Prolungamenti finiti di un corpo ed algebre gruppali (*) (**).

MARIO POLETTI (Pisa)

Sunto. — Per ciascun prolungamento finito di un corpo di caratteristica positiva, viene introdotto un T -modulo canonico; si determina la struttura dei moduli degli omomorfismi tra questi. In tale contesto, varie algebre gruppali ricevono interpretazioni canoniche in termini di teoria di Galois. Si danno tecniche per tradurre, ciascuno nel linguaggio degli altri, problemi di teoria di Galois, di T -moduli canonici, di algebre gruppali.

In [1], per ciascun prolungamento finito F di un corpo k di caratteristica positiva, viene definita un'iperalgebra locale R_F su k , le cui principali proprietà ivi indicate sono: i) F , come prolungamento di k , è quoziente dell'algebra delle iperderivazioni 1-speciali invarianti di R_F ; ii) il T_k -modulo canonico $\mathcal{U}D_F$ dei vettori canonici di Witt dell'iperalgebra D_F duale di R_F , è isomorfo al T_k -modulo canonico $\text{vect } F$; iii) prolungamenti di k aventi iperalgebre associate isomorfe, hanno chiusure normali su k isomorfe; iv) prolungamenti normali di k aventi iperalgebre associate isomorfe, sono isomorfi. Infine in [1] era emerso che tra due prolungamenti di k aventi iperalgebre associate isomorfe, esiste un isomorfismo di spazi vettoriali su k , commutante con i rispettivi endomorfismi di Frobenius.

Il presente lavoro prende lo spunto da tale ultima considerazione. Definiti i π -omomorfismi di un prolungamento finito di k , se ne determina l'insieme, e (nel caso separabile) si caratterizzano quelli aventi immagine in un prefissato prolungamento di k . Parallelamente, al fine di collegare il π -isomorfismo tra prolungamenti, all'isomorfismo delle iperalgebre associate, vengono studiati gli omomorfismi tra i T_k -moduli canonici dei vettori di Witt a componenti nei prolungamenti finiti di k . Il risultato più significativo al riguardo è che ciascun π -isomorfismo tra prolungamenti separabili di k , si rialza ad un isomorfismo dei T_k -moduli canonici dei relativi vettori di Witt, e conseguentemente induce un isomorfismo tra le iperalgebre associate.

Le tecniche usate portano ad attribuire, in termini di teoria di Galois, significati naturali alle algebre gruppali di un gruppo finito, sul corpo fondamentale di caratteristica p , sull'anello degli interi p -adici, sul corpo dei razionali p -adici.

In tale contesto, la congettura posta in [1], che prolungamenti di k aventi iperalgebre associate isomorfe siano isomorfi, trova, nel caso separabile, formulazioni

(*) Entrata in Redazione il 14 ottobre 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni, del C.N.R.

equivalenti particolarmente semplici. Sulla base di quelle, risulta agevole provare vera tale congettura: i) per prolungamenti separabili di k aventi ordine primo nella propria chiusura normale; ii) per prolungamenti separabili di k aventi come ordine nella propria chiusura normale, una potenza della loro caratteristica.

In quanto segue, p è un primo positivo, k è un corpo infinito di caratteristica p , C è la chiusura algebrica di k , π è l'endomorfismo di Frobenius di C . Tutti i prolungamenti algebrici di k si intendono immersi in C .

Se F è un corpo di caratteristica p , indicheremo con $\text{vect } F$ l'anello dei vettori infiniti di Witt a componenti in F ; se F è perfetto, indicheremo con $\text{biv } F$ il corpo dei bivettori di Witt a componenti in F (cfr. [MA], cap. 2, e [2]). t denota nel primo caso l'operatore $t(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$, e nel secondo l'operatore $t(\dots, a_{-1}; a_0, \dots) = (\dots, a_{-2}; a_{-1}, a_0, \dots)$.

Introdotta un'indeterminata t , indicheremo con T_k l'anello ottenuto considerando il $(\text{vect } k)$ -modulo destro delle serie formali nelle potenze non negative di t a coefficienti (a destra) in $\text{vect } k$, e ponendo $at = ta^\pi$ (π è l'endomorfismo di Frobenius di $\text{vect } k$). Se k è perfetto, indicheremo con T_k^* l'analogo di T_k , per il quale si ammettono serie formali in t ad esponenti anche negativi, con la convenzione che in ogni elemento di T_k^* intervenga solo un numero finito di potenze negative di t (cfr. 1, pg. 308 di [MC]).

F_p è il corpo fondamentale di caratteristica p ; $Z_p = \text{vect } F_p$ e $Q_p = \text{biv } F_p$ sono rispettivamente l'anello degli interi p -adici ed il corpo dei razionali p -adici.

Se A è un campo di integrità, e G è un gruppo, l'algebra grupale di G su A si indicherà con $A[G]$.

Isomorfismo significa omomorfismo iniettivo.

1. — Siano F, H prolungamenti algebrici di k ; una applicazione k -lineare $f: F \rightarrow H$ commutante con π , ossia tale che $f(a^p) = f(a)^p$ per ogni $a \in F$, si dirà un π -omomorfismo di F in H su k .

L'insieme dei π -omomorfismi di F in H su k , è ovviamente uno spazio vettoriale su F_p ; lo denoteremo con $\Pi_k(F, H)$.

1.1. TEOREMA. — Sia F un prolungamento finito di k , e siano $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ gli isomorfismi di F in C su k .

$\sigma_1, \dots, \sigma_s$ è una base di $\Pi_k(F, C)$ come spazio vettoriale su F_p .

DIM. — Che $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ siano elementi di $\Pi_k(F, C)$ è ovvio; che siano linearmente indipendenti su C e quindi su F_p è ben noto (cfr. [3], pg. 25).

Siano quindi $g_1, \dots, g_t$ ($t = p^s$) gli elementi del sottospazio vettoriale di $\Pi_k(F, C)$ generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, e sia $f \in \Pi_k(F, C)$.

Sia a un elemento qualsiasi di F . Detto I l'ideale di $k[X]$ generato dai polinomi del tipo

$$a_0 X^{p^0} + a_1 X^{p^1} + \dots + a_r X^{p^r} \in k[X],$$

aventi a per radice, si constata che $f(a)$ è radice di ciascuno di tali polinomi, ed è pertanto radice del generatore $\mu(X)$ di I . Le radici di $\mu(X)$ sono (cfr. la dimostrazione di 2.1 di [1]) gli elementi dello spazio vettoriale generato su F_p dai coniugati di a su k . Esiste quindi i , a priori dipendente da a , tale che $f(a) = g_i(a)$, ossia tale che $a \in K_i = \ker(f - g_i)$. Ne segue $F = K_1 \cup \dots \cup K_t$.

