Spazi $\mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ e loro proprietà.

Memoria di G. Da Prato (a Pisa) (*)

Sommario. - *Si definiscono gli spazi $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$, dove δ è una metrica in $\mathbb{R}^n$ non necessariamente euclidea, e si generalizzano dei risultati di Campanato e Meyers relativi al caso della metrica euclidea.*

Scopo della presente nota è quello di estendere alcuni recenti risultati di S. Campanato [3], [4] e G. N. Meyers [6].

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ indichiamo con $I(x, \rho)$ le «sfere» relative alla metrica euclidea $\delta(x, y) = |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$.

Fissato un aperto limitato Ω, di chiusura $\overline{\Omega}$, poniamo $\Omega(x, \rho) = I(x, \rho) \cap \Omega$ e indichiamo con $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)$, $p \geq 1$, $\lambda \geq 0$, lo spazio delle funzioni u di potenza p sommabile in Ω, tali che

$$\text{(I)} \qquad [u]^p_{\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \overline{\Omega} \\ \rho > 0}} \left\{ |\Omega(x_0, \rho)|^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^p dx \right\} < +\infty$$

dove $|\Omega(x_0, \rho)|$ è la misura (di Lebesgue) dell'insieme $\Omega(x_0, \rho)$ e $u_{x_0,\rho}$ è la media integrale della funzione u su $\Omega(x_0, \rho)$.

$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\text{(II)} \qquad \| u \|_{\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)} .$$

È stato dimostrato (cfr. [3] e [6]) che per $\lambda > 1$ lo spazio $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio delle funzioni hölderiane $C^{0,\frac{\lambda-1}{p}}(\overline{\Omega})$ mentre per $0 \leq \lambda < 1$ $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio di Morrey $L^{(p,\lambda)}(\Omega)$ (Campanato [4], Teor. [6.II]) (1).

Consideriamo allora in $\mathbb{R}^n$ una metrica $\delta(x, y)$ compatibile con la struttura vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e indichiamo con $I(x, \rho)$ le sfere relative a tale metrica.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca C del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

(1) Il caso di $\lambda = 1$ è stato studiato da F. John e L. Nirenberg in [5]. Questi autori hanno dato un'interessante caratterizzazione dello spazio $\mathcal{L}^{(p,1)}(\Omega)$ nel caso che Ω sia un cubo di $\boldsymbol{R}^n$.

Si può dare anche in questo caso una definizione di Spazi di MORREY $L^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$ (1') e di spazi $\mathfrak{L}^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$. In questa nota si fa vedere che, sotto certe ipotesi, molto generali, per Ω e per δ, per questi spazi $\mathfrak{L}^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$ sussiste un risultato del tutto analogo a quello sopra indicato relativo agli spazi $\mathfrak{L}^{(p,\lambda)}(\Omega)$ (cfr. Teor. [3.I]).

Nel n. 4 si dedurrà, come applicazione, l'hölderianità delle funzioni u che appartengono a $L^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$, p e λ opportuni, insieme con le loro derivate prime.

Ringrazio il Prof. S. CAMPANATO che mi ha proposto questa ricerca.

1. - Sia $\delta(x, y)$ una metrica su $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale $\mathbb{R}^n$ sia uno spazio lineare metrico (2). Indichiamo con $I(x, \rho)$ le sfere in questa metrica (3) e facciamo le seguenti ipotesi:

a) $I(0, \rho)$ è convesso $\forall \ \rho > 0$.

b) Esistono tre numeri positivi M_1, M_2, m $(m \geq n)$ tali che (4)

$$M_1 \rho^m \leq |I(0, \rho)| \leq M_2 \rho^m, \ \rho > 0. \tag{1.1}$$

Da *a)* segue che la topologia indotta da δ è equivalente a quella euclidea ([7] Prop. (II.11)) e quindi che $\delta(x, y)$ è continua in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di diametro d e di chiusura $\overline{\Omega}$; per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e $\rho > 0$ poniamo $\Omega(x, \rho) = I(x, \rho) \cap \Omega$.

