Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale.

Memoire de ANDRÉ LICHNEROWICZ (Paris)

À Antonio Signorini pour son 70^{me} anniversaire.

Résumé. - *Théorie des ondes et radiations gravitationnelles basée sur l'analogie existant entre les comportements du tenseur de courbure et du tenseur champ électromagnétique en relativité générale. Contribution à la quantification des champs.*

INTRODUCTION

L'un des problèmes le plus importants de la théorie relativiste de la gravitation concerne la définition et les propriétés des ondes et radiations gravitationnelles. Le problème a fait l'objet, au cours des dernières années, de nombreux et intéressants travaux.

Dans le cadre de la relativité restreinte une théorie classique satisfaisante des ondes et radiations électromagnétiques a pu être élaborée et il m'a semblé de bonne méthode de la développer dans le cadre de la relativité générale, de façon à l'adapter aisément au cas gravitationnel. Il apparaît que, dans ce cas, c'est le tenseur de courbure qui doit jouer le rôle essentiel, au point de vue mathématique comme au point de vue physique, et ceci se trouve en plein accord avec le point de vue de PIRANI [1, 2]. Pour une métrique satisfaisant aux équations d'EINSTEIN $R_{\alpha\beta} = 0$, le tenseur de courbure satisfait à deux groupes de relations dont la ressemblance formelle avec les équations de MAXWELL du vide est frappante, soit :

$$S\nabla_\gamma R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0 \qquad \nabla_\alpha R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = 0$$

où ∇_α est l'opérateur de dérivation covariante et où S indique une sommation après permutation circulaire sur les trois indices α, β, γ . Ce sont ces relations qui jouent un rôle fondamental dans la partie gravitationnelle de ce travail.

Le chapitre I est consacré à la théorie des ondes et radiations électromagnétiques en relativité générale. Après avoir rappelé des résultats classiques, la notion de 2-forme singulière est dégagée et appliquée à la définition de la notion de radiation électromagnétique pure comme à l'étude des discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique. Dans ce cas, on voit

apparaître de manière naturelle aux points du front d'onde un tenseur d'ordre 4 conservatif.

Dans le chapitre II sont étudiées les discontinuités du tenseur de courbure. Cette étude conduit à distinguer, parmi les tenseurs $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$, admettant le type de symétrie du tenseur de courbure, ceux correspondant à ce qu'on pourrait nommer une « double 2-forme singulière ». Trois conditions correspondantes entraînent pour le tenseur contracté $H_{\alpha\beta}$ une forme remarquable. L'analyse des relations différentielle ⁽¹⁾ aux quelles sont soumises les discontinuités du tenseur de courbure dans le cas $B_{\alpha\beta} = 0$ conduit à des identités de conservation pour un tenseur d'ordre 4. Il en est encore de même s'il y a simultanément discontinuité du tenseur de courbure et discontinuité du tenseur dérivé d'un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de MAXWELL du vide ⁽²⁾.

Dans le chapitre III, j'indique une définition des notions de radiation totale et radiation gravitationnelle pure, notions qui correspondent à un cas particulier remarquable de la classification de PETROV-PIRANI. Le champ de vecteurs isotropes mis en évidence admet pour trajectoires des géodésiques de longueur nulle. Grâce à un travail de BONDI, perfectionnant un exemple de ROSEN, on peut construire des exemples effectifs de telles radiations. Dans la cas où $R_{\alpha\beta} = 0$ (ou plus généralement $\lambda g_{\alpha\beta}$), j'étudie les propriétés d'un tenseur d'ordre 4 introduit, en accord avec mon point de vue, par L. BEL [2]. Ces propriétés sont formellement très semblables à celles du tenseur de MAXWELL d'un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de MAXWELL du vide et il semble qu ce tenseur appelle de nouvelles et importantes recherches.

Le chapitre IV est consacré au comportement de l'accélération relative de deux particules d'essai voisines relativement à une onde ou radiation, selon un point de vue développé par SYNGE et par PIRANI [2]. L'étude du cas des particules chargées en présence d'un champ électromagnétique met en évidence une différence de comportement pour une onde gravitationnelle et une onde électromagnétique.

Dans le chapitre V, j'ai adopté le cadre pentadimensionnel pour traduire radiation électromagnétique et radiation gravitationnelle dans un même formalisme, ce qui conduit à « tronquer » le tenseur de courbure de la variété pentadimensionnelle.

Au chapitre VI, j'exploite enfin les analogies signalées entre gravitation et électromagnétisme pour développer des processus de quantification parallèles du champ électromagnétique en relativité restreinte et du champ gravitationnel à l'approximation linéaire. Dans le premier cas, la quantification

⁽¹⁾ Relations données indépendamment par TRAUTMAN et par l'auteur.

s'effectue directement sur le tenseur champ électromagnétique et conduit naturellement à la représentation classique du photon, dans le second cas elle s'effectue sur le tenseur de courbure et conduit, comme je le montre, à une représentation équivalente à celle du graviton. Il semble cependant que ce processus de quantification soit plus satisfaisant, à la fois mathématiquement et physiquement, que celui mis en jeu par la théorie classique du graviton. Les équations écrites au début de cette introduction apparaissent bien comme les équations fondamentales de champ, la condition $R_{\alpha\beta} = 0$ se présentant alors comme un simple condition initiale.

I. - Ondes et radiations électromagnétiques en relativité générale.

1. Généralités.

Dans toute théorie relativiste du champ gravitationnel, l'élément primitif est constitué par une variété « espace-temps » V_4 de dimensions 4, douée d'une structure de variété différentiable qu'il est essentiel de préciser : pour des raisons étroitement liées à la covariance du formalisme et qui apparaissent par l'analyse des équations du champ gravitationnel (voir § 17-18), nous sommes amenés à supposer que dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées locales admissibles, les coordonnées locales d'un point dans l'un des systèmes sont des fonctions 4 fois dérivables, à jacobien non nul, des coordonnées de ce point dans l'autre système, les dérivées premières et secondes étant continues, les dérivées troisièmes étant seulement continues par morceaux. Nous traduisons ceci en disant que la variété V_4 est de classe $(C^2, C^4 \text{ par morceaux})$. Sauf avis contraire, V_4 est supposé *orientable*.

Sur V_4 est définie une métrique riemannienne ds^2 , de type hyperbolique normal, à un carré positif et 3 carrés négatifs. L'expression locale de cette métrique dans un système de coordonnées admissibles est :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \text{ tout indice grec} = 0, 1, 2, 3).$$

Le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, ou tenseur de gravitation, est supposé exactement $(C^2, C^3 \text{ par morceaux})$ ce qui est strictement compatible avec la structure différentiable imposée à V_4 .

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 , un cône réel C_x , le cône élémentaire en x . Son intérieur et son extérieur définissent respectivement pour une direction l'orientation dans le temps et l'orientation dans l'espace. Un vecteur tangent à V_4 est dit normé si le module de son carré est égal à 1. Un repère orthonormé au point x de V_4 est un ensemble ordonné de 4 vecteurs $(\vec{e}_\alpha)$ en x tels que

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta \quad \vec{e}_0^2 = 1 \quad \vec{e}_u^2 = -1 \quad (u = 1, 2, 3)$$

$\vec{e}_0$ définit une *direction de temps* et le 3-plan perpendiculaire défini par les $\vec{e}_u$ est dit *l'espace* associé à cette direction de temps. Nous rappelons qu'un 2-plan ou un 3-plan est dit orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace; il est orienté dans le temps dans le cas contraire.

Si un voisinage U de V_4 est muni de repères orthonormés, le ds^2 peut s'écrire localement

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - \sum_u (\theta^u)^2$$

où les θ^x sont des formes de PFAFF locales linéairement indépendantes.

Naturellement V_4 peut être l'espace-temps de MINKOWSKI de la relativité restreinte. Un repère orthonormé est alors un repère galiléen ordinaire (avec $c = 1$). Dans le cas riemannien, la métrique définit sur l'espace vectoriel tangent au point x de V_4 , une structure d'espace de MINKOWSKI. L'interprétation physique d'un tenseur défini au point x de V_4 se déduit immédiatement de la considération de cet espace de MINKOWSKI tangent: rapporté à un repère orthonormé, cet espace doit être identifié à l'espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un repère galiléen, ce qui fournit directement, en termes de temps et d'espace associés à ce repère, les interprétations physiques désirées.

2. Le champ électromagnétique en l'absence d'induction.

Sur un domaine de V_4 , et en l'absence de tout phénomène d'induction, le champ électromagnétique est représenté par un champ de tenseurs antisymétriques $F_{\alpha\beta}$, de classe $(C^0, C^2 \text{ par morceaux})$. À ce tenseur on peut associer la 2-forme

$$(2.1) \quad F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Si $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur élément de volume de la variété riemannienne V_4 , on peut déduire de F le tenseur antisymétrique « *adjoint* » $(*F)_{\alpha\beta}$ défini par:

$$(2.2) \quad (*F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}.$$

Nous désignerons par $*F$ la 2-forme associée, dite l'adjointe de F . On notera que, le discriminant du ds^2 étant négatif $**F = -F$.

Par rapport à un repère orthonormé $(\vec{e}_x)$ en x , l'interprétation physique de F et $*F$ est fournie par la règle suivante: si $\vec{u} = \vec{e}_0$, les vecteurs champ électrique et champ magnétique relatifs au temps et à l'espace définis par le $\vec{e}_0$ et $\vec{u}$ sont les vecteurs d'espace (c'est-à-dire les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$) déterminés par

$$(2.3) \quad \vec{E}: E^\beta = F^{\alpha\beta} u_\alpha \quad \vec{H}: H^\beta = -(*F)^{\alpha\beta} u_\alpha.$$

Si (X, Y, Z) et (L, M, N) sont les composantes respectives de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ par rapport au repère $(\vec{e}_\alpha)$, on a le tableau :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = F^{01} = F_{10} = (*F)_{23} = (*F)^{23} \\ Y = F^{02} = F_{20} = (*F)_{31} = (*F)^{31} \\ Z = F^{03} = F_{30} = (*F)_{12} = (*F)^{12} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} L = (*F)^{10} = (*F)_{01} = F_{23} = F^{23} \\ M = (*F)^{20} = (*F)_{02} = F_{31} = F^{31} \\ N = (*F)^{30} = (*F)_{03} = F_{12} = F^{12} \end{array} \right.$$

On notera que, comme dans le repère $(e_\alpha)g_{00} = 1, g_{\mu\mu} = -1$, la montée ou la descente d'un indice d'espace μ s'effectue avec changement de signe, alors qu'il n'en est pas de même pour l'indice temporel 0. Au tenseur champ électromagnétique on peut attacher deux scalaires intéressants : les produits scalaires de la forme F par elle-même ou par la forme $*F$, soit :

$$(2.5) \quad \Psi = (F, F) = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad \Phi = (F, *F) = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} (*F)^{\alpha\beta}$$

$\Phi = 0$ exprime que la forme F , et par suite la forme $*F$, sont de rang inférieur à 4. Dans un repère orthonormé, les scalaires Φ et Ψ ont pour expressions :

$$(2.6) \quad \Psi = L^2 + M^2 + N^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 \quad \Phi = 2(LX + MY + NZ)$$

soit, les carrés et produits scalaires étant évalués à l'aide de la métrique d'espace définie positive :

$$\Psi = \vec{H}^2 - \vec{E}^2 \quad \Phi = 2\vec{E} \cdot \vec{H}$$

et les seconds membres sont des invariants d'espace-temps.

3. Tenseur de Maxwell et vecteur de Poynting.

L'étude de la relativité restreinte a conduit à introduire comme tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique le tenseur de MAXWELL défini par :

$$(3.1) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho} F_{\beta}{}^{\rho} \quad (\tau_{\alpha}{}^{\alpha} = 0).$$

Lorsqu'on rapporte le champ électromagnétique à un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$, on voit que ce tenseur de MAXWELL est construit avec le tenseur d'espace (τ_{uv}) des tensions électromagnétiques le vecteur d'espace de POYNTING de composantes :

$$(3.2) \quad P_0 = 0 \quad P_u = \tau_{0u}$$

et l'énergie du champ électromagnétique

$$\tau_{00} = \frac{1}{2} (E^2 + H^2).$$

Si n^μ est un vecteur normé d'espace, le flux d'énergie électromagnétique à travers un élément de 2-surface orthogonal à n^μ de l'espace est proportionnel à $P_\mu n^\mu$. Pour que, quel que soit cet élément de surface, ce flux soit nul, il faut et il suffit que le vecteur de POYNTING correspondant à $\vec{e}_0$ soit nul. Or si $\vec{u} = \vec{e}_0$, le vecteur de POYNTING correspondant peut s'écrire :

$$P_\alpha = (g_{\alpha\gamma} - u_\alpha u_\gamma) \tau_{\beta\gamma} u^\beta.$$

Pour que P_α soit nul, il faut et il suffit que

$$\tau_{\alpha\beta} u^\beta = (\tau_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma) u_\alpha$$

c'est-à-dire que $\vec{u}$ soit *vecteur propre du tenseur de Maxwell par rapport au tenseur métrique*. On a été ainsi conduit à étudier les vecteurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$.

4. Les équations du champ électromagnétique.

a) Le champ électromagnétique satisfait aux équations de MAXWELL dont le premier groupe exprime que F dérive localement d'un potentiel-vecteur et le second relie F aux sources de ce champ, c'est-à-dire au vecteur-courant électrique. Ces équations peuvent s'écrire :

$$(4.1) \quad E^\alpha \equiv \frac{1}{2} \eta^{\beta\gamma\delta\alpha} \nabla_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad D^\alpha \equiv \nabla_\beta F^{\beta\alpha} = J^\alpha$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne et J^α le vecteur-courant électrique. De ces équations, il résulte par un calcul classique :

$$(4.2) \quad \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = F_{\rho\beta} J^\rho.$$

Je me placerai généralement ici dans le cas *purement électromagnétique* : dans le domaine envisagé de V_4 , le vecteur courant électrique est nul et le champ électromagnétique contribue seul au tenseur d'impulsion-énergie. Si $S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - (1/2)g_{\alpha\beta}R$ est le tenseur d'EINSTEIN de la métrique, champ gravitationnel et champ électromagnétique sont liés par les équations d'EINSTEIN :

$$(4.3) \quad S_{\alpha\beta} = \chi \tau_{\alpha\beta}.$$

De la nullité du courant, il résulte d'après (4.2) :

$$(4.4) \quad \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0.$$

Cela résulte aussi des équations d'EINSTEIN (4.3) puisque le tenseur $S_{\alpha\beta}$ satisfait aux identités de conservation. Il y a ainsi compatibilité entre (4.3) et la condition de nullité du courant.

Soit d l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes ($d^2 = 0$), δ

l'opérateur de codifférentiation défini sur une forme de degré p par $\delta = (-1)^{p-1} d \star$ ($\delta^2 = 0$). Les équations de MAXWELL peuvent s'écrire :

$$(4.6) \quad dF = 0 \quad \text{ou} \quad \delta(\star F) = 0$$

et dans le cas purement électromagnétique :

$$(4.6) \quad d(\star F) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta F = 0.$$

b) Dans cette section, nous ne nous servirons pas des équations d'EINSTEIN. Remarquons seulement que si l'on substitue au champ électromagnétique pur un fluide matériel sans pression, au tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ se trouve substitué le tenseur d'impulsion-énergie

$$(4.7) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta = (\sqrt{\rho} u_\alpha)(\sqrt{\rho} u_\beta)$$

où ρ est la densité de matière propre et u_α le vecteur-vitesse unitaire ($\vec{u}^2 = 1$) du fluide. Des conditions de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ satisfaites par le tenseur d'impulsion-énergie, on déduit en vertu du caractère unitaire de $\vec{u}$

$$(4.8) \quad \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0$$

et

$$(4.9) \quad u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$$

(4.8) est l'équation de continuité ; d'après (4.9) les lignes de courant du fluide, trajectoires du champ de vecteurs $\vec{u}$, sont des géodésiques orientées dans le temps de la variété V_4 .

5. Valeurs propres du tenseur de Maxwell ⁽³⁾.

L'étude de la nullité du vecteur de POYNTING conduit à rechercher les valeurs et vecteurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$. Il s'agit ici d'une étude purement algébrique qui a lieu en un point déterminé de V_4 et qui conduit à des expressions réduites, en repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ de V_4 , pour le couple de formes $(F, \star F)$. Dans ce paragraphe, F peut être une 2-forme quelconque interprétée en termes de champ électromagnétique.

Donnons-nous arbitrairement le vecteur $\vec{e}_0$ de $(\vec{e}_\alpha)$ orienté dans le temps. Il lui correspond des vecteurs champ électrique et champ magnétique $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Il est possible de choisir le 2-plan $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ parallèle à la fois à $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Le vecteur e_1 est alors fixé au signe près et l'on a $X = L = 0$. Un repère orthonormé satisfaisant à cette condition sera dit un *repère adapté* à la forme F . Dans le 2-plan $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ fixé, on peut alors choisir les vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ de façon qu'ils soient vecteurs propres de la matrice (τ_{AB}) ($A, B = 2, 3$) par

⁽³⁾ Nous résumons ici les résultats exposés dans LICHNEROWICZ *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Chap. 1.

rapport à l'identité. On a alors $YZ + MN = 0$. Un repère adapté satisfaisant à cette condition sera dit *simple* pour F . Si l'on introduit deux nombres ξ, η satisfaisant à

$$(5-1) \quad Y^2 + M^2 = \xi^2 \quad Z^2 + N^2 = \eta^2 \quad ZM - YN = \xi\eta$$

on démontre que, pour un repère simple, la matrice $(\tau_{\alpha\beta})$ prend la forme

$$(5-2) \quad (\tau_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} & \xi\eta & 0 & 0 \\ & \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} & 0 & 0 \\ & & \frac{\eta^2 - \xi^2}{2} & 0 \\ & & & \frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Inversement si, relativement à un repère orthonormé, la matrice $(\tau_{\alpha\beta})$ prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} & 0 & 0 \\ & \tau_{11} & 0 & 0 \\ & & \tau_{22} & 0 \\ & & & \tau_{33} = -\tau_{22} \end{pmatrix}$$

on établit aisément que le repère est simple.

Cela posé, il est facile d'obtenir, à partir de (5-2), les valeurs propres de $\tau_{\alpha\beta}$ par rapport à $g_{\alpha\beta}$. L'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\left[s^2 - \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \right)^2 \right]^2 = 0.$$

Il en résulte :

THÉOREME. - *Le tenseur de Maxwell d'un champ électromagnétique admet 4 valeurs propres réelles 2 à 2 égales et opposées, $k, k, -k, -k$.*

On a posé

$$(5-3) \quad 4k^2 = (\xi^2 - \eta^2)^2$$

Il est aisé de relier k aux invariants Ψ et Φ . On a

$$k^2 = [(H^2 - Z^2) - (N^2 - Y^2)]^2 = [M^2 - Z^2 + N^2 - Y^2]^2 - 4(M^2 - Z^2)(N^2 - Y^2).$$

Or de (2-6) et des conditions de simplicité il résulte :

$$[M^2 + N^2 - Y^2 - Z^2]^2 = \Psi^2 \quad - 4(M^2 - Z^2)(N^2 - Y^2) = 4(MY + NZ)^2 = \Phi^2$$

Ainsi :

$$(5.4) \quad 4k^2 = \Psi^2 + \Phi^2$$

6. Le cas régulier.

Il convient maintenant de distinguer le cas $k \neq 0$ et le cas $k = 0$. Dans le premier cas nous dirons que la forme F est *régulière*, dans le second qu'elle est *singulière*. Examinons le cas régulier ; il existe alors deux valeurs propres distinctes k et $-k$ et par suite deux 2-plans de vecteurs propres orthogonaux dont l'un est nécessairement orienté dans le temps et l'autre dans l'espace. Si $\vec{e}_0$ est un vecteur normé, orienté dans le temps, du premier 2-plan, $\vec{e}_3$ le vecteur normé orthogonal de ce 2-plan, si $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont deux vecteurs orthogonaux normés du 2-plan orienté dans l'espace, le repère $(\vec{e}_\alpha)$ est un repère orthonormé composé de vecteurs propres. On a :

$$(6.1) \quad g_{\alpha\beta} = e_{(0)\alpha}e_{(0)\beta} - e_{(1)\alpha}e_{(1)\beta} - e_{(2)\alpha}e_{(2)\beta} - e_{(3)\alpha}e_{(3)\beta}$$

et

$$(6.2) \quad \tau_{\alpha\beta} = k[e_{(0)\alpha}e_{(0)\beta} + e_{(1)\alpha}e_{(1)\beta} + e_{(2)\alpha}e_{(2)\beta} - e_{(3)\alpha}e_{(3)\beta}].$$

Rapporté au repère $(\vec{e}_\alpha)$, le tenseur de MAXWELL donne un vecteur de POYNTING nul et est nécessairement représenté par une matrice de la forme (5.2), avec $\xi_\eta = 0$, puisque, d'après une remarque précédente, $(\vec{e}_\alpha)$ est un repère simple. Comme $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_3$ ont même valeur propre, on a $\xi = 0$, soit $Y = M = 0$.

Seuls Z et N ne sont pas nuls en général. Par suite, dans le repère précédent, F et $*F$ admettent les expressions :

$$(6.3) \quad \begin{cases} F = -Z\theta^0 \wedge \theta^3 + N\theta^1 \wedge \theta^2 \\ *F = N\theta^0 \wedge \theta^3 + Z\theta^1 \wedge \theta^2 \end{cases}$$

F et $*F$ sont linéairement indépendantes et il est clair qu'il n'existe aucune forme linéaire non nulle telle que les produits extérieurs de cette forme par F et $*F$ soient tous deux nuls.

Nous observerons que $\tau_{\alpha\beta}$ admet deux vecteurs propres isotropes que l'on peut définir par :

$$(6.4) \quad \vec{l} = \vec{e}_0 + \vec{e}_3 \quad \vec{l}^* = \vec{e}_0 - \vec{e}_3.$$

Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de F et $*F$: de (6.3) on déduit par exemple :

$$l^\alpha F_{\alpha\beta} = -Zl_\beta \quad l^\alpha (*F)_{\alpha\beta} = Nl_\beta.$$

Inversement tout vecteur propre de F est manifestement vecteur propre de $\tau_{\alpha\beta}$; par suite s'il est isotrope, il est colinéaire à $\vec{l}$ ou $\vec{l}^*$.

7. Le cas singulier.

Pour $k=0$, on a $\Psi = \Phi = 0$. Relativement à tout repère orthonormé, le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux et ont même longueur.

a) Dans ce cas $\eta^2 = \xi^2$ et par suite $\eta = \pm \xi$. Dans un repère simple, $\tau_{01} = \pm \xi^2$. En changeant $\vec{e}_1$ en $-\vec{e}_1$ et simultanément $\vec{e}_2$ en $-\vec{e}_2$ pour ne pas modifier l'orientation du repère, on peut faire en sorte que $\eta = -\xi$. Pour un tel repère, le tenseur MAXWELL admet pour composantes

$$(7.1) \quad (\tau_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \xi^2 & -\xi^2 & 0 & 0 \\ & \xi^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Introduisons le vecteur de longueur nulle :

$$\vec{l} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$$

qui admet pour composantes covariantes :

$$l_0 = 1 \quad l_1 = -1 \quad l_2 = l_3 = 0$$

(7.1) peut être traduite par la relation.

$$(7.2) \quad \tau_{\alpha\beta} = \xi^2 l_\alpha l_\beta$$

$\tau_{\alpha\beta}$ admet pour vecteurs propres les vecteurs du 3-plan tangent le long de $\vec{l}$ au cône élémentaire $ds^2 = 0$. Ils définissent, sauf la direction isotrope définie par $\vec{l}$, des directions orientées dans l'espace. Il est donc impossible ici de trouver un vecteur propre orienté dans le temps et par suite d'annuler le vecteur de Poynting. La forme (7.2) du tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique, où $\vec{l}$ est un vecteur isotrope, est à rapprocher de la forme (4.7) du tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide matériel sans pression.

b) Soit $(\vec{e}_\alpha)$ un repère adapté. Si dans le 2-plan $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{E}$ a pour composantes (Y, Z) , le vecteur $\vec{H}$ orthogonal à $\vec{E}$ et de même longueur a pour composantes $M = -\varepsilon Z$ et $N = \varepsilon Y$ (où $\varepsilon = \pm 1$). Comme $YZ + MN = 0$ le repère est simple. Ainsi, dans le cas singulier, tout repère adapté est simple. D'après (5.1), on a en repère simple :

$$ZN - YN = -\xi^2.$$

Il vient :

$$-\varepsilon(Y^2 + Z^2) = -\xi^2$$

et par suite $\varepsilon = 1$. Ainsi, avec nos conventions de signe, on a en repère adapté :

$$M = -Z \quad N = Y.$$

En utilisant ces expressions des composantes de F et $*F$, il vient :

$$\begin{aligned} F &= Y\theta^2 \wedge (\theta^0 - \theta^1 + Z\theta^3 \wedge (\theta^0 - \theta^1) \\ *F &= Z\theta^2 \wedge (\theta^0 - \theta^1) - Y\theta^3 \wedge (\theta^0 - \theta^1). \end{aligned}$$

En introduisant la forme linéaire λ définie par l_α :

$$\lambda = l_\alpha \theta^\alpha = \theta^0 - \theta^1$$

on obtient

$$(7.3) \quad \begin{cases} F = (Y\theta^2 + Z\theta^3) \wedge \lambda \\ *F = (Z\theta^2 - Y\theta^3) \wedge \lambda \end{cases}.$$

On pourrait en particulier choisir, dans le 2-plan $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{e}_2$ parallèle au champ électrique et $\vec{e}_3$ parallèle au champ magnétique ; on aurait alors $Z = 0$.

Il est clair que pour qu'une forme linéaire annule à la fois F et $*F$ il faut et il suffit qu'elle soit proportionnelle à λ . L'existence de telles formes annulant simultanément F et $*F$ caractérise le cas singulier. Notons que $\lambda \wedge (*F) = 0$ est équivalent à $l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$. Ainsi.

$$(7.4) \quad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0 \quad l^\alpha (*F)_{\alpha\beta} = 0$$

c) Soit V_{m+1} une variété de dimension $(m+1)$ munie d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal. Si $F \neq 0$ est une 2-forme de cette variété, nous dirons que F est une 2-forme singulière s'il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que

$$(7.5) \quad l_\alpha F_{\beta\gamma} + l_\beta F_{\gamma\alpha} + l_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, m)$$

et

$$(7.6) \quad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0.$$

Le vecteur $\vec{l}$ défini à un facteur scalaire près sera dit *vecteur fondamental* de F . Dans le cas de la relativité générale ($m = 3$), (7.5) et (7.6) caractérisent bien les 2-formes correspondant au cas singulier puisque ces relations expriment qu'il existe une forme linéaire annulant simultanément F et $*F$ (qui est ici une 2-forme).

Dans le cas général le vecteur $\vec{l}$ est nécessairement isotrope. En effet s'il ne l'était pas on pourrait choisir un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ tel que l'un des vecteurs du repère, soit $\vec{e}_0$, soit colinéaire à $\vec{l}$. Désignons provisoirement

par u, v des indices prenant les valeurs $1, \dots, m$. En faisant $\alpha=0, \beta=u, \gamma=v$ dans (7-5), il vient $F_{uv}=0$. D'autre part d'après (7-6), $F_{\alpha\beta}=0$. Ainsi si $\vec{l}$ n'était pas isotrope, nécessairement $F=0$.

Il est aisé de déduire de (7-5), (7-6) des expressions de F qui nous seront commodes pour la suite.

Au point x de V_{m+1} , donnons-nous une direction isotrope définie par un vecteur $\vec{l}$ et désignons par $(\vec{n}^{(i)})(i=1, \dots, m-1)$ un système de $(m-1)$ vecteurs orthogonaux, normés, tangents au cône élémentaire le long de la génératrice définie par $\vec{l}$. Au $(m-1)$ -plan déterminé par les $\vec{n}^{(i)}$ est orthogonal un 2-plan orienté dans le temps et contenant $\vec{l}$. Dans ce 2-plan choisissons un vecteur unitaire $\vec{e}_0$ ($e_0^2=1$) arbitraire et soit $\vec{e}_m$ le vecteur normé orthogonal à $\vec{l}_0$ tel que nous puissions prendre $\vec{e}_0 + \vec{e}_m = \vec{l}$. Considérons le repère ortho. normé $(\vec{e}_i)$ défini par $\vec{e}_0, \vec{e}_i = \vec{n}^{(i)}, \vec{e}_m$; si F est une 2-forme singulière de vecteur fondamental isotrope $\vec{l}$, (7-5) se traduit par :

$$(7-7) \quad F_{ij}=0 \quad F_{0i} + F_{mi}=0$$

et (7-6) par :

$$(7-8) \quad F_{0\beta} + F_{m\beta}=0$$

et la forme F est déterminée par la connaissance des $(m-1)$ nombres $a_i = F_{i0}$.

Introduisons les $(m-1)$ 2-formes singulières $\varphi^{(i)}$ définies par :

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(i)} = l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}.$$

Les carrés et produits scalaires de ces formes sont manifestement nuls. Dans le repère $(\vec{e}_i)$ envisagé :

$$\varphi_{j0}^{(i)} = -n_j^{(i)} = \delta_j^i.$$

Il en résulte que si F est une 2-forme singulière de vecteur fondamental $\vec{l}$:

$$(7-9) \quad F_{\alpha\beta} = \sum_i a_i \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_i a_i (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)})$$

F et $\vec{l}$ étant donnés, les a_i ne peuvent dépendre que du système des $\vec{n}^{(i)}$. Ce système peut soit subir la transformation $\vec{n}^{(i)} \rightarrow \vec{n}^{(i)} + \vec{k}^{(i)} \vec{l}$, soit subir une rotation dans le $(m-1)$ -plan qu'il détermine. Dans le premier cas, les formes $\varphi^{(i)}$ et par suite les a_i ne sont pas modifiés. Dans le second cas on peut laisser fixes $\vec{e}_0, \vec{e}_m$ et les F_{i0} déterminent dans le $(m-1)$ -plan envisagé un vecteur; les a_i sont donc les composantes d'un vecteur du $(m-1)$ -plan $(\vec{n}^{(i)})$.

Si l'on pose $b_\alpha = \sum_i a_i n_\alpha^{(i)}$, on voit qu'il existe un vecteur b_α orthogonal à l_α tel que :

$$(7-10) \quad F_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha$$

Un tel vecteur est défini à la transformation près $b_\alpha \rightarrow b_\alpha + kl_\alpha$. On notera que le scalaire positif :

$$|b^2| = -b^\alpha b_\alpha = \Sigma_i (a_i)^2$$

ne dépend que la forme F et du choix du vecteur $\vec{l}$.

d) Etablissons enfin le lemme suivant pour une 2-forme F quelconque de V_4 :

LEMME. - Pour qu'un vecteur propre $\vec{l}$ de la forme $F \neq 0$ soit aussi vecteur propre de $*F$, il faut et il suffit qu'il soit isotrope.

En effet si l est vecteur propre commun de F et $*F$:

$$l^\alpha F_{\alpha\beta} = al_\beta, \quad l^\alpha (*F)_{\alpha\beta} = bl_\beta.$$

On en déduit :

$$al_\beta l^\beta = 0 \quad bl_\beta l^\beta = 0.$$

Si $\vec{l}$ n'était pas isotrope, on aurait $a = b = 0$ et, les relations (7-5), (7-6) étant satisfaites, on en déduirait $F = 0$. Inversement si l^α est un vecteur propre isotrope de F , il est vecteur propre isotrope de $\tau_{\alpha\beta}$ donc de $(*F)$, que F soit régulière ou singulière.

