad \sup(A)f = \sup(B_1)f, \quad \inf(A)f = \inf(B_2)f;$$

or (8.14) l'ensemble $B = B_1 B_2$ est un $\dot{A}$; $A \subset B \subset B_i$ et on obtient

$$\sup(A)f \leq \sup(B)f \leq \sup(B_1)f, \quad \inf(A)f \geq \inf(B)f \geq \inf(B_2)f;$$

en tenant compte de (4₁) il vient

$$\sup(A)f = \sup(B)f, \quad \inf(A)f = \inf(B)f,$$

ce qui vérifie la remarque 8.15'.

DÉFINITION 8.16. — On dira que l'espace $U (= \Delta(\mathcal{F}))$ est *pseudo-normal- $\dot{K}^+$* , si les relations $A \in \dot{K}$, $B \in \dot{K}$, $A \cdot B = c$ entraînent l'existence d'une fonction $g(x)$ de $C^+(\dot{K})$ (définition 8.12), telle que $g(x) = 0$ sur A et $g(x) = 1$ sur B .

(8.17) Dans les conditions (8.10) l'espace U est *pseudo-normal- $\dot{K}^+$* .

Soit un $A \subset \dot{K}$; posons $g(x) = c_A(x)$ (la fonction caractéristique de A);

$$(a_1) \quad H_c = [x; g(x) \geq c], \quad E_c = [x; g(x) \leq c].$$

On observe que

$$(a_2) \quad H_c = 0 \text{ (si } c > 1), \quad H_c = A \text{ (si } 0 < c \leq 1), \quad H_c = U \text{ (si } c \leq 0);$$

les ensembles $0, A, U$ appartiennent à $\dot{K}$; donc $g \in C^+(\dot{K})$. Si A, B disjoints sont dans $\dot{K}$, on aura pour la fonction $g(x) = c_A(x)$;

$$g(x) = 1 \text{ sur } A \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \text{ sur } B \quad (\subset U - A),$$

ce qui démontre la proposition (8.17). Il est à remarquer que l'affirmation

$$\text{« } A \in K \text{ entraîne } g(x) = c_A(x) \in C^-(\dot{K}) \text{ »}$$

est en défaut. En effet, si $A \in \dot{K}$, on aura (a₁):

$$(a_3) \quad E_c = U \text{ (si } c \geq 1), \quad E_c = U - A \text{ (si } 0 \leq c < 1), \quad E_c = 0 \text{ (si } c < 0),$$

où l'ensemble $U - A$ peut être étranger à la famille $\dot{K}$ (car les compléments des ensembles de $\dot{K}$ ne sont pas nécessairement dans $\dot{K}$). La pseudo-normalité- $\dot{K}^+$ (définition 8.16) est un caractère qui suit des conditions (8.10). On pourrait définir la pseudo-normalité- $\dot{K}$ au sens que les relations $A \in \dot{K}$, $B \in \dot{K}$, $A \cdot B = 0$ impliquent l'existence d'une fonction $g(x)$ de $C(\dot{K}) = C^-(\dot{K}) \cap C^+(\dot{K})$, pour laquelle $g(x) = 0$ (sur A) et $g(x) = 1$ (sur B). Mais pour continuer le développement de la théorie correspondante d'une mesure extérieure de Carathéodory, en utilisant la pseudo-normalité- $\dot{K}$, il serait nécessaire d'admettre comme l'hypothèse que U possède ce caractère.

(8.18) On dira qu'une mesure extérieure de Carathéodory Γ jouit de la propriété $C_s(\dot{K}^+)$ [$C_s(\dot{K})$], si l'existence d'une fonction g de $C^+(\dot{K})$ [$C(\dot{K})$] (8.12), telle que $g = 0$ (sur A) et $g = 1$ (sur B), entraîne $\Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$.

THÉORÈME 8.19. — Admettons (8.10); soit Γ assujettie à $(5; C_1)$, $(5; C_2)$, $C_s(\dot{K}^+)$ (8.18). Alors $C(\dot{K}) \subset F(\Gamma)$.

Envisageons A , B , f tels que

$$(b_1) \quad f \in C(\dot{K}), \quad \inf(A)f > \sup(B)f.$$

Selon le lemme 8.15 il existe un $\dot{A}$ et un $\dot{B}$ pour lesquels

$$(b_2) \quad \inf(\dot{A})f = \inf(A)f > \sup(B)f = \sup(\dot{B})f;$$

ainsi $\dot{A} \in \dot{K}$, $\dot{B} \in \dot{K}$, $\dot{A} \cdot \dot{B} = 0$. U étant pseudo-normal- $\dot{K}^+$ (8.16), (8.17), il existe une g de $C^+(\dot{K})$ telle que $g = 0$ (sur A), $g = 1$ (sur B). D'après la propriété $C_s(\dot{K}^+)$ pour Γ il suit que

$$(b_3) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B),$$

e.g. (b_1) implique (b_3) ; mais en raison de la proposition (6.2) cela veut dire que f (de $C(\dot{K})$) $\in F(\Gamma)$. Le théorème est vérifié.

THÉORÈME 8.20. — Soit U pseudo-normal- $\dot{K}$. Dans les conditions (8.10) et si Γ satisfait à $(5; C_1)$, $(5; C_2)$, $C_s(\dot{K})$ (8.18), il suit que $C(\dot{K}) \subset F(\Gamma)$.

Soient A , B , f tels que

$$(c_1) \quad f \in C(\dot{K}) \quad \text{et} \quad \inf(A)f > \sup(B)f.$$

D'après le lemme 8.15 il existent un $\dot{A}$ et un $\dot{B}$ de sorte que (b_2) ait lieu; $\dot{A} \cdot \dot{B} = 0$. La pseudo-normalité- $\dot{K}$, à présent admise, implique l'existence d'une g de $C(\dot{K})$ pour laquelle $g = 0$ (sur A), $g = 1$ (sur B). Le caractère $C_s(\dot{K})$ pour Γ mène à l'égalité

$$(c_2) \quad \Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B).$$

Ainsi (c_1) entraîne (c_2) ; en raison de (6.2) on obtient que f (de $C(\dot{K})$) $\in F(\Gamma)$, ce qui est la conclusion voulue.

REMARQUE 8.21. — La conclusion est la même dans chacun des théorèmes 8.19, 8.20. Quant aux hypothèses dans ces énoncés: au second il y a plus de restriction pour l'espace U , mais moins de restriction pour la troisième condition relativement à Γ .

Soit un troisième caractère $\dot{C}_s(\dot{K})$ pour Γ comme il suit:

$$(8.22) \quad \Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q),$$

lorsque des ensembles $\dot{P}, \dot{Q}$ (définition 8.12) existent tels que $\dot{P} \cdot \dot{Q} = 0$.

(8.23) Admettons les conditions (8.10). $\dot{C}_s(\dot{K})$ entraîne $C_s(\dot{K})$ (8.18); si, en plus, U est pseudo-normal- $\dot{K}$, la réciproque sera vraie.

Pour démontrer la première partie considérons des ensembles A, B tels qu'une g de $C(\dot{K})$ existe, $g=0$ sur A , $g=1$ sur B . En raison de la remarque 8.15' certains ensembles $\dot{A}, \dot{B}$ existent pour lesquels

$$0 = \sup(A)g = \inf(A)g = \sup(\dot{A})g = \inf(\dot{A})g,$$

$$1 = \sup(B)g = \inf(B)g = \sup(\dot{B})g = \inf(\dot{B})g;$$

donc $g=0$ sur $\dot{A}$ et $g=1$ sur $\dot{B}$, d'où ces ensembles $\dot{A}, \dot{B}$ sont disjoints. En vertu de $\dot{C}_s(\dot{K})$ (8.22) il vient (1) $\Gamma(A + B) = \Gamma(A) + \Gamma(B)$; e.g. l'existence d'une g de $C(\dot{K})$, telle que $g=0$ (sur A) et $g=1$ (sur B), entraîne l'égalité (1); ainsi Γ jouit de la propriété $C_s(\dot{K})$. Pour démontrer la seconde partie supposons que U est pseudo-normal- $\dot{K}$ et que Γ possède le caractère $C_s(\dot{K})$. Ayant la définition (8.22) de $\dot{C}(\dot{K})$ en vue, envisageons (2) un couple d'ensembles P, Q pour lesquels il y a un $\dot{P}$ et un $\dot{Q}$ de sorte que $\dot{P} \cdot \dot{Q} = 0$. Or $\dot{P}, \dot{Q}$ appartiennent à $\dot{K}$; d'après la pseudo-normalité- $\dot{K}$ une g de $C(\dot{K})$ existe, telle que $g=0$ sur $\dot{P}$ (sur P) et $g=1$ sur $\dot{Q}$ (sur Q). Puisque Γ possède le caractère $C_s(\dot{K})$ (8.18), il suit que (3) $\Gamma(P + Q) = \Gamma(P) + \Gamma(Q)$. Ainsi (2) implique (3); par conséquent la propriété $\dot{C}_s(\dot{K})$ a lieu. L'énoncé (8.23) suit.

9. — Des conditions pour la mesurabilité- Φ d'une fonction.

On procède dans

HYPOTHÈSE 9.1. — Soient l'espace $U = \Delta(\mathcal{F})$ et la famille $K = K(\mathcal{F})$ d'ensembles, d'accord avec la définition 2.7. On admet une au moins des conditions (2.6I), (2.6II) e.g. « la moyenne régularité » ou R.M.).

Si $f(x)$ est une fonction numérique définie sur un ensemble L (de U), pour t et c réel on posera:

$$(9.2) \quad H_c^-(L) = [x \in L; f(x) \leq c], \quad H_c^+(L) = [x \in L; f(x) \geq c].$$

DÉFINITION 9.3. — Soit $L \in K_{\sigma\delta}$; $C_2^+(L)$ [$C_2^-(L)$] désignera la classe des fonctions $f(x)$, définies sur L , pour lesquelles (9.2):

$$(9.3a) \quad H_c^+(L) \in K_{\sigma\delta} \quad [H_c^-(L) \in K_{\sigma\delta}].$$

Posons $C_2(L) = C_2^-(L) \cdot C_2^+(L)$.

THÉORÈME 9.4. — Admettons l'hypothèse 9.1. Soit $f(x)$ une fonction finie et mesurable sur un ensemble mesurable H ($\subset U$). Il existe un ensemble L , qui dépend de f , tel que

$$(9.4a) \quad L \subset H, \quad L \in K_{\sigma\delta}, \quad \Phi(H - L) = 0, \quad f(x) \in C_2(L) \quad (9.3).$$

En raison de (T*; 9.7) il existe un H' , tel que

$$(1_0) \quad H' \subset H, \quad H' \in K_\sigma, \quad X' = H - H' \quad \text{est mince-}\Phi.$$

sur l'axe R des nombres réels soit $\{N_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) un réseau — suite de grilles R_n — où R_n consiste des semi-segments

$$(2_0) \quad \left[\frac{i}{2^{n-1}}, \frac{i+1}{2^{n-1}} \right) = [d_i^n, d_{i+1}^n), \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

L'ensemble $\eta = \{d_i^n\}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) est partout dense sur R . Soit $\Gamma = \{\gamma\}$ l'ensemble des semi-segments $\gamma = [d_i^n, d_j^n)$ ($i < j$). Si $\alpha < \beta$ et α et β sont dans η , il existent un n (> 0) minimal et des entiers $i < j$, tels qu'à la fois $\alpha = d_i^n$, $\beta = d_j^n$; ainsi $[\alpha, \beta) \in \Gamma$. L'ensemble

$$(3_0) \quad T_i^n = T_i^n(f) = [x \in H'; d_i^n \leq f(x) < d_{i+1}^n]$$

est mesurable; donc d'après (T*; 9.7) un ensemble A_i^n existe de sorte que

$$(4_0) \quad A_i^n \subset T_i^n, \quad A_i^n \in K_\sigma, \quad Y_i^n = T_i^n - A_i^n \quad \text{est mince}.$$

Posons

$$(5_0) \quad L = \prod_n \sum_i A_i^n \quad (-\infty < i < +\infty, n > 0), \quad X_0 = \sum_{n,i} Y_i^n.$$

Notons que $H' = \sum_i T_i^n$, cela étant pour tout $n > 0$; en prenant les complémentaires $C(\dots)$ relativement à H' , il vient $[(5_0), (4_0)]$:

$$\begin{aligned} H' - X_0 &= C \sum_n \sum_i Y_i^n = C \sum_n \left[\sum_i (T_i^n - A_i^n) \right] = \\ &= C \sum_n \left[H' - \sum_i A_i^n \right] = C \sum_n C \left[\sum_i A_i^n \right] = \prod_n \sum_i A_i^n = L \end{aligned}$$

(car $C \sum C = \prod$). Résumons $[(1_0), (4_0)]$:

$$(6_0) \quad L \subset H' \subset H, \quad L = H' - X_0, \quad \Phi(X_0) = 0, \quad \Phi(H - L) = \Phi[(H - H') + X_0] = 0;$$

de plus $L \in K_{\sigma\delta}$; e.g. les premières trois relations (9.4a) ont lieu.