Sia $\theta_1, \dots, \theta_n$ una base di F come spazio vettoriale su k , e sia $\circ$ la dualità tra F e se stesso (su k) definita da $\theta_i \circ \theta_j = \delta_{ij}$. Se per $i = 1, \dots, t$ fosse $K_i \neq F$, allora (immergendo K_i in un sottospazio di F di dimensione $n - 1$, ossia nell'ortogonale di un elemento di F) per ciascun tale i esisterebbe $\eta_i \neq 0$ tale che $\eta_i \circ K_i = \{0\}$. Posto quindi $\eta_i = \sum_{\lambda=1}^n a_{i\lambda} \theta_\lambda$ ($a_{i\lambda} \in k$), dati comunque $x_1, \dots, x_n \in k$ e posto $\theta = \sum_{\lambda=1}^n x_\lambda \theta_\lambda$, essendo $F = K_1 \cup \dots \cup K_t$, si avrebbe

$$(\theta \circ \eta_1) \cdot \dots \cdot (\theta \circ \eta_t) = \left(\sum_{\lambda=1}^n a_{1\lambda} x_\lambda \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^n a_{t\lambda} x_\lambda \right) = 0.$$

Essendo k infinito, il polinomio

$$\left(\sum_{\lambda=1}^n a_{1\lambda} X_\lambda \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^n a_{t\lambda} X_\lambda \right) \in k[X_1, \dots, X_n]$$

risulterebbe nullo, e pertanto risulterebbe nullo un suo fattore.

Esisterebbe quindi j tale che $a_{j1} = \dots = a_{jn} = 0$, ossia tale che $\eta_j = 0$: assurdo.

Si conclude quindi che esiste i tale che $K_i = F$, ossia tale che $\ker(f - g_i) = F$; per tale i si ha $f = g_i$, C.V.D.

Sia N un qualsiasi prolungamento di F , normale su k ; tenuto conto di 1.1 si ha:

$$1.2. \quad \Pi_k(F, C) = \Pi_k(F, N);$$

1.3. *l'applicazione di $\Pi_k(N, N)$ in $\Pi_k(F, N)$ che a ciascun elemento di $\Pi_k(N, N)$ associa la sua restrizione ad F , è surgettiva.*

Siano F, H prolungamenti algebrici di k ; $\text{vect } F$ e $\text{vect } H$ risultano T_k -moduli; se poi F ed H sono finiti su k , $\text{vect } F$ e $\text{vect } H$ risultano canonici (cfr. 4 di [1]). L'insieme degli omomorfismi di $\text{vect } F$ in $\text{vect } H$ come T_k -moduli, è ovviamente un modulo su $\mathbf{Z}_p$; lo denoteremo con $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } H)$.

1.4. **TEOREMA.** — *Sia F un prolungamento finito di k , siano $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ gli isomorfismi di F in C su k , e siano $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_s$ gli isomorfismi di $\text{vect } F$ in $\text{vect } C$ definiti da: $\tilde{\sigma}_i(a_0, a_1, \dots) = (\sigma_i a_0, \sigma_i a_1, \dots)$.*

$\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_s$ è una base di $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } C)$ come modulo su $\mathbf{Z}_p$.

DIM. — Che $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_s$ siano elementi di $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } C)$, è subito visto. Siano quindi $e_1 = (e_{10}, e_{11}, \dots), \dots, e_s = (e_{s0}, e_{s1}, \dots)$ elementi di $\mathbf{Z}_p$ tali che $e_1 \tilde{\sigma}_1 + \dots + e_s \tilde{\sigma}_s = 0$. Il π -omomorfismo $e_{10} \sigma_1 + \dots + e_{s0} \sigma_s$ di F in C , è nullo, pertanto $e_{10} = \dots = e_{s0} = 0$.

Ne segue $p[(c_{11}, c_{12}, \dots)\tilde{\sigma}_1 + \dots + (c_{s1}, c_{s2}, \dots)\tilde{\sigma}_s] = 0$, da cui $(c_{11}, c_{12}, \dots)\tilde{\sigma}_1 + \dots + (c_{s1}, c_{s2}, \dots)\tilde{\sigma}_s = 0$; se ne deduce $c_{11} = \dots = c_{s1} = 0$. Così proseguendo si prova che $c_1 = \dots = c_s = 0$, ossia che $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_s$ sono indipendenti su $\mathbf{Z}_p$.

Si consideri adesso un omomorfismo $f: \text{vect } F \rightarrow \text{vect } C$, come T_k -moduli; sia $f': (\text{vect } F)/t(\text{vect } F) \rightarrow (\text{vect } C)/t(\text{vect } C)$ l'applicazione indotta da f . Identificando $(\text{vect } F)/t(\text{vect } F)$ con F , e $(\text{vect } C)/t(\text{vect } C)$ con C , si constata che $f' \in \Pi_k(F, C)$; per 1.1 esistono allora $c_{10}, \dots, c_{s0} \in \mathbf{F}_p$ tali che $f' = c_{10}\sigma_1 + \dots + c_{s0}\sigma_s$. Pertanto, posto $f_1 = f - [\{c_{10}\}\tilde{\sigma}_1 + \dots + \{c_{s0}\}\tilde{\sigma}_s]$ (ove $\{c\} = (c, 0, 0, \dots)$), si ha: $\text{Im } f_1 \subseteq t(\text{vect } C)$.

Procedendo per induzione, supponiamo determinati, per $j = 1, \dots, m$, elementi $c_{1j}, \dots, c_{sj} \in \mathbf{F}_p$ tali che, posto

$$f_j = f - [\{c_{10}\} + p^1\{c_{11}\} + \dots + p^{j-1}\{c_{1,j-1}\})\tilde{\sigma}_1 + \dots + \\ + (\{c_{s0}\} + p^1\{c_{s1}\} + \dots + p^{j-1}\{c_{s,j-1}\})\tilde{\sigma}_s],$$

si abbia: $\text{Im } f_j \subseteq t^j(\text{vect } C)$.

Si consideri quindi $f_m: \text{vect } F \rightarrow \text{vect } C$; essendo $\text{Im } f_m \subseteq t^m(\text{vect } C)$, esiste una ed una sola applicazione $\omega: \text{vect } F \rightarrow \text{vect } C$, tale che $f_m = t^m\omega$. Si constata facilmente che: i) ω è un omomorfismo additivo, ii) $\omega t = t\omega$, iii) $\omega\pi = \pi\omega$, iv) se $c \in k$ ed $a \in \text{vect } F$, si ha $\omega(\{c\}a) = \{c^p\}\omega(a)$. Tenuto conto di i), ii), previa l'identificazione detta precedentemente, ω induce un omomorfismo additivo $\omega': F \rightarrow C$, verificante le proprietà: iii') $\omega'(a^p) = \omega'(a)^p$, iv') se $c \in k$ ed $a \in F$, si ha $\omega'(ca) = c^p\omega'(a)$. Detta quindi $\omega^*: F \rightarrow C$ l'applicazione definita da $\omega^*(a) = (\omega'(a))^{1/p^m}$, si constata che $\omega^* \in \Pi_k(F, C)$; per 1.1 esistono allora $c_{1m}, \dots, c_{sm} \in \mathbf{F}_p$, tali che $\omega^* = c_{1m}\sigma_1 + \dots + c_{sm}\sigma_s$.