8. Discontinuités des dérivées du champ électromagnétique.

a) En l'absence de tout phénomène d'induction, considérons un champ électromagnétique qui, dans le domaine envisagé, satisfait aux équations de MAXWELL avec un vecteur courant électrique continu. Le champ $F_{\alpha\beta}$ étant par hypothèse de classe $(C^0, C^2 \text{ par morceaux})$, nous sommes conduits à étudier à la traversée de quelles hypersurfaces S les dérivées premières du champ présentent des discontinuités ainsi que la structure même de ces discontinuités.

Nous désignerons par $f(x^\alpha) = 0$ l'équation locale d'une hypersurface S à la traversée de laquelle se produisent de telles discontinuités. Le tenseur métrique étant de classe $(C^1, C^3 \text{ par morceaux})$, la connexion riemannienne associée est continue et si l'on note avec le signe $[]$ la discontinuité d'une quantité à la traversée de S on a

$$[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = [\partial_\gamma F_{\alpha\beta}] \quad (\partial_\gamma \text{ dérivée pfaffienne}).$$

On déduit immédiatement des conditions de HADAMARD sur la propagation des ondes qu'il existe, aux points de S , un tenseur antisymétrique $\varphi_{\alpha\beta}$ tel que :

$$(8-1) \quad [\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = \varphi_{\alpha\beta} l_\gamma$$

où $l_\gamma = \partial_\gamma f$. Désignons par φ la 2-forme définie aux points de S par le tenseur $\varphi_{\alpha\beta}$. En antisymétrisant (8-1), il résulte de $[dF] = 0$:

$$(8-2) \quad l_\alpha \varphi_{\beta\gamma} + l_\beta \varphi_{\gamma\alpha} + l_\gamma \varphi_{\alpha\beta} = 0.$$

En contractant (8-1), il résulte de $[\delta F] = 0$:

$$(8-3) \quad l^\alpha \varphi_{\alpha\beta} = 0.$$

Ainsi la forme φ est singulière en tout point de S et $\vec{l}$ est nécessairement isotrope. L'hypersurface S satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$(8-4) \quad \Delta_1 f = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Les fronts d'onde électromagnétique, ou variétés caractéristiques des équations de MAXWELL, sont les hypersurfaces tangentes en chacun de leurs points au cône élémentaire de ce point. D'autre part $l_\alpha = \partial_\alpha f$ étant un gradient:

$$\nabla_\beta l_\alpha - \nabla_\alpha l_\beta = 0.$$

Par suite

$$l^\beta (\nabla_\beta l_\alpha - \nabla_\alpha l_\beta) = 0$$

et $\vec{l}$ étant de longueur nulle, on a:

$$(8-5) \quad l^\beta \nabla_\beta l_\alpha = 0$$

qui exprime que les trajectoires sur S du champ de vecteurs $\vec{l}$ sont des géodésiques de longueur nulle. Ainsi les rayons électromagnétiques ou bicaractéristiques, qui sont les caractéristiques de (8-4), sont des géodésiques de longueur nulle de la métrique.

b) Soit $(\vec{e}_\alpha)$ un repère en $x \in S$ adapté à la forme φ . Si

$$\lambda = \theta^0 - \theta^1.$$

Il existe un scalaire a tel que $df = a\lambda$. D'après (7-3), on peut trouver deux nombres Y et Z tels que φ s'exprime par:

$$\varphi = \frac{1}{a} (Y\theta^2 + Z\theta^3) \wedge \lambda.$$

De (8-1) il résulte que, relativement au repère envisagé, les seules composantes non nulles du tenseur $[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}]$ sont données par:

$$(8-6) \quad [\nabla_0 F_{20}] = -[\nabla_0 F_{21}] = -[\nabla_1 F_{20}] = [\nabla_1 F_{21}] = Y$$

et

$$(8-7) \quad [\nabla_0 F_{30}] = -[\nabla_0 F_{31}] = -[\nabla_1 F_{30}] = [\nabla_1 F_{31}] = Z.$$

On peut d'ailleurs choisir le repère $(\vec{e}_\alpha)$ de façon que $Z=0$, les seules discontinuités non nulles étant alors donnés par (8-6). Nous avons ainsi pu ramener à une forme canonique les composantes du tenseur $[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}]$.

c) On peut observer qu'il est possible de choisir au voisinage d'un

point x_0 de S un système de coordonnées locales par rapport auquel S admette une équation simple et qui soit tel que son repère naturel en x_0 coïncide avec un repère adapté donné $(\vec{e}_\alpha)$. En effet soit θ_0^α les formes linéaires en x_0 telles que :

$$\theta_0^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha$$

et soit u une variable telle que l'équation locale de S soit $u = 0$; de l'étude antérieure il résulte qu'il existe un nombre a tel que :

$$(du)_0 = a(\theta^0 - \theta^1)_0.$$

En modifiant a d'un facteur constant, on peut faire $a = 1$. Cela posé, étant donné une forme linéaire en x_0 , il existe toujours au voisinage de x_0 une fonction locale de classe (C^2, C^4) par morceaux) telle que sa différentielle coïncide en x_0 avec la forme linéaire. Nous pouvons ainsi trouver trois telles fonctions v, x^2, x^3 telles que en x_0

$$(dv)_0 = (\theta^0 + \theta^1)_0 \quad (dx^2)_0 = \theta_0^2 \quad (dx^3)_0 = \theta_0^3.$$

Si nous posons :

$$2x^0 = v + u \quad 2x^1 = v - u$$

nous voyons que :

$$(8.8) \quad (dx^\alpha)_0 = \theta_0^\alpha.$$

D'après l'indépendance des formes linéaires θ_0^α , les 4 fonctions x^α sont à jacobien non nul en x_0 . Nous avons ainsi défini des coordonnées locales (x^α) telles que S admette l'équation $x^0 - x^1 = 0$ et pour lesquelles le repère naturel en x_0 est le repère adapté donné. Dans ces coordonnées

$$[\nabla_0 F_{\alpha\beta}] = -[\nabla_2 F_{\alpha\beta}] = \varphi_{\alpha\beta} \quad [\nabla_2 F_{\alpha\beta}] = [\nabla_3 F_{\alpha\beta}] = 0.$$

9. Relation différentielle portant sur $[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}]$.

Supposons qu'à la traversée de S , le tenseur de courbure de V_4 soit continu. Le tenseur $[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}]$ satisfait alors sur S à une relation différentielle remarquable que nous allons former, *pourvu que J^α soit nul*.

Soit $f(x^\alpha) = 0$ l'équation locale de S , où f est supposée de classe C^2 ; le vecteur $l_\alpha = \partial_\alpha f$ est par suite de classe C^1 et $\nabla_\beta l_\alpha$ est continu à la traversée de S . De plus l_α étant un gradient :

$$(9.1) \quad \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\beta l_\alpha = 0.$$

a) Sur un voisinage U , adoptons des coordonnées locales telles que S admette l'équation $x^0 = 0$. On a alors $g^{00} = 0$ et le vecteur l_α , gradient de x^0 , admet les composantes covariantes :

$$l_0 = 1 \quad l_u = 0 \quad (u = 1, 2, 3).$$

Ses composantes contravariantes sont donc :

$$l^0 = 0 \quad l^u$$

l_α étant de longueur nulle

$$l_\alpha \nabla_\beta l^\alpha = l_0 \nabla_\beta l^0 + l_u \nabla_\beta l^u = \nabla_\beta l^0 = 0.$$

En particulier

$$(9.2) \quad \nabla_0 l^0 = 0.$$

Le tenseur $[\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}]$ satisfait sur S aux relations :

$$(9.3) \quad l_\alpha [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + l_\beta [\nabla_\sigma F_{\gamma\alpha}] + l_\gamma [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] = 0$$

et

$$(9.4) \quad l_\alpha [\nabla_\sigma F^{\alpha\beta}] = 0.$$

Dans les coordonnées locales adoptées, (9.3) s'écrit :

$$(9.5) \quad [\nabla_\sigma F_{uv}] = 0$$

et (9.4) :

$$(9.6) \quad [\nabla_\sigma F^0_\beta] = 0.$$

On notera enfin que $\nabla_u [] = [\nabla_u]$ et que, F et le tenseur de courbure étant continus à la traversée de S , il résulte de l'identité de Ricci que :

$$(9.7) \quad [\nabla_\rho \nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] = [\nabla_\sigma \nabla_\rho F_{\beta\gamma}].$$

b) La relation (9.3) étant satisfaite sur S , on peut la dériver sur cette hypersurface et il vient :

$$\nabla_u (l^\alpha [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}]) + \nabla_u (l^\beta (\nabla_\sigma F_{\gamma\alpha})) + \nabla_u (l_\gamma [\nabla_\sigma F^{\alpha\beta}]) = 0$$

soit en donnant à α la valeur u et sommant :

$$l^u \nabla_u [\nabla_\sigma F_{\alpha\beta}] + (\nabla_u l^u) [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + Q_{\sigma, \beta\gamma} = 0$$

où l'on a posé :

$$Q_{\sigma, \beta\gamma} = \nabla_u l_\beta [\nabla_\sigma F_\gamma^u] + \nabla_u l_\gamma [\nabla_\sigma F_\beta^u] + l_\beta [\nabla_u \nabla_\sigma F_\gamma^u] + l_\gamma [\nabla_u \nabla_\sigma F_\beta^u].$$

En tenant compte de (9.2) et (9.6), on a :

$$(9.8) \quad l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + (\nabla_\rho l^\rho) [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + Q_{\sigma, \beta\gamma} = 0$$

avec

$$Q_{\sigma, \beta\gamma} = [\nabla_\beta l_\rho \nabla_\sigma F_\gamma^\rho + \nabla_\gamma l_\rho \nabla_\sigma F_\beta^\rho] + l_\beta [\nabla_\sigma \nabla_u F_\gamma^u] + l_\gamma [\nabla_\sigma \nabla_u F_\beta^u].$$

De la nullité du vecteur-courant il résulte :

$$Q_{\sigma, \beta\gamma} = [\nabla_\beta l_\rho \nabla_\sigma F_\gamma^\rho + \nabla_\gamma l_\rho \nabla_\sigma F_\beta^\rho] - l_\beta [\nabla_\sigma \nabla_\alpha F_\gamma^\alpha] - l_\gamma [\nabla_\sigma \nabla_\alpha F_\beta^\alpha].$$

Or :

$$\nabla_\beta l_\rho \nabla_\sigma F_\gamma^\rho + \nabla_\gamma l_\rho \nabla_\sigma F_\beta^\rho = \nabla_\beta (l_\rho \nabla_\sigma F_\gamma^\rho) + \nabla_\gamma (l_\rho \nabla_\sigma F_\beta^\rho) - l_\rho (\nabla_\beta \nabla_\sigma F_\gamma^\rho + \nabla_\gamma \nabla_\sigma F_\beta^\rho)$$

où la discontinuité relative au dernier terme peut être évaluée en tenant compte de $dF = 0$. On a ainsi :

$$Q_{\sigma, \beta\gamma} = l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + [\nabla_\beta (l_\rho \nabla^\sigma F_\gamma^\rho) + \nabla_\gamma (l_\rho \nabla^\sigma F_\beta^\rho)] - l_\beta [\nabla_\sigma \nabla_\alpha F_\gamma^\alpha] - l_\gamma [\nabla_\sigma \nabla_\alpha F_\beta^\alpha].$$

Or pour $\beta = u$

$$[\nabla_u (l_\rho \nabla^\sigma F_\gamma^\rho)] = \nabla_u (l_\rho [\nabla_\sigma F_\gamma^\rho]) = 0.$$

Il en résulte :

$$(9.10) \quad Q_{\sigma, uv} = l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{uv}].$$

D'autre part pour $\beta = 0$, $\gamma = u$

$$[\nabla_\alpha (l_\rho \nabla^\sigma F_u^\rho)] = [\nabla_\alpha l^\rho \nabla_\sigma F_{u\rho} + l_\rho \nabla_\alpha \nabla_\sigma F_u^\rho] = [\nabla_\alpha \nabla_\sigma F_u^\alpha]$$

puisque $\nabla_\alpha l^\alpha = 0$. On a ainsi :

$$Q_{\sigma, 0u} = l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{0u}].$$

Soit d'après (9.10)

$$Q_{\sigma, \beta\gamma} = l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}].$$

En reportant dans (9.8), on voit que le tenseur $[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}]$ satisfait sur S à la relation différentielle :

$$2l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] + (\nabla_\rho l^\rho) [\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = 0$$

qui met en évidence la propagation des discontinuités de $\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}$ le long des géodésiques de longueur nulle de S . En particulier si, en un point x de S , $[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = 0$ il en est de même tout le long de la géodésique de longueur nulle issue de x et située sur S .

En posant dans (9.11) $[\nabla_\gamma F_{\alpha\beta}] = \varphi_{\alpha\beta} l_\gamma$, il vient, compte-tenu de $l^\rho \nabla_\rho l_\gamma = 0$

$$2l^\rho \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) \varphi_{\alpha\beta} = 0.$$

Soit Σ une hypersurface orientée dans l'espace et coupant $S(x^0 = 0)$ selon une 2-surface U . Donnons nous aux points de Σ une 2-forme $(F_{\alpha\beta})_\Sigma$ dont les dérivées premières présentent à la traversée de S des discontinuités $[\partial_\alpha F_{\alpha\beta}]_U = = (\varphi_{\alpha\beta})_U$, où $(\varphi_{\alpha\beta})_U$ est une 2-forme définie aux points de U , singulière de vecteur fondamental $(l_\alpha)_U$, donnée arbitrairement. A partir de la donnée de CAUCHY $(F_{\alpha\beta})_\Sigma$ sur Σ , les équations de MAXWELL du vide déterminent en dehors de Σ un champ électromagnétique dont les dérivées premières sont

discontinues à la traversée de S . Le tenseur de discontinuité $\varphi_{\alpha\beta}$ correspondant est nécessairement la solution manifestement singulière de (9-12) correspondant à la donnée initiale $(\varphi_{\alpha\beta})_U$ sur U .

10. Une identité de conservation.

$\varphi_{\alpha\beta}$ étant une 2-forme singulière de vecteur fondamental l_ρ , il existe un vecteur b_ρ orthogonal à l_ρ tel que

$$\varphi_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha.$$

En reportant dans (9-12) cette expression de $\varphi_{\alpha\beta}$, il vient, compte-tenu de $l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0$

$$l_\alpha \{ 2l^\rho \nabla_\rho b_\beta + (\nabla_\rho l^\rho) b_\beta \} - l_\beta \{ 2l^\rho \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho) b_\alpha \} = 0$$

soit :

$$2l^\rho \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho) b_\alpha = k l_\alpha$$

où k est un scalaire. En multipliant les deux membres de cette relation par b^α on obtient :

$$2l^\rho b^\alpha \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho) b^\alpha b_\alpha = 0$$

soit

$$l^\rho \nabla_\rho |b^2| + (\nabla_\rho l^\rho) |b^2| = 0.$$

on en déduit l'identité

$$(10-1) \quad \nabla_\rho (|b^2| l^\rho) = 0$$

F étant donnée, le vecteur l_ρ est défini à un facteur λ près constant le long des géodésiques isotropes trajectoires de l_ρ . Si $l^\rho \rightarrow \lambda l^\rho$, $\varphi_{\alpha\beta} \rightarrow \lambda^{-1} \varphi_{\alpha\beta}$ et par suite $b_\alpha \rightarrow \lambda^{-2} b_\alpha$. Ainsi $|b^2| \rightarrow \lambda^{-4} |b^2|$. Le tenseur

$$(10-2) \quad \tau_{\alpha\beta\gamma\delta} = |b^2| l_\alpha l_\beta l_\gamma l_\delta = -[\nabla_\alpha F_{\rho\gamma}][\nabla_\beta F_{\rho\delta}]$$

ne dépend que de $F_{\alpha\beta}$ et d'après (10-1) est conservatif :

$$(10-3) \quad \nabla_\alpha \tau_{\beta\gamma\delta} = 0.$$

11. Radiation électromagnétique pure.

a) L'étude faite au § 8 nous a montré que la présence de discontinuités des dérivées du champ électromagnétique à la traversée d'une hypersurface S définit aux points de S une 2-forme singulière. Nous sommes ainsi conduits à représenter une radiation électromagnétique pure dans le vide par un champ F défini par une forme *singulière*. Pour un tel champ, il existe d'après (7-2) un champ de vecteurs isotropes $\vec{m}$ tel que le tenseur de MAXWELL puisse s'écrire :

$$(11-1) \quad \tau_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta.$$

Exprimons à partir de (11.1) des conditions de conservation :

$$(11.2) \quad \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0.$$

Il vient :

$$(\nabla_\alpha m^\alpha) m^\beta + m^\alpha \nabla_\alpha m^\beta = 0$$

soit

$$(11.3) \quad m^\alpha \nabla_\alpha m^\beta = -(\nabla_\alpha m^\alpha) m^\beta.$$

L'équation (11.3) exprime que la différentielle absolue du vecteur $\vec{m}$ dans sa propre direction est colinéaire à $\vec{m}$. Il en résulte que les trajectoires du champ de vecteurs $\vec{m}$ sont autoparallèles, c'est-à-dire sont des *géodésiques de longueur nulle de la métrique*.

L'étude des géodésiques d'une connexion linéaire montre qu'il existe, le long de chaque géodésique, un « paramètre affine » σ , défini à une transformation $\sigma \rightarrow a\sigma + b$ près, tel que, pour le vecteur-vitesse $\vec{l} = dx/d\sigma$ correspondant, on ait

$$(11.4) \quad l^\alpha \nabla_\alpha l^\beta = 0.$$

Le vecteur $dx/d\sigma$ est ainsi défini à un facteur scalaire près, constant le long de chaque géodésique.

A $\vec{m}$ nous sommes ainsi conduits à substituer $\vec{l}$ qui lui est colinéaire et satisfait (11.4). Posons

$$m_\alpha = \pi l_\alpha$$

où π est un scalaire. Il vient ainsi :

$$(11.5) \quad \tau_{\alpha\beta} = \pi^2 l_\alpha l_\beta$$

et les conditions de conservation s'écrivent :

$$\nabla_\alpha (\pi^2 l^\alpha) l^\beta + \pi^2 l^\alpha \nabla_\alpha l^\beta = 0.$$

Il en résulte que, par l'introduction du champ de vecteurs l^α considéré, les conditions de conservation du tenseur de MAXWELL se traduisent par (11.4) et la relation

$$(11.6) \quad \nabla_\alpha (\pi^2 l^\alpha) = 0.$$

Ainsi un champ électromagnétique singulier est un champ tel que son tenseur de MAXWELL puisse se mettre sous la forme (11.5) où $\vec{l}$ est un champ de vecteurs isotropes tel que $i(\vec{l}) \cdot F = i(\vec{l})(*F) = 0$ (où $i(\vec{l})$ est l'opérateur « produit intérieur » par $\vec{l}$) et qui peut être astreint à satisfaire (11.4). Ce champ peut-être assimilé à un *fluide de photons* dont les « lignes de courant » trajectoires de $\vec{l}$ sont des rayons électromagnétiques géodésiques de longueur nulle et qui admet une équation de continuité (11.6). Un tel champ traduit

une radiation électromagnétique dont la propagation est bien régie par le cône élémentaire.

b) Si $\vec{l}$ définit un champ de vecteurs isotropes tel que (11-5) soit satisfaite, la dérivée de LIE de F pour le champ $\vec{l}$, soit $L(\vec{l})F$, est donnée par :

$$L(\vec{l})F = di(\vec{l})F + i(\vec{l})dF.$$

Comme $i(\vec{l})F = 0$, $dF = 0$, il vient :

$$(11-7) \quad L(\vec{l})F = 0.$$

Ainsi F est invariante par le champ de vecteurs $\vec{l}$. Si F est nulle en un point x de V_4 , elle est nulle sur toute la géodésique isotrope trajectoire de $\vec{l}$ issue de x . Sous forme explicite (11-7) s'écrit

$$(11-8) \quad l^\rho \nabla_\rho F_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha l_\rho F_{\beta}{}^\rho - \nabla_\beta l_\rho F_{\alpha}{}^\rho = 0.$$

De cette relation, on peut rapprocher une relation un peu différente que nous allons former. Par hypothèse :

$$l^\rho F_{\alpha\beta} + l_\alpha F_{\beta}{}^\rho + l_\beta F_{\alpha}{}^\rho = 0.$$

On en déduit par dérivation, compte-tenu des équations de MAXWELL du vide :

$$(11-9) \quad \nabla_\rho (l^\rho F_{\alpha\beta}) + \nabla_\rho l_\alpha F_{\beta}{}^\rho + \nabla_\rho l_\beta F_{\alpha}{}^\rho = 0.$$

c) F étant singulière, on sait qu'il existe un vecteur b_ρ orthogonal à l_ρ tel que :

$$(11-10) \quad F_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha.$$

Le tenseur de MAXWELL $\tau_{\alpha\beta}$ admet ainsi l'expression suivante :

$$\tau_{\alpha\beta} = -F_{\alpha}{}^\rho F_{\beta\rho} = -(l_\alpha b^\rho - l^\rho b_\alpha)(l_\beta b_\rho - l_\rho b_\beta)$$

soit :

$$\tau_{\alpha\beta} = -(b^\rho b_\rho) l_\alpha l_\beta = |b^2| l_\alpha l_\beta.$$

Ainsi pour le même choix du vecteur l_x satisfaisant (11-4), $\pi^1 = |b^2|$ et (11-6) s'écrit :

$$(11-11) \quad \nabla_\rho (|b^2| l^\rho) = 0.$$

d) L'identité (11-11) peut être établie par une méthode directe ne faisant pas intervenir le tenseur de MAXWELL et qui peut être étendue au cas gravitationnel. En substituant (11-10) dans (11-8) il vient :

$$l_\alpha l^\rho \nabla_\rho b_\beta - l_\beta l^\rho \nabla_\rho b_\alpha - \nabla_\alpha l_\rho l^\rho b_\beta + \nabla_\beta l_\rho l^\rho b_\alpha = 0.$$

En multipliant par b^α on obtient :

$$(11-12) \quad l^\rho b^\alpha \nabla_\rho b_\alpha + \nabla_\alpha l_\rho b^\alpha b^\rho = 0.$$

En précédant de même à partir de (11-9), on obtient d'abord :

$$l_\alpha l^\rho \nabla_\rho b_\beta - l_\beta l^\rho \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho)(l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha) + \nabla_\rho l_\alpha l^\rho b_\beta - \nabla_\rho l_\beta l^\rho b_\alpha = 0.$$

Après multiplication par b_α , il vient :

$$(11-13) \quad l^\rho b^\alpha \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho) b^\alpha b_\alpha - \nabla_\rho l_\alpha b^\alpha b^\rho = 0.$$

Par addition membre à membre de (11-12) et (11-13) on obtient :

$$2l^\rho b^\alpha \nabla_\rho b_\alpha + (\nabla_\rho l^\rho) b^\alpha b_\alpha = 0$$

c'est-à-dire l'identité (11-11).

12. Champ électromagnétique de type intégrable.

Sur un voisinage U de V_4 , donnons-nous un champ électromagnétique F quelconque. En un point x où F est régulière, elle admet deux directions propres isotropes distinctes, en un point où elle est singulière une seule. Considérons le 3-plan $\Pi(x)$ tangent en x au cône élémentaire C_2 le long d'une telle génératrice du cône. Nous pouvons ainsi associer à F , de deux façon au plus, un champ Π de 3-plan tangents aux cônes élémentaires. Nous dirons que *le champ électromagnétique est de type intégrable* si le champ Π est complètement intégrable. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que Π admette une définition par une équation de la forme $d\sigma = 0$, où σ est une fonction, c'est-à-dire qu'on puisse définir le champ de directions isotropes envisagé par un champ de gradient.

Si l_α est un gradient, on a :

$$(12-1) \quad \nabla_\beta l_\alpha - \nabla_\alpha l_\beta = 0$$

et par suite

$$l^\beta (\nabla_\beta l_\alpha - \nabla_\alpha l_\beta) = 0$$

c'est-à-dire, l_α étant de longueur nulle,

$$(12-2) \quad l^\beta \nabla_\beta l_\alpha = 0.$$

Ainsi, pour un champ de type intégrable, les trajectoires de l'un des champs de directions isotropes sont encore des géodésiques de longueur nulle.

13. Permanence du champ singulier de type intégrable.

Considérons un champ électromagnétique F de type intégrable *satisfaisant aux équations de Maxwell du vide* et supposons qu'il existe une hypersurface Σ orientée dans l'espace sur laquelle F soit singulier.

Dire que F est de type intégrable, c'est dire qu'il existe un champ de vecteurs isotropes $\vec{l}$ qui sont des gradients et qui satisfont à :

$$(13-1) \quad l_\alpha F^{\alpha\beta} = a l^\beta.$$

On a alors aussi :

$$(13-2) \quad l_\alpha (*F)_{\alpha\beta} = bl^\beta.$$

Sur Σ , la forme F est singulière et par suite nécessairement $a = b = 0$ sur Σ .

En dérivant (13-1), il vient :

$$\nabla_\beta(al^\beta) = \nabla_\beta l_\alpha F^{\alpha\beta} + l_\alpha \nabla_\alpha F^{\alpha\beta}.$$

De (12-1) et des équations de MAXWELL, il résulte que le second membre est nul. Ainsi :

$$(13-3) \quad \nabla_\beta(al^\beta) = l^\beta \partial_\beta a + a \nabla_\beta l^\beta = 0$$

et de même

$$(13-4) \quad \nabla_\beta(bl^\beta) = l^\beta \partial_\beta b + b \nabla_\beta l^\beta = 0$$

a et b étant nuls sur Σ , il résulte de (13-3) et (13-4) que $a = b = 0$ en dehors de Σ . Par suite le champ électromagnétique est singulier en dehors de Σ . Nous énoncerons ⁽⁴⁾.

THEOREME. - *Si un champ électromagnétique de type intégrable est singulier sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace et satisfait aux équations de Maxwell du vide, il est singulier en dehors de Σ .*

14. Etude du champ singulier de type intégrable.

a) Etant donné un champ singulier complètement intégrable sur un voisinage U , il existe sur ce voisinage une fonction σ , définie à la transformation $\sigma \rightarrow f(\sigma)$ près, où f est une fonction arbitraire, telle que Π soit défini par l'équation $d\sigma = 0$. Il en résulte :

$$d\sigma \wedge F = 0 \quad d\sigma \wedge (*F) = 0.$$

A la fonction σ on donne le nom de *fonction de phase* pour le champ envisagé. Les relations (14-1) caractérisent les champ singuliers de type intégrable. Les variétés $\sigma = \text{const.}$ sont des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

b) Etant donné un champ singulier, rapportons-le à des repères adaptés. Si $\lambda = \theta^0 - \theta^1$, le champ Π peut être défini par l'équation $\lambda = 0$. Pour que ce champ soit complètement intégrable, il faut et il suffit d'après le théorème de FROBENIUS que

$$(14-2) \quad \lambda \wedge d\lambda = 0.$$

⁽⁴⁾ Un résultat un peu plus général a été établi par L. MARIOT.

La condition (14-2) est équivalente à l'annulation des quatre formes de
(14-3) $\theta^\rho \wedge \lambda \wedge d\lambda = 0$ ($\rho = 0, 1, 2, 3$).

Pour $\rho = 0$ et 1 on obtient la condition unique :

$$\theta^0 \wedge \theta^1 \wedge d\lambda = 0.$$

Pour $\rho = 2$ ou 3 on obtient deux conditions qui se trouvent identiquement vérifiées en vertu des équations de MAXWELL. En effet de (7-3) pris avec $Z = 0$ soit :

$$F = Y\theta^2 \wedge \lambda \quad *F = -Y\theta^3 \wedge \lambda$$

il résulte par dérivation puisque $dF = d*F = 0$

$$d(Y\theta^2) \wedge \lambda - Y\theta^2 \wedge d\lambda = 0 \quad d(Y\theta^3) \wedge \lambda - Y\theta^3 \wedge d\lambda = 0.$$

Par produit extérieur par λ , on voit que (14-3) est satisfait pour $\rho = 2$ et 3. Le fait pour une radiation électromagnétique pure d'être de type intégrable n'introduit qu'une condition scalaire supplémentaire.

Si F est *singulier de type intégrable*.

$$\nabla_\alpha l_\rho - \nabla_\rho l_\alpha = 0.$$

De (11-8) et (11-9) il résulte alors par addition membre la relation différentielle :

$$(14-4) \quad 2l^\rho \nabla_\rho F_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) F_{\alpha\beta} = 0$$

relation analogue à (9-11) ou (9-12).

15, Application.

Donnons-nous sur U une fonction σ non constante et un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de MAXWELL du vide. Considérons la 2-forme définie par :

$$(15-1) \quad H = f(\sigma)F$$

où f est une fonction arbitraire non constante. On a manifestement :

$$(15-2) \quad *H = f(\sigma)(*F).$$

Par différentiation extérieure, il vient :

$$dH = f'(\sigma)d\sigma \wedge F \quad d(*H) = f'(\sigma)d\sigma \wedge (*F).$$

Pour que H satisfasse aux équations de MAXWELL du vide, il faut et il suffit que :

$$d\sigma \wedge F = 0 \quad d\sigma \wedge *F = 0$$

c'est-à-dire que F définisse un champ singulier de type intégrable admettant la fonction de phase σ .

THEOREME. — *Etant donnés une fonction σ non constante et un champ électromagnétique F satisfaisant aux équations de Maxwell du vide, pour que le champ*

$$H = f(\sigma)F$$

(f fonction arbitraire non constante) satisfasse aux mêmes équations, il faut et il suffit que F soit un champ singulier de type intégrable admettant σ comme fonction de phase.

Notons que H satisfait alors quel que soit f aux équations de MAXWELL du vide.

