Equazioni ellittiche del II° ordine e spazi $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}$.

SERGIO CAMPANATO (a Pisa)

Summary. - *Regularity results of Schauder type in the class of Hölderian functions are proved for solutions of second order elliptic equations in the variational form. Morrey and other authors have obtained results of this kind in certain classes of functions $L^{(2,\lambda)}$. The method of proof followed here makes use of the classes of functions $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}$ which generalize the classes considered by Morrey, and whose properties in relation to Hölder continuity are studied in some proceeding works.*

In questo lavoro si studia il problema della regolarizzazione negli spazi funzionali $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ delle soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine di tipo ellittico in un aperto limitato Ω dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che una funzione $u(x)$, di quadrato sommabile in Ω, appartiene allo spazio $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$, se

$$\sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \left\{ \rho^{-\lambda} \int_{I(x_0,\rho) \cap \Omega} | u - u_\rho |^2 dx \right\} < +\infty$$

dove $I(x_0, \rho)$ è la sfera $\{ x : | x - x_0 | < \rho \}$ e u_ρ è la media integrale di u su $I(x_0, \rho) \cap \Omega$.

È noto che gli spazi $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ hanno le seguenti proprietà (cfr. n. 3 e App. I): a meno di isomorfismi, $\mathfrak{L}^{(2,0)}(\Omega) = L^2(\Omega)$; per $0 < \lambda < n$, $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ coincide con lo spazio di MORREY $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$; quando $n < \lambda \leq n+2$, $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ non è altro che lo spazio delle funzioni holderiane $C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\overline{\Omega})$ (1); infine, al valore $\lambda = n$ corrisponde uno spazio «limite» del quale F. JOHN e L. NIRENBERG hanno dato una precisa caratterizzazione.

Consideriamo l'operatore differenziale

$$\text{(I)} \qquad E(u) = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

a coefficienti continui in $\overline{\Omega}$ e simmetrici ($a_{ij} = a_{ji}$). Supponiamo che $E(u)$ sia

---

(*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro l'Air Force Office of Scientific Research OAR con il Grant AF EOAR 65-42.

(1) Tolto il caso $\lambda = 0$, la validità di queste proprietà richiede qualche condizione sull'aperto Ω.

ellittico, cioè che esista una costante positiva ν tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$\nu^{-1} |\xi|^2 \leq \Sigma\, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu\, |\xi|^2.$$

Sia $u(x) \in H^1(\Omega)$ una soluzione «debole» dell'equazione $E(u) = f + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$ con f, $f_j \in L^2(\Omega)$; ciò significa, come è noto, che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \sum_j \int_\Omega f_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx - \int_\Omega f\varphi dx.$$

Supponiamo che le funzioni f, f_j appartengano ad uno spazio $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ o abbiano le derivate di un certo ordine in uno spazio $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$; ci poniamo il problema di studiare la regolarità che, di conseguenza, viene ad assumere la soluzione $u(x)$.

Tenuto conto delle proprietà degli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, questo problema si presenta come una naturale generalizzazione dei classici risultati di SCHAUDER relativi agli spazi hölderiani e di alcuni teoremi di MORREY relativi agli spazi $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$ con λ sufficientemente elevato ($\lambda > n - 2$) [15].

Nel capitolo II° ci occupiamo della regolarità «all'interno». Nel capitolo III° si suppone che Ω sia la semisfera $I^*(r) = \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < r,\ x_n > 0\}$ e che u si annnulli sulla parte della frontiera che appartiene all'iperpiano $x_n = 0$ (in altri termini, che u verifichi su questa parte della frontiera una condizione di DIRICHLET) e si studia la regolarità della u nelle semisfere $I^*(\rho)$ con $\rho < r$.

I risultati ottenuti nei capitoli II° e III° permettono di regolarizzare la soluzione del problema di DIRICHLET relativo all'operatore $E(u)$ quando i dati si assumono in spazi di MORREY o in spazi di funzioni hölderiane ed anche in certi spazi «limiti» (cfr. cap. IV).