Si ha allora $\omega' = \pi^m(c_{1m}\sigma_1 + \dots + c_{sm}\sigma_s)$, pertanto per ogni $a \in \text{vect } F$ risulta

$$\omega(a) \equiv \pi^m(\{c_{1m}\}\tilde{\sigma}_1 + \dots + \{c_{sm}\}\tilde{\sigma}_s)(a) \quad \text{mod } t(\text{vect } C),$$

quindi

$$t^m\omega(a) \equiv t^m\pi^m(\{c_{1m}\}\tilde{\sigma}_1 + \dots + \{c_{sm}\}\tilde{\sigma}_s)(a) \quad \text{mod } t^{m+1}(\text{vect } C),$$

ossia

$$f_m(a) \equiv (p^m\{c_{1m}\}\tilde{\sigma}_1 + \dots + p^m\{c_{sm}\}\tilde{\sigma}_s)(a) \quad \text{mod } t^{m+1}(\text{vect } C).$$

Posto infine

$$f_{m+1} = f_m - (p^m\{c_{1m}\}\tilde{\sigma}_1 + \dots + p^m\{c_{sm}\}\tilde{\sigma}_s) = \\ = f - [\{c_{10}\} + p^1\{c_{11}\} + \dots + p^m\{c_{1m}\})\tilde{\sigma}_1 + \dots + \\ + (\{c_{s0}\} + p^1\{c_{s1}\} + \dots + p^m\{c_{sm}\})\tilde{\sigma}_s],$$

si ha: $\text{Im } f_{m+1} \subseteq t^{m+1}(\text{vect } C)$.

Posto, per $i = 1, \dots, s$, $c_i = (c_{i0}, c_{i1}, \dots) \in \mathbf{Z}_p$, ove i c_{ij} sono gli elementi di $\mathbf{F}_p$ definiti col procedimento induttivo descritto, si ha: $f = c_1\tilde{\sigma}_1 + \dots + c_s\tilde{\sigma}_s$, C.V.D.

Sia N un qualsiasi prolungamento di F , normale su k ; tenuto conto di 1.4 si ha:

1.5. $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } C) = \Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } N)$;

1.6. *L'applicazione di $\Pi_k(\text{vect } N, \text{vect } N)$ in $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } N)$ che a ciascun elemento di $\Pi_k(\text{vect } N, \text{vect } N)$ associa la sua restrizione a $\text{vect } F$, è surgettiva.*

Tenuto infine conto di 1.1 e di 1.4 si ha:

1.7. *L'applicazione di $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } N)$ in $\Pi_k(F, N)$, che a ciascun elemento $f \in \Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } N)$ associa l'elemento $f' \in \Pi_k(F, N)$ indotto da f (previa identificazione di $(\text{vect } F)/t(\text{vect } F)$ con F , e di $(\text{vect } N)/t(\text{vect } N)$ con N), è surgettiva.*

2. – Sia N un prolungamento di Galois (ossia finito, separabile e normale) di k , e ne sia $G = \mathcal{G}(N/k)$ il gruppo di Galois.

2.1. **TEOREMA.** – *L'algebra gruppale $F_p[G]$ è canonicamente isomorfa alla F_p -algebra dei π -endomorfismi di N su k .*

DIM. – L'esistenza di un omomorfismo canonico della prima nella seconda delle algebre dette, è banale; che tale omomorfismo risulti un isomorfismo surgettivo, segue da 1.1, C.V.D.

2.2. **TEOREMA.** – *L'algebra gruppale $Z_p[G]$ è canonicamente isomorfa alla Z_p -algebra degli endomorfismi di $\text{vect } N$ come T_k -modulo canonico.*

DIM. – L'applicazione che a ciascun elemento $\sigma \in G$ fa corrispondere l'elemento $\tilde{\sigma}$ definito da $\tilde{\sigma}(a_0, a_1, \dots) = (\sigma a_0, \sigma a_1, \dots)$, si prolunga canonicamente ad un omomorfismo della prima nella seconda delle algebre dette; che tale omomorfismo risulti un isomorfismo surgettivo, segue da 1.4, C.V.D.

Se k è perfetto, si considerino i corpi $\text{biv } k$, $\text{biv } N$; $\text{biv } N$ risulta essere un T_k^* -modulo finitamente generato.

Detti $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ gli elementi di G , e posto $\tilde{\sigma}_i(\dots, a_{-1}; a_0, a_1, \dots) = (\dots, \sigma_i a_{-1}; \sigma_i a_0, \sigma_i a_1, \dots)$, l'insieme $\tilde{G} = \{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n\}$ risulta essere un gruppo di automorfismi del corpo $\text{biv } N$, gruppo ovviamente isomorfo a G . Il sottocorpo costituito dagli elementi di $\text{biv } N$ stabili rispetto a $\tilde{G}$, è ovviamente $\text{biv } k$; in particolare, $\text{biv } N$ è un prolungamento di Galois di $\text{biv } k$, e si ha $\mathcal{G}(\text{biv } N/\text{biv } k) = \tilde{G}$.

2.3. **TEOREMA.** – *L'algebra gruppale $Q_p[G]$ è canonicamente isomorfa alla Q_p -algebra degli endomorfismi di $\text{biv } N$ come T_k^* -modulo.*

DIM. – L'applicazione che a ciascun σ_i fa corrispondere $\tilde{\sigma}_i$, si prolunga canonicamente ad un omomorfismo della prima nella seconda delle algebre dette.

Siano $c_1, \dots, c_n \in Q_p$ tali che $c_1 \tilde{\sigma}_1 + \dots + c_n \tilde{\sigma}_n = 0$; scelto h tale che ogni $p^h c_i \in Z_p$, l'elemento $(p^h c_1) \tilde{\sigma}_1 + \dots + (p^h c_n) \tilde{\sigma}_n$, ristretto a $\text{vect } N$, risulta l'endomorfismo nullo

di $\text{vect } N$; tenuto conto di 2.2 si ha $p^h c_1 = \dots = p^h c_n = 0$, ossia $c_1 = \dots = c_n = 0$. Ne segue che l'omomorfismo detto è un isomorfismo; che risulti surgettivo si prova come segue.