II. Fronts d'onde gravitationnelle en relativité générale.

16. Expressions du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci.

Nous nous proposons, dans cette section, d'étudier la notion de front d'onde gravitationnelle en relativité générale. Au cours de cette étude, le tenseur de courbure de la variété riemannienne V_4 jouera un rôle essentiel et il nous faut analyser comment les dérivées secondes des potentiels de gravitation par rapport aux coordonnées locales entrent dans l'expression des composantes de ce tenseur. Considérons une variété riemannienne V_{m+1} de signature quelconque. Dans un voisinage U rapporté à des coordonnées locales (x^x) , soient $\Gamma_{\beta\gamma}^z$ les coefficients de la connexion riemannienne de V_{m+1} relativement aux coordonnées locales. Par définition le tenseur de courbure de V_{m+1} est le tenseur de composantes :

$$(16-1) \quad R_{\beta, \lambda\mu}^x = \partial_\lambda \Gamma_{\beta\mu}^x - \partial_\mu \Gamma_{\beta\lambda}^x + \Gamma_{\rho\lambda}^x \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\mu}^x \Gamma_{\beta\lambda}^\rho.$$

En exprimant les $\Gamma_{\beta\gamma}^z$ à l'aide des symboles de CHRISTOFFEL, il vient :

$$R_{\beta, \lambda\mu}^x = g^{\alpha\rho} (\partial_\lambda [\beta\mu, \rho] - \partial_\mu [\beta\lambda, \rho]) + K_{\beta, \lambda\mu}^x$$

où les $K_{\beta, \lambda\mu}^x$ ne dépendent que des dérivées premières des potentiels $g_{\rho\sigma}$ et des potentiels eux-mêmes. On en déduit :

$$R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \partial_\lambda [\beta\mu, \alpha] - \partial_\mu [\beta\lambda, \alpha] + K_{\alpha\beta, \lambda\mu}$$

et en développant les symboles de CHRISTOFFEL :

$$R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} + \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda}) + K_{\alpha\beta, \lambda\mu}.$$

On obtient ainsi :

$$(16-2) \quad R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} + \partial_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda} - \partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda}) + K_{\alpha\beta, \lambda\mu}.$$

Le tenseur de RICCI de V_{m+1} est défini par :

$$(16-3) \quad R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}_{\beta, \sigma\alpha} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\beta, \sigma\alpha}.$$

Par contraction dans (16-2) des indices α et λ et changement du nom des indices, il vient :

$$(16-4) \quad R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\beta\sigma} g_{\alpha\rho} + \partial_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - \partial_{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} - \partial_{\rho\sigma} g_{\alpha\beta}) + K_{\alpha\beta}.$$

17. Discontinuités des dérivées secondes des potentiels.

Supposons un voisinage U de la variété « espace-temps » V_4 rapporté à un système de coordonnées locales (x^α) . Le tenseur de gravitation étant supposé $(C^1, C^3$ par morceaux) les dérivées secondes des potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ par rapport aux coordonnées locales peuvent admettre à la traversée de certaines hypersurfaces S des discontinuités que nous proposons d'étudier.

Soit donc V_{m+1} une variété différentiable de classe $(C^2, C^4$ par morceaux) munie d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal, de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). Un voisinage U de V_{m+1} étant rapporté à un système de coordonnées locales (x^α) , soit $f(x^\alpha) = 0$ l'équation locale d'une hypersurface S à la traversée de laquelle peuvent se produire des discontinuités. Des conditions de HADAMARD sur la propagation des ondes, il résulte qu'il existe aux points de S un système de quantités locales $a_{\alpha\beta}$ tel que les discontinuités $[\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}]$ s'expriment par les formules :

$$(17-1) \quad [\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] = a_{\alpha\beta} \partial_\lambda f \partial_\mu f.$$

Soit en désignant par l_λ le gradient de f :

$$(17-2) \quad [\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] = a_{\alpha\beta} l_\lambda l_\mu.$$

Etudions comment le système des $a_{\alpha\beta}$ se transforme dans un changement de coordonnées locales. Si $x^\alpha = x^\alpha(x^{\sigma'})$ définit ce changement de coordonnées, on a :

$$g_{\sigma'\tau'} = A_{\sigma'}^\alpha A_{\tau'}^\beta g_{\alpha\beta} \quad \left(A_{\sigma'}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\sigma'}} \right).$$

Par dérivation, il vient

$$\partial_{\nu'} g_{\sigma'\tau'} = A_{\sigma'}^\alpha A_{\tau'}^\beta A_{\nu'}^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta} + (\partial_{\nu'} A_{\sigma'}^\alpha \cdot A_{\tau'}^\beta + A_{\tau'}^\beta \partial_{\nu'} A_{\sigma'}^\alpha) g_{\alpha\beta}.$$

Les dérivées troisièmes $\partial_{\nu'\rho'} A_{\sigma'}^\alpha$ pouvant être discontinues à la traversée de S , les discontinuités à travers S des dérivées secondes des potentiels de la métrique sont reliées par les formules :

$$[\partial_{\nu'\rho'} g_{\sigma'\tau'}] = A_{\sigma'}^\alpha A_{\tau'}^\beta A_{\nu'}^\lambda A_{\rho'}^\mu [\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] + [\partial_{\nu'\rho'} A_{\sigma'}^\alpha] A_{\tau'}^\beta + A_{\tau'}^\beta [\partial_{\nu'\rho'} A_{\sigma'}^\alpha] g_{\alpha\beta}.$$

Si, conformément aux conditions de HADAMARD, nous posons :

$$(17-3) \quad [\partial_{\nu'\rho'} A_{\sigma'}^\alpha] = t_{\alpha\nu\rho} l_{\sigma'}^\alpha,$$

et :

$$(17-4) \quad t_{\beta} = t^{\alpha} g_{\alpha\beta}$$

il vient :

$$(17-5) \quad a_{\sigma'\tau'} = A_{\sigma'}^{\alpha} A_{\tau'}^{\beta} (a_{\alpha\beta} + t_{\beta} l_{\alpha} + t_{\alpha} l_{\beta}).$$

Ainsi si le changement de coordonnées est de classe C^3 au voisinage de S , les $a_{\alpha\beta}$ se transforment selon la loi tensorielle :

$$(17-6) \quad a_{\sigma'\tau'} = A_{\sigma'}^{\alpha} A_{\tau'}^{\beta} a_{\alpha\beta}.$$

Si le changement de coordonnées envisagé est tangent le long de S au changement identité et admet des dérivées troisièmes discontinues à la traversée de S , les $a_{\alpha\beta}$ subissent la transformation :

$$(17-7) \quad a_{\alpha\beta} \rightarrow a_{\alpha\beta} + t_{\alpha} l_{\beta} + t_{\beta} l_{\alpha}.$$

La formule (17-5) peut être considérée comme résultant de la composition de (17-7) et (17-6).

En tenant compte de la formule (17-2), on obtient à partir de (16-2) :

$$(17-8) \quad [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = \frac{1}{2} (a_{\alpha\mu} l_{\beta} l_{\lambda} + a_{\beta\lambda} l_{\alpha} l_{\mu} - a_{\alpha\lambda} l_{\beta} l_{\mu} - a_{\beta\mu} l_{\alpha} l_{\lambda}).$$

Les $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ définissant un tenseur, il en est de même des $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ et la formule (17-8) est nécessairement invariante par la transformation (17-7) comme on le vérifie aisément.

En ce qui concerne le tenseur de RICCI, on a, d'après (16-4) :

$$(17-9) \quad [R_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (a_{\alpha\rho} l_{\beta} l_{\sigma} + a_{\beta\sigma} l_{\alpha} l_{\rho} - a_{\rho\sigma} l_{\alpha} l_{\beta} - a_{\alpha\beta} l_{\rho} l_{\sigma}).$$

18. Variétés caractéristiques des équations d'Einstein

a) Supposons que la métrique de la variété V_{m+1} satisfasse à des « équations d'EINSTEIN » généralisées de la forme

$$(18-1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où $T_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique donné, *supposé continu dans le domaine envisagé*, χ une constante et où $S_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur

$$(18-2) \quad S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R.$$

De (18-2) on déduit par contraction :

$$S = R - \frac{m+1}{2} R = - \frac{m-1}{2} R.$$

Il en résulte pour $m \neq 1$:

$$(18.3) \quad R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{m-1} g_{\alpha\beta} S.$$

De la continuité de $T_{\alpha\beta}$, on déduit d'après (18.1) $[S_{\alpha\beta}] = 0$ et par suite en vertu de (18.3) et de la continuité de la métrique

$$(18.4) \quad [R_{\alpha\beta}] = 0.$$

b) Choisissons un système de coordonnées locales telles que l'hypersurface S à la traversée de laquelle nous étudions les discontinuités ait pour équation locale $x^0 = 0$; l_α admet dans ce cas pour composantes

$$(18.5) \quad l_0 = 1 \quad l_u = 0 \quad (u, v, \text{etc.} \dots = 1, 2, \dots, m).$$

Les seules dérivées secondes qui peuvent être discontinuités à la traversée de S sont les $\partial_{00}g_{\alpha\beta}$ et l'on a

$$[\partial_{00}g_{uv}] = a_{uv} \quad [\partial_{00}g_{0\alpha}] = a_{0\alpha}$$

où les a_{uv} sont invariants par la transformation (17.7) et où les $a_{0\alpha}$ se transforment selon

$$a_{0\alpha} \rightarrow a_{0\alpha} + t_\alpha + t_0 l_\alpha.$$

Le choix des t_α ou des t^α permet d'annuler ou de faire apparaître des discontinuités des $\partial_{00}g_{0\alpha}$. De plus, d'après (17.9), il vient:

$$(18.6) \quad [R_{uv}] \equiv -\frac{1}{2} g^{00} a_{uv} = 0$$

$$(18.7) \quad [R_{0u}] \equiv -\frac{1}{2} g^{0v} a_{uv} = 0$$

$$(18.8) \quad [R_{00}] \equiv -\frac{1}{2} g^{uv} a_{uv} = 0$$

et les premiers membres de (18.6), (18.7), (18.8) ne font pas intervenir les $[\partial_{00}g_{0\alpha}]$. Nous dirons que les dérivées $\partial_{00}g_{uv}$ sont *significatives* relativement à l'hypersurface et que les $(m+1)$ dérivées $\partial_{00}g_{0\alpha}$ sont *non significatives*. C'est le cas où les dérivées significatives présentent des discontinuités qu'il convient d'examiner.

Si toutes les discontinuités des dérivées significatives ne sont pas nulles il existe un $a_{uv} \neq 0$ et de (18.6) il résulte

$$(18.9) \quad g^{00} = 0.$$

Le vecteur l^α admet alors les composantes:

$$l^0 = 0 \quad l^u = g^{0u}$$

et d'après (18.7), il satisfait aux relations

$$(18.10) \quad a_{uv}l^v = 0.$$

De plus d'après (18.8)

$$(18.11) \quad a \equiv g^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} = 2g^{0u}a_{0u} = 2a_{0u}l^u.$$

En coordonnées locales arbitraires. (18.9) s'écrit :

$$g^{\alpha\beta}l_\alpha l_\beta = 0$$

et le gradient de f est de longueur nulle. Ainsi S est nécessairement solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0$$

c'est-à-dire, pour le cas de la relativité générale, de (9.4).

Ainsi dans ce cas ($m = 3$), les *fronts d'onde gravitationnelle*, ou variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN sont les hypersurfaces tangentes en chacun de leurs points au cône élémentaire en ce point. Les *rayons gravitationnels*, trajectoires du champ de vecteurs défini par $\vec{l}$ sur une telle hypersurface, sont toujours des géodésiques de longueur nulle.

Revenons au cas général d'une variété V_{m+1} . Les équations (18.10) et (18.11) peuvent se traduire en coordonnées locales arbitraires par la relation

$$(18.12) \quad a_{\alpha\beta}l^\beta = \frac{a}{2} l_\alpha \quad (a = g^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}).$$

On voit en particulier que le vecteur l^α de longueur nulle est vecteur propre de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. On vérifiera immédiatement que (18.12) est invariant par la transformation (17.7).

Inversement, si l^α est de longueur nulle et satisfait à (18.12), on a $[R_{\alpha\beta}] = 0$.

19. Lemme sur les variétés admettant un groupe d'isométries. Cas pentadimensionnel.

On sait que la considération d'une variété pentadimensionnelle munie d'un groupe d'isométries à un paramètre permet d'unifier géométriquement champ gravitationnel et champ électromagnétique (en l'absence d'induction). Nous allons plus généralement rappeler des formules relatives à une variété V_{m+1} admettant un groupe à 1 paramètre d'isométries.

α) Considérons une variété différentielle V_{m+1} , de dimension $(m + 1)$, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que la variété espace-temps, c'est-à-dire (C^2 , C^4 par morceaux). Sur cette variété, nous supposons définie une métrique riemannienne $d\sigma^2$ de type hyperbolique normal à 1 carré

positif et m carrés négatifs et de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). Nous supposons, au cours de ce paragraphe, que les indices grecs prennent les valeurs $0, 1, \dots, m$ et les indices latins les valeurs $1, 2, \dots, m$. En coordonnées locales la métrique s'écrit :

$$(19.1) \quad d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

et sur un voisinage, elle peut être décomposée en la somme algébrique de carrés :

$$(19.2) \quad d\sigma^2 = (\theta^m)^2 - (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - \dots - (\theta^{m+1})^2$$

où les θ^z sont des formes de PFAFF locales linéairement indépendantes. Par dualité le voisinage envisagé de V_{m+1} se trouve muni de repères orthonormés.

Nous supposons que V_{m+1} admet un groupe connexe à 1 paramètre d'isométries globales, à trajectoires orientées $d\sigma^2 < 0$, ne laissant invariant aucun point de V_{m+1} et jouissant de la propriété suivante : par passage au quotient par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries, on obtient une variété différentiable V_m de classe $(C^2, C^4$ par morceaux) ; les points z de V_m peuvent être identifiés aux différentes trajectoires du groupe dans V_{m+1} .

Soit $\vec{\xi}$ le vecteur générateur infinitésimal du groupe d'isométries ; aucun point de V_{m+1} n'étant invariant, $\vec{\xi}$ ne s'annule pas. Il satisfait aux équations de KILLING

$$(19.3) \quad L(\vec{\xi})g_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\beta = 0.$$

Soit (x^i) un système de coordonnées locales arbitraires de V_m . Un point x de V_{m+1} peut être repéré par sa trajectoire $z(x)$ et sur cette trajectoire par une coordonnée (x^0) . Dans les coordonnées locales (x^i) les trajectoires du champ de vecteurs $\vec{\xi}$ sont les lignes $x^i = \text{const.}$ et l'on a :

$$\xi^i = 0 \quad \xi^0 \neq 0.$$

Effectuons le changement de coordonnées locales défini par :

$$x^i = x^{i'} \quad x^0 = f(x^{0'}, x^{j'}).$$

On peut choisir f de façon que la nouvelle composante

$$\xi^0 = A_0^0, \quad \xi^{0'} = \frac{\partial f}{\partial x^{0'}} \quad \xi^{0'} = 1.$$

Il suffit de prendre :

$$\frac{\partial f}{\partial x^{0'}} = \frac{1}{\xi^{0'}} \quad (\xi^{0'} \neq 0)$$

et la fonction f se trouve définie à une fonction additive près de coordonnées $(x^{j'})$. Dans le système de coordonnées (x^i) ainsi défini

$$\xi^i = 0 \quad \xi^0 = 1$$

x^λ est dit *adapté au groupe d'isométries* envisagé. Dans ce système $\xi_x = g_{x^0}$ et par suite $\nabla_\beta \xi_x = [\beta 0, x]$. Par suite les équations de KILLING (19-3) se traduisent par :

$$(19-4) \quad \partial_0 \gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Les systèmes de coordonnées locales adaptés au groupe d'isométries sont définis au changement près :

$$(19-5) \quad x^{i'} = \psi^{i'}(x^i) \quad x^{0'} = x^0 + \psi(x^i)$$

où ψ sont des fonctions arbitraires des x^i .

A chaque point x d'un voisinage de V_{m+1} associons un repère orthonormé dont le premier vecteur soit tangent en x à la trajectoire passant par ce point. Un tel repère est dit *adapté au groupe d'isométries*. Relativement aux repères adaptés, il vient :

$$(19-6) \quad d\sigma^2 = -(\theta^0)^2 + (\theta^m)^2 - (\theta^1)^2 - \dots - (\theta^{m-1})^2$$

et les θ^i s'annulent le long des trajectoires. Si (x^λ) est un système adapté de coordonnées locales, les θ^i sont des formes de PFAFF par rapport aux dx^i et (19-6) n'est autre que la décomposition en carrés de $d\sigma^2$, la variable dx^0 jouant le rôle de variable directrice. On en déduit :

$$(19-7) \quad d\sigma^2 = -(\theta^0)^2 + ds^2$$

avec

$$(19-8) \quad \theta^0 = \frac{1}{\sqrt{|\gamma_{00}|}} (\gamma_{00} dx^0 + \gamma_{0i} dx^i)$$

et

$$(19-9) \quad ds^2 = (\theta^m)^2 - (\theta^1)^2 - \dots - (\theta^{m-1})^2 = \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^j.$$

De (19-9), il résulte que ds^2 est indépendant du système de coordonnées locales adaptées choisi et, dans ce système, est indépendant de x^0 . La forme quadratique ds^2 détermine sur V_m une métrique riemannienne de type hyperbolique, la *métrique quotient*, de coefficients

$$(19-10) \quad g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}}.$$

b) Le carré du vecteur $\vec{\xi}$ est strictement négatif et nous le désignerons par $-\xi^2$. En coordonnées adaptées $\gamma_{00} = -\xi^2$ et ξ définit sur V_m un champ *scalaire*.

Considérons maintenant le vecteur φ_α de V_{m+1} colinéaire à ξ_α et défini par

$$(19-11) \quad \beta \varphi_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{\xi^2}$$

où β désigne une constante convenable. En coordonnées adaptées

$$(19-12) \quad \beta \varphi_i = \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} \quad \beta \varphi_0 = 1.$$

Considérons le rotationnel $F_{\alpha\beta}$ de φ_α . D'après (19-12)

$$F_{0\alpha} = \partial_0 \varphi_\alpha - \partial_\alpha \varphi_0 = 0.$$

D'autre part si l'on effectue le changement de coordonnées locales adaptées défini par $x'' = x^i$, $x^0' = x^0 + \psi(x^i)$

$$(19-13) \quad \varphi_i = \varphi_{i'} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

et par suite $F_{ij} = F_{i'j'}$. Ainsi les F_{ij} définissent sur V_m un tenseur antisymétrique.

Il est aisé de voir la signification géométrique de la nullité du tenseur F_{ij} . S'il est possible de trouver, pour un voisinage U de V_m , des coordonnées locales adaptées telles que les trajectoires correspondant à U soient *trajectoires orthogonales* des hypersurfaces $x^0 = \text{const.}$, on a dans ce système $\xi_i = \gamma_{0i} = 0$, $\varphi_i = 0$ et par suite $F_{ij} = 0$. Inversement si $F_{ij} = 0$, le tenseur $F_{\lambda\mu}$ de V_{m+1} est nul et ($\beta \varphi_0 = 1$, $\beta \varphi_i$) définit localement un champ de gradient. Il existe donc, dans un voisinage U de V_m , une fonction $\psi(x^i)$ telle que :

$$\beta \varphi_\alpha = \partial_\alpha [x^0 + \psi(x^i)].$$

Ainsi $F_{ij} = 0$ exprime qu'il existe des coordonnées locales adaptées telles que les trajectoires du groupe correspondant à un voisinage U soient trajectoires orthogonales d'hypersurfaces $x^0 = \text{const.}$

c) Sur V_m nous avons ainsi défini, à partir de la métrique de V_{m+1} et du groupe d'isométries, une métrique (19-10), un scalaire ξ et un tenseur antisymétrique F_{ij} .

Rapportons V_{m+1} à des repères orthonormés adaptés. D'après (19-9) la variété V_m considérée comme variété riemannienne pour la métrique-quotient se trouve ainsi rapportée à des repères orthonormés. On peut exprimer les composantes $R_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ du tenseur de courbure de V_{m+1} en fonction des composantes du tenseur de courbure de V_m , de ξ et des composantes du tenseur antisymétrique F .

On démontre en effet les formules suivantes ⁽⁵⁾:

$$(19.14) \quad R_{ij,kl} = \overset{*}{R}_{ij,kl} + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} (F_{ik} F_{jl} - F_{il} F_{jk}) + \frac{\beta^1 \xi^2}{2} F_{ij} F_{kl}$$

$$(19.15) \quad R_{ij,k0} = \frac{\beta}{2} (\xi \overset{*}{\nabla}_k F_{ij} + 2 \partial_k \xi F_{ij} - \partial_i \xi F_{jk} + \partial_j \xi F_{ik})$$

$$(19.16) \quad R_{i0,k0} = \frac{1}{\xi} \overset{*}{\nabla}_k (\partial_i \xi) + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ir} F_{kr}$$

où les éléments relatifs à la métrique ds^2 ont été munis d'une $*$.

d) Plaçons-nous dans le cas pentadimensionnel ($m = 4$). Pour les théories JORDAN-THIRY et de KALUZA-KLEIN les hypothèses précédentes sont satisfaites et le tenseur antisymétrique F_{ij} peut être interprété comme le champ électromagnétique.

Des formules précédentes, il résulte qu'à la traversée d'une hypersurface S , les discontinuités des composantes du tenseur de courbure de V_5 peuvent s'écrire :

$$(19.17) \quad [R_{ij,kl}] = [\overset{*}{R}_{ij,kl}]$$

$$(19.18) \quad [R_{ij,k0}] = \frac{\beta}{2} \xi [\overset{*}{\nabla}_k F_{ij}]$$

$$(19.19) \quad [R_{i0,k0}] = \frac{1}{\xi} [\overset{*}{\nabla}_k (\partial_i \xi)]$$

(19.18) montre que l'étude des discontinuités des dérivées premières $[\overset{*}{\nabla}_k F_{ij}]$ du champ électromagnétique est équivalente à celle des discontinuités des composantes $R_{ij,k0}$ du tenseur de courbure de V_5 .

Nous sommes ainsi conduits, pour analyser la structure des ondes gravitationnelles dans l'espace-temps à étudier les discontinuités des composantes du tenseur de courbure de la métrique de la relativité générale.

20. Formules relatives aux discontinuités du tenseur de courbure pour V_{m+1} .

Revenons au cas d'une variété riemannienne V_{m+1} munie d'une métrique riemannienne de type hyperbolique normal à un carré positif et m carrés négatifs.

⁽⁵⁾ Voir LICHTNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, p. 119; les formules ont été transformées compte-tenu de la signature de la métrique et de l'orientation des trajectoires.

a) De la formule (17-8), il est possible de déduire une relation intéressante entre $l_\gamma = \partial_\gamma f$ et le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ de discontinuité du tenseur de courbure à la traversée de l'hypersurface S d'équation locale $f(x^\alpha) = 0$. On a :

$$(20-1) \quad l_\gamma [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = \frac{1}{2} (a_{\alpha\mu} l_\beta l_\gamma - a_{\beta\mu} l_\gamma l_\alpha) l_\lambda + \frac{1}{2} (a_{\beta\lambda} l_\gamma l_\alpha - a_{\alpha\lambda} l_\beta l_\gamma) l_\mu.$$

Par permutation circulaire des indices α, β, γ , il vient :

$$(20-2) \quad l_\alpha [R_{\beta\gamma, \lambda\mu}] = \frac{1}{2} (a_{\beta\mu} l_\gamma l_\alpha - a_{\gamma\mu} l_\alpha l_\beta) l_\lambda + \frac{1}{2} (a_{\gamma\lambda} l_\alpha l_\beta - a_{\beta\lambda} l_\gamma l_\alpha) l_\mu$$

et

$$(20-3) \quad l_\beta [R_{\gamma\alpha, \lambda\mu}] = \frac{1}{2} (a_{\gamma\mu} l_\alpha l_\beta - a_{\alpha\mu} l_\beta l_\gamma) l_\lambda + \frac{1}{2} (a_{\alpha\lambda} l_\beta l_\gamma - a_{\gamma\lambda} l_\alpha l_\beta) l_\mu.$$

Par addition membre à membre de (20-1), (20-2), (20-3) nous obtenons les relations :

$$(20-4) \quad l_\alpha [R_{\beta\gamma, \lambda\mu}] + l_\beta [R_{\gamma\alpha, \lambda\mu}] + l_\gamma [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = 0.$$

b) Supposons de plus que la métrique de V_{m+1} satisfasse aux « équations d'EINSTEIN » généralisées avec un tenseur second membre continu.

A la traversée de l'hypersurface

$$(20-5) \quad [R_{\alpha\beta}] = 0$$

et d'après l'étude du § 18, le vecteur l^x satisfait à la relation (18-12).

De (17-8) on déduit :

$$l^x [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = \frac{1}{2} (a_{\alpha\mu} l^\lambda l_\beta l_\lambda - a_{\alpha\lambda} l^\lambda l_\beta l_\mu) + \frac{1}{2} (a_{\beta\lambda} l_\mu - a_{\beta\mu} l_\lambda) l_\alpha l^x$$

l^x étant de longueur nulle, le deuxième terme du second membre est nul. De plus d'après (18-12)

$$a_{\alpha\mu} l^\lambda l_\lambda - a_{\alpha\lambda} l^\lambda l_\mu = \frac{a}{2} (l_\lambda l_\mu - l_\mu l_\lambda) = 0.$$

Ainsi (20-5) entraîne

$$(20-6) \quad l_x [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = 0.$$

c) On peut aussi établir directement les relations (20-4) et (20-6) de la manière suivante : les coefficients Γ de la connexion riemannienne en coordonnées locales étant continues à la traversée de S , il résulte des conditions de HADAMARD qu'il existe un système de quantités $u_{\beta\mu}^\alpha$ telles que :

$$[\partial_\lambda \Gamma_{\beta\mu}^\alpha] = u_{\beta\mu}^\alpha l_\lambda \quad (l_\lambda = \partial_\lambda f).$$

De (16-1) il résulte :

$$(20-7) \quad [R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}] = u^{\alpha}_{\beta\mu} l_{\lambda} - u^{\alpha}_{\beta\lambda} l_{\mu}.$$

Par multiplication par l_{ν} et permutation circulaire sur λ, μ, ν il vient :

$$(20-8) \quad l_{\lambda}[R^{\alpha}_{\beta, \mu\nu}] + l_{\mu}[R^{\alpha}_{\beta, \nu\lambda}] + l_{\nu}[R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}] = 0$$

qui est équivalent à (20-4).

Si la relation (20-5) est satisfaite, on déduit de (20-7) :

$$u^{\alpha}_{\beta\mu} l_{\rho} - u^{\alpha}_{\beta\rho} l_{\mu} = 0.$$

En multipliant (20-7) par l_{α} , il vient ainsi :

$$l_{\alpha}[R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}] = u^{\alpha}_{\beta\rho} l_{\lambda} l_{\mu} - u^{\alpha}_{\beta\lambda} l_{\rho} l_{\mu} = 0$$

c'est-à-dire (20-6). Introduisons les formes de courbure :

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{2} R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}.$$

Aux discontinuités du tenseur de courbure, nous associons les 2-formes définies aux points de S .

$$[\Omega^{\alpha}_{\beta}] = \frac{1}{2} [R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}] \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu}.$$

Les relations (20-6) et (20-8) expriment que *toutes les formes locales* $[\Omega^{\alpha}_{\beta}]$ *sont singulières, le vecteur nécessairement isotrope* l_x *étant vecteur propre isotrope commun.*

21. Cas général d'un tenseur admettant le type de symétrie d'un tenseur de courbure.

Au point x de la variété riemannienne V_{m+1} admettant une métrique de type hyperbolique normal, considérons un tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ ($\neq 0$) jouissant des mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure :

$$(21-1) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = -H_{\beta\alpha, \lambda\mu} = -H_{\alpha\beta, \mu\lambda} \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = H_{\lambda\mu, \alpha\beta}.$$

Supposons qu'il existe un vecteur l_x tel que soient satisfaites les relations :

$$(21-2) \quad l_x H_{\beta\gamma, \lambda\mu} + l_{\beta} H_{\gamma x, \lambda\mu} + l_{\gamma} H_{x\beta, \lambda\mu} = 0$$

et

$$(21-3) \quad l^x H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

Si nous posons :

$$(21-4) \quad \Pi_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} H_{\alpha\beta, \lambda\mu} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$$

les relations (21-2) et (21-3) expriment que les formes $\Pi_{\lambda\mu}$ sont toutes singulières et admettent le vecteur l_α , nécessairement isotrope d'après § 7, comme vecteur propre isotrope commun.

Ainsi le vecteur l_α envisagé est nécessairement isotrope.

Nous nous proposons d'étudier la structure du tenseur contracté :

$$(21-5) \quad H_{\alpha\beta} = g^{\rho\sigma} H_{\alpha\rho, \beta\sigma}.$$

En contractant dans (21-2) les indices α et λ , il vient, compte tenu des propriétés de symétrie :

$$(21-6) \quad l^\alpha H_{\alpha\mu, \beta\gamma} + l_\gamma H_{\beta\mu} - l_\beta H_{\gamma\mu} = 0$$

qui n'est conséquence que de (21-2).

En tenant compte de (21-3) dans (21-6), il vient :

$$(21-7) \quad l_\alpha H_{\beta\mu} - l_\beta H_{\gamma\mu} = 0.$$

Si ν^μ est un vecteur arbitraire en x :

$$l_\gamma H_{\beta\mu, \nu^\mu} - l_\beta H_{\gamma\mu, \nu^\mu} = 0.$$

Il en résulte

$$H_{\beta\mu, \nu^\mu} = \lambda(\vec{\nu}) l_\beta$$

où $\lambda(\vec{\nu})$ est une forme linéaire en $\vec{\nu}$. Ainsi il existe un scalaire τ tel que :

$$(21-8) \quad H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta.$$

b) Inversement supposons que le tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ admettant les propriétés (21-1) et le vecteur l_α satisfassent aux relations (21-2) et (21-8). Nous avons vu que (21-2) entraînait (21-6). En tenant compte de (21-8) on obtient ainsi :

$$l^\alpha H_{\alpha\mu, \beta\gamma} = 0$$

c'est-à-dire (21-3) et l^α est nécessairement isotrope. Nous énoncerons :

THÉOREME. — *Etant donnés, en un point x d'une variété riemannienne V_{m+1} admettant une métrique hyperbolique normale, un tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ jouissant des propriétés de symétrie (21-1) et un vecteur l_α , pour que ces éléments soient liés par les relations (21-2), (21-3) et (21-8) il faut et il suffit que soient satisfaites soit les relations (21-2) et (21-3), soit les relations (21-2) et (21-8); $\vec{l}$ est alors isotrope.*

c) Les indices λ et μ étant fixés, la 2-forme $\Pi_{\lambda\mu}$ en x est singulière de vecteur fondamental isotrope $\vec{l}$. En introduisant la base $\varphi^{(i)}$ des 2-formes singulières de vecteur fondamental $\vec{l}$ défini au § 7, il vient :

$$H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \sum_i a_{i(\lambda\mu)} \varphi_{\alpha\beta}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, (m-1)).$$

Pour i fixé, les $a_{i(\lambda\mu)}$ définissent encore une 2-forme singulière de vecteur fondamental l et :

$$a_{i(\lambda\mu)} = \sum_j a_{ij} \varphi_{\lambda\mu}^{(j)}.$$

Il en résulte :

$$H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \sum_{ij} a_{ij} \varphi_{\alpha\beta}^{(1)} \varphi_{\lambda\mu}^{(j)}$$

et d'après la propriété de symétrie $H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = H_{\lambda\mu, \alpha\beta}$, il vient $a_{ij} = a_{ji}$. Ainsi :

$$(21.9) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \sum_{ij} a_{ij} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l_\lambda n_\mu^{(j)} - l_\mu n_\lambda^{(j)}).$$

Par contraction on obtient :

$$(21.10) \quad H_{\alpha\beta} = - \sum_i (a_{ii}) l_\alpha l_\beta$$

$H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ et l^α étant donnés, les a_{ij} ne peuvent dépendre des $\vec{n}^{(i)}$. Pour la transformation $\vec{n}^{(i)} \rightarrow \vec{n}^{(i)} + k^{(i)} \vec{l}$, les formes $\varphi^{(i)}$ et par suite les a_{ij} sont invariants : pour une rotation du système des $\vec{n}^{(i)}$ dans le $(m-1)$ -plan qu'ils déterminent, les a_{ij} sont les composantes d'un tenseur symétrique. En particulier, lorsque H est donné, il est possible de choisir pour vecteurs $n^{(i)}$ un système de vecteurs propres de la matrice (a_{ij}) par rapport à la matrice unité et ainsi d'annuler a_{ij} pour $i \neq j$.