I risultati che si trovano quando i dati sono hölderiani, e parte dei risultati relativi al dato in spazi di MORREY, sono già noti nella letteratura matematica.

Mi limiterò a rinviare il lettore al cap. V della monografia di C. MIRANDA [14], per le equazioni del secondo ordine, e, per equazioni e problemi al contorno più generali, ai lavori di DOUGLIS-NIRENBERG [9] e AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2] che sono corredati di una completa bibliografia.

Voglio però sottolineare il fatto che il metodo di dimostrazione seguito in questo lavoro non fa uso della teoria del potenziale e della nozione di «soluzione fondamentale». Quindi, anche quando si ritrovano risultati già noti, la dimostrazione mi sembra di tipo nuovo.

Aggiungo che senza difficoltà si possono studiare operatori del secondo ordine nei quali figurino anche termini di grado inferiore e si potrebbero assegnare al bordo condizioni diverse da quella di DIRICHLET, per es. condizioni di NEUMANN. Mi sono limitato a un tipo di operatore e di problema ai limiti che permettessero, per quanto possibile, una esposizione semplice del metodo seguito, anche se questo metodo non sembra per nulla legato agli operatori del secondo ordine.

Ringrazio E. DE GIORGI per i suoi suggerimenti che mi hanno permesso di superare qualche difficoltà; ringrazio altresì G. SAMPACCHIA, M.K.V. MURTHY, U. MUSCO e G. DA PRATO con i quali ho avuto utili discussioni su vari punti del lavoro.

CAP. I.

Questioni preliminari.

1. - Notazioni.

Indichiamo con Ω un aperto limitato dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, con $\partial\Omega$ la frontiera di Ω e con $\overline{\Omega}$ la chiusura di Ω : $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Se Ω_1 e Ω_2 sono due aperti di $\mathbb{R}^n$ diciamo che Ω_1 è strettamente contenuto in Ω_2, e scriviamo $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$, se $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

Le funzioni che consideriamo in questo lavoro sono a valori reali e la misura è quella di LEBESGUE. Se $u(x)$ è una funzione sommabile su Ω indichiamo con u_Ω la media integrale di u su Ω

$$u_\Omega = \frac{1}{\operatorname{mis}\Omega} \int_\Omega u(x)dx. \tag{1.1}$$

Useremo inoltre le notazioni $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_i^k = \dfrac{\partial^k}{\partial x_i^k}$ e per ogni n-pla di interi non negativi $m = (m_1, m_2, .., m_n)$ intenderemo che $|m| = m_1 + ... + m_n$ e $D^m = D_1^{m_1} D_2^{m_2} ... D_n^{m_n}$.

Se A e B sono due spazi di BANACH scriveremo $A \backsim B$ per indicare che sono isomorfi (come spazi di BANACH); scriveremo $A \subset B$ se A è un sottospazio lineare di B ed è munito di una topologia più fine di quella di B.

Nelle varie maggiorazioni useremo spesso lo stesso simbolo $c(..)$ per indicare delle costanti positive che di volta in volta possono essere diverse.

$C^k(\overline{\Omega})$, k intero ≥ 0, è lo spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ con tutte le derivate fino all'ordine k e con la norma abituale

$$\| u \|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|m| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} | D^m u(x) |. \tag{1.2}$$

$C_0^k(\bar{\Omega})$ è il sottospazio di $C^k(\bar{\Omega})$ delle funzioni aventi supporto compatto contenuto in Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni a supporto compatto e infinitamente derivabili in Ω.

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, k intero ≥ 0 e $0 < \alpha \leq 1$, è il sottospazio di $C^k(\bar{\Omega})$ delle funzioni le cui derivate di ordine k sono α-hölderiane in $\bar{\Omega}$; ciò significa che

$$(1.3) \qquad |||u|||_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{|m|=k} \sup_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty .$$

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ è uno spazio di BANACH con la norma

$$(1.4) \qquad \|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + |||u|||_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} .$$

$H^k(\Omega)$, k intero ≥ 0, è il completamento di $C^k(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma

$$(1.5) \qquad \|u\|_{H^k(\Omega)} = \Big\{ \sum_{|m|\leq k} \|D^m u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big\}^{1/2} .$$

In modo analogo si definisce $H_0^k(\Omega)$ come completamento di $C_0^k(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma (1.5).