$L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, è lo spazio delle funzioni di potenza p sommabile in Ω normalizzato nel modo abituale

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^p dx \right)^{1/p}.$$

Indichiamo con $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ $(\alpha > 0)$, lo spazio delle funzioni α-hölderiane

(1') Gli spazi di MORREY $L^{(p,\lambda)}(\Omega, \delta)$ relativi ad una metrica $\delta(x, y)$ del tipo

$$\delta(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^n | x_i - y_i |^{\alpha_i} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \ \alpha_i \geq 1, \ \alpha = \max \alpha_i$$

sono stati studiati da BAROZZI in [1].

(2) Da ciò segue in particolare che $\delta(x, y) = \delta(x - y, 0)$ $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^n$.

(3) $I(x, \rho) = \{y \in \boldsymbol{R}^n;\ d(x, y) < \rho\}$.

(4) Se B è un sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$ misurabile (secondo LEBESGUE) indichiamo con $| B |$ la sua misura.

su $\bar{\Omega}$ rispetto alla metrica δ, con la norma

$$\| u \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\delta)} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x,y\in\bar{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\delta^{\alpha}(x,y)} = \tag{1.2}$$

$$= \sup_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\delta)}.$$

Diamo le seguenti definizioni

DEFINIZIONE [1.I] - $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $p \geq 1$, $\theta \geq 0$, *è l'insieme delle funzioni* u *di* $L^p(\Omega)$ *per le quali*

$$\| u \|^p_{L^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} = \sup_{x\in\bar{\Omega},\, \rho>0} \left\{ |\Omega(x,\rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)|^p dy \right\} < +\infty. \tag{1.3}$$

DEFINIZIONE [1.II] - $\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $p \geq 1$, $\theta \geq 0$, *è l'insieme delle funzioni* u *di* $L^p(\Omega)$ *per le quali*

$$[u]^p_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} = \sup_{x\in\bar{\Omega},\, \rho>0} \left\{ |\Omega(x,\rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y) - u_{x,\rho}|^p dy \right\} < +\infty \tag{1.4}$$

dove $u_{x,\rho}$ *è la media integrale di* u *su* $\Omega(x, \rho)$.

Si verifica facilmente che $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ è uno spazio di BANACH con la norma $u \longrightarrow \| u \|_{L^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)}$ mentre $\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ è uno spazio di BANACH con la norma

$$\| u \|_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)}. \tag{1.5}$$

Si verifica anche facilmente che $L^{(p,0)}(\Omega, \delta)$ è isomorfo allo spazio $L^p(\Omega)$.

Queste verifiche sono del tutto analoghe a quelle che si fanno nel caso della metrica euclidea. Osserviamo che quando δ è la metrica euclidea gli spazi $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ sono gli usuali spazi di MORREY (cfr. ad es. [2]) mentre gli spazi $\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ sono gli spazi introdotti in [3].

Per concludere, sull'aperto Ω facciamo l'ipotesi che esista una costante positiva A tale che

$$|\Omega(x,\rho)| \geq A\, |I(o,\rho)|, \ \forall\ x \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 < \rho \leq d. \tag{1.6}$$

Si dirà anche che Ω è tipo (A).

2. - Dimostriamo alcuni lemmi preliminari che sfrutteremo nel successivo n. 3. Questi lemmi sono analoghi a quelli dimostrati in [3] nn. 1, 2 e in [4] n. 6 nel caso della metrica euclidea, perciò ci limitiamo a darne rapide dimostrazioni.

LEMMA [2 I] - *Sia* $u \in \mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $p \geq 1$, $\theta \geq 0$ *e sia* $0 < \sigma < \rho$, *esiste una costante* $K_1 > 0$ *tale che per ogni* x_0 *di* $\overline{\Omega}$ *risulta*

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,\sigma} | \leq K_1 \left(\frac{\rho^{\theta m} + \sigma^{\theta m}}{\sigma^m} \right)^{1/p} [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} . \tag{2.1}$$

DIM. - Per quasi tutti gli $x \in \Omega(x_0, \sigma)$ si ha

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,\sigma} |^p \leq 2^p (| u(x) - u_{x_0,\rho} |^p + | u(x) - u_{x_0,\sigma} |^p)$$

da cui

$$\int_{\Omega(x_0,\sigma)} | u_{x_0,\rho} - u_{x_0,\sigma} |^p dx \leq 2^p \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} | u(x) - u_{x_0,\rho} |^p dx + \int_{\Omega(x_0,\sigma)} | u(x) - u_{x_0,\sigma} |^p dx \right) .$$