LEMME 9.5. - En posant

$$Q_{i,i+1}^n = [x \in L; d_i^n \leq f(x) < d_{i+1}^n],$$

on obtient

$$Q_{i,i+1}^n = LA_i^n \quad \text{et} \quad Q_{i,i+1}^n \in K_{\sigma\delta}.$$

En effet, si un point $x \in Q_{i,i+1}^n$, c'est que $x \in L$ et $d_i^n \leq f(x) < d_{i+1}^n$, e.g. $x \in T_i^n = A_i^n + Y_i^n$ (car $L \subset H'$ et d'après (3₀), (4₀)); puisque $L = H' - \sum_{v,i} Y_i^v$, x est étranger à Y_i^v , d'où $x \in LA_i^v$ et $Q_{i,i+1}^n \subset LA_i^n$. Or soit un $x \in LA_i^n$; alors $x \in LT_i^n$, donc $d_i^n \leq f(x) < d_{i+1}^n$ (3₀) et $x \in Q_{i,i+1}^n$; ainsi $LA_i^n \subset Q_{i,i+1}^n$; le lemme est établi.

$$(9.5') \quad Q_i^n = [x \in L; f(x) \geq d_i^n] \in K_{\sigma\delta}.$$

Pour démontrer on observe en tant que $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_i^n = +\infty$ et $f(x)$ est finie) que

$$Q_i^n = Q_{i,i+1}^n + Q_{i+1,i+2}^n + \dots + Q_{v,v+1}^n + \dots;$$

(7₀) une réunion (intersection) dénombrable d'ensembles de $K_{\sigma\delta}$ [$K_{\delta\sigma}$] est dans $K_{\sigma\delta}$ [$K_{\delta\sigma}$]; l'inclusion (9.5') s'ensuit d'après le lemme 9.5.

Soit c un nombre fini quelconque; des nombres $x_K = d_{i_K}^{n_K} > c$ ($K=1, 2, \dots$) existent tels que $x_K \downarrow c$; on obtient (9.5'):

$$(8_0) \quad E_c = [x \in L; f(x) > c] = \sum_{K=1}^{\infty} [x \in L; f(x) \geq x_K] = \sum_{K=1}^{\infty} Q_{i_K}^{n_K} \in K_{\sigma\delta}.$$

Montrons que (9.2):

$$(9_0) \quad H_c^-(L) = [x \in L; f(x) \leq c] \in K_{\sigma\delta}.$$

On a $H_c^-(L) = L - E_c$; or (8₀):

$$E_c = \prod_v \sum_K D_{v,K}, \quad D_{v,K} \in K, \quad L = \prod_v \sum_K L_{v,K}, \quad L_{v,K} \in K;$$

$E_c \subset L$, donc $E_c = \prod \sum LD_{v,K}$; en désignant par $C(\dots)$ le complémentaire, relativement à L , il vient

$$(10_0) \quad H_c^-(L) = CE_c = \sum_v \prod_K C(LD_{v,K}), \quad C(LD_{v,K}) = K(U - D_{v,K}), \quad \text{où } U - D_{v,K} \in K;$$

ici $C(LD_{v,K}) \in K_{\sigma\delta}$, donc $\prod_K C(LD_{v,K}) \in K_{\sigma\delta}$; enfin, d'après (7₀) et (10₀), $H_c^-(L) \in K_{\sigma\delta}$, ce qui est l'inclusion (9₀). D'après la définition 9.3 on déduit ainsi que $f(x) \in C_2^-(L)$. De plus (8₀):

$$H_c^+(L) = [x \in L; f(x) \geq c] = \prod_{k=1}^{\infty} \left[x \in L; f(x) > c - \frac{1}{k} \right] \in K_{\sigma\delta\delta} = K_{\sigma\delta};$$

c'est-à-dire, $f(x) \in C_2^+(L)$. Par conséquent $f(x) \in C_2(L)$; le théorème 9.4 est vérifié.

(9.6) Si dans la démonstration du théorème 9.4 on remplace dans (2₀) le semi-segment $[\bar{d}_i, \bar{d}_{i+1}^n]$ par $(\bar{d}_i^n, \bar{d}_{i+1}^n]$ et si l'on poursuit ensuite des procédés pareils à ceux qui interviennent dans cette démonstration, on retrouve la conclusion du théorème.

(9.7) Soit un ensemble $A \subset U \in K [K_\delta]$. Si $f(x)$ est définie sur A , on pose $H_c^\pm(A)$ d'accord avec (9.2). On décrit $C_0^\pm(A) [C_1^\pm(A)]$ pour désigner les classes des $f(x)$, telles que

$$H_c^\pm(A) \in K \quad [H_c^\pm(A) \in K_\delta];$$

posons

$$C_0(A) = C_0^+(A) C_0^-(A) \quad [C_1(A) = C_1^+(A) C_1^-(A)].$$

(9.8) Selon la remarque 9.12 qui survient dans (T*; p. 66) sans démonstration, si l'hypothèse 9.1 est admise et si $K_\delta = K$, dire qu'une fonction $f(x)$ est mesurable sur un ensemble H mesurable équivaut à ce qu'il existe un A , tel que

$$A \subset H, \quad A \in K, \quad \Phi(H - A) = 0, \quad f \in C_0(A).$$

La partie suffisante est immédiate. La partie nécessaire suit du théorème 9.4, avec $A = L \in K_{\sigma\delta} = K$, en tant que $C_2(L)$ (9.3) $= C_0(L)$ dans ce cas spécial.

REMARQUE 9.9. — Dans l'hypothèse 9.1, f étant finie et définie sur un ensemble H mesurable, l'existence d'un ensemble L , pour lequel (9.4a) a lieu, est nécessaire ainsi

que suffisante pour que f soit mesurable sur H . La suffisance est immédiate; la nécessité est prouvée au théorème 9.4.

10. — Des théorèmes abstraits au genre de Lusin.

En procédant d'une façon très général nous allons obtenir des théorèmes au genre de Lusin — sur les conditions pour qu'une fonction numérique soit mesurable. Nous avons en vue l'utilisation des espaces de mesure borélienne Φ infinie, mais dénombrablement finie.

DÉFINITION 10.1. — Soit une suite F_v ($v=1, 2, \dots$) d'ensembles, mesurables- Φ , tels que

$$(10.1a) \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots; \quad \Phi(F_v) < +\infty; \quad F = \sum_1^\infty F_v$$

peut être de mesure infinie.

HYPOTHÈSE 10.2. — Pour v fixe il y a deux familles d'ensembles $\mathcal{N}^v = \{E\}$, $\mathcal{M}^v = \{G\}$ (comparer avec (5.6) tels que $E \subset F_v$, $G \subset F_v$, avec les propriétés:

si $E \in \mathcal{N}^v$, $CE = F_v - E \in \mathcal{M}^v$; si $G \in \mathcal{M}^v$, $CG = F_v - G \in \mathcal{N}^v$; $\mathcal{N}^v$ [$\mathcal{M}^v$] contient les produits finis et les réunions finies d'ensembles de $\mathcal{N}^v$ [de $\mathcal{M}^v$]. L'ensemble vide et F_v sont à la fois dans $\mathcal{N}^v$ et $\mathcal{M}^v$; en plus, les ensembles de $\mathcal{N}^v$ et de $\mathcal{M}^v$ sont mesurables- Φ ; $\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}^2 \subset \dots$; $\mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^2 \subset \dots$.

HYPOTHÈSE 10.3. — Si H mesurable est contenu dans un F_v ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un O tel que

$$O \in \mathcal{M}^v, \quad O \supset H, \quad \Phi(O - H) < \varepsilon;$$

par conséquent il existe un Q de $\mathcal{N}^v$ tel que $Q \subset H$ et $\Phi(H - Q) < \varepsilon$.

(10.4) En admettant au moins l'hypothèse 10.2, désignons par $\mathcal{N}^*(F)$ [$\mathcal{M}^*(F)$] la famille d'ensembles E tels que

$$E = \sum_1^\infty E_v, \quad E_v \in \mathcal{N}^v \text{ } [\mathcal{M}^v];$$

on a $E_v \subset F_v$, $\Phi(E_v) \leq \Phi(F_v) < \infty$.

Tout E de $\mathcal{N}^*(F)$ [$\mathcal{M}^*(F)$] est mesurable, dénombrablement si $\Phi(E) = \infty$ (au sens que $\Phi(EF_v) < \infty$).

(10.5) Dans les hypothèses 10.2, 10.3, si H ($\subset F$) est dénombrablement mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existent un E et un G , tels que

$$E \in \mathcal{N}^*(F), \quad G \in \mathcal{M}^*(F), \quad E \subset H \subset G, \quad \Phi(G - H) < \varepsilon, \quad \Phi(H - E) < \varepsilon.$$

En effet, $H = \sum H_v$, où $H_v = H \cdot (F_v - F_{v-1})$; $F_0 = 0$; les H_v mesurables sont disjoints et $\Phi(H_v) \leq \Phi(F_v) < \infty$; d'après (10.3) et puisque $H_v \subset F_v$, il existe un G_v tel que

$$G_v \supset H_v, \quad G_v \in \mathcal{M}^v, \quad \Phi(G_v - H_v) < \frac{\varepsilon}{2^v}.$$

L'ensemble $G = \sum G_v$ satisfait à (10.5). En outre il y a un ensemble E_v tel que

$$E_v \subset H_v, \quad E_v \in \mathcal{N}^v, \quad \Phi(H_v - E_v) < \frac{\varepsilon}{2^v}.$$

L'énoncé (10.5) est vérifié en posant $E = \sum E_v$.

(10.6) Désignons par $\mathcal{M}^{v-} [\mathcal{N}^{v-}]$ la famille d'ensembles $F - E$, E parcourant $\mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$; désignons par $\mathcal{N}_\delta^*(F)$, $\mathcal{N}_\delta^*(F)$, $\mathcal{M}_\delta^*(F)$, $\mathcal{M}_\delta^*(F)$, selon le cas, les familles de réunions dénombrables, où bien de produits dénombrables, d'ensembles de $\mathcal{N}^*(F)$ ou de $\mathcal{M}^*(F)$.

LEMME 10.7. — *Admettons l'hypothèse 10.2. La famille $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$ jouit des propriétés suivantes:*

- (a) l'ensemble vide et F (10.1a) sont dans $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$;
- (b) les réunions finies d'ensembles de $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$ sont dans $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$;
- (c) les produits finis d'ensembles de $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$ sont dans $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$;
- (d) $\mathcal{N}^{v-} \subset \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^{v-} \subset \mathcal{M}^*(F)]$;
- (e) $A \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$ implique $CA = F - A \in \mathcal{M}_\delta^*(F) [\mathcal{N}_\delta^*(F)]$;
- (f) $A \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$, $B \in \mathcal{M}^*(F) [\mathcal{N}^*(F)]$ entraînent $A - AB \in \mathcal{N}_\delta^*(F) [\mathcal{M}_\delta^*(F)]$.

L'ensemble vide de F_v est dans $\mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$; la conclusion (a) pour l'ensemble vide de F s'ensuit d'après (10.4); le reste de (a) résulte en notant que $F = \sum F_v$, $F_v \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$.

Soient A et B dans $\mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$, e.g.

$$A = \sum A_v, \quad B = \sum B_v, \quad A_v \text{ et } B_v \text{ étant dans } \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v];$$

alors $A + B = \sum (A_v + B_v)$, $A_v + B_v \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$, d'où $A + B \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$; (b) est établie. En outre

$$AB = \sum_{v,m} A_v B_m = \alpha + \beta, \quad \alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^m A_v B_m \right), \quad \beta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=m}^{\infty} A_v B_m;$$

puisque $\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}^2 \subset \dots$ [$\mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^2 \subset \dots$], il suit que les A_v ($v \leq m$) et B_m sont dans $\mathcal{N}^m$ [$\mathcal{M}^m$], d'où

$$\sum_{v=1}^m A_v B_m \in \mathcal{N}^m [\mathcal{M}^m] \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)];$$

or

$$\beta = \sum_{v=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{v-1} A_v B_m \right), \quad A_v B_m \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v] \quad (m=1, \dots, v-1)$$

et $\sum_{m=1}^{v-1} A_v B_m \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$, par là $\beta \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$; d'après (b), déjà démontrée, $A \cdot B = \alpha + \beta \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$, ce qui vérifie (c).

Posons $F_0 = 0$. F_{i-1} est dans $\mathcal{N}^{i-1}$ et dans $\mathcal{M}^{i-1}$, d'où $F_{i-1} \in \mathcal{N}^i \mathcal{M}^i$; ainsi $F_i - F_{i-1}$ ($i \geq 1$) appartient à $\mathcal{M}^i$ et à $\mathcal{N}^i$. Soit $Q \in \mathcal{M}^v [\mathcal{N}^v]$ pour un v ; il vient

$$F - Q = (F_v - Q) + (F_{v-1} - F_v) + (F_{v+2} - F_{v+1}) + \dots, \quad F_v - Q \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v];$$

ainsi $Q \in \mathcal{M}^v [\mathcal{N}^v]$ implique $F - Q \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$, ce qui est la conclusion (d).

Soit $A = \sum A_v$, $A_v \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v]$; alors $F - A = \prod (F - A_v)$, où d'après (d)

$$F - A_v \in \mathcal{M}^{v-} \subset \mathcal{M}^*(F) \quad [F - A_v \in \mathcal{N}^{v-} \subset \mathcal{N}^*(F)],$$

e.g. la constatation (e) suit. Enfin, si $A \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]$ et $B \in \mathcal{M}^*(F) [\mathcal{N}^*(F)]$ on aura (e): $F - B \in \mathcal{N}_\delta^*(F) [\mathcal{M}_\delta^*(F)]$; par conséquent $A - AB = A \cdot (F - B) \in \mathcal{N}_\delta^*(F) [\mathcal{M}_\delta^*(F)]$. *Le lemme est prouvé.*

(10.8) Dans l'hypothèse 10.2 tout A de $\mathcal{N}_\sigma^*(F) [\mathcal{M}_\sigma^*(F)]$ est de la forme

$$A = \sum_{v=1}^{\infty} A_v, \quad \text{où} \quad A_v \in \mathcal{N}_\sigma^v [\mathcal{M}_\sigma^v].$$

En effet on aura

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A^n, \quad A^n \in \mathcal{N}^*(F) [\mathcal{M}^*(F)]; \quad A^n = \sum_{v=1}^{\infty} A_v^n, \quad \text{où} \quad A_v^n \in \mathcal{N}^v [\mathcal{M}^v];$$

ainsi

$$A = \sum_{v=1}^{\infty} A_v, \quad A_v = \sum A_v^n \in \mathcal{N}_\sigma^v [\mathcal{M}_\sigma^v].$$

LEMME 10.9. — Dans les hypothèses 10.2, 10.3, pour qu'un ensemble H ($\subset F$ (10.1a)) soit dénombrablement mesurable il faut et il suffit que des ensembles E et G existent tels que

$$(10.9a) \quad E \in \mathcal{N}_\sigma^*(F), \quad G \in \mathcal{M}_\sigma^*(F), \quad E \subset H \subset G, \quad \Phi(G - E) = 0.$$

La suffisance s'ensuit en remarquant que les ensembles de $\mathcal{N}^*(F)$ et de $\mathcal{M}^*(F)$ sont mesurables (même si seulement une des deux conditions 10.2, 10.3 est remplie); ainsi les ensembles de $\mathcal{N}_\sigma^*(F)$, $\mathcal{M}_\delta^*(F)$ sont mesurables. Pour établir la nécessité supposons que H est dénombrablement mesurable et utilisons l'énoncé (10.5); pour tout entier $n > 0$ il y a un E_n et un G_n tels que

$$E_n \in \mathcal{N}^*(F), \quad G_n \in \mathcal{M}^*(F), \quad E_n \subset H \subset G_n, \quad \Phi(G_n - H) < \frac{1}{n}, \quad \Phi(H - E_n) < \frac{1}{n}.$$

On achève la démonstration en posant $G = \prod G_n$, $E = \sum E_n$.