Sia $f: \text{biv } N \rightarrow \text{biv } N$ una applicazione T_k^* -lineare; detto $x_1, \dots, x_n$ un sistema di generatori di $\text{vect } N$ come T_k -modulo canonico, esiste h tale che $p^h f(x_1), \dots, p^h f(x_n) \in \text{vect } N$; conseguentemente $p^h f(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } N$. Per 2.2 esistono allora $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{Z}_p$ tali che per ogni $x \in \text{vect } N$ si abbia $p^h f(x) = c_1 \tilde{\sigma}_1(x) + \dots + c_n \tilde{\sigma}_n(x)$, ossia $f(x) = (p^{-h} c_1) \tilde{\sigma}_1(x) + \dots + (p^{-h} c_n) \tilde{\sigma}_n(x)$; che tale uguaglianza sussista per ogni $x \in \text{biv } N$, si constata tenendo conto che, se $x \in \text{biv } N$, allora $p^l x \in \text{vect } N$ per l opportuno, e che ogni $\tilde{\sigma}_i$ è un omomorfismo di $\text{biv } N$ come corpo, C.V.D.

3. - Siano F, H prolungamenti finiti e separabili di k , e sia N un prolungamento di Galois di k , contenente F ed H .

Si ponga $G = \mathfrak{G}(N/k)$, $\mathcal{F} = \mathfrak{G}(N/F)$, $\mathcal{H} = \mathfrak{G}(N/H)$.

Siano $\sigma_1 \mathcal{F}, \dots, \sigma_s \mathcal{F}$ le classi laterali sinistre di $\mathcal{F}$ in G , così che le restrizioni di $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ ad F (che in quanto segue indicheremo con gli stessi simboli $\sigma_1, \dots, \sigma_s$) risultano gli isomorfismi di F in N , su k .

Si consideri $\mathcal{H}$ operante a sinistra, in modo ovvio, su $\{\sigma_1 \mathcal{F}, \dots, \sigma_s \mathcal{F}\}$, e sia $\{\sigma_{i1} \mathcal{F}, \dots, \sigma_{is_1} \mathcal{F}\}, \dots, \{\sigma_{it1} \mathcal{F}, \dots, \sigma_{its_t} \mathcal{F}\}$ (con ogni σ_{ij} scelto tra $\sigma_1, \dots, \sigma_s$) la conseguente partizione in orbite di $\{\sigma_1 \mathcal{F}, \dots, \sigma_s \mathcal{F}\}$.

3.1. LEMMA. - *Gli elementi $\eta_1 = \sigma_{i1} + \dots + \sigma_{is_1}, \dots, \eta_t = \sigma_{t1} + \dots + \sigma_{its_t}$ di $\Pi_k(F, N)$, sono una base di $\Pi_k(F, H)$ come modulo su $\mathbf{F}_p$.*

DIM. - Sia $a \in F$; per come scelti $\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{is_i}$, dato comunque $\varrho \in \mathfrak{G}(N/H)$, essendo $a \in F$, si ha $\varrho \eta_i(a) = \eta_i(a)$, pertanto $\eta_i(a) \in H$; ne segue che $\eta_1, \dots, \eta_t \in \Pi_k(F, H)$.

L'indipendenza di $\eta_1, \dots, \eta_t$ su $\mathbf{F}_p$, tenuto conto che $\{\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{is_1}\}, \dots, \{\sigma_{it1}, \dots, \sigma_{its_t}\}$ è una partizione di $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$, segue da 1.1.

Si consideri quindi un elemento $f \in \Pi_k(F, H)$. Essendo $\Pi_k(F, H) \subseteq \Pi_k(F, N)$, per 1.1 esistono e sono univocamente determinati elementi $a_1, \dots, a_s \in \mathbf{F}_p$ tali che $f = a_1 \sigma_1 + \dots + a_s \sigma_s$; se $\sigma_{ij} = \sigma_r$, si ponga $a_{ij} = a_r$. Fissato $i = 1, \dots, t$, e scelti j, h compresi tra 1 ed s_i , esiste $\varrho \in \mathfrak{G}(N/H)$ tale che $\varrho \sigma_{ij} \mathcal{F} = \sigma_{ih} \mathcal{F}$; considerando $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ come isomorfismi di F in N , su k , si ha che $\varrho \sigma_1, \dots, \varrho \sigma_s$ è una permutazione di $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, e che $\varrho \sigma_{ij} = \sigma_{ih}$; pertanto, essendo $f = a_1 \sigma_1 + \dots + a_s \sigma_s$, $f = \varrho f = a_1 \varrho \sigma_1 + \dots + a_s \varrho \sigma_s$, si ha $a_{ih} = a_{ij}$. Ne segue: $f = a_{i1}(\sigma_{i1} + \dots + \sigma_{is_1}) + \dots + a_{ts}(\sigma_{t1} + \dots + \sigma_{its_t})$, C.V.D.

3.2. LEMMA. - *Gli elementi (cfr. 1.4) $\xi_1 = \tilde{\sigma}_{i1} + \dots + \tilde{\sigma}_{is_1}, \dots, \xi_t = \tilde{\sigma}_{t1} + \dots + \tilde{\sigma}_{its_t}$ di $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } N)$, sono una base di $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } H)$ come modulo su $\mathbf{Z}_p$.*

DIM. - Sia $a \in \text{vect } F$; per come scelti $\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{is_i}$, dato comunque $\varrho \in \mathfrak{G}(N/H)$, essendo ogni componente di a elemento di F , si ha che $\tilde{\varrho} \tilde{\sigma}_{i1}(a), \dots, \tilde{\varrho} \tilde{\sigma}_{is_i}(a)$ è una permutazione di $\tilde{\sigma}_{i1}(a), \dots, \tilde{\sigma}_{is_i}(a)$; conseguentemente $\tilde{\varrho}(\tilde{\sigma}_{i1}(a) + \dots + \tilde{\sigma}_{is_i}(a)) = \tilde{\sigma}_{i1}(a) +$

$+ \dots + \tilde{\sigma}_{is_i}(a)$, e pertanto ogni componente di $\tilde{\sigma}_{i1}(a) + \dots + \tilde{\sigma}_{is_i}(a)$ è elemento di H . Ne segue che $\xi_i = \tilde{\sigma}_{i1} + \dots + \tilde{\sigma}_{is_i} \in \Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } H)$.

L'indipendenza di $\xi_1, \dots, \xi_t$ su $\mathbf{Z}_p$, tenuto conto che $\{\tilde{\sigma}_{11}, \dots, \tilde{\sigma}_{1s_1}\}, \dots, \{\tilde{\sigma}_{t1}, \dots, \tilde{\sigma}_{ts_t}\}$ è una partizione di $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_s\}$, è conseguenza di 1.4.