Si nous introduisons les quantités symétrique :

$$(21.11) \quad b_{\alpha\lambda} = \sum_i a_{ij} n_\alpha^{(i)} n_\lambda^{(j)}$$

il vient selon (21.9) :

$$(21.12) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = b_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + b_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - b_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - b_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu$$

et l'on a manifestement :

$$(21.13) \quad b_{\alpha\lambda} l^\lambda = 0.$$

Ainsi il existe des quantités $b_{\alpha\lambda}$ satisfaisant (21.13) et telles que le tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ admette l'expression (21.12). Cherchons à quelle transformation près ces quantités sont définies : à cet effet multiplions (21.12) par v^β , où v^β désigne un vecteur arbitraire. Si le tenseur H est nul, il vient :

$$\{ (v^\beta l_\beta) b_{\alpha\lambda} - v^\beta b_{\beta\lambda} l_\alpha \} l_\mu - \{ (v^\beta l_\beta) b_{\alpha\mu} - v^\beta b_{\beta\mu} l_\alpha \} l_\lambda = 0.$$

Il en résulte qu'il existe des quantités t_α telles que :

$$(v^\beta l_\beta) b_{\alpha\lambda} - v^\beta b_{\beta\lambda} l_\alpha = t_\alpha l_\lambda (v^\beta l_\beta).$$

Ainsi les $b_{\alpha\lambda}$ ont nécessairement la forme:

$$b_{\alpha\lambda} = t_\alpha l_\lambda + u_\lambda l_\alpha = t_\alpha l_\lambda + t_\lambda l_\alpha + (u_\lambda - t_\lambda) l_\alpha.$$

D'après la symétrie de $b_{\alpha\lambda}$; $u_\lambda - t_\lambda$ est colinéaire à l_λ et peut être annulé par modification de t_α . En tenant compte de (21-13), on voit que les $b_{\alpha\lambda}$ satisfaisant à (21-12), (21-13) sont définis à la transformation près:

$$(21-14) \quad b_{\alpha\lambda} \rightarrow b_{\alpha\lambda} + t_\alpha l_\lambda + t_\lambda l_\alpha \quad (\text{avec } t_\alpha l^\alpha = 0).$$

On notera que le scalaire

$$e = b_{\alpha\lambda} b^{\alpha\lambda}$$

ne dépend en vertu de (21-14) que du tenseur H et du choix du vecteur $\vec{l}$. De plus si les $b_{\alpha\lambda}$ sont définis à partir de (21-11), on a:

$$(21-15) \quad e = \sum_{i,j} (a_{ij})^2.$$

Ainsi e est strictement positif et ne s'annule que si $H = 0$.

d) Plaçons-nous dans le cas $m = 3$ de la *relativité générale*. Soit $\vec{e}_0$ un vecteur normé orienté $ds^2 > 0$, $\vec{e}_1$ un vecteur normé orthogonal à $\vec{e}_0$ et tel qu'on puisse prendre

$$\vec{l} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1.$$

A partir de $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, construisons un repère orthonormé $(\vec{e}_\lambda)$ au point x de V_4 . Nous désignons ici par $u, v \dots$ des indices prenant les valeurs 1, 2, 3, par $A, B, \dots$ des indices prenant les valeurs 2, 3. Dans ce repère les relations (21-3) se traduisent par:

$$(21-16) \quad H_{0\beta, \lambda\mu} + H_{1\beta, \lambda\mu} = 0.$$

Dans (21-2) faisons $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = 0$. Il vient:

$$(21-17) \quad H_{AB, \lambda\mu} = 0.$$

En faisant dans la même formule $\alpha = 1$, $\beta = B$, $\gamma = 0$, on a:

$$(21-18) \quad H_{0B, \lambda\mu} + H_{1B, \lambda\mu} = 0$$

et l'ensemble des relations (21-17), (21-18) est équivalent à (21-2). Par suite si $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ et l_α isotrope sont déjà liés par les relations (21-3) et (21-8), les relations (21-2) ne se traduisent que par (21-17) soit

$$H_{23, \lambda\mu} = 0.$$

Nous nous proposons d'établir que pour $m = 3$, (21-2) est une conséquence de (21-3) et (21-8) où l_x est supposé isotrope. D'après (21-16,) $H_{23,10} = 0$. De plus d'après cette même relation :

$$H_{A0, B0} = -H_{A1, B0} = H_{A1, B1}.$$

Pour faire intervenir (21-8) remarquons qu'en repère orthonormé, on a, compte-tenu de la signature

$$H_{\alpha\beta} = H_{x0, \beta 0} - H_{xu, \beta u}.$$

De (21-8) on déduit ainsi

$$(21-19) \quad \begin{cases} H_{AB} = H_{A0, B0} - H_{A1, B1} - H_{AC, BC} = 0 \\ H_{1B} = -H_{1A, BA} = 0 \\ H_{0B} = -H_{0A, BA} = 0. \end{cases}$$

En donnant dans (21-19) à A, B, C les valeurs 2 et 3, on obtient :

$$H_{23, 23} = 0 \quad H_{23, 31} = H_{23, 12} \quad H_{23, 20} = H_{23, 30} = 0$$

c'est-à-dire (21-17): (21-2) est donc établi. Nous énoncerons :

THÉOREME. - *Etant donnés, en un point x d'une variété riemannienne V_4 admettant une métrique de type hyperbolique normal un tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ jouissant des propriétés de symétrie (21-1) et un vecteur l^x isotrope, si ces éléments satisfont (21-3) et (21-8), ils satisfont (21-2).*

e) Le tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ peut être identifié à un tenseur symétrique construit sur l'espace des bivecteurs en x . Cet espace admet la métrique définie par le tenseur

$$(21-20) \quad \gamma_{\alpha\beta, \lambda\mu} = g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda}.$$

Dans le cas de la variété V_4 de la relativité générale, l'espace des bivecteurs envisagé est de dimension 6. Si $\vec{e}_\lambda$ est un repère orthonormé en x de V_4 , nous convenons de poser :

$$(21-21) \quad \begin{cases} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \tau_1 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \tau_2 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \tau_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_0 = \tau_4 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_0 = \tau_5 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_0 = \tau_6. \end{cases}$$

Les $\tau_j (j = 1, \dots, 6)$ définissent une base de l'espace envisagé, orthonormée pour la métrique déterminée par (21-20). Dans cette base, le tenseur métrique (21-20) admet pour seules composantes non nulles :

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1 \quad \gamma_{44} = \gamma_{55} = \gamma_{66} = -1.$$

Ce qui nous fournit la signature de cette métrique. Nous nous proposons d'étudier la *matrice représentative* du tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ dans la base ainsi introduite. C'est une matrice symétrique 6×6 que nous noterons (H_{IJ}) .

Pour $e_2 = n^{(1)}$, $e_3 = n^{(2)}$ les deux formes $\varphi^{(i)}$ ont pour composantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{23}^{(1)} = 0 & \varphi_{40}^{(1)} = 0 \\ \varphi_{34}^{(1)} = 0 & \varphi_{20}^{(1)} = 1 \\ \varphi_{42}^{(1)} = 1 & \varphi_{30}^{(1)} = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{23}^{(2)} = 0 & \varphi_{40}^{(2)} = 0 \\ \varphi_{34}^{(2)} = -1 & \varphi_{20}^{(2)} = 0 \\ \varphi_{42}^{(2)} = 0 & \varphi_{30}^{(2)} = 1 \end{array} \right.$$

De (21.9), il résulte pour la matrice (H_{IJ}) la forme:

$$(21.22) \quad (H_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & -a_{12} & 0 & -a_{12} & -a_{22} \\ 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & -a_{22} & a_{12} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$H_{\alpha\beta}$ satisfait (21.8) avec

$$(21.23) \quad \tau = -(a_{11} + a_{22}).$$

22. - Matrice des discontinuités du tenseur de courbure en relativité générale.

a) En point x d'une hypersurface S à la traversée de laquelle le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ de la variété espace-temps V_4 est discontinu, étudions la matrice $([R_{IJ}])$ ($I, J = 1, \dots, 6$) représentative du tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ relativement à un repère orthonormé tel que $\vec{l} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$.

Des résultats du paragraphe précédent, il est aisé de déduire sa forme puisque $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ satisfait aux relations (21.2) et (21.3). Le tenseur contracté $[R_{\alpha\beta}]$ est ici supposé nul; il résulte alors de (21.23) que:

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

Posons:

$$a_{11} = -a_{22} = \sigma \quad a_{12} = \rho.$$

On obtient ainsi pour la matrice $([R_{IJ}])$ la forme ⁽⁶⁾:

$$(22.1) \quad ([R_{IJ}]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & -\rho & 0 & -\rho & \sigma \\ 0 & -\rho & \sigma & 0 & \sigma & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & \sigma & 0 & \sigma & \rho \\ 0 & \sigma & \rho & 0 & \rho & -\sigma \end{pmatrix}$$

⁽⁶⁾ Cette forme a été obtenue par PIRANI [2] en utilisant les coordonnées locales introduites au § 8.

Le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ étant donné, on peut naturellement par un choix convenable des vecteurs $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ faire $\rho = 0$. Selon (21-9), (22-1) peut être traduite par :

$$(22-2) \quad [R_{IJ}] = \sigma(\varphi_I^{(1)}\varphi_J^{(1)} - \varphi_I^{(1)}\varphi_J^{(2)}) + \rho(\varphi_I^{(1)}\varphi_J^{(1)} + \varphi_J^{(1)}\varphi_I^{(2)}).$$

b) Nous avons vu (voir (17-8)) que :

$$(22-3) \quad [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = \frac{1}{2}(a_{\alpha\mu}l_\beta l_\lambda + a_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu - a_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu - a_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda)$$

où les $a_{\alpha\lambda}$ ne sont astreints qu'à la condition (18-12) soit :

$$(22-4) \quad a_{\alpha\lambda}l^\lambda = \frac{\alpha}{2}l_\alpha$$

et sont définis à la transformation près :

$$(22-5) \quad a_{\alpha\lambda} \rightarrow a_{\alpha\lambda} + t_\alpha l_\lambda + t_\lambda l_\alpha$$

a se transforme selon :

$$a \rightarrow a + 2t_\alpha l^\alpha$$

et il est possible de choisir t_α de façon à annuler a . Supposons qu'il en soit ainsi ; pour ces $a_{\alpha\lambda}$ restreints, la transformation (22-5) est astreinte à la condition $t_\alpha l^\alpha = 0$; si nous posons alors :

$$b_{\alpha\lambda} = -\frac{1}{2}a_{\alpha\lambda}$$

(22-3) prend la forme (21-12) et d'après (22-4) les $b_{\alpha\lambda}$ satisfont bien (21-13). Il en résulte en particulier que *tout tenseur* au point x de V_4 satisfaisant aux propriétés de symétrie (21-1) et aux relations (21-2) et (21-3) peut être le tenseur de discontinuité en x du tenseur de courbure à la traversée du 3-plan tangent au cône élémentaire en x le long de $\vec{l}$.

On vérifie immédiatement que le scalaire (7) :

$$a_{\alpha\lambda}a^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}a^2$$

est invariant par la transformation générale (22-5). Par suite on a pour le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$

$$e = \frac{1}{4}\left(a_{\alpha\lambda}a^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}a^2\right) = b_{\alpha\lambda}b^{\alpha\lambda} > 0.$$

(7) L'introduction de cette quantité est due à STELLMACHER.

23. - Relations différentielles sur les discontinuités du tenseur de courbure.

Revenons à une variété V_{m+1} munie d'une métrique de type hyperbolique normal satisfaisant à des équation d'Einstein à *second membre nul*. Si la courbure de V_{m+1} est discontinue à la traversée d'une hypersurface S , le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ satisfait sur S à une relation différentielle intéressante analogue à (9.11).

Soit $f(x^\alpha) = 0$ l'équation locale de S où f est supposé de classe C^2 . Pour $l_\alpha = \partial_\alpha f$, on a

$$(23-1) \quad \nabla_\alpha l_\beta - \nabla_\beta l_\alpha = 0.$$

a) Sur un voisinage U adoptons des coordonnées locales et des notations identiques à celles du § 9. En particulier dans ces coordonnées $\nabla_0 l^\alpha = 0$. Le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ satisfait sur S aux relations:

$$(23-2) \quad l_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + l_\lambda [R_{\alpha\beta, \mu\rho}] + l_\mu [R_{\alpha\beta, \rho\lambda}] = 0$$

et

$$(23-3) \quad l_\rho [R_{\alpha\beta, \rho\mu}] = 0.$$

Dans nos coordonnées locales, (23-2) et (23-3) s'écrivent respectivement:

$$(23-4) \quad [R_{\alpha\beta, uv}] = 0$$

$$(23-5) \quad [R_{\alpha\beta, \rho\mu}] = 0.$$

b) La relation (23-2) étant satisfaite sur S , il vient en la dérivant sur cette hypersurface:

$$\nabla_u (l^\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]) + \nabla_u (l_\lambda [R_{\alpha\beta, \mu\rho}]) + \nabla_u (l_\mu [R_{\alpha\beta, \rho\lambda}]) = 0.$$

En donnant à ρ la valeur u et sommant, on obtient une relation qui, compte tenu de $\nabla_0 l^\alpha = 0$, peut s'écrire:

$$(23-6) \quad l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + (\nabla_\rho l^\rho) [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + Q_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$$

où l'on a posé:

$$(23-7) \quad Q_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \nabla_\rho l_\lambda [R_{\alpha\beta, \mu\rho}] + \nabla_\rho l_\mu [R_{\alpha\beta, \rho\lambda}] + l_\lambda [\nabla_u R_{\alpha\beta, \mu}^u] + l_\mu [\nabla_u R_{\alpha\beta, \lambda}^u].$$

Comme $R_{\alpha\beta} = 0$, on sait que:

$$\nabla_\rho R_{\alpha\beta, \mu}^\rho = 0.$$

Par suite $Q_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ peut se mettre sous la forme:

$$Q_{\alpha\beta, \lambda\mu} = [\nabla_\lambda l_\rho R_{\alpha\beta, \mu}^\rho + \nabla_\mu l_\rho R_{\alpha\beta, \rho\lambda}] - l_\lambda [\nabla_0 R_{\alpha\beta, \mu}^0] - l_\mu [\nabla_0 R_{\alpha\beta, \lambda}^0].$$

Or :

$$\nabla_\lambda l_\rho \cdot R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho + \nabla_\mu l_\rho \cdot R_{\alpha\beta, \lambda}{}^\rho = \nabla_\lambda (l_\rho R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho) + \nabla_\mu (l_\rho R_{\alpha\beta, \lambda}{}^\rho) - l_\rho (\nabla_\lambda R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho + R_{\alpha\beta, \lambda}{}^\rho).$$

De l'identité de BIANCHI on déduit ainsi :

$$Q_{\alpha\beta, \lambda\mu} = l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + [\nabla_\lambda (l_\rho R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho) + \nabla_\mu (l_\rho R_{\alpha\beta, \lambda}{}^\rho)] - l_\lambda [\nabla_\rho R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho] - l_\mu [\nabla_\rho R_{\alpha\beta, \lambda}{}^\rho].$$

En faisant $\lambda = u$ dans le second terme du second membre, on a :

$$[\nabla_u (l_\rho R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho)] = \nabla_u (l_\rho [R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho]) = 0.$$

Par suite :

$$Q_{\alpha\beta, uv} = l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, uv}].$$

De même $\lambda = 0, \mu = u$

$$[\nabla_0 (l_\rho R_{\alpha\beta, u}{}^\rho)] = [\nabla_0 l^\rho R_{\alpha\beta, u\rho} + l_\rho \nabla_0 R_{\alpha\beta, u}{}^\rho] = [\nabla_0 R_{\alpha\beta, u}{}^0]$$

puisque $\nabla_0 l^0 = 0$. On obtient ainsi :

$$Q_{\alpha\beta, \lambda\mu} = l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}].$$

En reportant dans (23-6), on voit que le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ satisfait sur S à la relation différentielle ⁽⁸⁾ :

$$(23-8) \quad 2l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + (\nabla^\rho l^\rho) [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = 0$$

qui entraîne des conséquences analogues à (9-11) en ce qui concerne $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$: si le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ s'annule en un point x de S , il s'annule tout le long de la géodésique isotrope issue de x et située sur S .

Soit Σ une hypersurface orientée dans l'espace et coupant $S(x^0 = 0)$ selon une 2-surface U . Donnons-nous sur Σ des données de CAUCHY $(g_{\alpha\beta})_\Sigma, (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_\Sigma$, telles qu'à la traversée de S les dérivées secondes admettent les discontinuités $[\partial_{00} g_{\alpha\beta}]_4 = (a_{\alpha\beta})_4$, les $(a_{\alpha\beta})_U$ n'étant astreints qu'à la condition (18-12)

$$\left\{ \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{2} g_{\alpha\beta} \right) l^\beta \right\}_U = 0.$$

Cela revient à se donner aux points de U un tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]_U$ admettant $(l^\rho)_U$ comme vecteur fondamental et dont le tenseur contracté soit nul. Aux données de CAUCHY envisagées correspond une solution des équations d'EINSTEIN $R_{\alpha\beta} = 0$ dont le tenseur de courbure admet à la traversée de S une discontinuité $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$. Le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ est nécessairement la solution de (23-8) correspondant aux données initiales $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]_U$.

⁽⁸⁾ Cette relation a été établie indépendamment par A. TRAUTMAN [1].

c) Nous avons vu que le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ peut s'écrire:

$$[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = b_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu + b_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda - b_{\beta\mu}l_\beta l_\lambda - b_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu$$

où les $b_{\alpha\lambda}$ satisfont à:

$$b_{\alpha\lambda}l^\lambda = 0.$$

Posons:

$$c_{\alpha\lambda} = 2l^\rho \nabla_\rho b_{\alpha\lambda} + (\nabla_\rho l^\rho) b_{\alpha\lambda}.$$

En tenant compte de $l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0$, on voit que (23-8) peut s'écrire:

$$(23-9) \quad c_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu + c_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda - c_{\alpha\mu}l_\beta l_\lambda - c_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu = 0.$$

Par produit de (23-9) par $b^{\alpha\lambda}$ il vient:

$$b^{\alpha\lambda}c_{\alpha\lambda} = 0$$

soit

$$(23-10) \quad 2l^\rho b^{\alpha\beta} \nabla_\rho b_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0.$$

Ainsi le scalaire

$$e = b^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left(a^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} a^2 \right) > 0$$

satisfait à l'identité de conservation:

$$(23-11) \quad \nabla_\rho (e l^\rho) = 0$$

relation semblable à (10-1). Introduisons le tenseur d'ordre 4:

$$(23-12) \quad \tau_{\alpha\beta, \lambda\mu} = e l_\alpha l_\beta l_\lambda l_\mu.$$

Si $\vec{l}$ subit la transformation $l_\alpha \rightarrow \lambda l_\alpha$, alors $b_{\alpha\lambda} \rightarrow \lambda^{-1} b_{\alpha\lambda}$ et $e \rightarrow \lambda^{-4} e$. Le tenseur τ ne dépend donc que du tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ et, compte-tenu de $l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0$, (23-11) exprime que τ est conservatif:

$$(23-13) \quad \nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta\lambda\mu} = 0.$$

On vérifie d'ailleurs immédiatement sur l'expression de $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ en termes des $b_{\alpha\lambda}$ que:

$$(23-14) \quad \tau_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \frac{1}{2} \{ [R_{\alpha\beta, \sigma\lambda}] [R_{\rho\beta, \sigma\mu}] + [R_{\alpha\beta, \sigma\mu}] [R_{\rho\beta, \sigma\lambda}] \}.$$

23 bis. - Cas où il existe un champ électromagnétique.

Dans le cas où il existe dans V_4 un champ électromagnétique satisfaisant aux équations de MAXWELL du vide et relié au champ gravitationnel

par les équations d'EINSTEIN

$$(23 \text{ bis-1}) \quad R_{\alpha\beta} = \chi \tau_{\alpha\beta} \quad (\tau_{\alpha\beta} \text{ tenseur de MAXWELL})$$

supposons qu'à la traversée de l'hypersurface S le tenseur dérivé du champ électromagnétique et le tenseur de courbure soient discontinus.

a) Les hypothèses et les notations étant identiques à celles du § 9, la formule (9.11) doit être modifiée: l'identité de RICCI donne ici

$$[\nabla_\rho \nabla_\sigma F_{\beta\gamma} - \nabla_\sigma \nabla_\rho F_{\beta\gamma}] = -[R^\lambda_{\beta, \rho\sigma}] F_{\lambda\gamma} - [R^\lambda_{\gamma, \rho\sigma}] F_{\beta\lambda}.$$

Il en résulte aisément:

$$[l_\beta \nabla_\rho \nabla_\sigma F_{\gamma}{}^\rho + l_\gamma \nabla_\rho \nabla_\sigma F_{\beta}{}^\rho] = -l_\lambda F^{\lambda\rho} [R_{\rho\sigma, \beta\gamma}]$$

et

$$[l_\rho \nabla_\beta \nabla_\sigma F_{\gamma}{}^\rho + l_\rho \nabla_\gamma \nabla_\sigma F_{\beta}{}^\rho] = -l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + l_\lambda F^{\lambda\rho} [R_{\rho\sigma, \beta\gamma}].$$

On en déduit par le raisonnement même du § 9:

$$(23 \text{ bis-2}) \quad 2l^\rho \nabla_\rho [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] + (\nabla_\rho l^\rho) [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] = 2l_\lambda F^{\lambda\rho} [R_{\rho\sigma, \beta\gamma}].$$

En posant dans (23 bis-2):

$$(23 \text{ bis-3}) \quad [\nabla_\sigma F_{\beta\gamma}] = \varphi_{\beta\gamma} l_\sigma = (l_\beta b_\gamma - l_\gamma b_\beta) l_\sigma$$

et

$$(23 \text{ bis-4}) \quad [R_{\rho\sigma, \beta\gamma}] = b_{\rho\beta} l_\sigma l_\gamma + b_{\sigma\gamma} l_\rho l_\beta - b_{\rho\gamma} l_\sigma l_\beta - b_{\sigma\beta} l_\rho l_\gamma \quad (b_\beta{}^\beta = 0)$$

il vient

$$(23 \text{ bis-5}) \quad 2l^\rho \nabla_\rho (l_\beta b_\gamma - l_\gamma b_\beta) + (\nabla_\rho l^\rho) (l_\beta b_\gamma - l_\gamma b_\beta) = 2l_\lambda F^{\lambda\rho} (b_{\rho\beta} l_\gamma - b_{\rho\gamma} l_\beta).$$

Posons

$$(23 \text{ bis-6}) \quad e_{em} = -b^\beta b_\beta > 0 \quad e_g = b^{\alpha\lambda} b_{\alpha\lambda} > 0.$$

En multipliant (23 bis-5) par b^β il vient:

$$(23 \text{ bis-7}) \quad \nabla_\rho (e_{em} l^\rho) = 2l_\lambda F^{\lambda\rho} b^\sigma b_{\rho\sigma}.$$

b) Reprenons maintenant la raisonnement du § 23 en notant qu'au lieu de $R_{\alpha\beta} = 0$ on a ici (23 bis-1). Il vient:

$$[\nabla R_{\alpha\beta, \mu}{}^\rho] = -\chi [\nabla_\alpha \tau_{\beta\mu} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\mu}].$$

Par suite à la formule (23-8) se trouve substituée la formule:

$$(23 \text{ bis-8}) \quad 2l^\rho \nabla_\rho [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] + (\nabla_\rho l^\rho) [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = \chi l_\lambda [\nabla_\alpha \tau_{\beta\mu} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\mu}] - \chi l_\mu [\nabla_\alpha \tau_{\beta\lambda} - \nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}].$$

Or:

$$[\nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}] = \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} F^{\rho\sigma} [\nabla_\beta F_{\rho\sigma}] - F_{\lambda^\rho} [\nabla_\beta F_{\alpha\rho}] - F_{\alpha\rho} [\nabla_\beta F_{\lambda^\rho}]$$

soit:

$$(23 \text{ bis-9}) \quad [\nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}] = \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} F^{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma} l_\beta - F_{\lambda^\rho} \varphi_{\alpha\rho} l_\alpha - F_{\alpha\rho} \varphi_{\lambda^\rho} l_\beta.$$

En substituant dans (23 bis-8) les expressions de $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ et $[\nabla_\beta \tau_{\alpha\lambda}]$ et en multipliant par $b^{\alpha\lambda}$, il vient:

$$(23 \text{ bis-10}) \quad \nabla_\rho (e_\rho l^\rho) = -2\chi l_\lambda F^{\lambda\rho} b^\sigma b_{\rho\sigma}.$$

De (23 bis-7) et (23 bis-10) on tire:

$$(23 \text{ bis-11}) \quad \nabla_\rho \{ (e_\rho + e_{em}) l^\rho \} = 0$$

qui traduit la conservation de « l'énergie de discontinuité » totale relative au champ gravitationnel et au champ électromagnétique. Le tenseur d'ordre 4 obtenu en combinant (23-14) et (10-2) est donc conservatif.

III. Radiation gravitationnelle en relativité générale.

24. Notion de radiation gravitationnelle pure.

a) De l'étude faite dans la partie II, il résulte que l'on doit s'intéresser en relativité générale aux métriques pour lesquelles il existe un vecteur l_α tel que le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ satisfasse aux relations

$$(24-1) \quad l_\alpha R_{\beta\gamma, \lambda\mu} + l_\beta R_{\gamma\alpha, \lambda\mu} + l_\gamma R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$$

et

$$(24-2) \quad l^\alpha R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

Si $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ n'est pas identiquement nul l_α est nécessairement isotrope. Le tenseur de RICCI de la métrique est alors de la forme

$$(24-3) \quad R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta.$$

S'il en est ainsi en un point x de la variété V_4 , nous dirons qu'en ce point la métrique correspond à un état de *radiation totale pure*. Si en outre le tenseur de RICCI $R_{\alpha\beta}$ est nul, nous dirons que nous avons un état de *radiation gravitationnelle pure*.

Nous montrerons ultérieurement sur un exemple qu'il peut effectivement en être ainsi en tous les points d'un domaine quadrimensionnel de la variété V_4 . Sur un tel domaine l_α définit un champ de génératrices de cônes élémentaires et par suite un champ de 3-plans tangents aux cônes le long de ces génératrices. Si ce champ de plans est complètement intégrable, nous dirons que *la radiation envisagée est de type intégrable*.

b) Sur la variété V_{m+1} supposons qu'il existe un champ de vecteurs l_α tel que (24.1) et (24.2) soient satisfaites. De l'identité de BIANCHI :

$$\nabla_\rho R_{\alpha\beta, \gamma\mu} + \nabla_\alpha R_{\beta\gamma, \lambda\mu} + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha, \lambda\mu} = 0$$

on déduit par produit contracté par l^ϵ , compte-tenu de (24.2) :

$$(24.4) \quad l^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta, \lambda\mu} - \nabla_\alpha l_\rho R_{\beta}^{\rho, \lambda\mu} - \nabla_\beta l_\rho R_{\alpha}^{\rho, \lambda\mu} = 0$$

cette relation joue ici le même rôle que (11.8) ou $L(\vec{l})F = 0$ dans le cas des radiations électromagnétiques.

Supposons $R_{\alpha\beta} = 0$. Par dérivation contractée de :

$$l_\rho R_{\alpha\beta, \lambda\mu} + l_\alpha R_{\beta\gamma, \lambda\mu} + l_\beta R_{\gamma\alpha, \lambda\mu} = 0$$

il vient, compte tenu de $\nabla_\rho R_{\beta}^{\rho, \lambda\mu} = 0$

$$(24.5) \quad \nabla_\rho (l^\rho R_{\alpha\beta, \lambda\mu}) + \nabla_\rho l_\alpha R_{\beta}^{\rho, \lambda\mu} + \nabla_\rho l_\beta R_{\alpha}^{\rho, \lambda\mu} = 0$$

qui joue ici le rôle de (11.9).

Supposons en outre le champ *de type intégrable* $\nabla_\alpha l_\rho = \nabla_\rho l_\alpha$ et par addition de (24.4) et (24.5), on obtient la relation :

$$(24.6) \quad 2l^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta, \lambda\mu} + (\nabla_\rho l^\rho) R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$$

qui est semblable à (14.4).

c) Si le tenseur de RICCI $R_{\alpha\beta}$ de V_{m+1} est $\neq 0$, il est clair que les trajectoires du champ de vecteur défini par l_α sont des géodésiques isotropes. En effet on a nécessairement $R = 0$ et par suite

$$S_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta \quad (\tau \neq 0).$$

Des identités de conservation, on déduit :

$$\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha (\tau l^\alpha) l_\beta + \tau l^\alpha \nabla_\alpha l_\beta = 0.$$

Ainsi pour $\tau \neq 0$, $l^\alpha \nabla_\alpha l_\beta$ est bien colinéaire à l_β .

Il est aisé d'étendre ce résultat au cas général. Nous utiliserons à cet effet (24.4) et introduisons le tenseur défini par

$$(24.7) \quad P_{\alpha\beta, \lambda\mu} = l^\rho \nabla_\rho R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$$

qui présente le même type de symétrie que le tenseur de courbure. De (24.4) on déduit que le tenseur $P_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ satisfait aux relations :

$$(24.8) \quad l_\nu P_{\alpha\beta, \lambda\mu} + l_\lambda P_{\alpha\beta, \mu\nu} + l_\mu P_{\alpha\beta, \nu\lambda} = 0$$

et

$$(24.9) \quad l^\lambda P_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

D'autre part dérivons (24.1) et effectuons le produit contracté par l_ρ . Si nous posons $l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = u_\alpha$, il vient :

$$u_\alpha R_{\beta\gamma, \lambda\mu} + u_\beta R_{\gamma\alpha, \lambda\mu} + u_\gamma R_{\alpha\beta, \lambda\mu} + l_\alpha P_{\beta\gamma, \lambda\mu} + l_\beta P_{\gamma\alpha, \lambda\mu} + l_\gamma P_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

En procédant de même sur (24.2) on a :

$$u^\alpha R_{\alpha\beta, \lambda\mu} + l^\alpha P_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

De (24.8) et (24.9) on déduit ainsi que le vecteur u_α et le tenseur de courbure satisfont aussi aux relations (24.1) et (24.2). Le tenseur de courbure n'étant par identiquement nul, u_α est nécessairement isotrope : mais il est orthogonal à l_α . Il ne peut donc que lui être colinéaire. Ainsi :

THÉOREME. — *Si, sur une variété riemannienne V_{m+1} dont la métrique de type hyperbolique normal est à tenseur de courbure non nul, il existe un champ de vecteurs l_α satisfaisant aux relations (24.1) et (24.2) les trajectoires de ce champ de vecteurs sont des géodésiques de longueur nulle de la métrique.*

25. L'identité de conservation.

Nous nous proposons d'établir pour une *radiation gravitationnelle pure* une identité de conservation analogue à (11.11). A cet effet nous adapterons au cas gravitationnel la méthode indiquée au § 11 d.