(10.10) Dans l'hypothèse 10.2, une fonction numérique $f(x)$ étant définie sur un ensemble A ($\subset F$), pour c réel posons

$$H_c^+ = H_c^+(f) = \{x \in A; f(x) \geq c\}, \quad H_c^- = H_c^-(f) = \{x \in A; f(x) \leq c\}.$$

On dira que f est sur A d'une des classes

$$C^\pm(\mathcal{N}^*), \quad C^\pm(\mathcal{M}^*), \quad C^\pm(\mathcal{N}_\delta^*), \quad C^\pm(\mathcal{M}_\delta^*) \quad (\text{ici } \mathcal{N}^* = \mathcal{N}^*(F), \text{ etc.}),$$

si pour tout c réel on a dans les cas qui correspondent:

$$(a) \quad H_c^\pm = AP_c^\pm, \quad \text{où} \quad P_c^\pm \in \mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_\delta^*, \mathcal{M}_\delta^*.$$

Par définition

$$(b) \quad \begin{aligned} C(\mathcal{N}^*) &= C^+(\mathcal{N}^*) C^-(\mathcal{N}^*), & C(\mathcal{M}^*) &= C^+(\mathcal{M}^*) C^-(\mathcal{M}^*), \\ C(\mathcal{N}_\delta^*) &= C^+(\mathcal{N}_\delta^*) C^-(\mathcal{N}_\delta^*), & C(\mathcal{M}_\delta^*) &= C^+(\mathcal{M}_\delta^*) C^-(\mathcal{M}_\delta^*). \end{aligned}$$

(10.11) Si f vaut une constante sur un A de $\mathcal{N}^*$ [$\mathcal{M}^*$], on a $f \in C(\mathcal{N}^*)$ [$C(\mathcal{M}^*)$] sur A .

En effet, soit $f = a$ sur A ; il vient (10.10):

$$H_c^+ = A \quad (c \leq a), \quad H_c^+ = 0 \quad (c > a), \quad H_c^- = A \quad (c \geq a), \quad H_c^- = 0 \quad (c < a);$$

ainsi $H_c^\pm = AP_c^\pm$, où

$$P_c^+ = A \quad (c \leq a), \quad P_c^+ = 0 \quad (c > a), \quad P_c^- = A \quad (c \geq a), \quad P_c^- = 0 \quad (c < a).$$

Or (10.7a) l'ensemble vide est à la fois dans $\mathcal{N}^*$ et $\mathcal{M}^*$. Donc, si $A \in \mathcal{N}^*$ [$\mathcal{M}^*$], les deux ensembles $P_c^\pm$ sont dans $\mathcal{N}^*$ [$\mathcal{M}^*$], cela étant pour tout c réel; donc sur A

$$f(x) \in C^+(\mathcal{N}^*) \quad [C^+(\mathcal{M}^*)] \quad \text{et} \quad f(x) \in C^-(\mathcal{N}^*) \quad [C^-(\mathcal{M}^*)];$$

le résultat (10.11) suit.

(10.12) Soient A et B dans $\mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*]$, $A \cdot B = 0$, $f(x) \in C(\mathcal{N}^*)[C(\mathcal{M}^*)]$ sur A , $f(x) \in C(\mathcal{N}^*)[C(\mathcal{M}^*)]$ sur B . Alors $f \in C(\mathcal{N}^*)[C(\mathcal{M}^*)]$ sur $A + B$. On note que les ensembles

$$A_c^+ = \{x \in A; f(x) \geq c\}, \quad B_c^+ = \{x \in B; f(x) \geq c\},$$

$$A_c^- = \{x \in A; f(x) \leq c\}, \quad B_c^- = \{x \in B; f(x) \leq c\},$$

appartiennent à $\mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*]$ (conséquence de (10.10)). Posons

$$\gamma_c^+ = \{x \in A + B; f(x) \geq c\}, \quad \gamma_c^- = \{x \in A + B; f(x) \leq c\};$$

on obtient (10.7b)

$$\gamma_c^+ = A_c^+ + B_c^+ \in \mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*], \quad \gamma_c^- = A_c^- + B_c^- \in \mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*];$$

$A + B \in \mathcal{N}^*[\mathcal{M}^*]$. D'où sur $A + B$ on a $f \in C^+(\mathcal{N}^*)[C^+(\mathcal{M}^*)]$ et $f \in C^-(\mathcal{N}^*)[C^-(\mathcal{M}^*)]$; la conclusion (10.12) en résulte.

Nous adoptons les définitions qui se trouvent antérieurement à (T*; 9.10):

(10.13) Soit une suite des fonctions $f_n(x)$ qui converge sur en ensemble N ($\subset U$) vers une fonction $f(x)$ finie. On dit que la convergence est *sup.-uniforme* [*inf.-uniforme*]; s'il y a des constantes $\varepsilon_n (> 0) \rightarrow 0$, telles que sur N et pour $n = 1, 2, \dots$ on ait

$$f_n(x) > f(x) - \varepsilon_n \quad [f(x) + \varepsilon_n > f_n(x)];$$

si les deux sortes de convergence ont lieu simultanément, la convergence est *uniforme*.

Au lieu de l'énoncé (T*; 9.10) on a la proposition suivante.

(10.14) Soient $N \in \mathcal{N}_\delta^*$, $f_n(x) \in C^+(\mathcal{N}_\delta^*)[C^-(\mathcal{N}_\delta^*)]$ sur N (10.10). Si, sur N ,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ sup.-uniformément [inf.-uniformément]},$$

il suit que $f \in C^+(\mathcal{N}_\delta^*)$ sur N [$C^-(\mathcal{N}_\delta^*)$ sur N]; f_n ($\in C(\mathcal{N}_\delta^*)$ sur N) $\rightarrow f$ uniformément (sur N) entraîne $f \in C(\mathcal{N}_\delta^*)$ sur N . Cet énoncé reste vrai en remplaçant $\mathcal{N}_\delta^*$ par $\mathcal{M}_\delta^*$.

Considérons le cas où f_n (de $C^+(\mathcal{N}_\delta^*)$) converge sup.-uniformément vers f . Alors sur N , $f - f_n < \varepsilon_n$; posons

$$H_c^+ = \{x \in N; f(x) \geq c\}, \quad H_{n,c}^+ = \{x \in N; f_n(x) \geq c - \varepsilon_n\};$$

alors $H_c^+ = \prod H_{n,c}^+$. Il vient

$$H_{n,c}^+ = NP_{n,c}^+, \quad P_{n,c}^+ \in \mathcal{N}_\delta^*; \quad H_c^+ = NP_c^+, \quad P_c^+ = \prod P_{n,c}^+;$$

d'où $P_c^+ \in \mathcal{N}_\delta^*$ et f appartient à $C^+(\mathcal{N}_\delta^*)$ sur N . Le reste de (10.14) se démontre de la même façon.

(10.15) *Le cas où la suite $\{F_v\}$ (définition 10.1) consiste d'un seul ensemble F_v ; alors $F = F_1$ et F est de mesure finie. Dans ce cas on écrira*

$$\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}, \quad \mathcal{M}^1 = \mathcal{M} \quad (10.2); \quad \mathcal{N}^*(F) = \mathcal{N}, \quad \mathcal{M}^*(F) = \mathcal{M} \quad (10.14);$$

les familles $\mathcal{N}_\delta^*$, $\mathcal{N}_\delta^*$, $\mathcal{M}_\delta^*$, $\mathcal{M}_\delta^*$ (10.6) coïncident respectivement avec $\mathcal{N}_\delta$, $\mathcal{N}_\delta$, $\mathcal{M}_\delta$, $\mathcal{M}_\delta$; $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}$, $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}$. Le lemme 10.7 est alors sans objet; pourtant au lieu de (10.7f) on pourrait retenir ceci:

$$(10.15a) \quad A \in \mathcal{N} [\mathcal{M}], \quad B \in \mathcal{M} [\mathcal{N}] \quad \text{impliquent} \quad A - AB \in \mathcal{N} [\mathcal{M}].$$

Le lemme 10.9 prend la forme suivante.

(10.15b) *Dans les hypothèses 10.2, 10.3 (avec $F = F_1$), pour qu'un ensemble $H (\subset F)$ soit mesurable il faut et il suffit qu'un E de $\mathcal{N}_\delta$ et un G de $\mathcal{M}_\delta$ existent de sorte que $E \subset H \subset G$, $\Phi(G - E) = 0$.*

Au cas 10.15 les classes de fonctions, définies sur un ensemble $A (\subset F)$, $C^\pm(\mathcal{N})$, $C^\pm(\mathcal{M})$, $C^\pm(\mathcal{N}_\delta)$, $C^\pm(\mathcal{M}_\delta)$ sont spécifiées d'accord avec (10.10), où l'on pose $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$, etc.: les énoncés (10.11), (10.12), (10.14) auront lieu avec les notations qu'on vient d'indiquer.

Voici le premier théorème abstrait, au genre de Lusin, pour le cas $\Phi(F) < \infty$.

THÉORÈME 10.16. — *Envisageons le cas (10.15) (mesure finie) et admettons les hypothèses 10.2, 10.3, en rapport avec ce cas. Pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur un ensemble $H (\subset F)$ mesurable, soit mesurable sur H il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble N tel que*

$$(10.16a) \quad N \in \mathcal{N}_\delta, \quad N \subset H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f(x) \in C(\mathcal{N}_\delta) \quad \text{sur } N.$$

Soit f mesurable et finie sur H . Si f est simple, il y a une partition finie $\{H_v\}$ ($v = 1, \dots, q$) de H , les H_v étant mesurables, et des constantes c_v de sorte que $f = c_v$ sur H_v ($v = 1, 2, \dots, q$). D'après l'hypothèse 10.3 il y a un ensemble $N_v \in \mathcal{N}$, tel que $N_v \subset H_v$, $\Phi(H_v - N_v) < \varepsilon/q$. Alors

$$N = N_1 + \dots + N_q \text{ (de } \mathcal{N}) \subset H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon.$$

En raison de (10.11) $f \in C(\mathcal{N})$ sur N_v ($v = 1, \dots, q$). Ainsi (10.12):

$$f \in C(\mathcal{N}) [\subset C(\mathcal{N}_\delta)] \quad \text{sur } N.$$

Si f (finie, mesurable sur H) n'est pas simple, des f_v finies, simples et mesurables, sur H existent, telles que $\lim_{\mathcal{N}} f_v(x) = f(x)$ sur H . On peut trouver des N_v de sorte que

$$(1^0) \quad N_v \text{ (de } \mathcal{N}) \subset H, \quad \Phi(H - N_v) < \varepsilon/2^{v+1}, \quad f_v \in C(\mathcal{N}) \quad \text{sur } N_v \quad (v=1, 2, \dots).$$

D'après un théorème de Egoroff il y a un ensemble Q mesurable contenu dans H , $\Phi(H - Q) < \varepsilon/4$, de sorte que sur Q la suite $\{f_v\}$ converge uniformément vers f . Selon l'hypothèse 10.3 Q contient un ensemble N' de $\mathcal{N}$, $\Phi(Q - N') < \varepsilon/4$; d'où $\Phi(H - N') < \varepsilon/2$. Il vient

$$(2^0) \quad N = N \prod_1^\infty N_v \in \mathcal{N}_\delta, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f_v \rightarrow f \text{ uniformément sur } N.$$

À cause de (1^0) et puisque $N \subset N_v$, f_v appartient à $C(\mathcal{N})$ ($\subset C(\mathcal{N}_\delta)$) sur N . De (10.14) il suit que $f(x) \in C(\mathcal{N}_\delta)$ sur N . La nécessité est vérifiée.

H étant mesurable et $f(x)$ étant finie sur H , supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un ensemble N tel que (10.16a) ait lieu. Comme une conséquence, des N_v existent tels que

$$(1_0) \quad N_v \in \mathcal{N}_\delta, \quad N_v \subset H, \quad \Phi(H - N_v) < \frac{1}{v}, \quad f \in C(\mathcal{N}_\delta) \quad \text{sur } N_v \quad (v=1, 2, \dots).$$

Introduisons les ensembles

$$(2_0) \quad N_a^v = \{x \in N_v; f(x) \geq c\}, \quad E_c = \{x \in H; f(x) \geq c\}.$$

D'après la définition (10.10) et (1_0)

$$N_c^v = N \cdot P_{v,c}^+, \quad P_{v,c}^+ \in \mathcal{N}_\delta, \quad \text{d'où} \quad N_c^v \in \mathcal{N}_\delta.$$

L'ensemble $H_0 = H - \sum N_v$ est de mesure zero. En posant

$$(3_0) \quad E_c^0 = \{x \in H_0; f(x) \geq c\}, \quad E^c = E_c^0 + \sum_1^\infty N_c^v,$$

on obtient $E_c = E^c$ (2_0) . Or $\Phi(E_c^0) = 0$, car $E_c^0 \subset H_0$ (mince). En outre $(1_0) \sum_1^\infty N_c^v$ est dans $\mathcal{N}_{\delta\sigma}$ et conséquemment est mesurable. Ainsi E_c (2_0) est mesurable pour tout c réel, ce qui veut dire que $f(x)$ est mesurable sur H . La suffisance est établie et le théorème est prouvé.