Che $\xi_1, \dots, \xi_t$ generino $\Pi_k(\text{vect } F, \text{vect } H)$ su $\mathbf{Z}_p$, si prova con considerazioni sostanzialmente identiche a quelle che provano (cfr. 3.1) che $\eta_1, \dots, \eta_t$ generano $\Pi_k(F, H)$ su $\mathbf{F}_p$, C.V.D.

3.3. COROLLARIO. — Sono equivalenti gli asserti:

- i) $\text{vect } F$ e $\text{vect } H$ sono isomorfi come T_k -moduli canonici,
- ii) F ed H sono π -isomorfi come prolungamenti di k .

DIM. — Che i) implichi ii), è banale. Viceversa, sia $f: F \rightarrow H$ un π -isomorfismo surgettivo; per 3.1 esistono $a_1, \dots, a_t \in \mathbf{F}_p$ tali che

$$f = a_1(\sigma_{11} + \dots + \sigma_{1s_1}) + \dots + a_t(\sigma_{t1} + \dots + \sigma_{ts_t}).$$

Per 3.2, l'applicazione $g = \{a_1\}(\tilde{\sigma}_{11} + \dots + \tilde{\sigma}_{1s_1}) + \dots + \{a_t\}(\tilde{\sigma}_{t1} + \dots + \tilde{\sigma}_{ts_t})$ risulta un omomorfismo di $\text{vect } F$ in $\text{vect } H$ come T_k -moduli canonici. Tenuto conto che il π -omomorfismo di F in H indotto da g , è f stesso, ed è pertanto un π -isomorfismo, si prova facilmente che g è un isomorfismo surgettivo, C.V.D.

3.4. TEOREMA. — Siano (cfr. [1]) R_F ed R_H le iperalgebre locali associate ad F ed H ; sono equivalenti gli asserti:

- i) $R_F \cong R_H$,
- ii) F ed H sono π -isomorfi come prolungamenti di k .

DIM. — Siano D_F, D_H le iperalgebre duali di R_F, R_H . Tenuto conto di 1.17 di [1] si ha $\mathcal{U}D_F \cong \text{vect } F$, $\mathcal{U}D_H \cong \text{vect } H$; ciò posto, l'asserto è conseguenza di 3.3. C.V.D.

4. — Siano F, H prolungamenti finiti e separabili di k , e sia N un prolungamento di Galois di k , contenente F ed H .

Si ponga $G = \mathcal{G}(N/k)$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}(N/F)$, $\mathcal{H} = \mathcal{G}(N/H)$.

Si considerino (cfr. 2) le algebre gruppali $\mathbf{F}_p[G]$, $\mathbf{Z}_p[G]$.

Due ideali principali destri $a \cdot \mathbf{F}_p[G]$, $b \cdot \mathbf{F}_p[G]$ di $\mathbf{F}_p[G]$, si diranno *omotetici*, se esiste $\xi \in \mathbf{F}_p[G]$ tale che l'applicazione $x \rightarrow \xi x$, ristretta ad $a \cdot \mathbf{F}_p[G]$, risulti un isomorfismo (di $\mathbf{F}_p[G]$ -moduli destri) di $a \cdot \mathbf{F}_p[G]$ su tutto $b \cdot \mathbf{F}_p[G]$.

Definizione analoga si dà per ideali principali destri di $\mathbf{Z}_p[G]$.

Si ponga infine: $\varrho_{\mathcal{F}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \sigma$, $\varrho_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} \sigma$, da interpretarsi, a seconda del contesto, come elementi di $\mathbf{F}_p[G]$, o di $\mathbf{Z}_p[G]$.

4.1. TEOREMA. — Sono equivalenti gli asserti:

- i) F ed H sono π -isomorfi come prolungamenti di k ,
- ii) $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{F}_p[G]$,
- iii) $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{Z}_p[G]$.

DIM. — Sia $\tilde{R} = \Pi_k(\text{vect } N, \text{vect } N)$ (cfr. 2.2); in tale $\mathbf{Z}_p$ -algebra si ponga $\varrho_{\mathcal{F}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \tilde{\sigma}$, $\varrho_{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{H}} \tilde{\sigma}$.

Si osservi in primo luogo che $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \tilde{R} = \{f \in \tilde{R} / f(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } F\}$. Infatti: dato $f = \varrho_{\mathcal{F}} g$, per ogni $a \in \text{vect } N$ ed ogni $\varrho \in \mathcal{F}$, si ha $\tilde{\varrho}f(a) = (\tilde{\varrho}\varrho_{\mathcal{F}})g(a) = \varrho_{\mathcal{F}}g(a) = f(a)$; pertanto ogni componente di $f(a)$ è elemento di F ; ne segue $f(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } F$. Viceversa, sia $f \in \tilde{R}$ tale che $f(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } F$; posto (cfr. 2.2) $f = \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \tilde{\sigma}$, con gli $a_{\sigma} \in \mathbf{Z}_p$ univocamente determinati, per ogni $\varrho \in \mathcal{F}$ si ha $\tilde{\varrho}f = f$, ossia $\sum_{\sigma \in G} a_{\varrho^{-1}\sigma} \tilde{\sigma} = \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \tilde{\sigma}$; ne segue $a_{\varrho^{-1}\sigma} = a_{\sigma}$ per ogni $\sigma \in G$ ed ogni $\varrho \in \mathcal{F}$. Dette quindi $\mathcal{F}\varrho_1, \dots, \mathcal{F}\varrho_s$ ($s = [F:k]$) le classi laterali destre di $\mathcal{F}$ in G , si ha

$$f = a_{\varrho_1} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \tilde{\sigma} \right) \tilde{\varrho}_1 + \dots + a_{\varrho_s} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \tilde{\sigma} \right) \tilde{\varrho}_s = \varrho_{\mathcal{F}}(a_{\varrho_1} \tilde{\varrho}_1 + \dots + a_{\varrho_s} \tilde{\varrho}_s) \in \varrho_{\mathcal{F}} \cdot \tilde{R}.$$

Si noti in particolare che $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \tilde{R}$ risulta uno $\mathbf{Z}_p$ -modulo libero di dimensione $[F:k]$, una cui base è $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{\varrho}_1, \dots, \varrho_{\mathcal{F}} \tilde{\varrho}_s$.

Analogamente si prova che $\varrho_{\mathcal{H}} \cdot \tilde{R} = \{f \in \tilde{R} / f(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } H\}$, e che $\varrho_{\mathcal{H}} \cdot \tilde{R}$ risulta uno $\mathbf{Z}_p$ -modulo libero di dimensione $[H:k]$.