En vertu de (24.1) et (24.2) nous pouvons poser :

$$R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = b_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + b_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - b_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - b_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu$$

où les $b_{\alpha\lambda}$ satisfont à :

$$b_{\alpha\lambda} l^\lambda = 0$$

et où l est astreint à

$$(25.1) \quad l^\rho \nabla_\rho l_\alpha = 0.$$

Posons $d_{\alpha\lambda} = l^\rho \nabla_\rho b_{\alpha\lambda}$. En substituant dans (24.4) l'expression précédente de $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$, il vient :

$$\begin{aligned} d_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + d_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - d_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - d_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu - \nabla_\alpha l_\rho (b_{\rho\mu} l_\beta l_\lambda - b_{\rho\lambda} l_\beta l_\mu) - \\ \nabla_\beta l_\rho (b_{\rho\lambda} l_\alpha l_\mu - b_{\rho\mu} l_\alpha l_\lambda) = 0, \end{aligned}$$

Par multiplication par $b^{\alpha\lambda}$, on obtient la relation :

$$(25-2) \quad l^\rho b^{\alpha\beta} \nabla_\rho b_{\alpha\beta} + \nabla_\sigma l_\rho b^{\rho\lambda} b^{\sigma\lambda} = 0.$$

En substituant de même dans (24-5) l'expression de $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ on a :

$$(d_{\alpha\lambda} + (\nabla_\rho l^\rho) b_{\alpha\lambda}) l_\beta l_\mu + (d_{\beta\mu} + (\nabla_\rho l^\rho) b_{\beta\mu}) l_\alpha l_\lambda - (d_{\alpha\mu} + (\nabla_\rho l^\rho) b_{\alpha\mu}) l_\beta l_\lambda - (d_{\beta\lambda} + (\nabla_\rho l^\rho) b_{\beta\lambda}) l_\alpha l_\mu + \\ + \nabla_\rho l_\alpha (b^{\rho\mu} l_\beta l_\lambda - b^{\rho\lambda} l_\beta l_\mu) + \nabla_\rho l_\beta (b^{\rho\lambda} l_\alpha l_\mu - b^{\rho\mu} l_\alpha l_\lambda) = 0.$$

Par multiplication par $b^{\alpha\lambda}$ il vient :

$$(25-3) \quad l^\rho b^{\alpha\beta} \nabla_\rho b_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - \nabla_\rho l_\sigma b^{\rho\lambda} b^{\sigma\lambda} = 0.$$

En ajoutant membre à membre (25-1) et (25-2) on a :

$$2l^\rho b^{\alpha\beta} \nabla_\rho b_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho l^\rho) b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0$$

soit

$$(25-4) \quad \nabla_\rho (e l^\rho) = 0 \quad \text{avec } e = b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} > 0.$$

En introduisant le tenseur d'ordre 4

$$\tau_{\alpha\beta\lambda\mu} = e l_\alpha l_\beta l_\lambda l_\mu$$

qui ne dépend que du tenseur de courbure, on voit que, compte-tenu de (25-1), (25-4) exprime que τ est conservatif.

26. Le tenseur de Bel.

1°) Au point x de la variété riemannienne V_4 , considérons un tenseur $K_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ satisfaisant aux propriétés de symétrie (21-1) du tenseur de courbure et tel que son tenseur contracté vérifie :

$$(26-1) \quad K_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}.$$

Associions-lui le tenseur :

$$(26-4) \quad K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} K^{\rho\sigma}_{, \gamma\delta},$$

Il est aisé de montrer que, sous l'hypothèse (26-1), le tenseur (26-2) jouit encore des propriétés de symétrie (21-1) c'est-à-dire satisfait à ;

$$(26-3) \quad K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* = K_{\gamma\delta, \alpha\beta}^*:$$

En effet si S désigne la sommation après permutation circulaire sur les trois indices α, β, γ supposés distincts, il vient :

$$S K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* = \frac{1}{2} S \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} K^{\rho\sigma}_{, \gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} K^{\sigma\delta}_{, \sigma}.$$

On voit ainsi que, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on a :

$$(26-4) \quad K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* + K_{\beta\gamma, \alpha\delta}^* + K_{\gamma\alpha, \beta\delta}^* = \lambda \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

(26-4) peut aussi s'écrire :

$$K_{\beta\alpha, \delta\gamma}^* + K_{\alpha\delta, \beta\gamma}^* + K_{\delta\beta, \alpha\gamma}^* = \lambda \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Par addition membre à membre on obtient :

$$(26-5) \quad K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* = L_{\alpha\gamma, \beta\delta} + L_{\alpha\delta, \gamma\beta} + \lambda \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

où l'on a posé :

$$2L_{\alpha\beta, \gamma\delta} = K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^* + K_{\gamma\delta, \alpha\beta}^*.$$

Par échange de α et γ, β et δ dans (26-5) on voit que (26-3) est satisfaite.

Considérons maintenant le tenseur :

$$K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{**} = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} \eta_{\gamma\delta\rho\sigma} K^{\lambda\mu, \rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} K_{\gamma\delta}^{*, \lambda\mu}.$$

De (26-3) il résulte :

$$K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{**} = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} \eta^{\lambda\mu\rho\sigma} K_{\gamma\delta, \rho\sigma} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma, \gamma\delta}.$$

Soit :

$$(26-6) \quad K_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{**} = -K_{\alpha\beta, \gamma\delta}.$$

De la relation (26-6) on peut tirer une formule importante pour la suite.
A cet effet formons la quantité :

$$K^{**\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu}^{**} = \frac{1}{16} \eta^{\alpha\beta\rho\sigma} \eta^{\gamma\lambda\tau\mu} \eta_{\alpha\beta\phi\psi} \eta_{\gamma\mu\chi\pi} K_{\rho\sigma, \tau\mu} K^{\phi\psi, \chi\pi}.$$

En introduisant les tenseur indicateurs de KRONECKER on a :

$$K^{**\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu}^{**} = \frac{1}{8} \epsilon_{\phi\psi}^{\sigma\rho} \epsilon_{\mu\chi\pi}^{\lambda\tau} K_{\rho\sigma, \tau\mu} K^{\phi\psi, \chi\pi} = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\gamma\delta}^{\lambda\alpha\beta} K_{\rho\sigma, \alpha\beta} K^{\rho\sigma, \gamma\delta}$$

soit

$$K^{**\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu}^{**} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\lambda} K^{\rho\sigma, \alpha\beta} K_{\rho\sigma, \alpha\beta} - K^{\rho\sigma, \lambda\delta} K_{\rho\sigma, \mu\delta}.$$

On obtient ainsi :

$$(26-7) \quad K^{**\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu}^{**} + K^{\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu} = \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\lambda} K^{\alpha\beta, \gamma\delta} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}.$$

De (26-6) il résulte alors :

$$(26-8) \quad K^{\alpha\beta, \gamma\lambda} K_{\alpha\beta, \gamma\mu} = \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\lambda} K^{\alpha\beta, \gamma\delta} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}.$$

2°) Etant donné un vecteur *unitaire* $\vec{u}$, associons au tenseur $K_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ les deux tenseurs symétriques

$$(26-9) \quad E_{\alpha\beta}(\vec{u}) = K_{\alpha\rho, \beta\sigma} u^{\rho} u^{\sigma} \quad H_{\alpha\beta}(\vec{u}) = -K_{\alpha\rho, \beta\sigma}^{*} u^{\rho} u^{\sigma}.$$

qui satisfont manifestement à :

$$E_{\alpha\beta} u^{\beta} = 0 \quad H_{\alpha\beta} u^{\beta} = 0.$$

La donnée de ces deux tenseurs détermine complètement le tenseur $K_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ supposé satisfaire à (26-1). En effet adoptons un repère orthonormé tel que $\vec{e}_0 = \vec{u}$; F et H sont les tenseurs d'espace de composantes :

$$E_{rs} = K_{r0, s0} \quad H_{rs} = -K_{r0, s0}^{*} \quad (r, s, \dots = 1, 2, 3)$$

et l'on voit que les composantes $K_{rs, tu}$ sont fournies par le tenseur E , les composantes $K_{rs, t0}$ par le tenseur H . Evaluons en particulier

$$(26-10) \quad A = \frac{1}{8} K^{\alpha\beta, \gamma\delta} K_{\alpha\beta, \gamma\delta}.$$

Il vient :

$$A = \frac{1}{2} K^{r0, s0} K_{r0, s0} + \frac{1}{2} K^{rs, t0} K_{rs, t0} + \frac{1}{8} K^{rs, tu} K_{rs, tu}.$$

Or ;

$$K^{r0, s0} K_{r0, s0} = E^{rs} E_{rs}.$$

D'autre part :

$$K^{rs, t0} K_{rs, t0} = \eta^{rsu0} \eta_{rstv0} K_{u0,}^{* t0} K^{* v0},_{t0} = -2 \delta_v^u K_{u0,}^{* t0} K^{* v0},_{t0} = -2 H^{rs} H_{rs},$$

Enfin

$$K^{rs, tu} K_{rs, tu} = K^{* * rs, tu} K_{rs, tu}^{* *} = \eta^{rsv0} \eta^{tuv0} \eta_{rsp0} \eta_{tuq0} K_{v0, w0} K^{p0, q0}$$

soit :

$$K^{rs, tu} K_{rs, tu} = 4 K^{v0, w0} K_{v0, w0} = 4 E^{rs} E_{rs}.$$

Il en résulte :

$$(26-11) \quad A = E^{rs} E_{rs} - H^{rs} H_{rs}.$$

3°) Le tenseur d'ordre 4 qui apparaît au § 23 et le tenseur analogue pour une radiation gravitationnelle pure ont conduit M. BEL [2] à associer à toute métrique satisfaisant :

$$(26-12) \quad R_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta} = 0$$

le tenseur d'ordre 4 :

$$(26-13) \quad B_{\alpha\beta, \lambda\mu} = \frac{1}{2} (R^{\rho, \sigma}_{\alpha, \lambda} R_{\rho\beta, \sigma\mu} + R^{\rho, \sigma}_{\alpha, \mu} R_{\rho\beta, \sigma\lambda}).$$

Ce tenseur est symétrique en α, β , en λ, μ et symétrique par rapport aux couples α, β et λ, μ . Evaluons sa dérivée covariante contractée. De :

$$\nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\beta, \gamma\delta} = 0$$

conséquence de (26-12), il résulte :

$$2\nabla_{\alpha} B^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = R^{\rho\alpha, \sigma}_{\lambda} \nabla_{\alpha} R_{\rho\beta, \sigma\mu} + R^{\rho\alpha, \sigma}_{\mu} \nabla_{\alpha} R_{\rho\beta, \sigma\lambda}.$$

Soit :

$$4\nabla_{\alpha} B^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = R^{\rho\alpha, \sigma}_{\lambda} (\nabla_{\alpha} R_{\rho\beta, \sigma\mu} - \nabla_{\rho} R_{\alpha\beta, \sigma\mu}) + R^{\rho\alpha, \sigma}_{\mu} (\nabla_{\alpha} R_{\rho\beta, \sigma\lambda} - \nabla_{\rho} R_{\alpha\beta, \sigma\lambda}).$$

Ainsi, en vertu de l'identité de BIANCHI :

$$4\nabla_{\alpha} B^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = R^{\rho\alpha, \sigma}_{\lambda} \nabla_{\beta} R_{\rho\alpha, \sigma\mu} + R^{\rho\alpha, \sigma}_{\mu} \nabla_{\beta} R_{\rho\alpha, \sigma\lambda}.$$

Soit

$$4\nabla_{\alpha} B^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = \nabla_{\beta} (R^{\rho\alpha, \sigma}_{\lambda} R_{\rho\alpha, \sigma\mu}).$$

De (26-8) il résulte ainsi :

$$\nabla_{\alpha} B^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\beta} (A g_{\lambda\mu}) \quad \left(\text{avec } A = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta, \gamma\delta} R_{\alpha\beta, \gamma\delta} \right).$$

Ainsi le tenseur :

$$(26-14) \quad T_{\alpha\beta, \lambda\mu} = B_{\alpha\beta, \lambda\mu} - \frac{1}{2} A g_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu}$$

qui admet les mêmes propriétés de symétrie que B , satisfait à l'identité de conservation :

$$(26-15) \quad \nabla_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = 0.$$

Pour une radiation gravitationnelle pure ($R_{\alpha\rho} = 0$), $T_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ se réduit au tenseur $\tau_{\alpha\beta\lambda\mu}$ du § 25. Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, étudions la quantité :

$$T(\vec{u}) = T_{\alpha\beta, \lambda\mu} u^{\alpha} u^{\beta} u^{\lambda} u^{\mu}.$$

Dans un repère orthonormé tel que $\vec{e}_0 = \vec{u}$

$$T(\vec{u}) = T_{00, 00} = B_{00, 00} - \frac{1}{2} A = R^{\rho, \sigma}_{0, 0} R_{\rho 0, \sigma 0} - \frac{1}{2} A = E^{rs}(\vec{u}) E_{rs}(\vec{u}) - \frac{1}{2} A$$

soit :

$$T(\vec{u}) = \frac{1}{2} | E^{rs}(\vec{u}) E_{rs}(\vec{u}) + H^{rs}(\vec{u}) H_{rs}(\vec{u}) | > 0.$$

Ainsi $T(u)$ est strictement positive et n'est nulle que si le tenseur de courbure est nul. Le tenseur $T_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ semble ainsi généraliser dans ce cas le tenseur de MAXWELL.

27. Construction d'un exemple de radiation.

a) Supposons un voisinage U de V_{m+1} muni de la métrique :

$$ds^2 = g_{00}(x^i)(dx^0)^2 + ds^{*2} \quad (g_{00} = -\xi^2 < 0; i = 1, \dots, m)$$

où ds^{*2} est une forme quadratique en les variables (x^i) . La métrique ds^2 admet un groupe à 1 paramètre d'isométries $x^0 \rightarrow x^0 + \text{const.}$ dont le générateur $\vec{\xi}$ a pour composantes $(\xi^0 = 1, \xi^i = 0)$. La métrique quotient est ds^{*2} et le tenseur antisymétrique F_{ij} du § 19 est nul. Si $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ($\alpha, \dots = 0, 1, \dots, m$) et Γ_{jk}^{*i} sont les coefficients des connexions riemanniennes de V_{m+1} et V_m relativement aux coordonnées envisagées :

$$\Gamma_{jk}^{*i} = \Gamma_{jk}^i.$$

Avec les notations du § 19, le tenseur antisymétrique F_{ij} est nul et si l'on rapporte U à des repères orthonormés adaptés, les formules (19.14), (19.15) et (19.16) deviennent :

$$R_{ij,kl} = R_{ij,kl}^*$$

$$R_{ij,k0} = 0$$

$$R_{i0,k0} = \bar{\xi}^i \nabla_k^* (\partial_i \xi).$$

Nous allons utiliser les formules précédentes pour la construction d'un exemple de radiation.

b) L'espace numérique R^4 étant rapporté aux coordonnées :

$$t = x^0 \quad x = x^1 \quad y = x^2 \quad z = x^3 \quad (\alpha \dots = 0, 1, 2, 3)$$

posons

$$(27.1) \quad u = t - x = x^0 - x^1$$

et munissons un domaine D de la métrique définie par :

$$(27.2) \quad ds^2 = e^{2\varphi}(dt^2 - dx^2) - (\xi^2 dy^2 + \eta^2 dz^2) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où $\varphi, \xi > 0, \eta > 0$ sont trois fonctions de la seule variable u . Etant donnée une fonction $f(u)$, nous désignerons par f' sa dérivée en u ; on a alors :

$$\partial_0 f = f' \quad \partial_1 f = -f' \quad \partial_A f = 0 \quad (A, \dots = 2, 3)$$

et

$$\partial_{00} f = f'' \quad \partial_{01} f = -f'' \quad \partial_{11} f = f'' \quad \partial_{AA} f = 0.$$

La métrique (27.2) admet deux groupes à 1 paramètre d'isométries définis par les deux générateurs

$$\xi^0 = \xi^1 = \xi^3 = 0 \quad \xi^2 = 1$$

et

$$\eta^0 = \eta^1 = \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$$

et satisfait de deux façons aux hypothèses du paragraphe précédent. Les nombres ξ et η sont les nombres scalaires associés aux deux générateurs.

Considérons la décomposition en carrés du ds^2

$$ds^2 = (\theta_-^0)^2 - (\theta_-^1)^2 - (\theta_-^2)^2 - (\theta_-^3)^2$$

avec

$$\theta_-^0 = e^\varphi dx^0 \quad \theta_-^1 = e^\varphi dx^1 \quad \theta_-^2 = \xi dx^2 \quad \theta_-^3 = \eta dx^3.$$

Nous définissons ainsi des repères orthonormés adaptés à la fois aux deux groupes d'isométries. La matrice $\left(A_{\beta}^{\alpha}\right)$ de passage des coordonnées (x^β) aux repères orthonormés est diagonale et a pour éléments :

$$(27.4) \quad A_0^0 = e^\varphi \quad A_1^1 = e^\varphi \quad A_2^2 = \xi \quad A_3^3 = \eta$$

la matrice inverse admettant comme seuls éléments nonnuls

$$(25.5) \quad A_0^0 = e^{-\varphi} \quad A_1^1 = e^{-\varphi} \quad A_2^2 = \xi^{-1} \quad A_3^3 = \eta^{-1}.$$

c) Nous nous proposons de calculer les *composantes du tenseur de courbure* de (27.2) par rapport aux repères orthonormés envisagés.

Des formules préliminaires il résulte que si l'un exactement des indices $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ a la valeur 2 ou la valeur 3, $R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} R_{23, 31} &= 0 & R_{23, 12} &= 0 & R_{23, 10} &= 0 & R_{23, 20} &= 0 & R_{23, 30} &= 0 \\ R_{31, 12} &= 0 & R_{31, 10} &= 0 & R_{31, 20} &= 0 & & & & \\ R_{12, 10} &= 0 & & & & & R_{12, 30} &= 0 & & \\ & & & & R_{10, 20} &= 0 & R_{10, 30} &= 0 & & \\ & & & & & & R_{20, 30} &= 0. & & \end{aligned}$$

Avec les notations du 22, les composantes du tenseur de courbure peuvent être rangées en la matrice:

$$(27.6) \quad (R_{IJ}) = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & 0 & 0 & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} & 0 & R_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{35} & 0 & R_{55} & 0 \\ 0 & R_{23} & 0 & 0 & 0 & R_{66} \end{pmatrix}$$

Il nous faut évaluer maintenant les différents éléments figurant encore dans (27.6).

Tout d'abord l'isométrie $x^2 \rightarrow x^2 + \text{const.}$ de ds^2 nous donne par passage au quotient la métrique:

$$ds^{*2} = e^{2\varphi}(dt^2 - dx^2) - \eta^2 dz^2$$

qui admet encore l'isométrie $x^3 \rightarrow x^3 + \text{const.}$, ce qui nous conduit à la nouvelle métrique:

$$ds^{**2} = e^{2\varphi(u)}(dt^2 - dx^2) = e^{2\varphi(u)}dud(t+x)$$

laquelle est manifestement euclidienne. Des formules préliminaires, il résulte avec des notations évidentes:

$$R_{\underline{10}, \underline{10}} = R_{\underline{10}, \underline{10}}^* = R_{\underline{10}, \underline{10}}^{**}.$$

On a ainsi:

$$(27.7) \quad R_{\underline{10}, \underline{10}} = 0.$$

Évaluons maintenant $R_{\underline{23}, \underline{23}}$. De (26.5), il résulte:

$$R_{\underline{23}, \underline{23}} = \bar{\xi}^1 \nabla_s^* (\partial_s \xi).$$

Il vient d'après (27.4)

$$R_{23, 23} = \xi \nabla_s^* (\partial_s \xi)$$

ξ ne dépendant que de u et compte-tenu des formules préliminaires, on a:

$$\nabla_s^* (\partial_s \xi) = -(\Gamma_{33}^0 - \Gamma_{33}^1) \xi'.$$

Or:

$$\Gamma_{33}^0 = g^{00}[33, 0] = -\frac{1}{2}g^{00}g'_{33} \quad \Gamma_{33}^1 = g^{11}[33, 1] = -\frac{1}{2}g^{00}g'_{33}.$$

Il en résulte $R_{23, 23} = 0$ et par suite

$$(27-8) \quad R_{\underline{23}, \underline{23}} = 0.$$

d) On a de même:

$$R_{\underline{12}, \underline{12}} = \bar{\xi}^1 \nabla_1^* (\partial_1 \xi)$$

soit d'après (27-4)

$$R_{12, 12} = \xi \nabla_1^* (\partial_1 \xi).$$

En explicitant la dérivation covariante, il vient:

$$R_{12, 12} = \xi[\xi'' - (\Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^4)\xi].$$

Or

$$\Gamma_{11}^0 = g^{00}[11, 0] = \frac{1}{2} g^{00} g'_{00} = \varphi' \quad \Gamma_{11}^4 = g^{11}[11, 1] = -\frac{1}{2} g^{00} g'_{00} = -\varphi'$$

On en déduit:

$$R_{12, 12} = \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi')$$

et d'après (27-5)

$$(27-9) \quad R_{\underline{12}, \underline{12}} = e^{-2\varphi} \bar{\xi}^1 \nabla_1^* (\partial_1 \xi) = \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi').$$

D'autre part:

$$R_{\underline{12}, \underline{20}} = -\bar{\xi}^1 \nabla_1^* (\partial_0 \xi).$$

C'est-à-dire:

$$(27-10) \quad R_{\underline{2}, \underline{20}} = -\xi \nabla_1 (\partial_0 \xi) = \xi[\xi'' + (\Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^4)\xi].$$

Or:

$$\Gamma_{10}^0 = g^{00}[10, 0] = -\frac{1}{2} g^{00} g'_{00} = -\varphi' \quad \Gamma_{10}^4 = g^{11}[10, 1] = \frac{1}{2} g^{00} g'_{00} = \varphi'.$$

On obtient:

$$(27-11) \quad R_{\underline{12}, \underline{20}} = R_{\underline{20}, \underline{20}} = e^{-2\varphi} \bar{\xi}^1 \nabla_1^* (\partial_0 \xi) = \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi').$$

En ce qui concerne la matrice (27-6), nous avons donc établi:

$$R_{11} = R_{44} = 0$$

et

$$(27-12) \quad R_{\underline{25}} = R_{\underline{35}} = R_{\underline{55}} = e^{-2\varphi} \bar{\xi}^1 \nabla_1^* (\partial_0 \xi) = \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi').$$

En jouant sur l'autre groupe d'isométries, on établirait de même:

$$(27-13) \quad R_{22} = -R_{23} = R_{33} = e^{-2\varphi} \eta(\eta'' - 2\varphi'\eta').$$

Si nous posons:

$$(27-14) \quad a = e^{-2\varphi} \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi') \quad b = e^{-2\varphi} \eta(\eta'' - 2\varphi'\eta')$$

la matrice (R_{IJ}) prend la forme (21-27). Il en résulte que le tenseur de courbure $R_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ de (27-2) et le vecteur l_α de composantes

$$l_0 = 1 \quad l_1 = -1 \quad l_A = 0$$

qui est le gradient de u satisfont aux relations (24-1), (24-2). Il existe par suite un scalaire τ tel que:

$$(27-15) \quad R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta.$$

Ainsi la métrique (27-2) représente aux différents points du domaine D où elle est régulière, un état de *radiation totale pure de type intégrable*. Pour qu'on ait affaire à une radiation gravitationnelle pure, il faut et il suffit que $a + b = 0$, c'est-à-dire que ξ et η satisfassent à la relation:

$$(27-16) \quad \eta(\eta'' - 2\varphi'\eta') + \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi') = 0.$$

Cet état ne sera pas trivial si le tenseur de courbure envisagé n'est pas nul, c'est-à-dire si la relation:

$$(27-17) \quad \eta(\eta'' - 2\varphi'\eta') - \xi(\xi'' - 2\varphi'\xi') = 0$$

n'est pas en outre satisfaite. Posons:

$$\xi\eta = e^\alpha \quad \eta/\xi = e^{2\beta}.$$

La relation (27-16) prend la forme:

$$(27-18) \quad \alpha'' + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\varphi' = 0$$

et la relation (27-17) la forme:

$$(27-19) \quad \beta'' + 2\alpha'\beta' - 2\beta'\varphi' = 0.$$

e) Remarquons que, dans le cas où la métrique (27-2) est euclidienne, on a:

$$2\varphi' = \frac{\xi''}{\xi} = \frac{\eta''}{\eta}.$$

Par intégration, on en déduit qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telle que:

$$C_1\xi + C_2\eta = \text{const.}$$

Si ξ et η sont elles-mêmes des constantes, φ peut être choisie arbitrairement. S'il n'en est pas ainsi:

$$e^{2\varphi} = C_3\xi'.$$

28. - Forme de Rosen pour la métrique.

Un ds^2 du type (27.2) a été introduit en 1937 par ROSEN ^(*) dans une optique différente. Mais il est possible de ramener (27.2) à la forme indiquée par ROSEN. L'expression (27.2) de notre ds^2 admettant en effet un changement arbitraire $u \rightarrow f(u)$, il est possible d'utiliser ce fait pour simplifier la forme de notre métrique.

α) Si $\xi\eta = \text{const.}$, soit $\alpha = \text{const.}$, il résulte de (27.18) que dans le cas gravitationnel ($R_{\alpha\beta} = 0$), on a alors $\eta/\xi = \text{const.}$ soit $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ et le ds^2 envisagé est nécessairement euclidien. Nous choisirons comme variable u celle définie par:

$$\xi\eta = u^2$$

et poserons:

$$v = t + x.$$

Considérons la partie $(R^4)^+$ de R^4 définie par:

$$u = t - x > 0.$$

Sur cette partie la métrique définie par:

$$(28.1) \quad ds^2 = e^{2\varphi}(dt^2 - dx^2) - u^2(e^{-2\beta}dy^2 + e^{2\beta}dz^2)$$

est régulière si les fonctions $\beta(u)$ et $\varphi(u)$ sont pour $u > 0$, de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). Nous avons alors:

$$\alpha = \log u \quad \alpha' = \frac{1}{u} \quad \alpha'' = -\frac{1}{u^2}.$$

Pour que (28.1) satisfasse aux équations $R_{\alpha\beta} = 0$, il faut et il suffit que:

$$(28.2) \quad 2\varphi' = u\beta'^2.$$

(*) ROSEN, « Phys. Z. Sovjet Union », 12, p. 366 (1937); EINSTEIN et ROSEN J. « Franklin Inst. », 223, 43, (1937).

Nous pouvons alors choisir arbitrairement pour $\beta(u)$ une fonction de classe $(C^1, C^3$ par morceaux) pour $u > 0$ et φ se trouvera déterminé par quadrature à partir de la relation (28.2). La métrique obtenue sur $(R^4)^+$ est à tenseur de courbure non nulle si la relation:

$$(28.3) \quad u\beta'' + 2\beta' - u^2\beta'^3 = 0$$

n'est pas satisfaite par β . En particulier en un point où $\beta' = \beta'' = 0$ le tenseur de courbure est nul.

Nous avons ainsi obtenu la métrique indiquée par ROSEN, mais qui n'est valable que pour $(R^4)^+$, ce qui semblait en limiter l'intérêt.

b) En adoptant d'autres coordonnées, il est aisé de munir R^4 d'une métrique partout régulière, euclidienne dans certains domaines et coïncidant dans d'autres domaines avec la métrique de ROSEN.

En un point où $\beta'(u) = 0$, on peut ramener (28.1), soit:

$$(28.4) \quad ds^2 = e^{2\varphi} du dv - u^2(e^{-\beta} dy^2 + e^{\beta} dz^2)$$

à la forme galiléenne. Adoptons à cet effet les coordonnées u, v et

$$(28.5) \quad \bar{y} = ue^{-\beta}y \quad \bar{z} = ue^{\beta}z.$$

Par différentiation, il vient:

$$ue^{-\beta}dy = d\bar{y} - \frac{\bar{y}}{u} du \quad ue^{\beta}dz = d\bar{z} - \frac{\bar{z}}{u} du.$$

On en déduit:

$$u^2(e^{-\beta}dy^2 + e^{\beta}dz^2) = d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - 2\frac{\bar{y}d\bar{y} + \bar{z}d\bar{z}}{u} du + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u^2} du^2$$

et

$$ds^2 = du \left(e^{2\varphi} dv + 2\frac{\bar{y}d\bar{y} + \bar{z}d\bar{z}}{u} - \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u^2} du \right) - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2).$$

En effectuant le nouveau changement de variables

$$(28.6) \quad \bar{u} = u \quad \bar{v} = e^{2\varphi}v + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u}$$

il vient au point considéré, compte tenu de (28.2):

$$ds^2 = d\bar{u}d\bar{v} - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2)$$

et il suffit de poser $\bar{u} = \bar{t} - \bar{x}$, $\bar{v} = \bar{t} + \bar{x}$, pour se trouver ramené à la forme galiléenne.

Cela posé, supposons que β soit une fonction quelconque de classe $(C^1, C^3$ par morceaux) et effectuons sur (28-4) la transformation ⁽¹⁰⁾ définie par:

$$(28-7) \quad \bar{u} = u, \quad \bar{v} = e^{2\beta}v + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u} \quad \bar{y} = ue^{-\beta}y \quad \bar{z} = ue^{\beta}z.$$

Cette transformation définit une application biunivoque, à jacobien non nul, de $(R^4)^+$ sur lui-même. il vient:

$$ue^{-\beta}dy = d\bar{y} - \frac{\bar{y}}{u} du + \beta'\bar{y}du \quad ue^{\beta}dz = d\bar{z} - \frac{\bar{z}}{u} du + \beta'\bar{z}du.$$

Par suite:

$$\begin{aligned} u^2(e^{-2\beta}dy^2 + e^{2\beta}dz^2) &= d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - 2\frac{\bar{y}d\bar{y} + \bar{z}d\bar{z}}{u} du + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u^2} du^2 \\ &+ 2\beta'\left(\bar{y}d\bar{y} - \bar{z}d\bar{z} - \frac{\bar{y}^2 - \bar{z}^2}{u} du\right) du + \beta'^2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)du^2 \end{aligned}$$

D'autre part:

$$d\bar{v} = e^{2\beta}dv + 2\frac{\bar{y}d\bar{y} + \bar{z}d\bar{z}}{u} - \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u^2} du + \beta'[u\bar{v} - (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)]du$$

On en déduit:

$$(28-8) \quad ds^2 = dud\bar{v} - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) - 2\beta'\left(\bar{y}d\bar{y} - \bar{z}d\bar{z} - \frac{\bar{y}^2 - \bar{z}^2}{u} du\right) du - \beta'^2 u\bar{v} du^2$$

u_0 et u_1 étant deux nombres positifs, choisissons pour β' une fonction définie et de classe $(C^1, C^2$ par morceaux) pour $u_0 \leq u \leq u_1$ et telle que:

$$\beta'(u_0) = \beta'(u_1) = 0 \quad \beta''(u_0) = \beta''(u_1) = 0.$$

Considérons l'espace numérique R^4 des ensemble $(u, \bar{v}, \bar{y}, \bar{z})$ et munissons-le de la métrique définie de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \text{pour } u &\leq u_0 & ds^2 &= dud\bar{v} - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) \\ \text{pour } u_0 &\leq u \leq u_1 & \text{le } ds^2 &\text{est donné par (28-8)} \\ \text{pour } u &\geq u_1 & ds^2 &= dud\bar{v} - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2). \end{aligned}$$

La métrique ainsi définie sur R^4 satisfait aux équations $R_{\alpha\beta} = 0$ et est même partout de classe C^2 . Elle n'est pas euclidienne pour $u_0 < u < u_1$ si β' ne satisfait pas (28-3).

Dans cette région, elle représente un *état de radiation gravitationnelle pure*

⁽¹⁰⁾ Cette transformation et le raisonnement qui suit sont dûs à BONDI, « Nature », t. 179, 1072, (1957).

et est de type intégrable. Bien entendu, elle n'est pas euclidienne dans le domaine à l'infini de l'espace.