Voici une conséquence immédiate de ce théorème.

(10.17) *Considérons le cas $F = F_n$ et admettons les conditions 10.2, 10.3 relativement à ce cas. Pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur un H ($\subset F$), mesurable, soit mesu-*

nable sur H il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour le n , dont il s'agit, il existe un ensemble $N = N^n$, tel que

$$(10.17a) \quad N \in \mathcal{N}_\delta^n, \quad N \in H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f(x) \in C(\mathcal{N}_\delta^n) \quad \text{sur } N.$$

Dans le cas général $\Phi(F) = \infty$ l'application directe du théorème de Egoroff (S; p. 18) échoue. Pourtant, en s'appuyant sur l'énoncé (10.17), on démontre la proposition suivante.

THÉORÈME 10.18. — *Considérons le cas où la mesure de F peut être infinie et admettons les hypothèses 10.2, 10.3. Pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur un H ($\subset F$) démontrablement mesurable, soit mesurable sur H il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n = 1, 2, \dots$ il y ait un N^n tel que*

$$(10.18a) \quad N^n \in \mathcal{N}_\delta^n, \quad N^n \subset H_n = H(F_n - F_{n-1}), \quad \Phi(H_n - N^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad f \in C(\mathcal{N}_\delta^n) \quad \text{sur } N^n.$$

NÉCESSITÉ. — Soit f (finie) mesurable sur H . Selon une remarque en rapport avec la démonstration de (10.7d) $F_n - F_{n-1} \in \mathcal{M}^n \cdot \mathcal{N}^n$ ($n = 1, 2, \dots$). On a $\Phi(F_n - F_{n-1}) < \infty$; les H_n sont disjoints mesurables et $H_n \subset F_n$; f est mesurable sur H_n ($n = 1, 2, \dots$). En raison de (10.17) il y a un N^n , de sorte que

$$N^n \in \mathcal{N}_\delta^n, \quad N^n \subset H_n, \quad \Phi(H_n - N^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad f(x) \in C(\mathcal{N}_\delta^n) \quad \text{sur } N^n;$$

cela étant pour $n = 1, 2, \dots$, la nécessité est démontrée. On note qu'en posant $N = \sum N^n$, il suit que $\Phi(H - N) < \varepsilon$.

SUFFISANCE. — f étant finie sur un ensemble H ($\subset F$) démontrablement mesurable, supposons que (10.18a) a lieu. On obtient des ensembles N_v^n ($v = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$) de sorte que

$$(1') \quad N_v^n \in \mathcal{N}_\delta^n, \quad N_v^n \subset H_n, \quad \Phi(H_n - N_v^n) < \frac{1}{v2^n}, \quad f(x) \in C(\mathcal{N}_\delta^n) \quad \text{sur } N_v^n.$$

Posons

$$(2') \quad N_0^{n,v} = \{x \in N_v^n; f(x) \geq c\}, \quad E_v^n = \{x \in H_n; f(x) \geq c\}.$$

La quatrième relation (1') veut dire:

$$(3') \quad N_c^{n,v} = N_v^n P_{v,c}^{n,+}, \quad P_{v,c}^{n,+} \in \mathcal{N}_\delta^n, \quad \text{d'où} \quad N_c^{n,v} \in \mathcal{N}_\delta^n;$$

ainsi les $N_c^{n,v}$ sont mesurables (de mesure finie). Définissons les ensembles :

$$(4') \quad \begin{aligned} H_0 &= H - \sum_{n,v} N_v^n, & E_c &= \sum_{n=1}^{\infty} E_c^n = \{x \in H; f(x) \geq c\}, \\ E_c^0 &= \{x \in H_0; f(x) \geq c\}, & E^c &= E_c^0 + \sum_{n,v} N_c^{n,v}. \end{aligned}$$

On observe que (1')

$$\Phi\left(H - \sum_n N_v^n\right) = \Phi\left[\sum_n (H_n - N_v^n)\right] \leq \sum_n \Phi(H_n - N_v^n) < \frac{1}{v};$$

donc $\Phi(H_0) = 0$ et l'ensemble $E_c^0 (\subset H_0)$ aussi est-il mince- Φ . Par conséquent E^c (4') est mesurable. Vérifions que: (5') $E_c = E^c$. Si $x \in E_c$, c'est que $x \in H_0$, ou bien x est dans un N_v^n (et $f(x) \geq c$ dans les deux cas); au premier cas $x \in E_c^0 \subset E^c$; au second cas $x \in N_c^{n,v}$ (2') et on a encore $x \in E^c$; ainsi $E_c \subset E^c$. Si $x \in E^c$, ou bien $x \in E_c^0$, ou bien x est dans un $N_c^{n,v}$; au premier cas $x \in H_0 \subset H$ et $x \in E_c$; dans l'autre cas (2'): $x \in N_v^n \subset H_n \subset H$ et, puisque $f(x) \geq c$, on obtient $x \in E_c$; par là $E^c \subset E_c$ et (5') est prouvé. E^c étant mesurable, l'ensemble E_c (4') l'est-possiblement au sens dénombrable; conséquemment $f(x)$ est mesurable sur H , ce qui prouve la suffisance.

(10.19) Soit $\tilde{\mathcal{N}}_\delta^*$ la famille d'ensembles E , tels que

$$E = \sum_1^\infty E^n, \quad E^n \subset F_n - F_{n-1}, \quad E \in \mathcal{N}_\delta^*.$$

Avec cette notation le théorème 10.18 peut être formulé comme il suit.

THÉORÈME 10.20. — Dans les hypothèses 10.2, 10.3, pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur un H ($\subset F$) dénombrablement mesurable, soit mesurable sur H il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble N existe de sorte que

$$(10.20a) \quad N \in \tilde{\mathcal{N}}_\delta^* (10.19), \quad N \subset H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{N}}_\delta^*) \quad \text{sur } N.$$

NÉCESSITÉ. — On suppose que f (finie) est mesurable sur H . D'après le théorème 10.18, pour tout $\varepsilon > 0$ des N^n ($n=1, 2, \dots$) existent, pour lesquels (10.18a) a lieu; N^n (de $\mathcal{N}_\delta^*$) $\subset F_n - F_{n-1}$. Il suit que $N = \sum N^n \in \tilde{\mathcal{N}}_\delta^*$;

$$N \subset \sum H_n = H; \quad \Phi(H - N) = \sum_n \Phi(H_n - N_n) < \varepsilon.$$

Il reste à montrer la dernière inclusion dans (10.20a). Posons

$$\begin{aligned} H_c^+ &= \{x \in N^n; f(x) \geq c\}, & H_c^- &= \{x \in N; f(x) \geq c\} \\ [H_c^- &= \{x \in N^n; f(x) \leq c\}, & H_c^- &= \{x \in N; f(x) \leq c\}]. \end{aligned}$$

En raison de (10.18a) $\bar{H}_c^\pm = N^n P_c^\pm$, $\bar{P}_c^\pm \in \mathcal{N}_\delta^n$; en outre, $N \supset H_c^\pm$, donc

$$H_c^\pm = N P_c^\pm, \quad P_c^\pm = H_c^\pm = \sum_n \bar{H}_c^\pm, \quad \text{où} \quad \bar{H}_c^\pm \in \mathcal{N}_\delta^n \quad \text{et} \quad \bar{H}_c^\pm \subset N^n \subset F_n - F_{n-1};$$

ainsi $P_c^\pm \in \mathcal{N}_\delta^*$, ce qui veut dire (par définition): $f \in C(\tilde{\mathcal{N}}_\delta^*)$ sur N .

SUFFISANCE. — On peut démontrer ceci directement en procédant comme dans la preuve de la partie suffisante du théorème 10.18.

COROLLAIRE 10.21'. — Si aux hypothèses dans le théorème 10.20 on ajouté $\mathcal{N}_\delta^n = \mathcal{N}^n$ ($n=1, 2, \dots$), les conditions nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur H ($\subset F$) mesurable, soit mesurable sur H sont que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble N tel que

$$(10.21'a) \quad N \in \mathcal{N}^* \text{ (10.4)}, \quad N \subset H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f \in C(\mathcal{N}^*) \quad \text{sur } N.$$

En effet, $E \in \mathcal{N}_\delta^*$ (10.19) entraîne $E = \sum E^n$, $E^n \in \mathcal{N}_\delta^n = \mathcal{N}^n$, donc $E \in \mathcal{N}^*$, e.g. $\tilde{\mathcal{N}}_\delta^* \subset \mathcal{N}^*$. La partie nécessaire s'ensuit d'après la partie nécessaire du théorème; la partie suffisante du corollaire est vérifiée à la manière de la preuve de la partie correspondante au théorème 10.18.

Dans le reste de la section présente nous procédons dans des conditions topologiques.

(10.22) On admet les hypothèses 10.2, 10.3. De plus, pour $n=1, 2, \dots$, soit $\mathcal{M}^n$ la famille des ensembles ouverts pour une topologie T_n sur F_n (10.1) (alors $\mathcal{N}^n$ sera la famille des ensembles fermés pour T_n).

Dans ces conditions $\mathcal{N}_\delta^n = \mathcal{N}^n$; la classe des fonctions $C(\mathcal{N}_\delta^n)$ sur un ensemble N^n ($\subset F_n$) sera identique avec les fonctions continues (pour T_n) sur N^n .

(10.23) Dans l'hypothèse 10.22 les théorèmes 10.16 ($F = F_1$ de mesure finie), 10.18 ($\Phi(F) < \infty$) s'appliquent respectivement avec

(a) N fermé- T_1 , f continue- T_1 sur N ;

(b) N^n fermé- T_n , f continue- T_n sur N^n ($n=1, 2, \dots$).

Examinons d'une façon plus détaillée le cas $\Phi(F) = \infty$. Introduisons la famille $G = \sum_1^\infty \mathcal{M}^n$. Soient $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_K$, K fini, $E = E_1 E_2 \dots E_K$, $E_i \in \mathcal{M}^{n_i}$ ($i = 1, \dots, K$); alors $E_i \in \mathcal{M}^{n'}$, $n' = n_K$, et $E \in \mathcal{M}^{n'} \subset G$; ainsi la famille G' des intersections finies d'ensembles de G est identique avec G . Désignons par $\mathcal{M}$ la famille des réunions quelconques d'ensembles de G' , e.g. de G ; $\mathcal{M}$ est la famille des ouverts pour la topologie T (sur F), engendrée par G .

(10.24) Dans les circonstances spécifiées on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ ($= \mathcal{M}^*(F)$ (10.4)).

Si $E \in \mathcal{M}^*$, e.g. si $E = \sum_{v=1}^{\infty} E_v$, $E_v \in \mathcal{M}^v$ ($\subset G$), il suit que $E \in \mathcal{M}$; ainsi $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$.
Envisageons un E de $\mathcal{M}$; il vient que, I désignant un ensemble convenable,

$$E = \sum (\tau \in I) \mathfrak{E}_{\tau}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{E}_{\tau} \in G, \quad \text{e.g.} \quad \mathfrak{E}_{\tau} \in \mathcal{M}^{n_{\tau}};$$

$1 \leq n_{\tau}$ minimal $< \infty$; dénotons par ($1 \leq n_{\tau}$) $n^1 < n^2 < \dots$ les valeurs distinctes de n_{τ} , lorsque τ parcourt I . Soit I^v la partie de I d'éléments τ tels que $n_{\tau} = n^v$; les ensembles I^v sont disjoints; $I = \sum I^v$;

$$E = \sum_{v=1}^{\infty} E^v, \quad E^v = \sum (\tau \in I^v) \mathfrak{E}_{\tau};$$

dans l'expression pour E^v on a $\mathfrak{E}_{\tau} \in \mathcal{M}^{n_{\tau}} = \mathcal{M}^{n^v}$. Or $\mathcal{M}^{n^v}$ est la famille des ouverts- T_{n^v} , donc $E^v \in \mathcal{M}^{n^v}$. Par conséquent $E \in \mathcal{M}^*$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$. La proposition (10.24) est vérifiée.

La famille $\mathcal{N} = \{Q\}$ des ensembles fermés pour T consiste des ensembles $Q = F - E$, E parcourant $\mathcal{M}^*$; d'après (10.7e) un tel ensemble Q appartient à $\mathcal{N}_{\delta}^*$, e.g.

$$Q = \prod_n Q^n, \quad Q^n = \sum_v Q_v^n, \quad Q_v^n \in \mathcal{N}^v.$$

Désignons par $\tilde{\mathcal{N}}^*$ la famille d'ensembles E , tels que $E = \sum E^n$, $E^n \subset F_n - F_{n-1}$, $E^n \in \mathcal{N}^n$; il suit que $\tilde{\mathcal{N}}^* = \tilde{\mathcal{N}}_{\delta}^*$ (10.19), car $\mathcal{N}_{\delta}^n = \mathcal{N}^*$. Si $E \in \mathcal{N}^*$, on aura

$$F - E = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - F_{n-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} E^n = \sum_{n=1}^{\infty} G_n, \quad G_n = (F_n - F_{n-1}) - E^n;$$

il vient

$$F_n - F_{n-1} \in \mathcal{M}^n \cdot \mathcal{N}^v \subset \mathcal{M}^n, \quad F_n - E^n \in \mathcal{M}^n, \quad G_n = (F_n - F_{n-1}) \cdot (F_n - E^n) \in \mathcal{M}^n;$$

par la $F - E \in \mathcal{M}^*$, $F - E$ est ouvert pour T ; ainsi

$$(10.25) \quad \tilde{\mathcal{N}}^* [= \tilde{\mathcal{N}}_{\delta}^* (10.19)] \subset \mathcal{N} \quad (\text{la famille des ensembles fermés-}T).$$

Dans les développements à la suite de (10.23) jusqu'ici l'hypothèse 10.3 n'intervient pas.