Si osservi in secondo luogo, che un elemento $f \in \tilde{R}$ è tale che $f(\text{vect } F) \subseteq \text{vect } H$, se e solo se $f\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R} \subseteq \varrho_{\mathcal{H}} \tilde{R}$. Infatti: le due precedenti osservazioni provano che, se $f(\text{vect } F) \subseteq \text{vect } H$, risulta $f\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R} \subseteq \varrho_{\mathcal{H}} \tilde{R}$. Viceversa, essendo $f\varrho_{\mathcal{F}} \in \varrho_{\mathcal{H}} \tilde{R}$, si ha intanto $f\varrho_{\mathcal{F}}(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } H$. Si consideri poi il π -omomorfismo di N in F indotto da $\varrho_{\mathcal{F}}: \text{vect } N \rightarrow \text{vect } F$; tale π -omomorfismo risulta essere la traccia, $T_{N/F}$, da N ad F ; essendo N separabile su F , $T_{N/F}$ non è nulla, ed essendo $T_{N/F}$ una applicazione F -lineare, $T_{N/F}$ risulta surgettiva; ne segue che l'omomorfismo $\varrho_{\mathcal{F}}: \text{vect } N \rightarrow \text{vect } F$ di T_k -moduli canonici, è anch'esso surgettivo, ossia che $\varrho_{\mathcal{F}}(\text{vect } N) = \text{vect } F$. L'ultima uguaglianza, tenuto conto che $f\varrho_{\mathcal{F}}(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } H$, prova che $f(\text{vect } F) \subseteq \text{vect } H$.

Supponiamo quindi che esista un isomorfismo surgettivo $f: \text{vect } F \rightarrow \text{vect } H$, come T_k -moduli canonici. Per 1.3, esiste un elemento $f_1 \in \tilde{R}$, la cui restrizione a $\text{vect } F$ risulta f , ed un elemento $f_2 \in \tilde{R}$, la cui restrizione a $\text{vect } H$ risulta $f^{-1}: \text{vect } H \rightarrow \text{vect } F$. Si consideri l'applicazione di $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$ in $\varrho_{\mathcal{H}} \tilde{R}$ definita da $\xi \rightarrow f_1 \xi$ (si noti che, per $\xi \in \varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$, si ha $\text{Im } \xi \subseteq \text{vect } F$, e che pertanto $f_1 \xi(\text{vect } N) \subseteq f_1(\text{vect } F) = f(\text{vect } F) = \text{vect } H$); tale applicazione risulta un isomorfismo surgettivo di $\tilde{R}$ -moduli destri. Infatti: se risultasse $f_1 \xi_1 = f_1 \xi_2$, essendo $\text{Im } \xi_1, \text{Im } \xi_2 \subseteq \text{vect } F$, ed essendo f_1 iniettiva su $\text{vect } F$, risulterebbe anche $\xi_1 = \xi_2$. Dato inoltre $\eta \in \varrho_{\mathcal{H}} \tilde{R}$, si consideri $f_2 \eta$; essendo $\text{Im } \eta \subseteq \text{vect } H$, si ha $f_2 \eta \in \varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$; essendo la restrizione di

$f_1 f_2$ a $\text{vect } H$ l'applicazione identica di $\text{vect } H$, tenuto nuovamente conto che $\text{Im } \eta \subseteq \text{vect } H$, si ha $f_1(f_2 \eta) = \eta$.

Supponiamo viceversa che esista un elemento $f \in \tilde{R}$, tale che l'applicazione $\xi \rightarrow f\xi$, ristretta a $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$, sia un isomorfismo di $\tilde{R}$ -moduli destri, e quindi di $\mathbf{Z}_p$ -moduli, di $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$ su tutto $\varrho_{\mathcal{K}} \tilde{R}$. Si noti in primo luogo, che sotto tali ipotesi, le dimensioni di $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$ e di $\varrho_{\mathcal{K}} \tilde{R}$ su $\mathbf{Z}_p$ coincidono, e che quindi, per quanto precedentemente stabilito, risulta $[F:k] = [H:k]$. Si consideri quindi f ; essendo $f\varrho_{\mathcal{F}} \in \varrho_{\mathcal{K}} \tilde{R}$, si ha $f\varrho_{\mathcal{F}}(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } H$, ed essendo $\varrho_{\mathcal{F}}(\text{vect } N) = \text{vect } F$, si ha $f(\text{vect } F) \subseteq \text{vect } H$; la restrizione f' di f a $\text{vect } F$ è quindi un omomorfismo di $\text{vect } F$ in $\text{vect } H$, come T_k -moduli canonici. Inoltre, per le ipotesi poste su f , esiste $\xi \in \varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$ tale che $f\xi = \varrho_{\mathcal{K}}$; allora $f\xi(\text{vect } N) = \varrho_{\mathcal{K}}(\text{vect } N) = \text{vect } H$, ed essendo $\xi(\text{vect } N) \subseteq \text{vect } F$, si ha $f(\text{vect } F) \supseteq \text{vect } H$. Essendo $f(\text{vect } F) \subseteq \text{vect } H$, quanto precede prova che $f': \text{vect } F \rightarrow \text{vect } H$ è surgettiva. Essendo $[F:k] = [H:k]$, le dimensioni di $\text{vect } F$ e $\text{vect } H$, come T_k -moduli canonici, coincidono (cfr. 1.16 di [1]); la surgettività di f' , ne comporta allora la iniettività.

Le considerazioni precedenti provano che $\text{vect } F$ e $\text{vect } H$ sono isomorfi come T_k -moduli canonici, se e solo se $\varrho_{\mathcal{F}} \tilde{R}$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \tilde{R}$ sono omotetici, e quindi, tenuto conto di 2.2, se e solo se $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ sono omotetici.

Con procedimento analogo, si prova che F ed H sono π -isomorfi come prolungamenti di k , se e solo se $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot F_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot F_p[G]$ sono omotetici.

Le ultime due considerazioni, tenuto conto di 3.3, provano il teorema. C.V.D.

Tenuto conto di 3.4 e di 4.1, restringendo l'indagine a prolungamenti separabili di k , la congettura avanzata in [1], che prolungamenti finiti di k aventi iperalgebre locali associate isomorfe, siano isomorfi, risulta equivalente a ciascuna delle seguenti congetture:

congettura a). Siano F, H prolungamenti finiti separabili di k ; se F ed H sono π -isomorfi su k , allora F ed H sono isomorfi come prolungamenti di k ;

congettura b). Sia G un gruppo finito, e ne siano $\mathcal{F}, \mathcal{K}$ sottogruppi; se gli ideali $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot F_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot F_p[G]$ sono omotetici in $F_p[G]$, allora $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$ sono coniugati rispetto ad un automorfismo interno di G ;

congettura c). Sia G un gruppo finito, e ne siano $\mathcal{F}, \mathcal{K}$ sottogruppi; se gli ideali $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{Z}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{Z}_p[G]$, allora $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$ sono coniugati rispetto ad un automorfismo interno di G .