2. - Spazi (di Morrey) $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Indichiamo con $I(x_0, r)$ la sfera $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < r\}$ e con $\Omega(x_0, r)$ l'insieme $\Omega \cap I(x_0, r)$.

DEF. [2.I] - *Una funzione $u(x)$ definita in Ω appartiene allo spazio $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$, dove $0 \leq \lambda \leq n$* (²), *se e soltanto se*

$$(2.1) \qquad \|u\|_{L^{(2,\lambda)}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega(x_0,r))} < +\infty .$$

$L^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di BANACH con la norma $\|u\|_{L^{(2,\lambda)}(\Omega)}$. Si dimostra facilmente che per ogni $0 \leq \lambda \leq n$ è $L^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e, in particolare, $L^{(2,0)}(\Omega) = L^2(\Omega)$ e $L^{(2,n)}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$ (funzioni misurabili e limitate in Ω) (cfr. ad es. [15], [13], [7]). Si ha inoltre l'inclusione

$$L^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset L^{(2,\mu)} \quad \text{se} \quad \mu \leq \lambda .$$

(²) Si vede facilmente che per $\lambda > n$, $L^{(2,\lambda)}(\Omega) = \{0\}$.

3. - **Spazi** $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Usiamo le notazioni del numero precedente e indichiamo, per semplicità, con u_r la media integrale di u su $\Omega(x_0, r)$.

DEF. [3.I] - $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, $\lambda \geq 0$, *è il sottospazio lineare di* $L^2(\Omega)$ *delle funzioni* u *per le quali*

$$||| u |||_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{2}} \| u - u_r \|_{L^2(\Omega(x_0, r))} < +\infty .$$

In altri termini, $u \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ se esiste una costante positiva $M(u)$ tale che $\forall x_0 \in \Omega$ e $\forall r > 0$

$$\int_{\Omega(x_0\, r)} | u - u_r |^2 dx \leq M(u) r^{\lambda} . \tag{3.1}$$

$\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di BANACH con la norma

$$\| u \|_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} = \| u \|_{L^2(\Omega)} + ||| u |||_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} . \tag{3.2}$$

Elenchiamo le principali proprietà degli spazi $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ rinviando per le dimostrazioni ai lavori [13], [3], [4] nei quali si fa uno studio approfondito e comparativo non solo di questi spazi ma anche di spazi più generali. Qualche notizia complementare è contenuta nell'appendice I.

DEF. [3.II] - *Diciamo che un aperto* Ω *è di tipo* (A) *se esiste una costante positiva* K *tale che* $\forall x \in \bar{\Omega}$ *e* $\forall r > 0$ (*e* $\leq$ *del diam.* Ω) *risulta*

$$\text{mis}\, \Omega(x, r) \geq K r^n$$

Ω è di tipo (A) se, ad es., gode la pruprietà di cono ([3]).

Supponiamo che Ω sia di tipo (A), allora:

i$_1$) Per $0 \leq \lambda < n$, $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \sim L^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

i$_2$) Per $n < \lambda \leq n + 2$, $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \sim C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\bar{\Omega})$.

i$_3$) Se $\lambda > n + 2$, $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ si riduce al sottospazio di $L^2(\Omega)$ delle funzioni costanti. Per questo motivo ci limiteremo nel seguito a far variare il parametro λ nell'intervallo $[0, n + 2]$.