THÉORÈME 10.26. — Dans l'hypothèse (10.22), avec $\Phi(F) = \infty$ pour qu'une fonction $f(x)$, finie sur un H ($\subset F$) dénombrablement mesurable, soit mesurable il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un ensemble N tel que

$$(10.26a) \quad N \in \mathcal{N}, \quad N \subset H, \quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f \in C(\mathcal{N}) \quad \text{sur } N,$$

où $\mathcal{N}$ constitue la famille des ensembles fermés pour la topologie T (cf. le texte qui précède (10.24)). Autrement dit: dans (10.26a) N est fermé- T et f est continue- T sur N .

NÉCESSITÉ. — Si f (finie) est mesurable sur un H ($\subset F$) mesurable, la partie nécessaire du théorème 10.20 implique l'existence d'un ensemble N tel que (10.20a) ait lieu; pourtant $N_\delta^* \subset N$ (10.25) d'où la conclusion (10.26a).

SUFFISANCE. — On suppose que H ($\subset F$) est dénombrablement mesurable, f est finie sur K , tandis que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble N de sorte que (10.26a) ait lieu. Nous procédons comme de (1₀) à (3₀) dans la preuve de la partie suffisante pour le théorème 10.16; dans celui-ci, la mesure de F étant finie, $N = N^1$ est une famille distincte de la famille à présent désignée par N (les ensembles fermés- T). La démonstration s'achève sans difficulté en remplaçant dans (1₀)-(3₀) N_δ (l'ancienne définition) par N (la nouvelle définition) et non notant qu'à présent $\sum N_\sigma^v \in N_\sigma$, donc $\sum N_\sigma^v$ est mesurable.

(10.27) Soient des ensembles F_v ($v=1, 2, \dots$), non vides et distincts, au moins un en nombre, et F tels que

$$(a_1) \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots, \quad F = \sum F_v.$$

Admettons que F est un espace muni d'une *topologie* $\mathfrak{C}$, $\hat{\mathcal{M}} [\hat{N}]$ étant la famille d'ensembles ouverts [fermés] pour $\mathfrak{C}$; désignons par $\mathfrak{C}_v$ la topologie induite sur F_v par $\mathfrak{C}$; notons par $\mathcal{M}^v [N^v]$ la famille d'ensembles ouverts- $\mathfrak{C}_v$ [fermés- $\mathfrak{C}_v$] (on a $F_v \in N^v \cdot \mathcal{M}^v$).

Dans les conditions (10.27), si l'on veut que les inclusions (indiquées à la fin de l'hypothèse 10.2)

$$(a_2) \quad N^1 \subset N^2 \subset \dots; \quad \mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^2 \subset \dots$$

aient lieu, ainsi que $N^v \subset \hat{N}$, $\mathcal{M}^v \subset \hat{\mathcal{M}}$ ($v=1, 2, \dots$), il faudra introduire les conditions suivantes, qui sont nécessaire et suffisante:

$$(a_3) \quad F_v \in \mathcal{M}^{v+1} \cdot N^{v+1}, \quad F^v \in \hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{N} \quad (v=1, 2, \dots);$$

comme une conséquence on aura

$$(a_4) \quad F_v \in \mathcal{M}^{v+p} \cdot N^{v+p} \subset \hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{N} \quad (p=0, 1, 2, \dots; v=1, 2, \dots).$$

REMARQUE 10.27'. — Admettons les conditions et les notations (10.27), ainsi que (a₃). Si la topologie $\mathfrak{C}$ sur F est telle que, sauf pour l'ensemble vide et F , il n'y a pas de sous-ensembles de F qui appartiennent à la fois à $\hat{\mathcal{M}}$ et à $\hat{N}$, il suivra que l'hypothèse 10.2 ne peut pas être satisfaite avec des F_v distincts (non vides) en nombre plus qu'un (e.g. on pourra seulement avoir $F=F_1$). Cela s'ensuit parce que les inclusions (a₃) entraînent (a₄). De même, s'il n'y a qu'un nombre fini de sous-ensembles distincts de F dans $\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{N}$, l'hypothèse 10.2 ne pourra pas avoir lieu avec des F_v distincts en nombre infini.

(10.28) *Admettons (10.27) et utilisons les notations y comprises; supposons que (a_3) a lieu [donc on a (a_2)] et $\mathcal{N}^v \subset \hat{\mathcal{N}}$, $\mathcal{M}^v \subset \hat{\mathcal{M}}$ ($v=1, 2, \dots$); supposons que pour une mesure borélienne. $\Phi(\geq 0)$, $\Phi(F_v) < \infty$, tandis que, les F_v étant en nombre infini, $\Phi(F) = \lim \Phi(F_v) = \infty$ et que les hypothèses 10.2 (ainsi les ensembles de $\mathcal{N}^v$ et de $\mathcal{M}^v$ sont mesurables- Φ), 10.3 sont remplies. Dans ces conditions $\mathcal{M} (= \mathcal{M}^* (10.4)) = \hat{\mathcal{M}}$ où $\hat{\mathcal{M}}$ est la famille des ouverts pour la topologie T (sur F), engendrée par $\sum \mathcal{M}^n$; e.g. $T = \mathfrak{T}$ (et $\mathcal{N} = \hat{\mathcal{N}}$).*

En effet, $E \in \mathcal{M}^*$ entraîne

$$E = \sum_{v=1}^{\infty} E_v, \quad E_v \in \mathcal{M}^v \quad [E_v = O_v F_v, \quad O_v \in \hat{\mathcal{M}}], \quad \text{où} \quad \mathcal{M}^v \subset \hat{\mathcal{M}};$$

par là $E \in \hat{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}^* \subset \hat{\mathcal{M}}$. En outre $O \in \hat{\mathcal{M}}$ implique

$$O = FO = (\sum F_v) O = \sum F_v O, \quad F_v O \in \mathcal{M}^v,$$

donc $O \in \mathcal{M}^*$ et $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*$. La conclusion dans (10.28) s'ensuit.

REMARQUE 10.28'. — *La proposition [10.28] présente une façon de réalisation des conditions dans lesquelles le théorème 10.26 est valide. Avec une telle réalisation ce théorème sera qualifié comme spécial.*

(10.29) Dans le théorème 10.26 « spécial » (10.28') envisageons la possibilité d'un relâchement des conditions y comprises. Pourtant on continue d'admettre que F ($\subset U$) est un espace muni d'une topologie $\mathfrak{T}$, $\hat{\mathcal{M}} [\hat{\mathcal{N}}]$ désignant la famille des ensembles ouverts [fermés] pour $\mathfrak{T}$; F est muni d'une mesure borélienne $\Phi \geq 0$, $\Phi(F) = +\infty$, tandis que F est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure- Φ finie. Dépendant de ce qu'on a retenu ou écarté parmi les conditions survenant au théorème 10.26 « special », il est concevable que ce théorème devienne inexact. Le défaut du partie nécessaire voudrait dire:

(10.29_a) il existent un ensemble H_0 ($\subset F$) dénombrablement mesurable, une fonction $f(x)$, finie sur H_0 et mesurable sur H_0 , et un nombre $\varepsilon_0 > 1$, de sorte que pour tout N (de $\hat{\mathcal{N}}$) contenu dans H_0 , avec $\Phi(H_0 - N) < \varepsilon_0$, la fonction f n'appartient pas à $C(\hat{\mathcal{N}})$ sur N [e.g. pour tout N fermé- $\mathfrak{T}$, de la sorte indiquée f n'est pas continue- $\mathfrak{T}$ sur N].

(10.30) *L'exemple remarquable de structure extrêmement touffue [(D¹; p. 3074-76) (D²; p. 3536-38)], dû à Denjoy, présente un cas où le défaut du théorème de Lusin a lieu au sens de (10.29)-(10.29_a).*

Dans cet exemple on considère dans l'espace euclidien U_3 (à trois dimensions) un ensemble F ($= V$). F est muni de la topologie $\mathfrak{T}$ induite par la topologie ordi-

naire de U_3 ; désignons par $\mathcal{M} [\mathcal{N}]$ la famille des ensembles ouverts [fermés] pour $\mathfrak{G}$. F n'est ni ouvert ni fermé dans U_3 : F consiste de la réunion d'une certaine suite s_n ($n=1, 2, \dots$) de feuilletts; tout feuillet s_n est une surface analytique qui contient une droite (son axe) les s_n sont tous du même genre. L'intersection de deux s_n distincts est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques; $a(s_n) < \infty$, où $a(\dots)$ dénote l'aire euclidienne. On peut étendre l'aire $a(\dots)$ en une mesure borélienne $\Phi \geq 0$ définie sur F ; il est possible de réaliser une telle prolongement de $a(\dots)$ soit d'accord avec (S; p. 53-54), soit selon les indications qui se trouvent dans (D²; p. 3074-75). Dans cet exemple $\Phi(F) = \infty$, F est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure Φ finie; de plus, la mesure de tout voisinage- $\mathfrak{G}$ est infinie. La topologie $\mathfrak{G}$ est compatible avec la distance euclidienne sur F . Dans l'exemple de Denjoy il s'agit d'une fonction $f(x)$, finie et mesurable- Φ (au sens de Lebesgue) sur F , en effet avec $\int_F f d\Phi$ finie, cette fonction satisfaisant à la constatation (10.29a), avec $H_0 = F$, $\varepsilon_0 = +\infty$. D'une façon surprenant on a même la propriété: $e \subset F$ ($=V$), $\Phi(e) < \infty$ entraînent

f est discontinue- $\mathfrak{G}$ en tout point de $F - e$.

En examinant l'espace F dans cet exemple à peu plus près et en tenant compte de la constatation (10.27), $(a_1)-(a_4)$, nous concluons qu'aucune suite infinie ne peut exister, pour laquelle

$$(10.30a) \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots, \quad F = \sum F_v, \quad \mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}^2 \subset \dots; \\ \mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^2 \subset \dots, \quad \mathcal{N}^v \subset \hat{\mathcal{N}}, \quad \mathcal{M}^v \subset \hat{\mathcal{M}}, \quad \Phi(F) < \infty,$$

où $\mathcal{M}^v [\mathcal{N}^v]$ est la famille d'ensembles ouverts- $\mathfrak{G}_v$ [fermés- $\mathfrak{G}_v$], $\mathfrak{G}_v$ désignant la topologie induite sur F_v par $\mathfrak{G}$. C'est précisément l'endroit où quelques des conditions du théorème 10.26 « spécial » (10.28') manquent au cas considéré.

11. – Applications non topologiques de la section précédente.

Nous nous rapportons aux définitions d'un « noyau », d'une « enveloppe », ainsi qu'aux notations comprises dans le texte dès le commencement de la section 7 jusqu'à (7.2).

(11.1) Soient G_v une suite de familles d'ensembles, telles que pour tout $v=1, 2, \dots$ ou bien G_v est régulière au sens de (2.1a)-(2.1b), ou bien G_v est simplement régulière selon (2.3)-(2.3a);

$$(11.1a) \quad A(G_v) = F_v, \quad \Phi(F_v) < \infty, \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots, \quad F = \sum F_v, \quad \Phi(F) = \infty.$$

(11.2) Désignons par $\mathcal{M}^v [\mathcal{N}^v]$ la famille d'enveloppes [de noyaux] relativement à G_v ; supposons que

$$(11.2a) \quad \mathcal{N}^1 \subset \mathcal{N}^2 \subset \dots, \quad \mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^2 \subset \dots.$$

Selon (7.2) les familles $\mathcal{N}^v, \mathcal{M}^v$ (v fixe) satisfont à (5.6). Rappelons-nous quelques faits connus concernant les noyaux et les enveloppes.

(11.3) Les noyaux et les enveloppes sont mesurables- Φ ; pour v fixe, les produits [réunions] dénombrables d'ensembles de $\mathcal{N}^v$ [de $\mathcal{M}^v$] sont dans $\mathcal{N}^v$ [$\mathcal{M}^v$].

On observe que (10.1a) et les conditions de l'hypothèse 10.2 sont toutes remplies.

HYPOTHÈSE 11.4. — On admet, pour $v = 1, 2, \dots$, que la famille G_v a la propriété de la parfaite régularité au sens originellement employé par DENJOY (D*).

Dans cette condition, si $H (\subset F_v)$ est mesurable- Φ et $\varepsilon > 0$, il existe une enveloppe O , relativement à G_v , tel que $O \supset H$ et $\Phi(O - H) < \varepsilon$. Par conséquent l'hypothèse 10.3 sera satisfaite.

(11.5) Dans les conditions (11.1)-(11.4) la théorie (10.1)-(10.20) de la section précédente sur le théorème abstrait de Lusin s'applique; de plus, parce que (11.3) entraîne $\mathcal{N}_\delta^n = \mathcal{N}^n$ ($n = 1, 2, \dots$), les conclusions du corollaire 10.21' auront lieu.

Dans le reste de la section actuelle on fera intervenir la moyenne régularité.

DÉFINITION 11.6. — Soit une suite $\mathcal{F}_v$ ($v = 1, 2, \dots$) de familles d'ensembles:

$$(11.6a) \quad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots, \quad \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_v.$$

On dira que $\mathcal{F}$ est *dénombrablement régulière* au sens des théorèmes de couverture, si

(11.6 I) toute famille $\mathcal{F}_v$ est régulière au sens des théorèmes de couverture, avec $\Phi(\Delta(\mathcal{F}_v))$ finie (e.g. (2.7I) a lieu pour $\mathcal{F}_v$).