Ne segue facilmente, poichè Ω è di tipo (A) e per l'ipotesi (1.1),

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,\sigma} |^p \leq \frac{2^p M_2^\theta}{A M^1} \left(\frac{\rho^{\theta m} + \sigma^{\theta m}}{\sigma^m} \right) [u]^p_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)}$$

e quindi la tesi

LEMMA [2.II] - *Sia* $u \in \mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $p \geq 1$, $\theta \geq 0$ *e* h *un intero positivo; esiste una costante* $K_2 > 0$ *tale che per ogni* x_0 *di* $\overline{\Omega}$ *e per ogni* $0 < \rho < d$ *risulta*

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,2^{-h}\rho} | \leq K_2 \rho^\alpha | 1 - 2^{-\alpha h} | [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} \tag{2.2}$$

dove $\alpha = \dfrac{m}{p}(\theta - 1)$.

DIM. - Ponendo nella (2.1) $\sigma = \dfrac{\rho}{2}$ si ottiene:

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,\rho/2} | \leq K(u) \rho^\alpha$$

dove

$$K(u) = K_1 2^{-\alpha} (1 + 2^{\theta m})^{1/p} [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} .$$

E quindi

$$| u_{x_0,\rho} - u_{x_0,2^{-h}\rho} | \leq \sum_{j=1}^{h} | u_{x_0,2^{1-j}\rho} - u_{x_0,2^{-j}\rho} | = \frac{K(u)}{1 - 2^{-\alpha}} \rho^\alpha (1 - 2^{-\alpha h}) .$$

LEMMA [2.III] - *Sia* $u \in \mathcal{L}^{(1,\theta)}(\Omega, \delta)$ *con* $\theta > 1$, *per ogni* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *esiste finito il* $\lim\limits_{\rho \to 0} u_{x_0, \rho} = \tilde{u}(x_0)$ *e si ha*

$$|u_{x_0,\rho} - \tilde{u}(x_0)| \leq K_3 \rho^{m(\theta-1)}[u]_{\mathcal{L}^{(1,\theta)}(\Omega,\delta)} \tag{2.3}$$

con K_3 *costante positiva indipendente da* x_0.

DIM. - Si prova dapprima che per ogni fissato $\rho > 0$ la successione $\{u_{x_0, 2^{-h}\rho}\}$ è di CAUCHY; quindi posto $\tilde{u}(x_0) = \lim\limits_{h \to \infty} u_{x_0, 2^{-h}\rho}$ si dimostra che $\tilde{u}(x_0)$ non dipende da ρ. A questo punto la (2.3) segue dalla (2.2). Per i dettagli della dimostrazione si veda [3], lemma [III.1].

LEMMA [2.IV] - *Sia* $u \in \mathcal{L}^{(1,\theta)}(\Omega, \delta)$ *con* $\theta > 1$, x, y *due punti di* $\overline{\Omega}$ *e* $\rho = 2\delta(x, y)$; *esiste una costante* $K_4 > 0$ *tale che*

$$|u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| \leq K_4 \rho^{m(\theta-1)}[u]_{\mathcal{L}^{(1,\theta)}(\Omega,\delta)}. \tag{2.4}$$

DIM. - Tenuto conto che $\Omega\left(x, \frac{\rho}{2}\right) \subset \Omega(x, \rho) \cap \Omega(y, \rho)$ e che per $z \in \Omega\left(x, \frac{\rho}{2}\right)$ risulta

$$|u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| \leq |u(z) - u_{x,\rho}| + |u(z) - u_{y,\rho}|$$

si ha banalmente che

$$\int\limits_{\Omega\left(x, \frac{\rho}{2}\right)} |u_{x,\rho} - u_{y,\rho}|\, dz \leq \int\limits_{\Omega(x,\rho)} |u(z) - u_{x,\rho}|\, dz + \int\limits_{\Omega(y,\rho)} |u(z) - u_{y,\rho}|\, dz.$$

Si procede allora come nel lemma [2.I] e si ha la tesi.