IV. Formules de déviation

29. – Formule de la déviation géodesique.

Pour étudier les effets physique soit de l'existence d'un front d'onde gravitationnelle avec discontinuités du tenseur de courbure, soit d'une état de radiation, nous utiliserons les formules dites de la déviation géodesique. Dans un domaine Δ de V , considérons les trajectoires spatio-temporelles d'une famille de particules d'essai. Chacune de ces trajectoires est une géodesique de V_4 orientée dans le temps. Nous nous proposons d'étudier « l'accélération relative » (par rapport à s) de deux particules infiniment voisines pour des points de V_4 définissant un vecteur orthogonal aux trajectoires.

a) Les considérations qui suivent sont naturellement locales. Donnons nous, dans un voisinage de V_4 une congruence de courbes orientées dans le temps et désignons par $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent. De cette congruence, extrayons une famille à 1 paramètre de courbes Γ_t qui engendre une surface S de dimension 2. Sur chaque courbe Γ_t , nous utiliserons comme paramètre l'arc s compté, à partir d'une origine convenable. La surface S se trouve ainsi rapportée aux deux paramètres s et t et $x(s, t)$, où $x \in S$, sera supposé deux fois continuellement différentiable par rapport à (s, t) . Le vecteur unitaire $\vec{u}$ tangent en x à Γ_t est le vecteur $\partial x / \partial s$ et nous désignons par $\vec{v}$ le vecteur $\partial x / \partial t$.

Le voisinage envisagé étant rapporté à des coordonnées locales (x^α) , les vecteurs u et v ont respectivement pour composantes :

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s} \quad v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}$$

et

$$(29.1) \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial s}.$$

En terme de différentiation absolue, il vient :

$$\frac{\nabla u^\alpha}{dt} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \frac{\partial x^\gamma}{\partial t} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial s} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta v^\gamma.$$

(I) Voir PIRANI [2].

On a ainsi

$$(29.2) \quad \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{dt} = \frac{\bar{\nabla} v^\alpha}{ds}$$

Cela posé, appliquons à $\vec{u}$ l'identité de RICCI

$$(29.3) \quad \bar{\nabla}_\lambda \bar{\nabla}_\mu u^\alpha - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha = R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho.$$

Etudions le produit du premier membre par $v^\lambda u^\mu$. Il vient:

$$v^\lambda u^\mu (\bar{\nabla}_\lambda \bar{\nabla}_\mu u^\alpha - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha) = u^\mu \frac{\bar{\nabla}}{dt} (\bar{\nabla}_\mu u^\alpha) - v^\lambda \frac{\bar{\nabla}}{ds} \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha$$

soit:

$$v^\lambda u^\mu (\bar{\nabla}_\lambda \bar{\nabla}_\mu u^\alpha - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha) = \frac{\bar{\nabla}}{dt} \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{ds} - \frac{\bar{\nabla}}{ds} \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{dt} - \frac{\bar{\nabla} u^\mu}{dt} \bar{\nabla}_\mu u^\alpha + \frac{\bar{\nabla} v^\lambda}{ds} \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha.$$

De (29.2), il résulte:

$$v^\lambda u^\mu (\bar{\nabla}_\lambda \bar{\nabla}_\mu u^\alpha - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\lambda u^\alpha) = \frac{\bar{\nabla}}{dt} \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{ds} - \frac{\bar{\nabla}^2 v^\alpha}{ds^2}.$$

De (29.3) on déduit ainsi la formule:

$$(29.4) \quad \frac{\bar{\nabla}^2 v^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = \frac{\bar{\nabla}}{dt} \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{ds}$$

b) Supposons que les courbes Γ_t envisagées soient des géodesiques de V_4 .
On a alors:

$$(29.5) \quad \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{ds} = 0.$$

Le vecteur u^α étant unitaire

$$u_\alpha \frac{\bar{\nabla} u^\alpha}{dt} = u_\alpha \frac{\bar{\nabla} v^\alpha}{ds} = 0$$

et d'après (29.5)

$$\frac{\bar{\nabla}}{ds} (u_\alpha v^\alpha) = \frac{\bar{\nabla} u_\alpha}{ds} v^\alpha + u^\alpha \frac{\bar{\nabla} v^\alpha}{ds} = 0.$$

Ainsi sur chaque courbe Γ_t on a

$$u_\alpha v^\alpha = \text{const.}$$

Soit C une trajectoire orthogonale sur S des géodesiques Γ_t et, pour origine de l'arc s sur chaque Γ , adoptons un point de C . AUX points de C ($s = 0$) $\vec{n}$

et $\vec{v}$ sont orthogonaux; par suite sur tout S , $u_\alpha v^\alpha = 0$ et $\vec{v}$ est orthogonal aux géodesiques.

De (29.4) il résulte:

$$(29.6) \quad \frac{\nabla^2}{ds^2} v^\alpha + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = 0.$$

C'est à cette formule qu'on donne le nom de formule de l'écart géodesique. Les points correspondants sur deux géodesiques infiniment voisines étant ceux définis par la direction de v^α orthogonal aux géodesiques, elle nous fournit ce qu'on peut appeler l'accélération relative, par rapport à s , des deux particules d'essai qui décrivent ces géodesiques.

30. - Applications.

a) Au voisinage du point x , considérons les trajectoires spatio-temporelles des particules d'essai envisagées, supposées soumises au seul champ de gravitation. Si Γ est la trajectoire issue de x , introduisons en ce point un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ tel que le premier vecteur $\vec{e}_0$ coïncide avec le vecteur unitaire tangent en x à Γ . Au point x le vecteur $\vec{u}$ admet les composantes

$$(30.1) \quad u^0 = 0 \quad u^u = 0 \quad (u = 1, 2, 3)$$

et $\vec{v}$ étant orthogonal à $\vec{u}$ admet les composantes:

$$(30.2) \quad v^0 = 0 \quad v^u.$$

Transportons par parallélisme le repère initial le long de Γ et munissons le voisinage de Γ d'une famille de repère prolongeant C^2 les repères ainsi attachés aux différents points de Γ . Si $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne de V_4 relativement à cette famille de repères, on a sur Γ :

$$(30.3) \quad \gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma = 0.$$

Évaluons aux points de Γ les composantes de $\frac{\nabla^2 v^\alpha}{ds^2}$. Il vient en ces points

$$\frac{\nabla v^\alpha}{ds} = \frac{dv^\alpha}{ds} + \gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma v^\beta$$

et par dérivation

$$(30.4) \quad \frac{\nabla^2 v^\alpha}{ds^2} = \frac{d^2 v^\alpha}{ds^2} + \frac{d}{ds} (\gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma v^\beta) + \gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma \frac{\nabla^2 v^\beta}{ds^2}$$

Sur Γ on a donc d'après (30.3)

$$\frac{\nabla^2 v^\alpha}{ds^2} = \frac{d^2 v^\alpha}{ds^2}$$

et l'équation (29.6) prend la forme

$$(30.5) \quad \frac{d^2 v^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = 0.$$

b) Les trajectoires des particules d'essai soumises au seul champ de gravitation sont des géodesiques orientées dans le temps de V_4 . Il en résulte qu'en tout point de Γ , $\vec{e}_0 = \vec{u}$ et par suite $v^0 = 0$ sur Γ .

Au point x choisi, (30.5) s'écrit pour $\alpha = u$:

$$(30.6) \quad \frac{d v^u}{ds^2} + R^u_{0, r0} v^r = 0$$

et pour $\alpha = 0$ nous n'obtenons, d'après la remarque précédente qu'une identité. Supposons qu'il existe sur V_4 un front d'onde gravitationnelle passant par x , avec discontinuités du tenseur de courbure. De (30.6) il résulte:

$$(30.7) \quad \left[\frac{d^2 v^u}{ds^2} \right] = - [R^u_{0, v0}] v^v$$

soit:

$$(30.8) \quad \left[\frac{d^2 v^u}{ds^2} \right] = K^u_v v^v$$

en posant:

$$K^u_v = - [R^u_{0, v0}].$$

Le vecteur $\vec{e}_0$ étant fixé en x , nous avons du choisir le vecteur $\vec{e}_u$ du repère en ce point de façon que la matrice des discontinuités du tenseur de courbure prenne la forme (22.1). La matrice (K^u_v) peut alors s'écrire (avec $\rho = 0$):

$$(30.9) \quad (K^u_v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

et (30.10) peut être explicité par les relations:

$$(30.10) \quad \left[\frac{d^2 v^1}{ds^2} \right] = 0 \quad \left[\frac{d^2 v^2}{ds^2} \right] = \sigma v^2 \quad \left[\frac{d^2 v^3}{ds^2} \right] = -\sigma v^3$$

qui nous donnent les composantes de la discontinuité de l'accélération relative. La composante le long de $\vec{e}_1$ c'est à dire dans la direction d'espace de la propagation de l'onde est toujours nulle. La discontinuité envisagée dépendant linéairement du vecteur $\vec{v}$ en x , nous pouvons étudier le cas général comme superposition des deux cas particuliers suivants:

I°) Si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$, on a $v^2 = v^3 = 0$ et la discontinuité de l'accélération relative est nulle.

2°) Si $\vec{v}$ et dans le 2-plan $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, c'est à dire orthogonale à la direction d'espace de la propagation de l'onde:

$$(30.11) \quad v^2 = v \cos \vartheta \quad v^3 = v \sin \vartheta$$

où ϑ est l'angle de $\vec{e}_2$ avec $\vec{v}$. On a alors:

$$(30.12) \quad \left[\frac{d^2 v^2}{ds^2} \right] = \sigma v \cos \vartheta \quad \left[\frac{d^2 v^3}{ds^2} \right] = -\sigma v \sin \vartheta$$

et la discontinuité est portée par la direction du plan (e_2, e_3) définie à partir de $\vec{e}_2$ par l'angle $-\vartheta$.

On a ainsi mis en évidence le caractère transversal de l'onde gravitationnelle et mis en place la discontinuité de l'accélération relative produite par le front d'onde.

Dans un domaine de V_4 où la métrique représente un état de *radiation gravitationnelle pure*, on voit sur (30.6) que les résultats sont identiques en ce qui concerne l'accélération relative elle-même.

31. Déviation des trajectoires de particules chargées en présence d'un champ électromagnétique.

Supposons que dans un domaine Δ de V_4 existe un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ et proposons-nous d'étudier par analogie avec celle d'une géodesique, la déviation de la trajectoire d'une particule d'essai chargée qui se trouvera ainsi soumise à la fois au champ gravitationnel et au champ électromagnétique. Les trajectoires spatio-temporelles des particules chargées satisfont au système différentiel qui s'exprime en coordonnées locales par:

$$(31.1) \quad \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = k F^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{ds}$$

où la constante k caractérise le rapport de la charge à la masse de la particule envisagée.

a) Donnons nous sur Δ une poussière de particules chargées pour lesquelles le rapport k est le même et extrayons de la congruence de leurs trajectoires sur Δ une famille à 1 paramètre t de trajectoires Γ_t . Les hypothèses, et les notations étant identiques à celles du § 29, a, le système différentiel (31.1) peut s'écrire:

$$(31.2) \quad \frac{\nabla u^\alpha}{ds} = k F^\alpha_\beta u^\beta$$

On a d'autre part (29-4), soit:

$$(31-3) \quad \frac{\nabla^2 v^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla u^\alpha}{ds}$$

De (31-1) il résulte: $\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla u^\alpha}{ds} = k \left(\nabla_\rho F^\alpha_\beta u^\beta v^\rho + F^\alpha_\beta \frac{\nabla v^\beta}{ds} \right)$.

Ainsi le vecteur v^α satisfait au système différentiel:

$$(31-4) \quad \frac{\nabla^2 v^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = k \left(\nabla_\rho F^\alpha_\beta u^\beta v^\rho + F^\alpha_\beta \frac{\nabla v^\beta}{ds} \right).$$

Soit C une trajectoire orthogonale, sur la surface engendrée, des courbes Γ_t envisagées. Adoptons pour origine de l'arc, sur chaque Γ_t , un point de C . Aux points de C ($s=0$) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, mais il n'en est plus de même ici en dehors de C puisque:

$$\frac{d}{dt}(u_\alpha v^\alpha) = \frac{\nabla u^\alpha}{ds} v_\alpha = k F_{\alpha\beta} v^\alpha u^\beta$$

n'est pas identiquement nul.

La formule (31-4) fournit l'accélération relative, par rapport à s , de deux particules d'essai infiniment voisines, les points correspondants des deux trajectoires spatio-temporelles étant ceux de même s , compté à partir de C .

b) x étant un point déterminé de l'une des trajectoires spatio-temporelles précédentes Γ , introduisons en ce point un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ tel que le premier vecteur $\vec{e}_0$ coïncide avec le vecteur unitaire $\vec{u}$ tangent en x à Γ . D'après une remarque précédente, nous pouvons supposer qu'en ce point x , $\vec{v}$ est *orthogonal* à $\vec{u}$. Ainsi en x , les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ admettent les composantes (30-1) et (30-2).

En adoptant dans le voisinage de Γ une famille de repères identiques à ceux définis au § 30, a, (31-4) prend la forme:

$$(31-5) \quad \frac{d^2 v^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\rho, \lambda \mu} u^\rho v^\lambda u^\mu = k \left(\nabla_\rho F^\alpha_\beta u^\beta v^\rho + F^\alpha_\beta \frac{dv^\beta}{ds} \right)$$

Supposons qu'il existe sur V_4 un front d'onde S à la fois gravitationnelle et électromagnétique passant par x ; à la traversée de S il y a discontinuités du tenseur de courbure et du tenseur dérivé du champ électromagnétique.

Nous supposons naturellement que la métrique satisfait à des équations d'EINSTEIN à second membre continu et que $F_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations de MAXWELL avec vecteur-courant continu. De (31-5) il résulte qu'au point x envisagé:

$$(31-6) \quad \left[\frac{d^2 v^\alpha}{ds^2} \right] + [R^\alpha_{\rho, \lambda \mu}] u^\rho v^\lambda u^\mu = k [\nabla_\rho F^\alpha_\beta] u^\beta v^\rho.$$

Pour $\alpha = 0$ et compte-tenu du choix du repère en x , (31-6) donne:

$$(31-7) \quad \left[\frac{d^2 v^0}{ds^2} \right] = 0.$$

Pour $\alpha = u$ et compte-tenu des expressions (30-1) et (30-2) des composantes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$:

$$(31-8) \quad \left[\frac{d^2 v^u}{ds^2} \right] = K^u_v v^v + k[\nabla_v F^u_0] v^v$$

où les notations sont identiques à celles du § 30.

Le vecteur $\vec{e}_0$ étant fixé en x et le vecteur $\vec{l}$ déterminé par S , nous choisissons $\vec{e}_1$ tel qu'on puisse prendre $\vec{l} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$. Pour un choix convenable de $\vec{e}_2$ dans le 2-plan ($\vec{e}_2, \vec{e}_3$) la matrice K^u_v a la forme (30-9). Quant à la matrice $(\nabla_v F^u_0)$ elle a d'après les considérations du § 9, tous ses éléments nuls pour $v \neq 1$ et d'après (7, 3):

$$[\nabla_1 F^1_0] = 0.$$

Nous posons: $[\nabla_1 F^2_0] = \mu$ $[\nabla_1 F^3_0] = \nu$
et (31-8) peut être explicité par les relations:

$$\left[\frac{d^2 v^1}{ds^2} \right] = 0 \quad \left[\frac{d^2 v^2}{ds^2} \right] = \sigma v^2 + k_{\mu} v^1 \quad \left[\frac{d^2 v^3}{ds^2} \right] = -\sigma v^3 + k_{\nu} v^1$$

qui donnent les composantes de la discontinuité en x de l'accélération relative.

La composante le long de $\vec{e}_1$ de cette discontinuité est toujours nulle. Si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$ la discontinuité est d'origine purement électromagnétique. Si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{e}_1$, la discontinuité est d'origine purement gravitationnelle.

V. Remarques sur le cas pentadimensionnel

32. Composantes du tenseur de courbure, du tenseur de Ricci et du tenseur d'Einstein.

Les résultats précédents nous conduisent à étudier les fronts d'onde et les discontinuités du tenseur de courbure dans le cadre des théories pentadimensionnelles, théorie de KALUZA-KLEIN et théorie de JORDAN-TIRY.

Nous considérons une variété riemannienne V_5 satisfaisant aux hypothèses du § 19 et nous rappelons d'abord les expressions des composantes $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ ($\alpha \dots$ voir indice grec $= 0, 1, 2, 3, 4$) en repères orthonormés adaptés du tenseur

de courbure. Si $i, j, .. = 1, 2, 3, 4$, il vient:

$$(32.1) \quad R_{ij,kl} = R_{ij,kl}^* + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} (F_{ik} F_{jl} - F_{il} F_{jk}) + \frac{\beta^2 \xi^2}{2} F_{ij} F_{kl}$$

$$(32.2) \quad R_{ij,k0} = \frac{\beta}{2} (\xi \nabla_k^* F_{ij} + 2 \partial_k \xi F_{ij} - \partial_i \xi F_{jk} + \partial_j \xi F_{ik})$$

$$(32.3) \quad R_{i0,k0} = \xi^{-1} \nabla_k^* (\partial_i \xi) + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{ir} F_{kr}$$

où F_{ij} a été identifié au tenseur champ électromagnétique, β est une constante et où les éléments munis d'une * sont relatifs à la métrique quotient.

De (32.1) on déduit par contraction:

$$(32.4) \quad R_{ir,k}^r = R_{ik}^* + \frac{3}{4} \beta^2 \xi^2 F_{ir} F_{k}^r.$$

De (32.2), il vient:

$$(32.5) \quad R_{i0} = \frac{\beta}{2} (\xi \nabla_i F^r{}_r + 3 \partial_i \xi F^r{}_r).$$

A partir de:

$$R_{ik} = R_{ir,k}^r + R_{i0,k}^0$$

et de (32.4) et (32.5), on obtient, pour les composantes du tenseur de RICCI, les expressions suivantes:

$$(32.6) \quad R_{ik} = R_{ik}^* + \frac{\beta^2}{2} \xi^2 F_{ir} F_{k}^r - \xi^{-1} \nabla_k^* (\partial_i \xi)$$

$$(32.7) \quad R_{i0} = \frac{\beta}{2} \xi^{-2} \nabla_i^* (\xi^3 F^r{}_r)$$

$$(32.8) \quad R_{00} = \xi^{-1} \Delta^* \xi + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{rs} F^{rs}.$$

Evaluons enfin les composantes du tenseur d'EINSTEIN de V_5 :

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} R.$$

De (32.6) il résulte:

$$R_{i}{}^i = R^* + \frac{\beta^2 \xi^2}{2} F_{rs} F^{rs} - \xi^{-1} \Delta^* \xi$$

et de (32.8)

$$R_{00} = -\xi^{-1} \Delta^* \xi - F_{rs} F^{rs}.$$

Ainsi la courbure riemannienne scalaire R a pour valeurs :

$$(32-9) \quad R = R^* + \frac{\beta^2 \xi^2}{4} F_{rs} F^{rs} - 2 \xi^{-1} \Delta^* \xi.$$

On obtient ainsi, pour le tenseur d'EINSTEIN, les composantes :

$$(32-10) \quad S_{ik} = S_{ik}^* - \frac{\beta^2 \xi^2}{2} \left(\frac{1}{4} g_{ik} F_{rs} F^{rs} - F_{ir} F_{k}^r \right) - \xi^{-1} (\nabla_k \partial_i \xi - g_{ik} \Delta^* \xi)$$

$$(32-11) \quad S_{i0} = \frac{\beta}{2} \xi^{-2} \nabla_r (\xi^2 F^r_i)$$

$$(32-12) \quad S_{00} = \frac{1}{2} R^* + \frac{3}{8} \beta^2 \xi^2 F_{rs} F^{rs}.$$

Pour la théorie de JORDAN-TIRY, les équations de champ s'écrivent :

$$(32-13) \quad S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$$

où le tenseur second membre $\Theta_{\alpha\beta}$ décrit les sources du champ. Dans un domaine dépourvu de sources, ce tenseur est nul (cas unitaire extérieur).

33. Équations de champ dans la théorie de Kaluza-Klein.

Dans la théorie de KALUZA-KLEIN $\xi = 1$ et les formules précédentes relatives au tenseur de courbure prennent la forme :

$$(33-1) \quad R_{ij,kl} = R_{ij,kl}^* + \frac{\beta^2}{4} (F_{ik} F_{jl} - F_{il} F_{jk}) + \frac{\beta^2}{2} F_{ij} F_{kl}$$

$$(33-2) \quad R_{ij,k0} = \frac{\beta}{2} \nabla_k F_{ij}$$

$$(33-3) \quad R_{i0,k0} = \frac{\beta^2}{4} F_{ir} F_{k}^r.$$

Celles relatives au tenseur de RICCI s'écrivent :

$$(33-4) \quad R_{ik} = R_{ik}^* + \frac{\beta^2}{2} F_{ir} F_{k}^r$$

$$(33-5) \quad R_{i0} = \frac{\beta}{2} \nabla_r F^r_i$$

$$(33-6) \quad R_{00} = \frac{\beta^2}{4} F_{rs} F^{rs}$$

et celles relatives au tenseur d'EINSTEIN :

$$(33-7) \quad S_{ik} = S_{ik}^* - \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{1}{4} g_{ik} F_{rs} F^{rs} \right)$$

$$(33-8) \quad S_{i0} = \frac{\beta}{2} \nabla_r F^r_i$$

$$(33-9) \quad S_{00} = \frac{1}{2} R^* + \frac{3}{8} \beta^2 F_{rs} F^{rs}.$$

Les quatorze équations du champ s'écrivent alors :

$$(33-10) \quad S_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \Theta_{ik}$$

et

$$(33-11) \quad S_{i0} \equiv R_{i0} = \Theta_{i0}$$

où les Θ décrivent les sources du champ. De (33-10) on déduira par contraction :

$$g^{ik} R_{ik} - 2R = \Theta \quad (\Theta = g^{ik} \Theta_{ik})$$

soit :

$$R + R_{00} - 2R = \Theta.$$

Il en résulte :

$$R = R_{00} - \Theta$$

et (33-10) peut être mis sous la forme :

$$(33-12) \quad R_{ik} = \frac{\beta^2}{8} g_{ik} F_{rs} F^{rs} + \left(\Theta_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \Theta \right).$$

34. Discontinuités du tenseur de courbure de V_s .

La métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ de V_s et le générateur infinitésimal $\vec{\xi}$ du groupe d'isométries sont supposés de classe $(C^1, C^3$ par morceaux). Il en résulte que la métrique quotient et le scalaire ξ sont aussi $(C^1, C^3$ par morceau x) alors que la tenseur F_{ij} est continu et à dérivées premières discontinues.

Plaçons-nous dans un domaine de V_s où les seconds membres des équations de champ sont continus et étudions les discontinuités du tenseur de courbure de V_s à la traversée d'une hypersurface S engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries. Eu coordonnées locales adaptées, l'équation de S est donc de la forme $f(x^i) = 0$ et, dans ces coordonnées, tout

vecteur $\vec{l}$ colinéaire au gradient de f satisfait $l_0 = 0$, c'est-à-dire est orthogonal au vecteur tangent à la trajectoire du groupe d'isométries. En repère orthonormé adapté $l_0 = 0$.

Dans les hypothèses faites, en théorie de JORDAN-THIRY, on a, à la traversée de S , en vertu de (18-4)

$$(34-1) \quad [R_{\alpha\beta}] = 0.$$

Cette relation est encore vérifiée dans les mêmes hypothèses, en théorie de KALUZA-KLEIN en vertu de (33-12), (33-11) et (33-6).

D'après l'étude générale faite au § 20, $\vec{l}$ est de longueur nulle et le tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$ satisfait aux relations:

$$(34-2) \quad l_\alpha [R_{\beta\gamma, \lambda\mu}] + l_\beta [R_{\gamma\alpha, \lambda\mu}] + l_\gamma [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = 0$$

$$(34-3) \quad l^\alpha [R_{\alpha\beta, \lambda\mu}] = 0$$

en un point x de S .

En ce point, considérons le vecteur normé $\vec{e}_0$ colinéaire à $\vec{\xi}$ et donnons-nous un vecteur unitaire $\vec{e}_4$ ($\vec{e}_4^2 = 1$) astreint seulement à être orthogonal à $\vec{e}_0$. Les vecteurs $\vec{e}_0$ et $\vec{l}$ définissent un 2-plan orthogonal à $\vec{e}$; dans ce 2-plan soit $\vec{e}_1$ le vecteur normé orthogonal à $\vec{e}_4$ tel qu'on puisse prendre:

$$(34-3) \quad \vec{l} = \vec{e}_4 + \vec{e}_1.$$

On peut compléter par deux vecteurs $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ du 2-plan orthogonal au 3-plan défini par $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_4)$ de façon à obtenir en x un repère $(\vec{e}_\alpha)$ orthonomé adapté tel que (34-4) soit satisfaite. C'est relativement à un tel repère que nous raisonnerons dans la suite.

On notera que comme $l_0 = 0$, les l_i définissent au point correspondant de la variété-quotient un vecteur de longueur nulle.

35. Matrice représentative d'un tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ en x .

Soit $H_{\alpha\beta, \lambda\mu} \neq 0$ un tenseur jouissant des mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure et satisfaisant à (21-2) et (21-3) pour un vecteur $\vec{l}$ orthogonal à e_0 . Ce vecteur est nécessairement de longueur nulle et nous pouvons adopter en x le repère $(\vec{e}_\alpha)$ introduit au paragraphe précédent. (21-2) et (21-3) sont alors traduites par les relations:

$$(35.1) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = a_{00} \varphi_{\alpha\beta}^{(0)} \varphi_{\lambda\mu}^{(0)} + \sum_A a_{0A} (\varphi_{\alpha\beta}^0 \varphi_{\lambda\mu}^{(A)} + \varphi_{\alpha\beta}^{(A)} \varphi_{\lambda\mu}^{(0)}) + \sum_{A, B} a_{AB} \varphi_{\alpha\beta}^{(A)} \varphi_{\lambda\mu}^{(B)}$$

où les tenseurs φ sont les produits extérieurs de $\vec{l}$ avec les vecteurs $\vec{n}^0 = \vec{e}_0$, $\vec{n}^{(1)} = \vec{e}_2$, $\vec{n}^{(2)} = \vec{e}_3$ et où les indices A, B prennent les valeurs 1, 2.

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \tau_2 & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_4 = \tau_4 & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_0 = \tau_7 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \tau_2 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4 = \tau_5 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_0 = \tau_8 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \tau_3 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_4 = \tau_6 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_0 = \tau_9 \\ & & \vec{e}_4 \wedge \vec{e}_0 = \tau_{10} \end{array} \right.$$

on est conduit, comme au § 21, à représenter $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ par une matrice (H_{IJ}) symétrique ($I, J = 1, \dots, 10$); (35.1), compte-tenu des composantes des tenseurs φ , conduit pour la matrice (H_{IJ}) à la forme :

$$(35.2) \quad \begin{array}{c|cccccc|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a_{22} - a_{12} & 0 & -a_{12} - a_{22} & & -a_{02} & 0 & 0 & a_{02} & \\ 3 & 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{01} & 0 & 0 & -a_{01} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & a_{12} & a_{11} & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{01} & 0 & 0 & -a_{01} \\ 6 & 0 & -a_{22} & a_{12} & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{02} & 0 & 0 & -a_{02} \\ \hline 7 & 0 & -a_{02} & a_{01} & 0 & a_{01} & a_{02} & a_{00} & 0 & 0 & -a_{00} \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & a_{02} - a_{01} & 0 & -a_{01} - a_{02} & & & a_{00} & 0 & 0 & a_{00} \end{array}$$

On sait que nécessairement :

$$H_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta.$$

En contractant (35.1), il vient :

$$H_{\alpha\beta} = -(a_{00} + a_{11} + a_{22}) l_\alpha l_\beta$$

soit :

$$\tau = -(a_{00} + a_{11} + a_{22}).$$

Ainsi pour que $H_{\alpha\beta} = 0$, il faut et il suffit que $a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$.

36. Matrice des discontinuités du tenseur de courbure dans les théories pentadimensionnelles.

Dans le cas du tenseur $[R_{\alpha\beta, \lambda\mu}]$, on a $[R_{\alpha\beta}] = 0$ et par suite $a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$. Pour la théorie de KALUZA-KLEIN on a en outre, manifestement $[R_{i0, \underline{k}0}] = 0$ et par suite $a_{00} = a_{11} + a_{22} = 0$. Ainsi la matrice $([R_{IJ}])$ a la forme (35.2) soit avec $a_{00} + a_{11} + a_{22} = 0$ (théorie de JORDAN-THIRY) soit avec $a_{00} = a_{11} + a_{22} = 0$ (théorie de KALUZA-KLEIN).

On retrouve aisément cette forme réduite à partir des formules:

$$[R_{ij, \underline{k}l}] = [R_{ij, \underline{k}l}^*] \quad [R_{ij, \underline{k}0}] = \frac{\beta}{2} \xi [\bar{\nabla}_{\underline{k}}^* F_{ji}] \quad [R_{i0, \underline{k}0}] = \xi^{-1} [\bar{\nabla}_{\underline{k}}^* (\partial_i \xi)]$$

et des résultats antérieurs. Notons d'abord que d'après la condition de HADAMARD, il existe un scalaire a_{00} en x tel que:

$$(36.1) \quad \xi^{-1} \bar{\nabla}_{\underline{k}}^* (\partial_i \xi) = a_{00} l_{\underline{k}}.$$

Le repère orthonormé adapté étant choisi de façon que $\vec{l} = \vec{e}_4 + \vec{e}_1$, il résulte de (36.1) que la sous-matrice de $([R_{IJ}])$ correspondant à $7 \leq I, J \leq 10$, a la forme lisible sur (35.2). De plus de (32.6) on déduit:

$$(36.2) \quad [R_{ik}^*] = \xi^{-1} [\bar{\nabla}_{\underline{k}}^* (\partial_i \xi)] = a_{00} l_{\underline{k}}.$$

Ainsi $[R_{ij, \underline{k}l}^*]$ qui satisfait

$$l_{\underline{k}} [R_{ij, \underline{k}l}^*] + l_i [R_{ik, \underline{k}l}^*] + l_j [R_{kt, \underline{k}l}^*] = 0$$

et (36.2) représentée, par la sous-matrice $([R_{IJ}]) (1 \leq I, J \leq 6)$ correspondant à (35.2) avec $a_{00} = -(a_{11} + a_{22})$. Enfin de

$$\frac{\beta}{2} \xi [\bar{\nabla}_{\underline{k}}^* F^{ij}] = \varphi_{ij} l_{\underline{k}}$$

où φ_{ij} est singulière et de l'expression de cette forme pour $\vec{l} = \vec{e}_4 + \vec{e}_1$, on déduit la sous-matrice correspondant à $1 \leq I \leq 6, 7 \leq J \leq 10$.

37. Radiation en théorie de Kaluza-Klein.

1°) Plaçons-nous dans le cadre de la théorie de KALUZA-KLEIN, la variété V_5 étant rapportée à des repères orthonormés adaptés. Pour simplifier les notations, nous supprimons dans la suite le soulignement des indices. Suppo-

sons que la métrique d'espace-temps ds^2 corresponde à un état de radiation totale pure, le champ électromagnétique représentant lui-même un état de radiation électromagnétique de même vecteur fondamental isotrope. Nous introduisons le vecteur isotrope de V_5 orthogonal à $\vec{\xi}$ et se projetant sur V_4 selon le vecteur précédent.