$\mathcal{F}$ est dite *dénombrablement simplement régulière*, si

(11.6 II) toute famille $\mathcal{F}_v$ est simplement régulière [(2.3), (2.3a)] avec $\Phi(S(\mathcal{F}_v))$ (donc $\Phi(\Delta(\mathcal{F}_v))$) finie (e.g. (2.7II) a lieu pour $\mathcal{F}_v$).

DÉFINITION 11.7. — (11.7 I). On dira que $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_v$ (11.6a) est *dénombrablement régulière-r.m.*, si est dénombrablement régulière au sens de (11.6I), tandis que chacune famille $\mathcal{F}_v$ jouit de la propriété de la moyenne régularité [(2.2)-(2.2b)].

(11.7 II) $\mathcal{F}$ est dite *dénombrablement simplement régulière-R.M.*, si $\mathcal{F}$ est dénombrablement simplement régulière d'accord avec (11.6II), alors que toute $\mathcal{F}_v$ possède le caractère de R.M. (2.5).

(11.8) Si $\mathcal{F}$ (11.6a) consiste d'une seule famille, soit $\mathcal{F}_1$, ainsi $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) < \infty$, et si $\mathcal{F}$ possède la moyenne régularité [(2.6I), (2.2)-(2.2b)], ou bien si $\mathcal{F}$ jouit du caractère R.M. [(2.6II), (2.5)], l'application de la théorie de la section 10 mène au théorème au genre de Lusin, déjà connu et qui se trouve dans (T*; p. 64) (cf. (11.18) plus loin).

Dès lors envisageons le cas où les familles $\mathcal{F}_v$ sont en nombre infini et $\lim_v \Phi(\Delta(\mathcal{F}_v)) = \infty$.

Dans le cas (11.6I), (11.6II) écrivons

$$(11.9) \quad F_v = \Delta(\mathcal{F}_v) \quad (\text{alors } F_1 \subset F_2 \subset \dots), \quad F = \sum_v F_v;$$

on aura $\Phi(F_v) < \infty$, $\Phi(F) = \infty$;

$$(11.9a) \quad K^v = K(\mathcal{F}_v) \quad (\text{définition 2.7}), \quad \text{alors } K^1 \subset K^2 \subset \dots; \quad K = \sum K^v \quad (\text{par définition}).$$

(11.10) Soit $\mathcal{F}$ (11.6a) dénombrablement régulière-R.M. (11.7I), ou bien dénombrablement simplement régulière-R.M. (11.7II); alors, si un ensemble H mesurable est contenu dans un F_v , il suivra que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un E de $K(\mathcal{F}_v)$ tel que $E \supset H$ et $\Phi(E - H) < \varepsilon$ (on a $E \subset F_v$).

(11.11) Soit $\mathcal{F}$ assujettie à (11.6I), ou bien à (11.6II); on peut alors définir la famille K^* d'ensembles E , tels que

$$(11.11a) \quad E = E_1 + E_2 + \dots + E_v + \dots, \quad E_v \in K(\mathcal{F}_v) \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Dans (11.11a) $E_v \subset F_v$ ($= \Delta(\mathcal{F}_v)$), E_v est mesurable et $\Phi(E_v) < \infty$; tout E de K^* est mesurable, dénombrablement si $\Phi(E) = \infty$. Dire qu'un ensemble H ($\subset F$) est dénombrablement mesurable revient à ce que $\Phi(HF_v) < \infty$ ($v = 1, 2, \dots$), tandis qu'il se peut que $\lim_v \Phi(HF_v) [= \Phi(H)]$ soit infinie.

(11.12) En admettant seulement (11.6I) ou bien (11.6II), pour v fixe on observe (2.9) que les ensembles de $K(\mathcal{F}_v)$ sont mesurables, l'ensemble vide et F_v sont dans $K(\mathcal{F}_v)$, les réunions finies et les intersections finies d'ensembles dans $K(\mathcal{F}_v)$ appartiennent à $K(\mathcal{F}_v)$, les compléments relativement à F_v d'ensembles de $K(\mathcal{F}_v)$ sont dans $K(\mathcal{F}_v)$.

Les ensembles F_v , F survenant dans (11.9) satisont à la *définition* 10.1. Si l'on admet seulement (11.6I) ou bien (11.6II), les conditions de l'*hypothèse* 10.2 sont toutes remplies en posant $\mathcal{N}^v = \mathcal{M}^v = K(\mathcal{F}_v) = K^v$ (voir (11.12) et (11.9a)). Si l'on suppose que (11.7I) ou bien (11.7II) a lieu, en tenant compte de (11.10) on conclut que l'*hypothèse* 10.3 est satisfaite. Si l'une au moins des deux hypothèses (11.6I), (11.6II) a lieu, il suivra pour les familles $\mathcal{N}^*(F)$, $\mathcal{M}^*(F)$, ainsi désignées dans la *définition* 10.4, que

$$(11.13) \quad \mathcal{N}^*(F) = \mathcal{M}^*(F) = K^* \quad (\text{définition (11.11)}) .$$

Moyennant une démonstration pareille à celle pour l'énoncé 10.5 on établit la proposition suivante.

(11.14) Admettons (11.7I) ou bien (11.7II). Si un ensemble $H \subset F$ est dénombrablement mesurable et $\varepsilon > 0$, il existe un E et un G , tels que

$$E \in K^*, \quad G \in K^*, \quad E \subset H \subset G, \quad \Phi(G - H) < \varepsilon, \quad \Phi(H - E) < \varepsilon.$$

(11.15) Pour les familles $\mathcal{M}^{v-}, \mathcal{N}^{v-}$ (10.6) on obtient $\mathcal{M}^{v-} = \mathcal{N}^{v-}$; cette famille sera désignée par K^{v-} ; de plus (d'après (11.13))

$$\mathcal{N}_\sigma^*(F) = \mathcal{M}_\sigma^*(F) = K_\sigma^*, \quad \mathcal{N}_\delta^*(F) = \mathcal{M}_\delta^*(F) = K_\delta^*.$$

Le lemme 10.7 prend la forme que voici.

(11.16) Supposons que l'hypothèse (11.6I), ou bien (11.6II), a lieu. La famille K^* aura les propriétés suivantes:

- (a) l'ensemble vide et F (11.9) sont dans K^* ;
- (b, c) les réunions finies et les intersections finies d'ensembles de K^* sont dans K^* ;
- (d) $K^{v-} \subset K^*$ (e.g. $E \in K^v$ entraîne $F - E \in K^*$);
- (e) $A \in K^*$ implique $F - A \in K_\delta^*$;
- (f) si A et B sont dans K^* , il vient $A - AB \in K_\delta^*$.

L'énoncé (1.8) devient ceci. En admettant (11.6I), ou bien (11.6II), il suit que $A \in K_\delta^*$ entraîne $A = \sum_1^\infty A_v$, $A_v \in K_\delta^v$ ($K^v = K(\mathcal{F}_v)$).

Si l'on suppose que (11.7I), ou bien (11.7II), a lieu, il en résulte (le lemme 10.9) que les conditions nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $H, \subset F$, soit dénombrablement mesurable sont que des ensembles E, G existent de sorte que

$$E \in K_\sigma^*, \quad G \in K_\delta^*, \quad E \subset H \subset G, \quad \Phi(G - E) = 0.$$

(11.17) Si l'une des hypothèses (11.6I), (11.6II) est valide et un ensemble $A \subset F$, f numérique étant définie sur A , on spécifie pour tout σ réel les ensembles $H_c^\pm = H_c^\pm(f)$, d'accord avec (10.10); on dira alors que f est sur A d'une des classes $C^\pm(K^*), C^\pm(K_\delta^*)$, si dans le cas qui correspond:

$$H_c^\pm = AP_c^\pm, \quad P_c^\pm = K^*, \quad K_\delta^*;$$

on pose

$$C(K^*) = C^+(K^*), C^-(K^*), \quad [C(K_\delta^*) = C^+(K_\delta^*), C^-(K_\delta^*)].$$

Les énoncés (10.11), (10.12) auront lieu en y remplaçant $\mathcal{N}^*$, $\mathcal{M}^*$ par K^* ; les classes $C(\mathcal{N}^*)$, $C(\mathcal{M}^*)$ deviennent $C(K^*)$. La constatation (10.14) sur la convergence sup.-uniforme [inf.-uniforme] sera valide avec $\mathcal{N}_\delta^* = K_\delta^*$, $C^\pm(\mathcal{N}_\delta^*) = C^\pm(K_\delta^*)$.

(11.18) Au cas où $\{F_v\}$ consiste d'une seule famille $\mathcal{F}_v$ (donc $\Phi(F) = \Phi(F_1)$ est finie) nous admettons une des deux hypothèses (11.7I), (11.7II), relativement à ce cas; alors le théorème (10.16) mène précisément à notre ancien théorème au genre de *Lusin* (cf. T*; p. 64).

Moyennant le théorème 10.18 on obtient la proposition suivante.

(11.19) Supposons que $\Phi(F) = \infty$ (11.9) et admettons une des hypothèses (11.7I), (11.7II). Pour la mesurabilité- Φ d'une fonction $f(x)$, finie sur un H ($\subset F$) dénombrablement mesurable il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ des ensembles N^n ($n = 1, 2, \dots$) existent de sorte qu'on ait (10.18a) où $\mathcal{N}_\delta^n = K_\delta^n$ et $C(\mathcal{N}_\delta^n) = C(K_\delta^n)$.

Désignons par $\tilde{K}_\delta^*$ ce que devient $\mathcal{N}_\delta^*$ (10.19) en posant $\mathcal{N}_\delta^* = K_\delta^*$.

(11.20) Dans l'énoncé (11.9) on peut remplacer les conditions nécessaire et suffisante ainsi: pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble N de $\tilde{K}_\delta^*$ existe, $N \subset H$, tel que $\Phi(H - N) < \varepsilon$ et $f \in C(\tilde{K}_\delta^*)$ sur N (cf. (10.20a)).

Dans les hypothèses de l'énoncé (11.19) et si la condition spéciale $K_\delta^n = K^n$ ($n = 1, 2, \dots$) a lieu, le corollaire 10.21 s'applique en remplaçant $\mathcal{N}^*$ par K^* dans (10.21'a).

12. – Le théorème abstrait au genre de Vitali-Carathéodory.

Ci-après on considère le cas où les conditions (10.1)-(10.3) ont lieu, avec $F = F_1$ de mesure- Φ finie; c'est-à-dire, en utilisant les notations de la section précédente, on a (10.15)-(10.15b).

(12.1) Soit $\mathcal{E}$ une famille d'ensembles dans F ; si $f(x)$ est une fonction numérique définie sur un ensemble $A \subset F$ et c est réel, on pose

$$H_c^+ = H_c^+(f) = H_c^+(f, A) = \{x \in A; f(x) \geq c\},$$

$$H_c^- = H_c^-(f) = H_c^-(f, A) = \{x \in A; f(x) \leq c\};$$

on dira que $f \in C^\pm(\mathcal{E})$ sur A , si $H_c^\pm = AP_\theta^\pm$, avec $P_\theta^\pm \in (\mathcal{E})$ (selon le cas), pour tout c ; par définition, sur A , $C(\mathcal{E}) = C^+(\mathcal{E}) \cup C^-(\mathcal{E})$.

(12.2) On dira qu'une famille Γ d'ensembles (dans F) est *a.s.f.*, *additive au sens fini*, si l'ensemble vide appartient à Γ et les compléments (relativement à F) d'ensembles de Γ sont dans Γ , ainsi que les réunions finies d'ensembles de Γ . Par consé-

quent une famille Γ a.s.f. (sur F) contient F et les intersections finies de ses ensembles; en plus $\alpha - \alpha\beta \in \Gamma$, lorsque α et β sont dans Γ .

DÉFINITION 12.3. — $\mathcal{B}$ désignera la famille minimale, a.s.f., contenant $\mathcal{M}$.

Puisque les ensembles de $\mathcal{N}$ sont les compléments des ensembles de $\mathcal{M}$, on peut regarder $\mathcal{B}$ aussi comme la famille minimale, a.s.f., contenant $\mathcal{N}$.

EXEMPLE (12.3'). — Si une famille $\mathcal{F}$ (sur F) satisfait à une des hypothèses (2.7I), (2.7II) et si $\mathcal{M} = \mathcal{N} = K$ ($= K(\mathcal{F})$), on aura $\mathcal{B} = K$.

(12.4) Si $f = a$ (constante) sur un ensemble A de $\mathcal{B}$, on a $f \in C(\mathcal{B})$ sur A (12.1).

En tenant compte de la notation (12.1), il vient

$$H_c^+ = A \quad (c \leq a), \quad H_c^+ = 0 \quad (c > a), \quad H_c^- = A \quad (c \geq a), \quad H_c^- = 0 \quad (c < a);$$

par là $H_c^\pm = AP_c^\pm$, avec

$$P_c^+ = A \quad (c \leq a), \quad P_c^+ = 0 \quad (c > a), \quad P_c^- = A \quad (c \geq a), \quad P_c^- = 0 \quad (c < a).$$

Les quatre derniers ensembles sont dans $\mathcal{B}$, d'où $f \in C^\pm(\mathcal{B})$ sur A ; (12.4) s'ensuit.

(12.5) Les relations $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B}$, $AB = 0$, $f(x) \in C(\mathcal{B})$ sur A , $f(x) \in C(\mathcal{B})$ sur B , entraînent $f(x) \in C(\mathcal{B})$ sur $A + B$.