LEMMA [2.V] - *Sia* $u \in \mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ *con* $0 \leq \theta < 1$ *e* $p \geq 1$; *esiste una costante* K_5 *tale che per ogni* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *e* $0 < \rho \leq d$ *risulta* (5)

$$|u_{x_0,\rho}| \leq |u_\Omega| + K_5 \rho^{\frac{m}{p}(\theta-1)}[u]_{\mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)}. \tag{2.5}$$

DIM. - Sia h intero tale che $2^{-1-h}d \leq \rho \leq 2^{-h}d$; risulta

$$|u_{x_0,\rho}| \leq |u_{x_0,\rho} - u_{x_0, 2^{-h}d}| + |u_{x_0, 2^{-h}d} - u_\Omega| + |u_\Omega|. \tag{2.6}$$

(5) u_Ω è la media integrale di u su Ω. Ovviamente $u_\Omega = u_{x,d}$ $\forall x \in \overline{\Omega}$

Poniamo $\alpha = \frac{m}{p}(\theta - 1)$ e osserviamo che dalla formula (2.1) nelle ipotesi $\theta < 1$ e $\rho < 2\sigma$, segue che

$$| u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \sigma} | \leq K \sigma^\alpha [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)}$$

dove K è un'opportuna costante positiva. Se in quest'ultima formula poniamo $2^{-h}d$ al posto di ρ e ρ al posto di σ si ottiene:

$$| u_{x_0, \rho} - u_{x_0, 2^{-h}d} | \leq K \rho^\alpha [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} . \tag{2.7}$$

Infine dalla (2.2) con $\rho = d$ si trae

$$\begin{aligned} | u_\Omega - u_{x_0, 2^{-h}d} | &\leq K_2 [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} (2^{-\alpha h} - 1) d^\alpha \leq \\ &\leq K_2 [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} \left(\frac{d}{2^h}\right)^\alpha \leq K_2 [u]_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} \rho^\alpha . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dalle (2.7) e (2.8) segue la tesi.

3. - I lemmi dimostrati nel numero precedente ci permettono di provare il seguente teorema:

Teorema [3.I] - *Sia* Ω *di tipo* (A) *e* $p \geq 1$; *allora*

a) se $0 \leq \theta < 1$, $\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ *è isomorfo a* $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$.

b) Se $\theta > 1$, $\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ *è isomorfo a* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ *con* $\alpha = \frac{m}{p}(\theta - 1)$.

Dim. - Proviamo *a*). È intanto evidente che risulta $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta) \subset \mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$. Infatti se $u \in L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ si ha, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$ e $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x,\rho)} | u(y) - u_{x,\rho} |^p dx &= \frac{1}{| \Omega(x, \rho) |^p} \int_{\Omega(x,\rho)} dx \left| \int_{\Omega(x,\rho)} | u(y) - u(t) | \, dt \right|^p \leq \\ &\leq 2^{p+1} \int_{\Omega(x,\rho)} | u(y) |^p dy \end{aligned}$$

e quindi

$$[u]^p_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} \leq 2^{p+1} \| u \|^p_{L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)} . \tag{3.1}$$

Proviamo ora il viceversa. Sia $u \in \mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $x_0 \in \Omega$ e $0 < \rho \leq d$; si ha

$$|\Omega(x_0, \rho)|^{-\theta} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx \leq \frac{2^p}{|\Omega(x_0, \rho)|^\theta} \left\{ \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - u_{x_0,\rho}|^p dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u_{x_0,\rho}|^p dx \right\} \leq 2^p \{ [u]^p_{\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} + |u_{x_0,\rho}|^p \}.$$

Dal lemma [2.V] e dalla relazione $|u_\Omega| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}$ segue la tesi.

Proviamo *b*). Anche in questo caso si dimostra facilmente l'inclusione $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta) \subset \mathfrak{L}^{p,\theta}(\Omega, \delta)$ basta ripetere il discorso che porta alla (3.1). Proviamo il viceversa.

Possiamo limitarci al caso $p = 1$; infatti vale l'inclusione [6]

$$\mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta) \subset \mathfrak{L}^{\left(1, 1+\frac{1}{p}(\theta-1)\right)}(\Omega, \delta) \tag{3.2}$$

e quindi se il teorema è vero per $p = 1$ e se $u \in \mathfrak{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ si ha, per la (3.2), $u \in \mathfrak{L}^{\left(1, 1+\frac{1}{p}(\theta-1)\right)}$ e quindi $u \in C^{0,\frac{m}{p}(\theta-1)}(\overline{\Omega}, \delta)$,

Sia allora $u \in \mathfrak{L}^{(1,\theta)}(\Omega, \delta)$. Dimostriamo innanzi tutto che la funzione $\tilde{u}$ definita nel lemma [2.III] è α-hölderiana.