5. — Siano F, H prolungamenti finiti e separabili di k , e sia N un prolungamento di Galois di k , contenente F ed H .

Si ponga $G = \mathcal{G}(N/k)$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}(N/F)$, $\mathcal{K} = \mathcal{G}(N/H)$.

(Per quanto concerne gli asserti in soli termini di algebre gruppali, le considerazioni contenute in questo paragrafo sussistono inalterate, ove in luogo di essere assegnati k, F, H, N , siano assegnati un gruppo finito G e due suoi sottogruppi $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$. In tale caso, nelle dimostrazioni, k ed N vanno interpretati come una qualsiasi coppia,

certamente esistente, di corpi di caratteristica p , con N di Galois su k , tale che $\mathfrak{G}(N/k) \cong G$; F ed H vanno poi interpretati come i sottocorpi di N di stabilità per $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$.)

5.1. TEOREMA. — *Se l'ordine di $\mathcal{F}$ è un numero primo, risultano equivalenti gli asserti:*

- i) $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{F}_p[G]$,
- ii) $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$ sono coniugati rispetto ad un automorfismo interno di G .

DIM. — Ovviamente ii) implica i). Viceversa: $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$, come spazi vettoriali su $\mathbf{F}_p$ hanno dimensioni (cfr. la dimostrazione di 4.1) rispettivamente $(G:\mathcal{F})$, $(G:\mathcal{K})$; essendo ovviamente isomorfi come spazi vettoriali, si ha $(G:\mathcal{F}) = (G:\mathcal{K})$, pertanto gli ordini di $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$ coincidono. Poniamo: q = ordine di $\mathcal{F}$ = ordine di $\mathcal{K}$; q , per ipotesi è primo.

Si consideri $\Pi_k(F, F)$. Siano $\{\sigma'_{11}\mathcal{F}, \dots, \sigma'_{1r_1}\mathcal{F}\}, \dots, \{\sigma'_{h1}\mathcal{F}, \dots, \sigma'_{hr_h}\mathcal{F}\}$ le orbite in cui l'insieme $\{\sigma_1\mathcal{F}, \dots, \sigma_s\mathcal{F}\}$ delle classi laterali sinistre di $\mathcal{F}$ in G , risulta ripartito, quando $\mathcal{F}$ vi opera a sinistra. Per 3.1, $\Pi_k(F, F)$, come spazio vettoriale su $\mathbf{F}_p$, ha dimensioni h . Essendo primo l'ordine q di $\mathcal{F}$, ciascuna di tali orbite consta o di 1 o di q elementi; inoltre esistono certamente orbite con 1 elemento (ad esempio l'orbita di $\mathcal{F}$ stesso come classe laterale). Detto $\lambda \neq 0$, il numero delle orbite con 1 elemento, si ha $h = \lambda + (s - \lambda)/q$; ne segue che $\Pi_k(F, F)$ consta di $p^{\lambda + (s - \lambda)/q}$ elementi.

Tenuto conto di 4.1, esiste un π -isomorfismo $f: F \rightarrow H$, su k ; al variare di g tra i $p^{\lambda + (s - \lambda)/q}$ elementi di $\Pi_k(F, F)$, il prodotto fg descrive allora $p^{\lambda + (s - \lambda)/q}$ elementi di $\Pi_k(F, H)$.

Si consideri quindi $\Pi_k(F, H)$. Siano $\{\sigma_{11}\mathcal{F}, \dots, \sigma_{1s_1}\mathcal{F}\}, \dots, \{\sigma_{t1}\mathcal{F}, \dots, \sigma_{ts_t}\mathcal{F}\}$ le orbite in cui $\{\sigma_1\mathcal{F}, \dots, \sigma_s\mathcal{F}\}$ risulta ripartito quando $\mathcal{K}$ vi opera a sinistra. Per 3.1, $\Pi_k(F, H)$, come spazio vettoriale su $\mathbf{F}_p$, ha dimensione t . Essendo primo l'ordine q di $\mathcal{K}$, ciascuna di tali orbite consta o di 1 o di q elementi. Se ciascuna orbita constasse di q elementi, si avrebbe $t = s/q$; pertanto $\Pi_k(F, H)$ consterebbe di $p^{s/q}$ elementi. Si avrebbe allora $\lambda + (s - \lambda)/q \leq s/q$, ossia $\lambda - \lambda/q \leq 0$; assurdo, essendo $1 < \lambda$, $2 \leq q$.

Esiste allora un $\sigma_i\mathcal{F}$, la cui orbita consta di un solo elemento; per ogni $\varrho \in \mathcal{K}$ si ha allora $\varrho\sigma_i\mathcal{F} = \sigma_i\mathcal{F}$, $\varrho\sigma_i \in \sigma_i\mathcal{F}$, $\varrho \in \sigma_i\mathcal{F}\sigma_i^{-1}$; ne segue $\mathcal{K} \subseteq \sigma_i\mathcal{F}\sigma_i^{-1}$, e quindi $\mathcal{K} = \sigma_i\mathcal{F}\sigma_i^{-1}$, avendo entrambi tali gruppi ordine q . C.V.D.

5.2. COROLLARIO. — *Se $[N:F]$ è primo, i prolungamenti di k che risultano π -isomorfi ad F su k , sono i coniugati di F su k .*

DIM. — Che i coniugati di F su k siano π -isomorfi ad F , è banale. Sia viceversa K un prolungamento di k , π -isomorfo ad F ; per 1.2 risulta $K \subseteq N$. Posto $\mathcal{K} = \mathfrak{G}(N/K)$, per 4.1, $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{F}_p[G]$. Essendo $[N:F]$ primo, per 5.1 esiste $\sigma \in G$ tale che $\mathcal{K} = \sigma\mathcal{F}\sigma^{-1}$; ne segue $K = \sigma F$. C.V.D.

5.3. TEOREMA. — Se l'ordine di $\mathcal{F}$ è una potenza di p , risultano equivalenti gli asserti:

- i) $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ sono omotetici in $\mathbf{F}_p[G]$,
- ii) $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{K}$ sono coniugati rispetto ad un automorfismo interno di G .

DIM. — Ovviamente ii) implica i). Viceversa: siano $\{\sigma_{11}\mathcal{F}, \dots, \sigma_{1s_1}\mathcal{F}\}, \dots, \{\sigma_{t1}\mathcal{F}, \dots, \sigma_{ts_t}\mathcal{F}\}$ le orbite in cui l'insieme $\{\sigma_1\mathcal{F}, \dots, \sigma_s\mathcal{F}\}$ delle classi laterali sinistre di $\mathcal{F}$ in G , risulta ripartito quando $\mathcal{K}$ si opera a sinistra.