Posons $A_c^+ = H_c^+(f, A)$, $B_c^\pm = H_c^\pm(f, B)$ et

$$\begin{aligned} \gamma_c^+ &= \{x \in A + B; f(x) \geq c\} = H_c^+(f, A + B), \\ \gamma_c^- &= \{x \in A + B; f(x) \leq c\} = H_c^-(f, A + B). \end{aligned}$$

Selon l'hypothèse, pour tout c réel,

$$A_c^\pm = AP_c^\pm, \quad P_c^\pm \in \mathcal{B}, \quad B_c^\pm = BQ_c^\pm, \quad Q_c^\pm \in \mathcal{B};$$

donc $A_c^\pm \in \mathcal{B}$, $B_c^\pm \in \mathcal{B}$ et $\gamma_c^\pm = A_c^\pm + B_c^\pm \in \mathcal{B}$; or $\gamma_c^\pm \subset A + B$, d'où $\gamma_c^\pm = A\gamma_c^\pm + B\gamma_c^\pm$. Par conséquent, sur $A + B$, $f \in C^+(\mathcal{B})$ et $f \in C^-(\mathcal{B})$ ce qui donne la conclusion dans (12.5).

(12.6) Si $x \in \mathcal{B}$ et $c(x) = c_e(x)$ est la fonction caractéristique de e , on aura $c(x) \in C(\mathcal{B})$ sur $\mathcal{F}$.

D'après (12.4), $c(x)$ étant constante sur e de $\mathcal{B}$ et constante sur $F - e$ de $\mathcal{B}$, il suit que

$$c(x) \in C(\mathcal{B}) \quad \text{sur } e, \quad c(x) \in C(\mathcal{B}) \quad \text{sur } F - e.$$

L'énoncé (12.5) (où $A = e$, $B = F - e$) s'applique, donc $c(x) \in C(\mathcal{B})$ sur $e + (F - e) = F$.

(12.7) Soit $q(x) = \{c_i, \gamma_i; \dots; c_v, \gamma_v\}$ (les c_i étant des constantes) une fonction simple sur F , avec les ensembles γ_i ($i=1, \dots, v$) formant une partition de F , $\gamma_i \in \mathcal{B}$; alors $q(x) \in C(\mathcal{B})$ sur F .

Selon (12.4), q étant constante sur γ_i (de $\mathcal{B}$), on a $q \in C(\mathcal{B})$ sur γ_i ($i=1, 2, \dots, v$). Supposons que pour $1 \leq k < v$ on a établi que $q \in C(\mathcal{B})$ sur $\gamma_1 + \dots + \gamma_k$; le dernier ensemble est dans $\mathcal{B}$; en raison de (12.5) (avec $A = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$, $B = \gamma_{k+1}$) $q \in C(\mathcal{B})$ sur $\gamma_1 + \dots + \gamma_{k+1}$. Ainsi: $q \in C(\mathcal{B})$ sur $\gamma_1 + \dots + \gamma_v = F$.

(12.8) Soient $\mathcal{E}$ une famille quelconque d'ensembles dans F et un ensemble $A \subset F$. Si $q_n(x) \in C^-(\mathcal{E})$ (12.1) sur A ($n=1, 2, \dots$) et $q_n \uparrow q$ sur A , alors $q \in C^-(\mathcal{E}_\delta)$ sur A . La conclusion est la même, si $q_n(x) \subset C^-(\mathcal{E}_\delta)$.

On observe que

$$H_c^-(q, A) = \{x \in A; q(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n = H_c^-(q_n, A).$$

Si $q_n \in C^-(\mathcal{E})$ [$C^-(\mathcal{E}_\delta)$] sur A , il vient

$$A_n = A \cdot P_{c,n}^-, \quad P_{c,n}^- \in \mathcal{E} [\mathcal{E}_\delta], \quad \text{d'où} \quad H_c^-(q, A) = A P_c^-;$$

ici $P_c^- = \bigcap P_{c,n}^- \in \mathcal{E}_\delta$ (dans les deux cas), donc $q \in C^-(\mathcal{E}_\delta)$ sur A .

(12.9) Soient des ensembles γ_n ($n=1, 2, \dots$) dans $\mathcal{B}$, $\sum_1^\infty \gamma_n = \gamma$, des constantes K_n positives; $c_n(x) = c_{\gamma_n}(x)$ (la fonction caractéristique de γ_n). Alors

$$q(x) = \sum_1^\infty K_n c_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F.$$

Posons $q_n(x) = \sum_1^n K_i c_i(x)$. D'après (12.6) $q_1(x) \in C(\mathcal{B})$ sur F . Les ensembles

$$\delta_1 = \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2, \quad \delta_3 = \gamma_1 \gamma_2, \quad \delta_4 = F - (\gamma_1 + \gamma_2)$$

appartiennent à $\mathcal{B}$ et constituent une partition de F . On obtient

$$q_2(x) = \{k_1, \delta_1; k_2, \delta_2; (k_1 + k_2), \delta_3; 0, \delta_4\} \quad (\text{une fonction simple})$$

et selon (12.7) il résulte: $q_2(x) \in C(\mathcal{B})$ sur A . Successivement on déduit que

$$q_n(x) = \{l_1, \delta_{n,1}; l_2, \delta_{n,2}; \dots; l_{m_n}, \delta_{n,m_n}\}, \quad l_j = l_{n,j},$$

où $\delta_{n,j} \in \mathcal{B}$ ($j=1, \dots, m_n$) et, pour n fixe, les $\delta_{n,j}$ forment une partition de F . Encore en raison de (12.7) il vient: $q_n(x) \in C(\mathcal{B})$ sur F ($n=1, 2, \dots$). Or $C(\mathcal{B}) \subset C^-(\mathcal{B}) \subset$

$\subset C^-(\mathcal{B}_\delta)$; $q_n \uparrow q$ sur F ; l'énoncé (12.8) s'applique, avec $A=F$ et $\mathcal{E}=\mathcal{B}$; donc $q \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F .

(12.10) *Les inclusions $p(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur A , $q(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur A , impliquent $p+q \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur A .*

Nous procédons comme dans la démonstration d'un énoncé analogue dans (T*; p. 70). Notons d'abord que

(1₀) $E \in \mathcal{B}_\delta$ [$\mathcal{B}_\sigma$] entraîne $F - E \in \mathcal{B}_\sigma$ [$\mathcal{B}_\delta$]; « E et G dans $\mathcal{B}_\sigma$ » implique $EG \in \mathcal{B}_\sigma$,

c, γ désignant des constantes, en posant $r(x) = c - q(x)$ on obtient

$$H_\gamma^+(r, A) = \{x \in A; c - q(x) \geq \gamma\} = H_{c-\gamma}^-(q(x), A) = AP_{c-\gamma}^-, \quad P_{c-\gamma}^- \in \mathcal{B}_\delta;$$

donc:

(2₀) $r(x) \in C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur A (pour tout c).

Or

$$(3_0) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \{x \in A; p(x) > r(x)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot R_{m,n}; \\ A_{m,n} &= \left\{x \in A; p(x) > \frac{m}{n}\right\}, \quad R_{m,n} = \left\{x \in A; r(x) < \frac{m}{n}\right\}; \end{aligned}$$

on observe que (2₀):

$$(4_0) \quad \begin{aligned} A - A_{m,n} &= \left\{x \in A; p(x) \leq \frac{m}{n}\right\} = H_{m/n}^-(p, A) = A \cdot A^{m,n}, \quad A^{m,n} \in \mathcal{B}_\delta; \\ A - R_{m,n} &= \left\{x \in A; r(x) \geq \frac{m}{n}\right\} = H_{m/n}^+(r, A) = A \cdot R^{m,n}, \quad R^{m,n} \in \mathcal{B}_\delta; \end{aligned}$$

ainsi

$$A_{m,n} R_{m,n} = A \cdot E^{m,n}, \quad E^{m,n} = (F - A^{m,n}) \cdot (F - R^{m,n});$$

d'après (4₀) et (1₀) $F - A^{m,n}$ et $F - R^{m,n}$ sont dans $\mathcal{B}_\delta$ et, par conséquent, $E^{m,n} \in \mathcal{B}_\sigma$. Enfin (3₀):

$$(5_0) \quad \Gamma = A\Gamma^*, \quad \Gamma^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E^{m,n} \in \mathcal{B}_\sigma;$$

de plus (3₀):

$$H_c^-(p+q, A) = \{x \in A; p(x) + q(x) \leq c\} = \{x \in A; p(x) \leq r(x)\} = A - \Gamma;$$

par conséquent $[(5_0), (1_0)]$:

$$H_c^-(p+q, A) = A - A\Gamma^* = A \cdot (F - \Gamma^*), \quad F - \Gamma^* \in \mathcal{B}_\delta,$$

cela étant pour tout c réel. Conséquemment $p+q \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur A .

(12.11) *Dans les conditions spécifiées au début de la section actuelle, si $f(x) \geq 0$, est finie et mesurable- Φ sur F , il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $h(x)$, de sorte que*

$$(12.11a) \quad h(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F, \quad h(x) \geq f(x) \quad \text{sur } F, \quad \int_F (h-f) d\Phi < \varepsilon.$$

La démonstration est une adaptation de celle dans (T; p. 71). On pose

$$h_k = \{x \in F; (k-1)\eta \leq f(x) < k\eta\}, \quad \text{avec } 0 < \eta < \varepsilon[1 + \Phi(F)]^{-1}.$$

Les h_k ($k=1, 2, \dots$) sont mesurables et leur réunion est F . D'après l'hypothèse 10.3 des ensembles γ_k existent tels que

$$(1^0) \quad \gamma_k \in \mathcal{M}, \quad \gamma_k \subset h_k, \quad \Phi(\gamma_k - h_k) \in \frac{1}{k2^k};$$

$\sum \gamma_k = F$. Posons

$$(2^0) \quad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\eta c_k(x), \quad c_k(x) = c_{\gamma_k}(x) \text{ (fonction caractéristique de } \gamma_k \text{)}.$$

On a $h(x) > f(x)$; l'énoncé (12.9) (où $\gamma = F$) s'applique et on obtient $h(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F . D'une façon connue on déduit:

$$\begin{aligned} \int_F h d\Phi &= \sum_1^{\infty} k\eta \int_F c_k(x) d\Phi(x) = \sum k\eta \Phi(\gamma_k) \\ &= \sum (k-1)\eta \Phi(h_k) + \sum \eta \Phi(h_k) + \sum k\eta \Phi(\gamma_k - h_k). \end{aligned}$$

En tenant compte de (1₀) la preuve s'achève en notant que

$$\int_F h d\Phi \leq \int_F f d\Phi + \eta \Phi(F) + \eta < \int_F f d\Phi + \varepsilon.$$

(12.11') *Si dans l'énoncé (12.11) f est bornée sur F , la conclusion (12.11a) aura lieu avec une fonction $h(x)$ appartenant sur F à $C(\mathcal{B})$. En effet dans ce cas $h(x)$ (2⁰) devient une somme finie; en examinant la démonstration de (12.9), on obtient la conclusion indiquée.*

THÉOREME 12.12. — *La constatation (12.11) continue être valide, si l'on y omet la condition que f soit finie sur F , pourvu qu'on pose $h(x) - f(x) = 0$ en les points x où $h(x) = \infty$ et $f(x) = \infty$.*

La preuve s'achève à la manière de (T*; p. 72). Posons $s_n(x) = f(x)$ sur $\{x \in F; f(x) \leq n\}$, $s_n(x) = n$ ailleurs, $s_0(x) = 0$, $f(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$ (≥ 0); alors $f(x) = \sum f_n(x)$; (12.11') s'appliquent à $f_n(x)$, donc il existe une $h_n(x)$, de sorte que

$$(a) \quad h_n(x) \in C(\mathcal{B}) \quad \text{sur } F, \quad h_n(x) \geq f_n(x), \quad \int_F (h_n - f_n) d\Phi < 2^{-n} \varepsilon.$$

Il vient

$$h(x) = \sum h_n(x) \geq f(x) \quad \text{sur } F, \quad \int (h - f) d\Phi = \sum \int (h_n - f_n) d\Phi < \varepsilon.$$

Vu que $C(\mathcal{B}) \subset C^-(\mathcal{B}_\delta)$ et en tenant compte de (a) et de (12.10):

$$q_n(x) = h_1(x) + \dots + h_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F;$$

$q_n(x) \uparrow h(x)$, donc d'après (12.8) (avec $\mathcal{E} = \mathcal{B}$) il suit que $h(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F , d'où la conclusion voulue.

LEMME 12.13. — *Les relations*

$$A \cdot B = 0, \quad A \text{ et } B \text{ dans } \mathcal{B}_\delta, \quad f \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } A \text{ et sur } B$$

entraînent $f \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur $A + B$.

Nous utilisons la formule (T*; (10.9a)):

$$(b) \quad H = \prod_1^\infty F_v, \quad Q = \prod_1^\infty F^m \quad \text{implique} \quad H + Q = \prod_{v,m} (F_v + F^m).$$

En raison des hypothèses

$$H_c^-(f, A) = A P_c^-, \quad P_c^- \in \mathcal{B}_\delta, \quad H_c^-(f, B) = B Q_c^-, \quad Q_c^- \in \mathcal{B}_\delta;$$

A et B étant dans $\mathcal{B}_\delta$ il vient

$$H_c^-(f, A) \text{ (de } \mathcal{B}_\delta) = \prod_{v=1}^\infty F_v, \quad H_c^-(f, B) \text{ (de } \mathcal{B}_\delta) = \prod_{m=1}^\infty F^m,$$

où les F_v et les F^m appartiennent à $\mathfrak{B}$. Puisque A et B sont disjoints, il suit (b) que

$$H_c^-(f, A + B) = H_c^-(f, A) + H_c^-(f, B) = \prod_v F_v + \prod_m F^m = \prod_{v,m} (F_v + F^m);$$

mais $F_v + F^m \in \mathfrak{B}$, donc $H_c^-(f, A + B) \in \mathfrak{B}_\delta$; le dernier ensemble est contenu dans $A + B$. Par conséquent $f \in C^-(\mathfrak{B}_\delta)$ sur $A + B$.