Siano x, $y \in \overline{\Omega}$. Posto $\rho = 2\delta(x, y)$ risulta:

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - u_{x,\rho}| + |u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| + |\tilde{u}(y) - u_{y,\rho}|.$$

Di qui, usando i lemmi [2.III] e [2.IV], segue:

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq (2K_3 + K_4)[u]_{\mathfrak{L}^{(1,\theta)}(\Omega,\delta)} \rho^{m(\theta-1)} =$$

$$= 2^{m(\theta-1)}(2K_3 + K_4)[u]_{\mathfrak{L}^{(1,\theta)}(\Omega,\delta)}(d(x, y))^{m(\theta-1)}.$$

A questo punto osserviamo che la media $u_{x,\rho}$ converge in $L^1(\Omega)$ alla funzione u quando $\rho \to 0$ [7] mentre, per il lemma [2.III], $u_{x,\rho}$ converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ alla funzione $\tilde{u}(x)$. Quindi $u(x) = \tilde{u}(x)$ quasi ovunque in Ω e il teorema è così provato.

---

(6) Questa inclusione si prova con una semplice applicazione della diseguaglianza di HÖLDER.

(7) Si ha infatti

$$\int_\Omega |u(x) - u_{x,\rho}| dx \leq \frac{1}{A|I(0,\rho)|} \int_\Omega dx \int_{\Omega(x,\rho)} |u(x) - u(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{A|I(0,\rho)|} \int_{I(0,\rho)} dt \int_\Omega |u(x) - u(x+t)| dx.$$

Per un noto teorema, l'integrale $\int_\Omega |u(x) - u(x+t)| dx$ tende a 0 quando $|t| \to 0$ e quindi quando $\delta(t, 0) \to 0$ cioè quando $\rho \to 0$.

4. - In questo paragrafo diamo un'applicazione del teorema [3.I]. Ricordiamo che se B è un aperto convesso, limitato, di $\mathbb{R}^n$ e $u(x)$ è una funzione appartenente a $L^q(B)$, $1 < q < n$, insieme alle derivate prime ($u \in H^{1,q}(B)$) si ha la seguente maggiorazione che generalizza una classica diseguaglianza di POINCARÉ (cfr. ad es. [9] n. 6)

$$\int_B |u(x) - u_B|^q dx \leq K_0 \left(\frac{d_B^n}{|B|^{1-\frac{1}{n}}}\right)^q \int_B \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^q dx \tag{4.1}$$

dove d_B è il diametro (euclideo) di B e K_0 è una costante positiva dipendente soltanto da n e da q.

Di qui segue facilmente che se $u \in \mathrm{H}^{1,p}(B)$ con $p > 1$ vale la maggiorazione

$$\int_B |u(x) - u_B| dx \leq K d_B^n |B|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} \left(\int_B \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

Si ha allora il seguente lemma

LEMMA [4.I] - *Se* Ω *è convesso e* $u \in H^{1,p}(\Omega)$, *con* $p > 1$, *e le derivate prime di* u *appartengono a* $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$, $\theta \geq 0$, *esiste una costante positiva* $K_3 = K_3(p, n)$ *tale che, per ogni* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *e* $\rho > 0$,

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - u_{x_0,\rho}| dx \leq K_3 d_\rho^n |\Omega(x_0, \rho)|^{\frac{1}{n}+\frac{\theta-1}{p}} \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} \tag{4.3}$$

dove d_ρ *è il diametro (euclideo) di* $I(0, \rho)$.

Sia ρ_0 un numero positivo tale che $I(x, \rho_0) \supset \Omega$ $\forall x \in \overline{\Omega}$, e supponiamo che N e β siano due numeri positivi, con $1 \leq \beta \leq \frac{m}{n}$ [8], tali che

$$d_\rho \leq N\rho^\beta, \ \forall \rho \text{ tale che } 0 < \rho \leq \rho_0. \tag{4.4}$$

---

[8] Osserviamo che esiste sempre una costante N' tale che $d_\rho \leq N'\rho$ $\forall \rho$ tale che $0 < \rho \leq \rho_0$ e quindi $\beta \geq 1$. La limitazione $\beta \leq \frac{m}{n}$ è conseguenza del fatto che

$$d_\rho^n \geq |I(0, \rho)| \geq M_1 \rho^m.$$

È evidentemente che, a parte le limitazioni precedenti, l'ordine di infinitesimo del diametro d_ρ e della misura $|I(0, \rho|$ sono indipendenti è necessario precisare il comportamento di d_ρ con una condizione quale la (4.4).