Sous nos hypothèses, nous avons d'une part:

$$(37-1) \quad (a) \ Sl_h R_{ij,kl}^* = 0 \quad (b) \ l^i R_{ij,kl}^* = 0$$

où S désigne ici la sommation après permutation circulaire sur les indices h, i, j et d'autre part:

$$(37-2) \quad (a) \ Sl_h F_{ij} = 0 \quad (b) \ l^i F_{ij} = 0.$$

La formule (33-1) nous conduit à étudier, pour une 2-forme F singulière, le tenseur

$$Sl_h(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}).$$

Il vient:

$$Sl_h(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = -Sl_h(F_{ik}F_{lj} + F_{il}F_{jk}).$$

Or F étant une 2-forme singulière est un produit extérieur et:

$$F_{ik}F_{lj} + F_{il}F_{jk} + F_{ij}F_{kl} = 0.$$

Ainsi:

$$Sl_h(F_{ih}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = (Sl_h F_{ij})F_{kl}.$$

Nous voyons donc que, pour une 2-forme F singulière,

$$(37-3) \quad Sl_h(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = 0 \quad l^i(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = 0.$$

Les hypothèses (37-1) et (37-2) entraînent ainsi, à partir de (37-3),

$$(37-4) \quad (a) \ Sl_h R_{ij,kl} = 0 \quad (b) \ l^i R_{ij,kl} = 0.$$

D'autre-part de (33-3), on déduit:

$$l_h R_{i0,k0} - l_i R_{h0,k0} = \frac{\beta^2}{4} (l_h F_{ir} - l_i F_{hr}) F_k^r$$

soit, d'après (37-2)_a:

$$l_h R_{i0,k0} - l_i R_{h0,k0} = \frac{\beta^2}{4} l_r F_{ih} F_k^r$$

On a ainsi d'après (37-2)_b:

$$(37-5) \quad (a) \ l_h R_{i0,k0} + l_i R_{0h,k0} = 0 \quad l^i R_{i0,k0} = 0.$$

2°) Introduisons le tenseur de V_5 ayant même type de symétrie que le tenseur de courbure et défini, relativement aux repères orthonormés adaptés, par :

$$(37-6) \quad P_{ij,kl} = R_{ij,kl} \quad P_{ij,k0} = 0 \quad P_{ij,k0} = -R_{i0,k0}$$

où le signe - figure pour des raisons de signature. Le tenseur $P_{\alpha\beta}$, contracté de $P_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ vérifie :

$$(37-7) \quad P_{i0} = 0 \quad P_{00} = -R_{00}$$

l_0 étant nul, les relations (37-4) et (37-5) peuvent s'exprimer par :

$$(37-8) \quad (a) Sl_\alpha P_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \quad (b) l^\alpha P_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0$$

où le vecteur l_α , est orthogonal à ξ_α .

3°) Inversement supposons que le tenseur $P_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ défini en repères orthonormés adaptés par (37-6) soit tel qu'il existe un vecteur l_α orthogonal à ξ_α pour lequel les relations (37-8) soient satisfaites.

$P_{\alpha\beta}$ est proportionnel à $l_\alpha l_\beta$. Comme $l_0 = 0$, on a $P_{00} = 0$, soit $R_{00} = 0$ et d'après (33-6)

$$(37-9) \quad F_{rs} F^{rs} = 0.$$

De plus, d'après (37-5)₁, :

$$(37-10) \quad l^i F_{ir} F_k{}^r = 0$$

l^i est ainsi vecteur propre, avec la valeur propre 0, du tenseur de MAXWELL de F et la 2-forme F est singulière. De (37-4) on tire, compte-tenu de (37-3)

$$Sl_n R_{ij,kl}^* = 0 \quad l^i R_{ij,kl}^* = 0$$

et la métrique ds^2 définit un état de radiation totale pure.

Supposons que les équations de champ (33-12) soient satisfaites en l'absence de sources ($\Theta_{ik} = 0$). De (37-9) on déduit :

$$R_{ik} = 0.$$

La 2-forme F étant singulière :

$$\frac{\beta^2}{2} F_{ir} F_k{}^r = -\tau l_i l_k$$

et d'après (33-4)

$$R_{ik}^* = \tau l_i l_k$$

ce qui explique l'expression d'état de « radiation totale pure ».

38. Expression intrinsèque du tenseur $P_{\alpha\beta, \gamma\delta}$.

Il est possible d'exprimer intrinséquement le tenseur $P_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ à partir du tenseur de courbure de V_5 et du générateur $\vec{\xi}$ du groupe d'isométries. A cet effet introduisons le vecteur $\vec{u}$ normé ($\vec{u}^2 = -1$) colinéaire à $\vec{\xi}$ et étudions le tenseur de V_5 défini par:

$$(38-1) \quad t_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = g_{\alpha}^{\lambda} g_{\beta}^{\mu} + g_{\alpha}^{\lambda} u_{\beta} u^{\mu} + g_{\beta}^{\mu} u_{\alpha} u_{\lambda}$$

et qui satisfait:

$$t_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} = t_{\beta\alpha}^{\mu\lambda}.$$

En repères orthonormés adaptés, on a $u^{\lambda} = g_0^{\lambda}$, $u_i = 0$, $u_0 = -1$. On en déduit:

$$(38-2) \quad t_{ij}^{\lambda\mu} = g_i^{\lambda} g_j^{\mu}$$

$$(38-3) \quad t_{0i}^{\lambda\mu} = g_0^{\lambda} g_i^{\mu} - u^{\lambda} g_i^{\mu} = 0$$

$$(38-4) \quad t_{00}^{\lambda\mu} = g_0^{\lambda} g_0^{\mu} - g_0^{\lambda} g_0^{\mu} - g_0^{\lambda} g_0^{\mu} = -g_0^{\lambda} g_0^{\mu}.$$

A partir de (38-2), (38-3), (38-4), il est aisé de vérifier que l'on a:

$$(38-5) \quad P_{\alpha\beta, \gamma\delta} = t_{\alpha\gamma}^{\lambda\rho} t_{\beta\delta}^{\mu\sigma} R_{\lambda\mu, \rho\sigma}.$$

En effet d'après (38-2)

$$P_{ij, kl} = R_{ij, kl}.$$

D'après (38-3)

$$P_{ij, k0} = 0$$

et d'après (38-2) et (38-4):

$$P_{i0, k0} = -R_{i0, k0}$$

ce qui est en accord avec les relations du § 37.

38. Radiation en théorie de Jordan-Thiry.

1°) Sur V_4 munie de la métrique-quotient ds^2 , considérons le champ scalaire ξ et supposons qu'il existe un vecteur l^i tel que:

$$(39-1) \quad (a) \quad l_i^* \nabla_k^* \partial_j \xi - l_j^* \nabla_k^* \partial_i \xi = 0 \quad (b) \quad l^i \nabla_k^* \partial_i \xi = 0$$

où $\nabla_k^* \partial_i \xi$ est $\neq 0$. Si $\vec{v}$ est un vecteur arbitraire en $x \in V_4$, on tire de (39-1)_a par produit contracté par v^k :

$$v^k \nabla_k^* \partial_i \xi = \lambda(\vec{v}) l_i$$

où $\lambda(\vec{v})$ est une forme linéaire en $\vec{v}$. Il en résulte $\nabla_k^* \partial_i \xi = \lambda_k l_i$ et par raison de symétrie :

$$(39-2) \quad \nabla_k^* \partial_i \xi = \tau l_i l_k$$

où τ est un scalaire. Ainsi pour que les relations (39-1) soient satisfaites, il faut et il suffit que l'on ait (39-2) où l_i est un vecteur *isotrope*. En particulier :

$$(39-3) \quad \Delta^* \xi \equiv 0.$$

Lorsque les hypothèses (39-1) sont satisfaites, nous dirons que le champ scalaire ξ correspond à un état de radiation pure.

2°) Dans le cadre de la théorie de JORDAN-THIRY, supposons que la métrique quotient ds^2 (qui diffère ici de la métrique d'univers $\tilde{ds}^2 = \xi ds^2$), la forme F et le scalaire ξ satisfassent aux conditions de radiation pour le même vecteur fondamental isotrope. En repères orthonormés adaptés, on a (39-2),

$$(39-4) \quad Sl_h R_{ij,kl}^* = 0 \quad l^i R_{ij,kl}^* = 0$$

et

$$(39-5) \quad Sl_h F_{ij} = 0 \quad l^i F_{ij} = 0.$$

Ces relations entraînent, en vertu de (32-1) et (32-3), les relations :

$$Sl_\alpha P_{\beta\gamma, \lambda\mu} = 0 \quad l^\alpha P_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$$

où $P_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ est encore défini par (38-5).

40. Construction d'un exemple de radiation pure avec champ électromagnétique.

Proposons nous de construire un exemple de radiation totale pure satisfaisant aux équations de la théorie de KALUZA-KLEIN en l'absence de sources. Sur l'espace-temps V_4 , nous devons ainsi obtenir un champ gravitationnel vérifiant (37-1) et (37-2) et un champ électromagnétique singulier satisfaisant aux équations d'EINSTEIN-MAXWELL de la relativité générale.

1°) Considérons un domaine D de l'espace-temps muni de la métrique (27-2) qui peut s'écrire avec de nouvelles notations :

$$(40-1) \quad ds^2 = e^{2\psi}[(dx^4)^2 - (dx^1)^2] - [\xi^2(dx^2)^2 + \eta^2(dx^3)^2] = g_{ij}dx^i dx^j$$

où ψ , $\xi > 0$, $\eta > 0$ sont trois fonctions de la seule variable :

$$u = x^4 - x^1.$$

Introduisons un potentiel-vecteur φ_i défini en coordonnées (x^k) par :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0 \quad \varphi_3 = \varphi(u).$$

Au potentiel-vecteur correspond une 2-forme F dont les seules composantes non nulles sont :

$$F_{34} = -\partial_4\varphi = -\varphi' \quad F_{31} = -\partial_1\varphi = \varphi'.$$

Le vecteur l_i , gradient de u , dont les composantes covariantes sont :

$$l_1 = -1 \quad l_2 = l_3 = 0 \quad l_4 = 1$$

satisfait

$$(40.2) \quad Sl_h F_{ij} = 0$$

où S indique la sommation après permutation circulaire. Cette relation est en effet satisfaite pour $h=4$ et soit $i=2, j=3$, soit $i=3, j=1$, soit $i=1, j=2$. D'autre part l^i admettant les composantes contravariantes :

$$l^4 = l^1 = e^{-2\psi} \quad l^2 = l^3 = 0$$

on a :

$$(40.3) \quad l^i F_{ij} = 0.$$

Ainsi la forme F est singulière et admet le vecteur fondamental isotrope l_i .

2°) Evaluons $\bar{\nabla}_j l_i$, où $\bar{\nabla}_j$ est le symbole de dérivation covariante dans la métrique (40.1). On a d'abord

$$\bar{\nabla}_2 l_i = -\bar{\Gamma}_{i2}^4 + \bar{\Gamma}_{i2}^1.$$

Or :

$$\bar{\Gamma}_{i2}^4 = g^{44}[i2, 4] = \frac{1}{2} e^{-2\psi} g'_{i2} \quad \bar{\Gamma}_{i2}^1 = g^{11}[i2, 1] = \frac{1}{2} e^{-2\psi} g'_{i2}.$$

On obtient ainsi :

$$\bar{\nabla}_2 l_i = \bar{\nabla}_i l_2 = 0$$

et de même :

$$\bar{\nabla}_3 l_i = \bar{\nabla}_i l_3 = 0.$$

D'autre part :

$$\bar{\nabla}_1 l_i = -\bar{\Gamma}_{i1}^4 + \bar{\Gamma}_{i1}^1.$$

Or d'après les résultats du § 27 :

$$\bar{\Gamma}_{11}^4 = \psi' \quad \bar{\Gamma}_{11}^1 = -\psi'.$$

Il en résulte :

$$\bar{\nabla}_1 l_i = -2\psi'$$

et de même :

$$\bar{\nabla}_4 l_1 = \bar{\nabla}_1 l_4 = 2\psi' \quad \bar{\nabla}_4 l_4 = -2\psi'.$$

Nous avons ainsi établi que :

$$(40.4) \quad \bar{\nabla}_j l_i = -2\psi' l_i l_j.$$

De la relation (40-2) on déduit par dérivation :

$$Sl_h \nabla_k^* F_{ij} + S \nabla_k^* l_h \cdot F_{ij} = 0$$

soit, en vertu de (40-4),

$$Sl_h \nabla_k^* F_{ij} - 2\psi' l_k Sl_h F_{ij} = 0$$

c'est à-dire :

$$(40-5) \quad Sl_h \nabla_k^* F_{ij} = 0.$$

De même, par dérivation de (40-3), on obtient :

$$l^i \nabla_k^* F_{ij} + \nabla_k^* l^i F_{ij} = 0.$$

Soit, en vertu de (40-4),

$$(40-6) \quad l^i \nabla_k^* F_{ij} = 0.$$

3°) Considérons, sur la variété V_5 de la théorie de KALUZA-KLEIN, la métrique :

$$(40-7) \quad d\sigma^2 = e^{2\psi}[(dx^4)^2 - (dx^1)^2] - [\xi^2(dx^2)^2 + \eta^2(dx^3)^2] - (dx^0 - \varphi dx^3)^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

La métrique-quotient par le groupe d'isométries $x^0 \rightarrow x^0 + \text{const.}$ coïncide avec ds^2 et les relations (33-1), (33-2), (33-3) s'appliquent avec la constante $\beta = 1$, en repères orthonormés adaptés. La forme F étant singulière, on a :

$$Sl_h(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = 0 \quad l^i(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) = 0.$$

D'autre part d'après les résultats du § 27 :

$$Sl_h R_{ij,kl}^* = 0 \quad l^i R_{ij,kl}^* = 0.$$

Ainsi l'on a :

$$(40-8) \quad Sl_h R_{ij,kl} = 0 \quad l^i R_{ij,kl} = 0.$$

Les relations (40-5) et (40-6) expriment que :

$$(40-9) \quad Sl_h R_{ij,k0} = 0 \quad l^i R_{ij,k0} = 0:$$

Enfin du caractère singulier de F et du § 37, 1° il résulte

$$(40-10) \quad l_h R_{i0,k0} + l_i R_{0h,k0} = 0 \quad l^i R_{i0,k0} = 0.$$

Ainsi le vecteur l_α , de composantes l_i , orthogonal à ξ_α , satisfait :

$$(40-11) \quad Sl_\alpha R_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0 \quad l^\alpha R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0.$$

On sait qu'il en résulte :

$$R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta.$$

4°) D'après (40-12), $R_{i0} = 0$ et les équations de MAXWELL sont satisfaites pour F . Pour vérifier les équations de champ (33-12) en l'absence, de sources, soit $R_{ik} = 0$, il nous suffit d'après (40-12) de vérifier $R_{44} = 0$, soit d'après (33-4):

$$R_{44}^* + \frac{1}{2} F_{4r} F_4^r = 0$$

ou en coordonnées (x^i)

$$R_{44}^* + \frac{1}{2} F_{4r} F_4^r = 0.$$

Or d'après les résultats du § 27 :

$$R_{44}^* = -\bar{\xi}^{-1} (\xi'' - 2\psi'\xi') - \bar{\eta}^{-1} (\eta'' - 2\psi'\eta').$$

D'autre part :

$$F_{4r} F_4^r = F_{43} F_4^3 = -\bar{\eta}^{-2} \varphi'^2.$$

Il en résulte que les fonctions ξ , η , ψ , φ doivent être liées par la relation :

$$(40-13) \quad \bar{\xi}^{-1} (\xi'' - 2\psi'\xi') + \bar{\eta}^{-1} (\eta'' - 2\psi'\eta') + \frac{1}{2} \bar{\eta}^{-1} \varphi'^2 = 0.$$

En nous limitant à $u > 0$ et posant $\xi\eta = u^2$, $\eta/\xi = e^{2\beta}$, (40-13) peut être mis sous la forme :

$$(40-14) \quad 2\psi' = u\beta'^2 + \frac{1}{4u} e^{-2\beta} \varphi'^2.$$

Si β et φ sont des fonctions données pour $u > 0$, (40-10) permet dans le même domaine de déterminer ψ par quadrature.

Pour la partie $(R^4)^+$ ($u > 0$) de l'espace-temps R^4 défini par les x^i , effectuons sur la métrique ds^2 le changement de variables (28-7). Sur $(R^4)^+$ on obtient, compte-tenu de (40-14), l'expression suivante de la métrique :

$$ds^2 = du d\bar{v} - (d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) - 2\beta' \left(\bar{y} d\bar{y} - \bar{z} d\bar{z} - \frac{\bar{y}^2 - \bar{z}^2}{u} du \right) du - \beta'^2 u \bar{v} du^2 - \\ - \left(\bar{v} - \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{u} \right) \frac{1}{4u} e^{-2\beta} \varphi'^2 du^2$$

u_0 étant strictement positif, choisissons pour β' et φ' des fonctions de classe C^2 nulles pour $u \leq u_0$. On obtient ainsi une métrique euclidienne pour $u \leq u_0$, non euclidienne pour $u > u_0$, qui jointe à la forme F introduite définit une solution du problème que nous nous étions posé.

VI. Un processus de quantification de champs.

A. LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

41. Transformation de Fourier.

En théorie quantique des champs, le champs électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ se trouve généralement quantifié par recours au potentiel-vecteur et étude des transformations de jauge correspondantes. Nous allons indiquer un processus de quantification directe du champ électromagnétique en relativité restreinte. Ce processus, qui est étroitement lié à la notion de radiation électromagnétique, peut être adapté, comme nous le verrons, à une quantification du champ gravitationnel.

Dans toute cette section, V_4 est l'espace-temps de la relativité restreinte supposé rapporté à des repères orthonormés $(\vec{e}_\alpha)$ (α , out indice grec = 0, 1, 2, 3) La métrique de V_4 rapporté à de tels repères sera désignée par

$$(41-1) \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où le point $\vec{x} \in V_4$ admet les coordonnées (x^α) . Considérons un champ électromagnétique F supposé satisfaire aux équation de MAXWELL avec vecteur courant électrique identiquement nul, c'est-à-dire à :

$$(41-2) \quad S \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$

où S désigne la sommation après permutation circulaire sur les trois indices.

Sous des hypothèses simples, le courant défini par F est une transformée de FOURIER sur l'espace-temps et l'on peut écrire en un sens évident (avec l'abus de notation usuel chez les physiciens)

$$(41-3) \quad F_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int U_{\alpha\beta}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} d\tau(\vec{p})$$

où $\vec{p}$ décrit l'espace minkowskien et où $d\tau(\vec{p})$ est l'élément d'hypervolume correspondant :

$$d\tau(\vec{p}) = dp^0 \wedge dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3.$$

De (41-2) on déduit :

$$Sp_\alpha U_{\beta\gamma} = 0 \quad p^\alpha U_{\alpha\beta} = 0.$$

Par suite p n'est différent de 0 que s'il est isotrope. V_4 étant rapporté à un repère $(\vec{e}_\alpha)$, soit $\vec{p}$ un vecteur arbitraire de l'espace-temps et posons

$$\vec{p} = \vec{l} + \lambda \vec{e}_0$$

où les composantes du vecteur *isotrope*

$$\vec{l} = l^0 \vec{e}_0 + l^u \vec{e}_u \quad (u = 1, 2, 3)$$

satisfont à

$$(l^0)^2 = \sum_u (l^u)^2.$$

D'après l'expression de $d\tau(\vec{p})$, on a :

$$d\tau(\vec{p}) = l^0 d\lambda \wedge d\Omega(\vec{e})$$

où

$$d\Omega(\vec{l}) = \frac{dl^1 \wedge dl^2 \wedge dl^3}{l^0}$$

est l'élément de volume invariant du cône isotrope C . En introduisant une mesure de DIRAC de la variable λ , on peut mettre (41-3) sous la forme :

$$F_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)} \int_C G_{\alpha\beta}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l}).$$

42. Conditions de quantification.

A la 2-forme F à valeurs scalaires, substituons une 2-forme désignée par la même notation et à valeurs dans un espace vectoriel M d'opérateurs de l'espace de HILBERT complexe. Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) les valeurs de F sont des opérateurs hermitiens

b) F vérifie des équations (41-2).

Nous désignons par $*$ le passage à un opérateur adjoint. La formule (41-4) est encore valable ici pourvu que $G_{\alpha\beta}$ soit un tenseur à valeurs dans M . Dans cette formule, il résulte :

$$F_{\alpha\beta}^*(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_C G_{\alpha\beta}^*(\vec{l}) e^{-i\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l})$$

soit en changeant $\vec{l}$ en $-\vec{l}$

$$F_{\alpha\beta}^*(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_C G_{\alpha\beta}^*(-\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l}).$$

Du caractère hermitien des valeurs de F , on déduit ainsi :

$$(42-1) \quad G_{\alpha\beta}^*(-\vec{l}) = G_{\alpha\beta}(\vec{l}).$$

Il est possible de transformer la formule (41.4) de manière à réduire le domaine d'intégration à la nappe positive C^+ du cône isotrope. Il vient ainsi:

$$F_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C^+} (G_{\alpha\beta}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} + G_{\alpha\beta}(-\vec{l}) e^{-i\vec{l} \cdot \vec{x}}) d\Omega(\vec{l})$$

soit, d'après (42 — 1),

$$(42.2) \quad F_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C^+} (G_{\alpha\beta}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} + G_{\alpha\beta}^*(\vec{l}) e^{-i\vec{l} \cdot \vec{x}}) d\Omega(\vec{l}).$$

Sur la formule (42 — 2), le caractère hermitien des valeurs de F se trouve en évidence. L'hypothèse b se traduit par les relations:

$$(42.3) \quad Sl_\alpha G_{\beta\gamma} = 0 \quad l^\alpha G_{\alpha\beta} = 0.$$

Supposons que $G_{\alpha\beta}$ soit une 2-forme à valeurs scalaires satisfaisant à (41.3). Ces relations expriment que la 2-forme envisagée est singulière. Désignons par $\vec{n}^{(1)}(\vec{l})$ et $\vec{n}^{(2)}(\vec{l})$ deux vecteurs orthogonaux normés arbitraires du 3-plan tangent au cône isotrope le long de $\vec{l}$. Ces vecteurs définissent un 2-plan orienté dans l'espace et le 2-plan orthogonal orienté dans le temps contient $\vec{l}$. Si $\vec{e}_0$ est un vecteur unitaire arbitraire de ce 2-plan, on obtient un repère orthonormé $(\vec{e}_\alpha)$ tel que:

$$(42.4) \quad \frac{\vec{l}}{l_0} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 = \vec{n}^{(1)} \quad \vec{e}_3 = \vec{n}^{(2)}.$$

De l'étude du § 7 (voir en particulier (7.3), il résulte que pour que $G_{\alpha\beta}$ satisfasse (42 — 3), il faut et il suffit que:

$$(42.5) \quad G_{\alpha\beta}(\vec{l}) = \sum_i a(i, \vec{l}) (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)})$$

où les indices $i, j, \dots$ prennent les valeurs 1 et 2 et où les $a(i, \vec{l})$ sont des scalaires.

Par l'introduction d'une forme linéaire sur M à valeurs scalaires on voit immédiatement que si $G_{\alpha\beta}$ est une 2-forme à valeurs dans M satisfaisant (42 — 3), la formule (42.5) est encore valable à condition de prendre pour les $a(i, \vec{l})$ des éléments de M .

La quantification du champ F s'effectuera en postulant les conditions de crochet:

$$(42.6) \quad \begin{cases} [a(i, \vec{l}), a(j, \vec{l}')] = 0 \\ [a^*(i, \vec{l}), a(j, \vec{l}')] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij} \delta_\Omega(\vec{l}, \vec{l}') \end{cases}$$

où $\vec{l}$ et $\vec{l}'$ sont deux vecteurs de C^+ , δ_{ij} le symbole de KRONECKER et δ_0 la mesure de DIRAC relative au cône isotrope muni de l'élément de volume $d\Omega$. On peut obtenir un formalisme plus condensé en introduisant des indices A, B prenant les valeurs $+1$ et -1 et en posant:

$$\alpha^A(i, \vec{l}) = \alpha(i, \vec{l}) \text{ pour } A = 1 \quad \alpha^A(i, \vec{l}) = \alpha^*(i, \vec{l}) \text{ pour } A = -1.$$

Avec ces notations les conditions de quantification (42 — 6) s'écrivent:

$$(42-7) \quad [\alpha^{-A}(i, \vec{l}), \alpha^B(j, \vec{l}')] = \frac{\hbar}{i} A \delta_{AB} \delta_{ij} \delta_0(\vec{l}, \vec{l}').$$

43. Une formule auxiliaire.

Dans le calcul des relations de commutation auxquelles satisfait, en vertu de (42-7) le champ F , nous serons amenés à évaluer le tenseur défini à partir de $\vec{l}, \vec{n}^{(1)}(\vec{l})$ et $\vec{n}^{(2)}(\vec{l})$ par:

$$(43-1) \quad P_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{l}) = \Sigma \delta_{ij} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l_\lambda n_\mu^{(j)} - l_\mu n_\lambda^{(j)}).$$

Pour cette évaluation, partons du repère orthonormé introduit au § 42 et satisfaisant à (42-4); posons

$$\vec{e}_0 = \vec{u} \quad \vec{e}_1 = \frac{l}{l_0} \vec{l} - \vec{u} = k \vec{l} - \vec{u} \quad (k \Rightarrow 1/l^0).$$

A partir des composantes des vecteurs de ce repère orthonormé, le tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ de V_4 peut s'exprimer par:

$$\eta_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - (k l_\alpha - u_\alpha)(k l_\beta - u_\beta) - n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} - n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}$$

On en déduit:

$$\Sigma_{i,j} \delta_{ij} n_\alpha^{(i)} n_\beta^{(j)} = n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} = k(l_\alpha u_\beta + l_\beta u_\alpha) - k^2 l_\alpha l_\beta - \eta_{\alpha\beta}.$$

En développant le second membre de (43 — 1), on obtient:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{l}) = & l_\alpha l_\lambda \{ k(l_\beta u_\mu + l_\mu u_\beta) - k^2 l_\beta l_\mu - \eta_{\beta\mu} \} + l_\beta l_\mu \{ k(l_\alpha u_\lambda + l_\lambda u_\alpha) - k^2 l_\alpha l_\lambda - \eta_{\alpha\lambda} \} \\ & - l_\alpha l_\mu \{ k(l_\beta u_\lambda + l_\lambda u_\beta) - k^2 l_\beta l_\lambda - \eta_{\beta\lambda} \} - l_\beta l_\lambda \{ k(l_\alpha u_\mu + l_\mu u_\alpha) - k^2 l_\alpha l_\mu - \eta_{\alpha\mu} \}. \end{aligned}$$

Après simplification, il vient ainsi la formule:

$$(43-2) \quad \Sigma_{i,j} \delta_{ij} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l_\lambda n_\mu^{(j)} - l_\mu n_\lambda^{(j)}) = -(\eta_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + \eta_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - \eta_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - \eta_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu).$$

44. Les relations de commutation.

Au point $\vec{x}$ de V_4 , $F_{\alpha\beta}(\vec{x})$ peut s'écrire, en vertu de (42 — 5)

$$(44-1) \quad F_{\alpha\beta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A,i} \int_{C^+} \alpha^A(i, \vec{l}) e^{iA\vec{l} \cdot \vec{x}} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) d\Omega(\vec{l}).$$

Soit $\vec{x}'$ un autre point de V_4 pour lequel:

$$F_{\lambda\mu}(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{B,j} \int_{C^+} \alpha^B(j, \vec{l}) e^{iB\vec{l} \cdot \vec{x}'} (l'_\lambda n'_\mu^{(j)} - l'_\mu n'_\lambda^{(j)}) d\Omega(\vec{l})$$

où les $\vec{n}^{(j)}(\vec{l})$ sont des vecteurs orthogonaux normés tangents à C le long de $\vec{l}$. Evaluons le crochet

$$[F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int_{C^+ C^+} [\alpha^A(i, \vec{l}), \alpha^B(j, \vec{l}')] e^{i(-A\vec{l} \cdot \vec{x} + B\vec{l}' \cdot \vec{x}')} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l'_\lambda n'^{(j)}_\mu - l'_\mu n'^{(j)}_\lambda) d\Omega(\vec{l}) d\Omega(\vec{l}').$$

D'après (42-7), il vient:

$$[F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{(2\pi)^6} \sum_{\substack{A,B \\ i,j}} \int \int_{C^+ C^+} A \delta_{AB} \delta_{ij} \delta_0(\vec{l}, \vec{l}') e^{i(-A\vec{l} \cdot \vec{x} + B\vec{l}' \cdot \vec{x}')} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l'_\lambda n'^{(j)}_\mu - l'_\mu n'^{(j)}_\lambda) d\Omega(\vec{l}) d\Omega(\vec{l}').$$

En intégrant par rapport à la variable $\vec{l}'$, on obtient:

$$[F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_A \int_{C^+} A e^{-iA\vec{l} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left\{ \sum_{i,j} \delta_{ij} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l_\lambda n_\mu^{(j)} - l_\mu n_\lambda^{(j)}) \right\} d\Omega(\vec{l})$$

De la formule préliminaire (43-2) on déduit ainsi:

$$(44-2) \quad [F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_A \int_{C^+} A e^{-iA\vec{l} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} (\eta_{\alpha\beta} l_\beta l_\mu + \eta_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - \eta_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - \eta_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu) d\Omega(\vec{l}).$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire la distribution invariante définie par:

$$(44-3) \quad D(\vec{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_A \int_{C^+} A e^{-iA\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l})$$

qui n'est autre que le « propagateur » de JORDAN-PAULI. On obtient immédiatement:

$$\partial_\alpha D(\vec{x}) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \sum_{\mathcal{A}} \int_{C^+} e^{-i\vec{A}\vec{l} \cdot \vec{x}} l_\alpha d\Omega(\vec{l})$$

et

$$\partial_\alpha \partial_\beta D(\vec{x}) = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\mathcal{A}} \int_{C^+} A e^{-i\vec{A}\vec{l} \cdot \vec{x}} l_\alpha l_\beta d\Omega(\vec{l}).$$

Par suite la formule (44.2) peut s'écrire:

$$(44.4) \quad [F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} (\eta_{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\mu + \eta_{\beta\mu} \partial_\alpha \partial_\lambda - \eta_{\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\lambda - \eta_{\beta\lambda} \partial_\alpha \partial_\mu) D(\vec{x} - \vec{x}')$$

où les dérivations ont lieu par rapport à la variable $\vec{x}$. La formule (44.4) peut encore s'écrire en substituant à $\eta_{\alpha\lambda}$ le produit scalaire $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\lambda$ des vecteurs du repère et en introduisant des dérivations par rapport aux coordonnées du point $\vec{x}$.

$$(44.5) \quad [F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda\mu}(\vec{x}')] = -\frac{\hbar}{i} \{ (\vec{e}_\alpha \vec{e}_\lambda)^x \partial_\beta \partial_\mu + (\vec{e}_\beta \vec{e}_\mu)^x \partial_\alpha \partial_\lambda - \\ - (\vec{e}_\alpha \vec{e}_\mu)^x \partial_\beta \partial_\lambda - (\vec{e}_\beta \vec{e}_\lambda)^x \partial_\alpha \partial_\mu \} D(\vec{x} - \vec{x}').$$

Dans (44.4) ou (44.5) nous retrouvons la relation de commutation classique de la théorie quantique du champ électromagnétique ⁽¹¹⁾. Comme on le vérifie immédiatement, le crochet obtenu est bien compatible avec les équations (41.2): si $K_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ désigne le crochet

$$S \partial_\gamma K_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0 \quad \partial_\alpha K^{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0$$

où S indique une sommation après permutation circulaire sur le trois indices α, β, γ . Cette quantification définit une représentation unitaire irréductible du groupe de LORENTZ inhomogène qui peut être caractérisée par sa restriction au « petit groupe » au sens de WIGNER (sous groupe laissant invariant un vecteur isotrope). Comme on sait la représentation obtenue est caractérisée par une masse nulle et un spin égal à 1.