LEMME 12.14. — Supposons que $a(x)$ et $b(x)$ sont dans $C^-(\mathfrak{B}_\delta)$ sur F ; $d(x) = \min(a(x), b(x))$ sur F . Il existe alors une fonction $D(x)$ de sorte que

$$(12.14a) \quad D(x) \in C^-(\mathfrak{B}_\delta) \text{ sur } F, \quad D(x) \leq d(x), \quad D(x) = d(x) \text{ sur } F - e_0, \quad \text{où } \Phi(e_0) = 0,$$

$D(x) = k$ (une constante finie ou infinie) sur e_0 .

Posons $\alpha = \{x \in F; b(x) \geq a(x)\}$, $\beta = \{x \in F; a(x) > b(x)\}$ [$= F - \alpha$]; alors $\alpha(x) = a(x)$ (sur α), $= b(x)$ (sur β). En tenant compte de la proposition (10.15b) on observe que des α_n, β_n ($n=1, 2, \dots$) existent, tels que

$$(1) \quad \alpha_n < \alpha, \quad \beta_n \subset \beta, \quad \alpha_n \text{ et } \beta_n \text{ dans } \mathcal{N}, \quad \alpha_n \subset \alpha_{n+1}, \quad \beta_n \subset \beta_{n+1};$$

$$\alpha - \sum \alpha_n = \alpha_0, \quad \beta - \sum \beta_n = \beta_0, \quad \Phi(\alpha_0) = \Phi(\beta_0) = 0.$$

En vertu du lemme 12.13:

$$(2) \quad d(x) \in C^-(\mathfrak{B}_\delta) \quad \text{sur } \alpha_n + \beta_n, \quad \text{tandis que } \alpha_n + \beta_n \in \mathcal{N}.$$

On considère les fonctions:

$$(3) \quad d_n(x) = d(x) \quad (\text{sur } \alpha_n + \beta_n), \quad = k_n \quad (\text{sur } \gamma_n = F - \alpha_n - \beta_n),$$

$$\text{où } k_n = \inf(\gamma_n) d(x); \quad \gamma_n \in \mathcal{M}.$$

Φ cause de (10.11) (où $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$), la fonction égale sur γ_n à k_n appartient à $C(\mathcal{M})$ sur γ_n . En raison de (2), (3) et du lemme 12.13 il vient

$$(4) \quad d_n(x) \in C^-(\mathfrak{B}_\delta) \quad \text{sur } \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = F.$$

D'après (1), (3) et puisque $k_n \uparrow k$ (une constante finie ou infinie) on a

$$(5) \quad d_n(x) \leq d(x) \text{ sur } F; \quad d_n(x) \uparrow D(x) = d(x) \text{ sur } F - \alpha_0 - \beta_0, \quad = k \text{ sur } \alpha_0 + \beta_0;$$

en plus $D(x) \leq d(x)$ sur F . Enfin l'énoncé (12.8) (avec $\mathfrak{E} = \mathfrak{B}$) s'applique à la suite de fonctions $d_n(x)$ (4) et on obtient $D(x) \in C^-(\mathfrak{B}_\delta)$ sur F . Le lemme est vérifié.

Maintenant on peut démontrer le théorème abstrait suivant de la sorte d'un théorème de Vitali-Carathéodory.

THÉOREME 12.15. — *Admettons les conditions spécifiées au commencement de cette section. Une fonction $f(x)$ mesurable sur F est donnée. Il existent un ensemble $e_0 (\subset F)$ de mesure zéro et des fonctions $i_n(x)$, $s_n(x)$ ($n=1, 2$) tels que*

$$(a) \quad i_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F - e_0, \quad s_n(x) \in C^+(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F - e_0;$$

$$i_n(x) \downarrow, \quad s_n(x) \uparrow; \quad s_n(x) \leq f(x) \leq i_n(x);$$

$$(b) \quad \lim s_n(x) = \lim i_n(x) = f(x) \quad \text{sur } F,$$

un ensemble de mesure zéro excepté. De plus, si $f(x)$ est intégrable sur un ensemble $E (\subset F)$ mesurable,

$$(c) \quad \int_E f d\Phi = \lim \int_E s_n d\Phi = \lim \int_E i_n d\Phi.$$

Toute $i_n(x)$ [$s_n(x)$] peut être supposée bornée inférieurement [supérieurement].

Soit $f(x) \geq 0$ sur F . Selon le théorème 12.12 des $h_n(x)$ existent telles que, sur F ,

$$(1) \quad h_n(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta), \quad h_n(x) \geq f(x), \quad \lim \int_F (h_n - f) d\Phi = 0.$$

Définissons les fonctions $i_n(x) = \min_F [h_n(x), \dots, h_1(x)]$; $i_n(x) \downarrow$. On observe que $i_1(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F ; d'après le lemme 12.14 $i_2(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - e_2$, $\Phi(e_2) = 0$ — plus précisément il existe une $D_2(x)$, telle que

$$(2) \quad D_2(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \text{ sur } F, \quad D_2(x) \leq i_2(x) \text{ sur } F, \quad D_2(x) = i_2(x) \text{ sur } F - e_2,$$

tandis que $D_2(x) = k_2$ (une constante où $+\infty$) sur e_2 . Par induction on montre que, pour tout $k \geq 2$:

$$(3) \quad i_K(x) = \min (i_{K-1}(x), h_K(x)) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F - e_K, \quad \Phi(e_K) = 0, \quad e_{K+1} \supset e_K;$$

$$i_K^*(x) = \min (D_{K-1}(x), h_K(x)) \in C^-(\mathcal{B}_\delta) \quad \text{sur } F - e_K;$$

une $D_K(x)$ de $C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F existe, de sorte que

$$(4) \quad D_K(x) \leq i_K^*(x) \leq i_K(x) \quad \text{sur } F, \quad D_K(x) = i_K(x) \quad \text{sur } F - e_K.$$

On observe que $e_1 = 0$, $D_1(x) = i(x)$ ($= h_1(x)$), $i_2^*(x) = i_2(x)$; e.g. (3) a lieu pour $k=2$. La démonstration de [(3), (4)] est réalisée en suivant la preuve de (T*; a_4);

p. 75), avec $F_K = e_K$; nous utilisons le lemme 12.14 au lieu de l'énoncé (T^* ; (10.10)) et nous remplaçons la classe (de fonctions) $C_1^-(\mathcal{F})$ par la classe $C^-(\mathcal{B}_\delta)$.

À partir de (3), (4), en procédant comme dans (T^* ; $(a_i)-(a_s)$; p. 76), avec $f(x) \geq 0$, on obtient que $\lim i_n(x) = f(x)$, sauf sur un ensemble de mesure zéro. Ainsi, pour le cas considéré et pour les $i_n(x)$ on vérifie les parties (a) et (b) du théorème [ici $e_0 = \sum e_K$ et on pose $\lim i_n(x) - f(x) = 0$ en les points où $f(x) = +\infty$]; de ce qui précède il résulte aussi que la partie (c) du théorème est valide pour les $i_n(x)$ (si $f \geq 0$), même si $\int_E f d\Phi = +\infty$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante.

LEMME 12.15'. — Soient $k (> 0)$ une constante finie, un ensemble $\xi_0 (\subset F)$ mince- Φ , une fonction $g(x) \geq 0$ sur F , tels que $g(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - \xi_0$; si l'on pose

$$s(x) = g^{-1}(x) \quad \text{sur } \{x \in F; g^{-1}(x) \leq k\}, \quad s(x) = k \quad \text{sur } \{x \in F; g^{-1}(x) > k\}$$

$$[g^{-1}(x) = +\infty \text{ aux points où } g(x) = 0], \text{ il suit que } s(x) \in C^+(\mathcal{B}_\delta) \text{ sur } F - \xi_0.$$

En effet, il y a une fonction $G(x) (\geq 0)$, $G(x) \in C^-(\mathcal{B}_\delta)$ sur F , $G(x) = g(x)$ sur $F - \xi_0$; il vient

$$s(x) = G^{-1}(x) \quad \text{sur } \alpha, \quad s(x) = k \quad \text{sur } \beta,$$

où

$$\alpha = \{x \in F - \xi_0; G^{-1}(x) \leq k\}, \quad \beta = \{x \in F - \xi_0; G^{-1}(x) > k\}.$$

Or $H_c^+(G^{-1}, F) = H_{1/c}^-(G, F)$ (12.1); $c \geq 0$, $c^{-1} = +\infty$ pour $c = 0$; mais $H_{1/c}^-(G, F) \in \mathcal{B}_\delta$, donc $G^{-1} \in C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur F . Posons $q(x) = G^{-1}(x)$ sur F et $q_K(x) = G^{-1}(x)$ sur $\{x \in F; G^{-1}(x) \leq k\}$, $q_K(x) = k$ sur $\{x \in F; G^{-1}(x) > k\}$; par conséquent $q_K(x) = s(x)$ sur $F - \xi_0$. On obtient

$$H_c^+(q_K, F) = 0 \quad (\text{si } c > k), \quad H_c^+(q_K, F) = F \quad (\text{si } c \leq 0);$$

de plus, pour $0 < c \leq k$, et en tant qu'alors $q_K(x) < c (\leq k)$ entraîne $q_K(x) = q(x)$:

$$F - H_c^+(q_K, F) = \{x \in F; q_K(x) < c\} = \{x \in F; q(x) < c\},$$

d'où

$$H_c^+(q_K, F) = F - (F - H_c^+(q_K, F)) = \{x \in F; q(x) \geq c\}.$$

Donc $H_c^+(q_K, F) = \{x \in F; G^{-1}(x) \geq c\} \in \mathcal{B}_\delta$ et

$$H_c^+(q_K, F - \xi_0) \in (F - \xi_0) \cdot P_{K,c}^+, \quad P_{K,c}^+ \in \mathcal{B}_\delta;$$

c'est-à-dire, $s(x) \in C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - \xi_0$. Le lemme est vérifié.

On achève la démonstration du théorème, lorsque $f(x) \geq 0$, comme il suit. Désignons par $I_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) une suite de fonctions qui, relativement à la fonction $f^{-1}(x)$, jouent le même rôle que les $i_n(x)$ jouent par rapport à $f(x)$ (voir (12.15a, b, c)). Posons $s_n(x) = I_n^{-1}(x)$ (pour $I_n^{-1}(x) \leq n$), $s_n(x) = n$ ailleurs. En raison du lemme 12.15' on peut trouver un ensemble ξ^0 de mesure zéro et indépendant de n , tel que $s_n(x)$ est dans $C^+(\mathcal{B}_\delta)$ sur $F - \xi^0$ ($n=1, 2, \dots$). On vérifie pour ces $s_n(x)$ toutes les autres propriétés (12.15a, b, c).

Au cas général où $f(x)$, mesurable sur F , peut être de signe variable on procède comme dans (T*; p. 78), en utilisant la partie du théorème déjà vérifiée et en remplaçant les classes $C^\pm(\mathcal{F})$ respectivement par les classes $C^\pm(\mathcal{B}_\delta)$, ce qui achève la preuve du théorème.

DÉFINITION 12.16. — Soit $C_2^+ [C_2^-]$ la classe des fonctions $h(x)$, définie sur F , telles que pour tout c réel

$$\{x \in F; h(x) \geq c\} \in \mathcal{B}_{\sigma\delta} \quad [\{x \in F; h(x) \leq c\} \in \mathcal{B}_{\sigma\delta}];$$

e.g. (12.1) $C_2^+ = C^+(\mathcal{B}_{\sigma\delta})$, $C_2^- = C^-(\mathcal{B}_{\sigma\delta})$.

De la façon indiquée dans (T*; (10.12)-(10.14)) nous obtenons un corollaire suivant au théorème 12.15.

(12.17) *Admettons les hypothèses indiquées au début de cette section. Si une fonction $f(x)$ est mesurable sur F , il y a deux fonctions $h(x)$, $g(x)$ et un ensemble e_0 de mesure zéro de sorte que*

$$h(x) \in C_2^+ \quad \text{et} \quad g(x) \in C_2^- \quad \text{sur } F, \quad f(x) = h(x) = g(x) \quad \text{sur } F - e_0.$$

QUELQUES OBSERVATIONS FINALES. — Si la famille $\mathcal{F}$, sur F de mesure finie, est assujettie à une des hypothèses (2.6I), (2.6II) et $\mathcal{M} = \mathcal{N} = K = K(\mathcal{F})$, il vient $\mathcal{B} = K$ (exemple (12.3')) et on retrouve les résultats de la section 10 de (T*), comme une application particulière de la théorie abstraite actuelle (12.1)-(12.7). On pourrait donner des développements dans le champ de la section présente au cas où $\Phi(F) = \infty$ et F est dénombrablement mesurable- Φ — en procédant plutôt comme nous l'avons fait en rapport avec les théorèmes au genre de Lusin (section 11). Pourtant nous laissons cela à côté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DENJOY, *Une extension du théorème de Vitali*, Amer. J. Math., **73** (1951), pp. 314-356, désigné dans la suite par (D*).
- [2] A. DENJOY, *Métrique sans topologie ...*, C.R. Acad. Sc. Paris, **257** (18 novembre 1963), pp. 3071-3076; **257** (4 décembre 1963), pp. 3536-3541; **257** (16 décembre 1963), pp. 3575-3761; désignés dans le texte respectivement par (D¹), (D²), (D³).

- [3] W. J. TRJITZINSKY, *Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure*, Mém. Sc. Math., **143** (1960), pp. 1-116; désigné par (T).
 - [4] W. J. TRJITZINSKY, *La régularité moyenne dans la théorie métrique*, Mem. Sc. Math., **157** (1965), pp. 1-88; désigné par (T*).
 - [5] N. BOURBAKI, *Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques*, C.R. Acad. Sc. Paris, (23 décembre 1935), pp. 1309-1311; désigné par (B^o).
 - [6] S. SAKS, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwow, 1937; désigné par (S).
-