Dal lemma precedente segue il teorema

TEOREMA [4.I] - *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *convesso, limitato e di tipo* (A); *sia* u *una funzione di tipo* $H^{1,p}(\Omega)$ *con le derivate prime in* $L^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$; *sia* $\delta(x, y)$ *una metrica verificante le condizioni del* n. 1 *e in più la* (4.4).

Allora, se $\dfrac{1-\theta}{p} < \dfrac{1}{n} + \beta\dfrac{n}{m} - 1$, $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \delta)$ *con* $\alpha = \left[\beta\dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\theta-1}{p} - 1\right] m$ *e si ha la maggiorazione*:

$$[u]_{C^{0,\alpha}} \leq K \sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|_{L^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)} \tag{4.5}$$

dove la costante K *dipende da* n, m, β, p, A, N, M_1.

DIM. - Dalle ipotesi (4.3), (1.1), (1.6) si ha che

$$d_\rho^n \leq N^n(M_1 A)^{-\beta\frac{n}{m}} \,|\, \Omega(x_0, \rho) \,|^{\beta\frac{n}{m}}. \tag{4.6}$$

Da questa relazione e dal lemma [4.I] segue allora

$$[u]_{\mathfrak{L}^{\left(1,\frac{\alpha}{m}+1\right)}(\Omega,\delta)} \leq K(n, m, N, M_1, A, \beta) \sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|_{L^{(p,\theta)}(\Omega,\delta)}. \tag{4.7}$$

A questo punto basta applicare il teorema [3.I] e si ha la tesi.

Consideriamo qualche caso particolare.

Se la metrica $\delta(x, y)$ è euclidea si ha

$$d_\rho = 2\rho, \quad I(0, \rho) = \omega_n \rho^n$$

cosicchè con il precedente teorema si trova un risultato di MORREY, NIRENBERG, GRECO... (per la dimostrazione cfr. ad esempio [2]) e per $\theta = 0$ un noto risultato di SOBOLEV.

Più in generale, se $\delta_1(t, s)$, $\delta_2(t, s)$, ..., $\delta_n(t, s)$ sono metriche su $\mathbb{R}$ allora

$$\delta(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i^{\alpha_i}(x_i, y_i)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{con} \quad \alpha_i \geq 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \max \alpha_i \tag{4.8}$$

è una metrica in $\mathbb{R}^n$. Se poi le δ_i sono la metrica euclidea su $\mathbb{R}$ allora la metrica (4.8) verifica certamente le condizioni del n. 1 e la (4.4) con $\beta = 1$. Si ha infatti

$$2\rho \leq d_\rho \leq 2\sqrt{n}\rho \quad \text{e} \quad |\, I(0, \rho) \,| = \rho^{\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\alpha_i}} \,|\, I(0, 1) \,|.$$

Applicando il teorema [4.I] si trova in tal caso un recente risultato di G. BAROZZI [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BAROZZI, *Una generalizzazione degli spazi di Morrey*. In corso di stampa su Annali di Pisa.

[2] S. CAMPANATO, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*, «Ricerche di Matematica», vol. XII (1963).

[3] — —, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, «Ann. S. N. S. di Pisa», S. III, vol. XVIII, (1954).

[4] — —, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, «Annali S. N. S. di Pisa» S. III, vol. XVIII, (1964).

[5] F. JOHN-L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation*, «Comm. Pure and Applied Math.», vol. XIV (1961).

[6] G. N. MEYERS, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, «Proc. Amer. Math. Soc.», vol 15, (1964).

[7] A. P. ROBERTSON and W. ROBERSTSON, *Topological vector spaces*, Cambridge at the University Press (1964).

[8] S. SPANNE, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, In corso di stampa su Annali di Pisa.

[9] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles Collège de France (1963-64).