Per 4.1, esiste un π -isomorfismo $f: F \rightarrow H$; fissato f , per 3.1 esistono e sono univocamente determinati $a_1, \dots, a_t \in \mathbf{F}_p$ tali che la restrizione ad F dell'elemento $f_1 = a_1(\sigma_{11} + \dots + \sigma_{1s_1}) + \dots + a_t(\sigma_{t1} + \dots + \sigma_{ts_t})$ di $\Pi_k(N, N)$, sia f . L'applicazione $\xi \rightarrow f_1\xi$, ristretta a $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$, risulta (cfr. la dim. di 4.1) un isomorfismo su tutto $\varrho_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ (previa l'identificazione di $\Pi_k(N, N)$ con $\mathbf{F}_p[G]$; cfr. 2.1).

In particolare esiste allora uno ed un solo $\xi \in \varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ tale che $f_1\xi = \varrho_{\mathcal{K}}$.

$\mathcal{F}\sigma_1^{-1}, \dots, \mathcal{F}\sigma_s^{-1}$ sono le classi laterali destre di $\mathcal{F}$ in G ; allora (cfr. la dim. di 4.1) $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1}, \dots, \varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}$ è una base di $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{F}_p[G]$ su $\mathbf{F}_p$. Esistono quindi, e sono univocamente determinati, elementi $b'_1, \dots, b'_s \in \mathbf{F}_p$, tali che $\xi = b'_1\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1} + \dots + b'_s\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}$, ossia tali che $f_1 \cdot (b'_1\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1} + \dots + b'_s\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}) = \varrho_{\mathcal{K}}$.

Si constata che $\{\mathcal{F}\sigma_{11}^{-1}, \dots, \mathcal{F}\sigma_{1s_1}^{-1}\}, \dots, \{\mathcal{F}\sigma_{t1}^{-1}, \dots, \mathcal{F}\sigma_{ts_t}^{-1}\}$ sono le orbite in cui $\{\mathcal{F}\sigma_1^{-1}, \dots, \mathcal{F}\sigma_s^{-1}\}$ risulta ripartito quando $\mathcal{K}$ si opera a destra. Fissato allora $i = 1, \dots, t$, e scelti j, h compresi tra 1 ed s_i , esiste $\varrho \in \mathcal{K}$ tale che $\mathcal{F}\sigma_{ij}^{-1}\varrho = \mathcal{F}\sigma_{ih}^{-1}$; per tale ϱ si ha: $f_1 \cdot (b'_1\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1}\varrho + \dots + b'_s\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}\varrho) = \varrho_{\mathcal{K}}\varrho = \varrho_{\mathcal{K}}$. Essendo $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1}\varrho, \dots, \varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}\varrho$ una permutazione di $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_1^{-1}, \dots, \varrho_{\mathcal{F}}\sigma_s^{-1}$, i coefficienti con i quali compaiono $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_{ih}^{-1}$ e $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}^{-1}$ in ξ , coincidono. Detto quindi b_i il coefficiente con il quale figura $\varrho_{\mathcal{F}}\sigma_{i1}^{-1}$ in ξ , si ha:

$$\xi = b_1\varrho_{\mathcal{F}}(\sigma_{11}^{-1} + \dots + \sigma_{1s_1}^{-1}) + \dots + b_t\varrho_{\mathcal{F}}(\sigma_{t1}^{-1} + \dots + \sigma_{ts_t}^{-1}).$$

Si ha allora:

$$[a_1(\sigma_{11} + \dots + \sigma_{1s_1}) + \dots + a_t(\sigma_{t1} + \dots + \sigma_{ts_t})] \cdot \varrho_{\mathcal{F}}[b_1(\sigma_{11}^{-1} + \dots + \sigma_{1s_1}^{-1}) + \dots + b_t(\sigma_{t1}^{-1} + \dots + \sigma_{ts_t}^{-1})] = \varrho_{\mathcal{K}}.$$

Esprimendo primo e secondo membro di tale uguaglianza come combinazioni lineari degli elementi di G , il confronto tra i coefficienti con i quali vi compare l'elemento neutro di G , prova che: $s_1a_1b_1 + \dots + s_t a_t b_t = 1$.

Per l'ipotesi, si constata che l'ordine di $\mathcal{K}$ coincide con quello di $\mathcal{F}$, ed è pertanto una potenza di p ; conseguentemente, $s_1, \dots, s_t$, in quanto cardinalità di orbite di un insieme su cui opera $\mathcal{K}$, sono potenze di p . Posto $s_i = p^{e_i}$, se per ogni i fosse $e_i \neq 0$, risulterebbe: $s_1a_1b_1 + \dots + s_t a_t b_t = 0$; assurdo.

Esiste pertanto una classe $\sigma_i\mathcal{F}$, la cui orbita tramite $\mathcal{K}$, consta di un solo elemento; come visto nelle considerazioni finali di 5.1, si ha allora $\mathcal{K} = \sigma_i\mathcal{F}\sigma_i^{-1}$. C.V.D.

Ne seguono facilmente gli asserti:

5.4. COROLLARIO. — Se $[N:F]$ è una potenza di p , i prolungamenti di k che risultano π -isomorfi ad F su k , sono i coniugati di F su k .

5.5. COROLLARIO. — Se G è un p -gruppo, sono equivalenti gli asserti:

- i) $\varrho_{\mathcal{F}} \cdot F_p[G]$ e $\varrho_{\mathcal{H}} \cdot F_p[G]$ sono omotetici in $F_p[G]$,
- ii) $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{H}$ sono coniugati rispetto ad un automorfismo interno di G .

5.6. COROLLARIO. — Se $\mathcal{G}(N/k)$ è un p -gruppo, sono equivalenti gli asserti:

- i) F ed H sono π -isomorfi su k ,
- ii) F ed H sono isomorfi come prolungamenti di k .

BIBLIOGRAFIA

- [MC] I. BARSOTTI, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi*, Ann. Scuola Norm. Sup. **13** (1959), pag. 303.
- [MA] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Ann. Scuola Norm. Sup., capp. 1, 2, **14** (1964), pag. 1.
- [1] M. POLETTI, *Prolungamenti finiti di un corpo e iperalgebre*, Ist. Naz. Alta Mat., Symposia Math., **15** (1975), pag. 461.
- [2] M. POLETTI, *Q-algebre p-adiche e loro rappresentazioni*, Ann. Scuola Norm. Sup., **26** (1972), pag. 269.
- [3] N. JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, vol. III, Van Nostrand, 1964.