45. Forme de la relation de commutation en repères arbitraires.

Supposons les voisinages des points $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ rapportés à deux repères différents $(\vec{e}_\alpha)$ et $(\vec{e}_{\lambda'})$ arbitraires. Nous rapportons ainsi le champ électromagnétique en $\vec{x}$ au repère $(\vec{e}_\alpha)$ et le champ électromagnétique en $\vec{x}'$ au repère

⁽¹¹⁾ Voir par exemple G. WENTZEL, *Quantum theory of fields*, p. 115.

$(\vec{e}_{\lambda'})$. Par multiplication par les matrices de changements de repères, la formule (44-5) peut s'écrire en supprimant les indices x et x' devenus inutiles.

$$(45-1) \quad [F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda'\mu'}(\vec{x}')] = -\frac{\hbar}{i} \{ (\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\lambda'}) \partial_{\beta} \partial_{\mu'} + (\vec{e}_{\beta} \cdot \vec{e}_{\mu'}) \partial_{\alpha} \partial_{\lambda'} - \\ - (\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\mu'}) \partial_{\beta} \partial_{\lambda'} - (\vec{e}_{\beta} \cdot \vec{e}_{\lambda'}) \partial_{\alpha} \partial_{\mu'} \} (\vec{x} - \vec{x}')$$

où les deux membres représentent un bitenseur, tenseur antisymétrique d'ordre 2 en $\vec{x}$ et tenseur antisymétrique d'ordre 2 en $\vec{x}'$. Le second membre met en évidence le bitenseur défini par les produits $(\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\lambda'})$ et dont il est aisé d'obtenir une expression intéressante; on a en effet:

$$\vec{x}' - \vec{x} = x^{\lambda'} \vec{e}_{\lambda'} - x^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}.$$

Par suite si s désigne l'intervalle spatio-temporel joignant le point $\vec{x}$ au point $\vec{x}'$.

$$s^2 = (\vec{x}' - \vec{x})^2 = x^{\lambda'} x^{\mu'} \vec{e}_{\lambda'} \cdot \vec{e}_{\mu'} + x^{\alpha} x^{\beta} \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} - 2x^{\alpha} x^{\lambda'} \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\lambda'}.$$

Par dérivation il vient:

$$\partial_{\alpha} \partial_{\lambda'} s^2 = -2 \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\lambda'}.$$

Ainsi si nous introduisons le bitenseur en $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ défini par:

$$(45-2) \quad \theta_{\alpha\lambda'} = \pm \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \partial_{\lambda'} s^2$$

on obtient pour la relation de commutation la forme:

$$(45-3) \quad [F_{\alpha\beta}(\vec{x}), F_{\lambda'\mu'}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \{ \theta_{\alpha\lambda'} \nabla_{\beta} \nabla_{\mu'} + \theta_{\beta\mu'} \nabla_{\alpha} \nabla_{\lambda'} - \theta_{\alpha\mu'} \nabla_{\beta} \nabla_{\lambda'} - \theta_{\beta\lambda'} \nabla_{\alpha} \nabla_{\mu'} \} D(\vec{x} - \vec{x}').$$

Sous cette forme la relation est valable en repères mobiles quelconques et en particulier si l'on rapporte l'espace-temps à des coordonnées curvilignes locales $(\vec{x}^{\alpha})$ au voisinage de $\vec{x}$ et $(\vec{x}^{\lambda'})$ au voisinage de $\vec{x}'$.

B. LE CHAMP GRAVITATIONNEL.

46. Les équations de champ.

Considérons un espace-temps riemannien V_4 et désignons par $R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}$ son tenseur de courbure. Celui-ci jouit des propriétés de symétrie suivantes:

$$(46-1) \quad R_{\alpha\beta, \lambda\mu} = -R_{\beta\alpha, \lambda\mu} = -R_{\alpha\beta, \mu\lambda} = R_{\lambda\mu, \alpha\beta}$$

et satisfait à l'identité:

$$(46-2) \quad SR^{\lambda}_{\alpha, \beta\gamma} = 0$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité relative à la torsion dans le cas où celle-ci est nulle. Nous supposons que l'espace-temps envisagé V_4 satisfait aux équations d'EINSTEIN

$$(46.3) \quad R_{\alpha\beta} = 0.$$

L'analogie avec les équations de MAXWELL et l'étude fait de l'état de radiation pure nous conduisent à adopter comme *équations de champ* :

$$(46.4) \quad (a) \ S \nabla_{\alpha} R^{\lambda}_{\mu, \beta\gamma} = 0; \quad (b) \ \nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = 0$$

où ∇_{α} est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne; (46.4)_a n'est autre que l'identité de BIANCHI, condition d'intégrabilité des équations reliant le tenseur de courbure à la connexion. De (46.4)_a-, on déduit par contraction :

$$(46.5) \quad \nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu, \beta\gamma} = \nabla_{\beta} R_{\mu\gamma} - \nabla_{\gamma} R_{\mu\beta}$$

et l'on voit que (46.3) entraîne (46.4)_b

2°) Nous nous proposons de montrer qu'inversement si les équations de champ (46.4) sont satisfaites, (46.3) peut être considérée comme une simple condition initiale. D'une manière plus précise, soit Σ une hypersurface de V_4 orientée dans l'espace et sur laquelle $R_{\alpha\beta}$ s'annule identiquement; si les équations (46.4) sont satisfaites, nous allons établir que $R_{\alpha\beta}$ est aussi nécessairement nul en dehors de Σ .

Soit $x^0 = 0$ l'équation locale de Σ ; cette hypersurface étant orientée dans l'espace, on a $g^{00} > 0$. De (46.4)_b il résulte d'après (46.5)

$$(46.6) \quad \nabla_{\beta} R_{\mu\gamma} - \nabla_{\gamma} R_{\mu\beta} = 0$$

et en contractant (46.4)_b, il vient :

$$\nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\lambda} = 0$$

qui peut encore s'écrire :

$$(46.7) \quad g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} R_{\beta\lambda} = 0.$$

Désignons par $u, v, \dots$ des indices prenant les valeurs 1, 2, 3. En explicitant le premier membre de (46.7) on a :

$$g^{00} \nabla_0 R_{0\lambda} + g^{0u} (\nabla_0 R_{u\lambda} + \nabla_u R_{0\lambda}) + g^{uv} \nabla_u R_{v\lambda} = 0$$

soit d'après (46.6) :

$$(46.8) \quad g^{00} \nabla_0 R_{0\lambda} = -2g^{0u} \nabla_u R_{0\lambda} - g^{uv} \nabla_u R_{v\lambda}.$$

En faisant dans (46-6) $\beta = 0$, $\gamma = u$ et dans (46-8) $\lambda = 0$, on obtient le système linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre:

$$\begin{cases} \nabla_0 R_{\mu u} = \nabla_u R_{\mu 0} \\ g^{00} \nabla_0 R_{00} = -2g^{0u} \nabla_u R_{00} - g^{uv} \nabla_u R_{v0} \end{cases}$$

où g^{00} est $\neq 0$. Pour une donnée initiale $R_{\alpha\beta}$ nulle sur Σ , ce système n'admet d'autre solution que la solution nulle, ce qui démontre la propriété.

3°) Supposons V_4 portée par un espace-temps minkowskien. Si le champ de gravitation envisagé est faible, le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ de V_4 peut s'écrire:

$$(46-9) \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon \psi_{\alpha\beta}$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ définit la métrique minkowskienne et où ε est l'infiniment petit principal. Si V_4 est rapporté à un repère orthonormé relativement à la métrique $\eta_{\alpha\beta}$, les coefficients correspondants de la connexion riemannienne V_4 sont de l'ordre de ε , ainsi que les composantes du tenseur de courbure. Les indices étant élevés et abaissés à l'aide du tenseur $\eta_{\alpha\beta}$, la partie principale $H^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu}$ du tenseur de courbure satisfait aux identités (46-1) et (46-2) et est astreint aux équations déduites de (46-4) en substituant aux dérivées covariantes relatives à $g_{\alpha\beta}$ les dérivées ordinaires.

47. Conditions de quantification.

Prenons donc pour espace-temps V_4 l'espace-temps de MINKOWSKI que nous supposons toujours rapporté à des repères orthonormés $(\vec{e}_\alpha)$. Nous sommes conduits à décrire le champ de gravitation au moyen d'un tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ satisfaisant aux identités

$$(47-1) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu} = -H_{\beta\alpha, \lambda\mu} = -H_{\alpha\beta, \mu\lambda} = H_{\lambda\mu, \alpha\beta}$$

et à l'identité:

$$(47-2) \quad SH^{\lambda}_{\alpha, \beta\gamma} = 0$$

les indices étant élevés et abaissés à l'aide de la métrique $\eta_{\alpha\beta}$ de l'espace-temps. Nous prendons comme équations de champ:

$$(47-3) \quad (a) S\partial_\alpha H^{\lambda}_{\mu, \beta\gamma} = 0 \quad (b) \partial_\alpha H^{\alpha}_{\beta, \lambda\mu} = 0$$

et ajouterons à ces équations la condition supplémentaire:

$$(47-4) \quad H_{\alpha\beta} = H^{\rho}_{\alpha, \rho\beta} = 0.$$

Le raisonnement même du 2° paragraphe précédent, où l'on substitue $R_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ le tenseur $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$, montre qu'il suffit, pour une solution de (47-3), de vérifier cette condition sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace.

Un tenseur ordinaire tel que H peut être identifié à une forme multilinéaire $H_{\alpha\beta, \lambda\mu} V_{(1)}^\alpha V_{(2)}^\beta V_{(3)}^\lambda V_{(4)}^\mu$ à valeurs scalaires. Substituons-lui une forme

multilinéaire désignée par la même notation, mais à valeurs dans l'espace vectoriel M et satisfaisant bien entendu aux identités (47-1) et (47-2). De manière analogue au cas électromagnétique, nous supposons que :

a) les valeurs de H sont des opérateurs hermitiens

b) H satisfaisant aux équations (47-3).

Sous des hypothèses simples permettant l'introduction de la transformation de FOURIER, et avec des notations analogues à celles utilisées dans le cas électromagnétique, H peut être mis sous la forme :

$$(47-5) \quad H_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C^+} (K_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} + K_{\alpha\beta, \lambda\mu}^*(\vec{l}) e^{-i\vec{l} \cdot \vec{x}}) d\Omega(\vec{l})$$

où $\vec{x} \in V_4$ et où $K_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ est un tenseur à valeurs dans M . L'hypothèse b se traduit par les relations

$$(47-6) \quad (a) \quad S l_\alpha K_{\beta\gamma, \lambda\mu} = 0 \quad (b) \quad l^\alpha K_{\alpha\beta, \lambda\mu} = 0.$$

Supposons que $H_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ soit un tenseur ordinaire jouissant des propriétés de symétrie (47-1) et satisfaisant à (47-3); le tenseur $K_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{l})$ correspondant jouit des mêmes propriétés de symétrie et d'après (21-9) les solutions de (47-6) sont données par :

$$(47-7) \quad K_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\vec{l}) = \sum_{i,j} a(i, j, \vec{l}) (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)}) (l_\lambda n_\mu^{(j)} - l_\mu n_\lambda^{(j)})$$

avec

$$a(i, j, \vec{l}) = a(j, i, \vec{l})$$

par raison de symétrie.

Par l'introduction d'une forme linéaire sur M à valeurs scalaires, on voit encore que si $K_{\alpha\beta, \lambda\mu}$ est un tenseur à valeurs dans M jouissant des propriétés de symétrie précisées et satisfaisant à (47-6), la formule (47-7) est toujours valable, à condition de prendre pour les $a(i, j, \vec{l})$ des éléments de M .

La quantification du champ H s'effectuera en postulant les conditions de crochet :

$$(47-8) \quad \begin{cases} [a(i, j, \vec{l}), a(h, k, \vec{l})] = 0 \\ [a^*(i, j, \vec{l}), a^*(h, k, \vec{l})] = \frac{\hbar}{i} (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh} - \delta_{ij} \delta_{hk}) \delta_\Omega(\vec{l}, \vec{l}) \end{cases}$$

où $\vec{l}$ et $\vec{l}'$ sont des vecteurs de C^+ . Au moyen du formalisme condensé introduit dans le cas électromagnétique, on peut traduire (47-8) par :

$$(47-9) \quad [a^{-A}(i, j, \vec{l}), a^B(h, k, \vec{l})] = \frac{\hbar}{i} A_{AB} (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh} - \delta_{ij} \delta_{hk}) \delta_\Omega(\vec{l}, \vec{l}).$$

48. Les relations de commutations.

Au point $\vec{x}$ de V_4 , $H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x})$ peut s'écrire, en vertu de (47-5) et (47-7).

$$(48-1) \quad H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A, i, j} \int_{C^+} \alpha^A(i, j, \vec{l}) e^{iA\vec{l} \cdot \vec{x}} (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)})(l_\gamma n_\delta^{(j)} - l_\delta n_\gamma^{(j)}) d\Omega(\vec{l}).$$

Soit $\vec{x}'$ un autre point de V_4 pour lequel :

$$H_{\lambda\mu, \nu\rho}(\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{B, h, k} \int_{C^+} \alpha^B(h, k, \vec{l}') e^{iB\vec{l}' \cdot \vec{x}'} (l'_\lambda n'_\mu^{(h)} - l'_\mu n'_\lambda^{(h)})(l'_\nu n'_\rho^{(k)} - l'_\rho n'_\nu^{(k)}) d\Omega(\vec{l}')$$

où les $\vec{n}'^{(h)}(\vec{l}')$ sont des vecteurs orthogonaux tangents à C le long de $\vec{l}'$.
D'après (47-9), on a :

$$[H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x}), H_{\lambda\mu, \nu\rho}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{(2\pi)^6} \sum_{A, B} \int_{C^+} \int_{C^+} A \delta_{AB} (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh} - \delta_{ij} \delta_{hk}) \delta_\Omega(\vec{l}, \vec{l}') e^{i(-A\vec{l} \cdot \vec{x} + B\vec{l}' \cdot \vec{x}')} \\ (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)})(l_\gamma n_\delta^{(j)} - l_\delta n_\gamma^{(j)})(l'_\lambda n'_\mu^{(h)} - l'_\mu n'_\lambda^{(h)})(l'_\nu n'_\rho^{(k)} - l'_\rho n'_\nu^{(k)}) d\Omega(\vec{l}) d\Omega(\vec{l}').$$

En intégrant par rapport à la variable $\vec{l}'$, on obtient :

$$[H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x}), H_{\lambda\mu, \nu\rho}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{A, B} \int_{C^+} A e^{-iA\vec{l} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \{ \sum_{i, j, h, k} (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh} - \delta_{ij} \delta_{hk}) \\ (l_\alpha n_\beta^{(i)} - l_\beta n_\alpha^{(i)})(l_\gamma n_\delta^{(j)} - l_\delta n_\gamma^{(j)})(l_\lambda n_\mu^{(h)} - l_\mu n_\lambda^{(h)})(l_\nu n_\rho^{(k)} - l_\rho n_\nu^{(k)}) \} d\Omega(\vec{l}).$$

De la formule auxiliaire (43-2), il résulte ainsi :

$$[H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x}), H_{\lambda\mu, \nu\rho}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{A, B} \int_{C^+} A e^{-iA\vec{l} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\ i (\eta_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + \eta_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu - \eta_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - \eta_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda)(\eta_{\gamma\nu} l_\delta l_\rho + \eta_{\delta\rho} l_\gamma l_\nu - \eta_{\gamma\rho} l_\delta l_\nu - \eta_{\delta\nu} l_\gamma l_\rho) \\ + (\eta_{\alpha\nu} l_\beta l_\rho + \eta_{\beta\rho} l_\alpha l_\nu - \eta_{\alpha\rho} l_\beta l_\nu - \eta_{\beta\nu} l_\alpha l_\rho)(\eta_{\gamma\lambda} l_\delta l_\mu + \eta_{\delta\mu} l_\gamma l_\lambda - \eta_{\gamma\mu} l_\delta l_\lambda - \eta_{\delta\lambda} l_\gamma l_\mu) \} \\ - (\eta_{\alpha\gamma} l_\beta l_\delta + \eta_{\beta\delta} l_\alpha l_\gamma - \eta_{\alpha\delta} l_\beta l_\gamma - \eta_{\beta\gamma} l_\alpha l_\delta)(\eta_{\lambda\nu} l_\mu l_\rho + \eta_{\mu\rho} l_\lambda l_\nu - \eta_{\lambda\rho} l_\mu l_\nu - \eta_{\mu\nu} l_\lambda l_\rho) \} d\Omega(\vec{l}).$$

De l'introduction du propagateur $D(\vec{x})$ de JORDAN-PAULI, on déduit :

$$(48-2) \quad [H_{\alpha\beta, \gamma\delta}(\vec{x}), H_{\lambda\mu, \nu\rho}(\vec{x}')] = \frac{\hbar}{i} i (\eta_{\alpha\lambda} \partial_\beta \partial_\mu + \eta_{\beta\mu} \partial_\alpha \partial_\lambda - \eta_{\alpha\mu} \partial_\beta \partial_\lambda - \eta_{\beta\lambda} \partial_\alpha \partial_\mu) \\ (\eta_{\gamma\nu} \partial_\delta \partial_\rho + \eta_{\delta\rho} \partial_\gamma \partial_\nu - \eta_{\gamma\rho} \partial_\delta \partial_\nu - \eta_{\delta\nu} \partial_\gamma \partial_\rho) + (\eta_{\alpha\nu} \partial_\beta \partial_\rho + \eta_{\beta\rho} \partial_\alpha \partial_\nu - \eta_{\alpha\rho} \partial_\beta \partial_\nu - \eta_{\beta\nu} \partial_\alpha \partial_\rho) \\ - (\eta_{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\delta + \eta_{\beta\delta} \partial_\alpha \partial_\gamma - \eta_{\alpha\delta} \partial_\beta \partial_\gamma - \eta_{\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\delta)(\eta_{\lambda\nu} \partial_\mu \partial_\rho + \eta_{\mu\rho} \partial_\lambda \partial_\nu - \eta_{\lambda\rho} \partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\rho) \} D(\vec{x} - \vec{x}').$$

Nous avons ainsi obtenu la relation de commutation relative au champ H . On vérifie aisément que si H satisfait à l'identité (47-2), la relation obtenue est compatible avec cette identité. Elle est bien entendu compatible avec les équations de champ (47-3). L'étude, selon WIGNER, du « petit groupe » montre aisément que la quantification précédente définie par (47-9) donne en général un mélange de particules de masses nulles et de spin 0 et 2. Si l'on introduit la condition supplémentaire $H_{\alpha\beta} = 0$, on a nécessairement $K_{\alpha\beta} = K_{\alpha,\rho\beta} = 0$ et on déduit de (47-7)

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} a(i, j, \vec{l}) = 0.$$

Soit la condition de trace:

$$a(1, 1, \vec{l}) + a(2, 2, \vec{l}) = 0$$

qui ne laisse subsister que la représentation caractérisée par une masse nulle et un spin égal à 2.

49. Interprétation du tenseur H en termes de métrique.

1°) Dans l'espace-temps minkowskien rapporté à un repère orthonormé relativement à $\eta_{\alpha\beta}$, considérons le champ de tenseurs ordinaire $H^\lambda_{\mu,\beta\alpha}$ satisfaisant aux identités algébriques (47-1) et (47-2) et aux équations de champ (47-3), ainsi qu'à la condition supplémentaire $H_{\alpha\beta} = 0$. D'après (47-3)_a, il existe un système de quantités $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ telles que:

$$(49-1) \quad H^\lambda_{\mu,\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

ce système de quantités se trouvant défini à la transformation près:

$$(49-2) \quad \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \rightarrow \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \partial_\beta A^\lambda_\alpha$$

où les A^λ_α sont arbitraires. Posons

$$S^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})$$

De (49-1) écrite sous la forme:

$$H^\lambda_{\alpha,\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

on tire par sommation, après permutation circulaire sur α, β, γ

$$S \partial_\gamma S^\lambda_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} S H^\lambda_{\alpha,\beta\gamma} = 0$$

d'après l'identité (47-2). Il en résulte qu'il existe un système de quantités B_α^λ telles que :

$$(49-3) \quad 2S_{\alpha\beta}^\lambda = \partial_\alpha B_\beta^\lambda - \partial_\beta B_\alpha^\lambda$$

ce système de quantités étant défini à la transformation près :

$$(49-4) \quad B_\alpha^\lambda \rightarrow B_\alpha^\lambda + \partial_\alpha \varphi^\lambda.$$

De (49-3); il résulte :

$$(49-5) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \partial_\beta B_\alpha^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda + \partial_\alpha B_\beta^\lambda.$$

En substituant aux $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ initiaux les premiers membres de (49-5), ce qui est permis par la transformation (49-2), on voit que les $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ satisfaisant à (49-1) peuvent être astreints à être symétriques par rapport à leurs deux indices inférieurs. Ils se trouvent alors définis à la transformation près :

$$(49-6) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \partial_\beta \partial_\alpha \varphi^\lambda.$$

Elevons et abaissons les indices au moyen du tenseur $\eta_{\lambda\mu}$ et posons en particulier :

$$\Gamma_{\alpha\mu\beta} = \eta_{\lambda\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$$

La relation (49-1) peut se mettre sous la forme :

$$H_{\lambda\mu, \alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma_{\lambda\mu\alpha}.$$

De l'identité (47-1) vérifiée par H , il résulte :

$$H_{\lambda\mu, \alpha\beta} + H_{\mu\lambda, \alpha\beta} = \partial_\alpha (\Gamma_{\lambda\mu\beta} + \Gamma_{\mu\lambda\beta}) - \partial_\beta (\Gamma_{\lambda\mu\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda\alpha}) = 0.$$

Par suite, il existe un système de quantités $\psi_{\lambda\mu}$, symétriques par rapport aux indices λ et μ , telles que :

$$(49-7) \quad \Gamma_{\lambda\mu\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda\alpha} = \partial_\alpha \psi_{\lambda\mu}.$$

Compte-tenu de (49-6), $\psi_{\lambda\mu}$ est défini à la transformation près :

$$(49-8) \quad \psi_{\lambda\mu} \rightarrow \psi_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \varphi_\mu + \partial_\mu \varphi_\lambda + \text{const.}$$

Des propriétés de symétrie des Γ et de (49-7), on déduit :

$$(49-9) \quad \Gamma_{\lambda\nu\mu} = [\lambda\mu, \nu]$$

où le second membre désigne l'algorithme de CHRISTOFFEL appliqué au système des $\psi_{\lambda\mu}$. Ainsi, d'après les hypothèses faites sur H , il existe un

système de quantités $\psi_{\lambda|\mu}$ (avec $\psi_{\lambda|\mu} = \psi_{\mu\lambda}$), définies à la transformation (49-8) près, telles que les quantités (49-9) qui s'en déduisent vérifient :

$$(49-10) \quad H_{\lambda|\mu, \alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma_{\mu\lambda\alpha}.$$

Considérons le tenseur défini, relativement aux coordonnées adoptées, par :

$$g_{\lambda|\mu} = \eta_{\lambda|\mu} + \varepsilon \psi_{\lambda|\mu}$$

où ε est l'infiniment petit principal. Si nous effectuons le changement de coordonnées :

$$x^{\rho'} = x^\rho + \varepsilon \varphi^\rho(x)$$

on voit que $\psi_{\lambda|\mu}$ subit la transformation (dite encore de jauge)

$$(49-11) \quad \psi_{\lambda|\mu} \rightarrow \psi_{\lambda|\mu} + \partial^\lambda \varphi_{\mu} + \partial_{\mu} \varphi_{\lambda}.$$

Nous pouvons ainsi interpréter les résultats précédents en munissant l'espace-temps de la métrique riemannienne définie par $g_{\lambda|\mu}$. En coordonnées voisines de coordonnées orthonormés par l'espace-temps minkowskien, cette métrique est voisine de la métrique minkowskienne définie par $\eta_{\lambda|\mu}$, la déviation subissant dans un changement de coordonnées la transformation (49-11) et $H_{\lambda|\mu, \alpha\beta}$ est la partie principale du tenseur de courbure de $g_{\lambda|\mu}$.

2°) Il nous reste à examiner les équations

$$H_{\lambda|\mu} = 0.$$

Par un choix convenable des φ^ρ , on peut astreindre les $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ aux conditions de coordonnées :

$$(49-12) \quad \eta^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = 0$$

qui ne sont autres que la partie principale des *conditions d'isothermie*. On a alors :

$$(49-13) \quad \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \psi_{\beta|\mu} + \partial_\beta \psi_{\alpha|\mu} - \partial_\mu \psi_{\alpha\beta}) = 0$$

et pour respecter (49-12), φ_λ se trouve astreint aux conditions :

$$(49-14) \quad \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \varphi_\lambda = 0.$$

De (49-10), on déduit (voir (16-4)) :

$$H_{\lambda|\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\lambda} \varphi_{\beta|\mu} + \partial_{\beta\mu} \varphi_{\alpha\lambda} - \partial_{\alpha\beta} \psi_{\lambda|\mu} - \partial_{\lambda\mu} \psi_{\alpha\beta}).$$

Les conditions de coordonnées, parties principales des conditions d'isothermie,

permettent de donner une expression simple de $H_{\lambda\mu}$, partie principale du tenseur de RICCI. De (49-13) on déduit par dérivation:

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_{\lambda\mu} \psi_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\lambda} \psi_{\beta\mu} + \partial_{\beta\lambda} \psi_{\alpha\mu}) \quad \eta^{\alpha\beta} \partial_{\lambda\mu} \psi_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\mu} \psi_{\beta\lambda} + \partial_{\beta\mu} \psi_{\alpha\lambda}).$$

On en déduit que, sous les conditions de coordonnées

$$H_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \psi_{\lambda\mu}.$$

Ainsi, sous les conditions de coordonnées introduites, les équations $H_{\lambda\mu} = 0$ se traduisent par:

$$(49-15) \quad \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} \psi_{\lambda\mu} = 0.$$

50. Rapport avec la théorie du graviton.

On peut montrer que notre processus est finalement équivalent au processus classique qui conduit à la théorie du graviton; mais il se révèle plus cohérent et par suite plus satisfaisant mathématiquement et physiquement.

Sous les hypothèses simples permettant d'introduire la transformation de FOURIER, on a en vertu de (49-14) et (49-15)

$$\psi_{\lambda\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_C \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l})$$

et

$$\varphi_{\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_C f_{\mu}(\vec{l}) e^{i\vec{l} \cdot \vec{x}} d\Omega(\vec{l})$$

où C est le cône isotrope défini par $\eta_{\lambda\mu}$; $\psi_{\lambda\mu}$ se trouvant défini à une transformation de jauge près $\chi_{\lambda\mu}$ se trouve défini à la transformation près:

$$(50-1) \quad \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) = \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) + l_{\lambda} f_{\mu}(\vec{l}) + l_{\mu} f_{\lambda}(\vec{l})$$

où $f_{\mu}(\vec{l})$ est un vecteur arbitraire. On peut d'abord choisir ce vecteur de façon que

$$(50-2) \quad \chi(\vec{l}) = \eta^{\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) = 0$$

et $f_{\mu}(\vec{l})$ est alors astreint à la condition:

$$l^{\mu} f_{\mu}(\vec{l}) = 0.$$

Si $\vec{n}^{(1)}(\vec{l})$, $\vec{n}^{(2)}(\vec{l})$ sont encore deux vecteurs orthogonaux et normés tangents à C le long de $\vec{l}$, $f_{\mu}(\vec{l})$ est un vecteur arbitraire de la forme:

$$(50-3) \quad f_{\mu}(\vec{l}) = \frac{1}{2} a(\vec{l}) l_{\mu} + \sum_i b(i, \vec{l}) n_{\mu}^{(i)} \quad (i, j = 1, 2).$$

Pour que les conditions de coordonnées soient satisfaites, il faut et il suffit que :

$$l_{\lambda}^{\mu} \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) = 0.$$

Il en résulte qu'il existe des scalaires $a(\vec{l})$, $b(i, \vec{l})$, $c(i, j, \vec{l})$ (avec $c(i, j, \vec{l}) = c(j, i, \vec{l})$) tels que :

$$\chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) = a(\vec{l}) l_{\lambda} l_{\mu} + \sum_i b(i, \vec{l}) (l_{\lambda} n_{\mu}^{(i)} + l_{\mu} n_{\lambda}^{(i)}) + \sum_{i,j} c(i, j, \vec{l}) n_{\lambda}^{(i)} n_{\mu}^{(j)}.$$

En utilisant la transformation (50-1) avec (50-3), on voit que $\chi_{\lambda\mu}$ peut être astreint à la forme

$$(50-4) \quad \chi_{\lambda\mu}(\vec{l}) = \sum_{i,j} c(i, j, \vec{l}) n_{\lambda}^{(i)} n_{\mu}^{(j)}$$

et est alors entièrement fixé; pour que $\chi(\vec{l}) = 0$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(50-5) \quad c(1, 1, \vec{l}) + c(2, 2, \vec{l}) = 0.$$

La quantification du champ $\psi_{\lambda\mu}$ s'effectuera, selon notre processus, en imposant aux opérateurs substitués dans (50-4) aux scalaires $c(i, j, \vec{l})$ des conditions analogues à (47-8). Un calcul un peu long permet alors d'en déduire les relations de commutation (48-2).

BIBLIOGRAPHIE

- L. BEL [1], « Comptes rendus Acad. Sc. Paris », t. 245, 2482 (1957).
 — — [2], « Comptes rendus Acad. Sc. Paris », t. 248, 1297 (1959).
 H. BONDI, « Nature », t. 179, 1072, (1957).
 A. LICHNEROWICZ [1], *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Paris (1955).
 — — [2], « Comptes rendus Acad. Sc. Paris », t. 246, 893 (1958).
 — — [3], « Comptes rendus Acad. Sc. Paris », t. 247, 433 (1958).
 L. MARIOT, *Thèse*, Paris (1957).
 A. Z. PETROV, « Sci. Not. de l'Université de Kazan », t. 114, p. 55 (1954).
 F. A. E. PIRANI [1], « Acta Phys. Polon. », t. 15, 389 (1956).
 — — [2], « Phys. Rev. », t. 105, 1089 (1957).
 N. ROSEN, « Phys. Z. Sovjet Union », t. 12, 366 (1937).
 K. STELLMACHER, « Math. Ann. », t. 115, 740-783 (1938).
 A. TRAUTMAN, *Boundary conditions at infinity for physical theories - Radiation and Boundary conditions in the theory of gravitation*, « Bull. Acad. Polon. Sci. », t. 6 (1958).