([3]) Cioè se esiste un cono C tale che ogni punto $x \in \Omega$ sia vertice di un cono $C(x)$ congruente a C e contenuto in Ω.

i_4) Se $\lambda = n$ si ha uno spazio «limite» che non è isomorfo né allo spazio di MORREY $L^{(2,n)}(\Omega)$ $(\backsim L^\infty(\Omega))$ né allo spazio $C^0(\bar{\Omega})$. Si dimostra che $\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)$ è $\backsim \mathcal{L}^{(1,n)}(\Omega)$ e di questo spazio F. JOHN e L. NIRENBERG hanno dato questa interessante proprietà [10]:

$u \in \mathcal{L}^{(1,n)}(\Omega)$ *e* $\|u\|_{\mathcal{L}^{(1,n)}(\Omega)} \leq M$ *implicano l'esistenza di tre costanti positive* H, β, l $(l < 1)$ *tali che* $\forall \sigma > 0$

$$\text{mis}\{|u - u_\Omega| > \sigma \text{ in } \Omega\} \leq He^{-\beta\sigma M^{-1}} \text{mis}\{|u - u_\Omega| > l\sigma \text{ in } \Omega\}. \tag{3.3}$$

Da ciò segue, in particolare, che $u \in \mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega) \Rightarrow u \in L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$.

Anche per gli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ si ha l'inclusione evidente:

$$\lambda \geq \mu \Rightarrow \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{(2,\mu)}(\Omega).$$

4. - Spazi $H^{k,\lambda}(\Omega)$.

Sia k un intero non negativo e $0 \leq \lambda \leq n + 2$.

DEF. [4.I] - *$H^{k,\lambda}(\Omega)$ è il sottospazio lineare di $H^k(\Omega)$ delle funzioni u tali che*

$$D^m u \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \quad \forall\, m \text{ con } |m| = k. \tag{4.1}$$

In $H^{k,\lambda}(\Omega)$ si assume come norma la seguente

$$\|u\|_{H^{k,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{H^k(\Omega)} + \sum_{|m|=k} |||D^m u|||_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}. \tag{4.2}$$

Con tale norma $H^{k,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di BANACH.

Se Ω è di tipo (A) la condizione (4.1) equivale a dire che (cfr. n. 3)

a) Se $0 \leq \lambda < n$, $D^m u \in L^{(2,\lambda)}(\Omega)$ $\forall m$ con $|m| = k$. In particolare quindi $H^{k,0}(\Omega)$ è $\backsim H^k(\Omega)$.

b) Se $\lambda = n$, le derivate $D^m u$, con $|m| = k$, appartengono allo spazio «limite» di JOHN e NIRENBERG.

c) Se $n < \lambda \leq n + 2$, le derivate $D^m u$, con $|m| = k$, appartengono a $C^{0,\frac{\lambda - n}{2}}(\bar{\Omega})$ e $H^{k,\lambda}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{k,\frac{\lambda-n}{2}}(\bar{\Omega})$.

5. - Alcune proprietà locali delle soluzioni di un'equazione ellittica.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $E(u)$ un operatore differenziale lineare del secondo ordine del tipo

$$E(u) = \sum_{ij} D_i \{a_{ij}(x) D_j u(x)\} \tag{5.1}$$

definito in $\bar{\Omega}$ e a coefficienti misurabili, limitati e simmetrici $(a_{ij} = a_{ji})$. Supponiamo che $E(u)$ sia ellittico in $\bar{\Omega}$ e chiamiamo ν la costante di ellitticità. Si avrà pertanto

$$\nu^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \nu |\xi|^2 \tag{5.2}$$

$\forall x \in \bar{\Omega}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Siano f, f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, funzioni appartenenti a $L^2(\Omega)$ e $u(x)$ una funzione di $H^1(\Omega)$. Diciamo che u è soluzione «debole», o più semplicemente soluzione, in Ω dell'equazione

$$E(u) = \sum_j D_j f_j + f \tag{5.3}$$

se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ risulta

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij}(x) D_j u \, D_i \varphi \, dx = \sum_j \int_\Omega f_j(x) D_j \varphi \, dx - \int_\Omega f \varphi \, dx. \tag{5.4}$$

Nei lemmi che seguono indichiamo con $I(r)$ la sfera $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < r\}$ e con $I^*(r)$ la semisfera $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < r, x_n > 0\}$. Le ipotesi sui coefficienti e sulle f_j sono quelle fatte sopra. Supporremo inoltre, per semplicità, $f = 0$.

LEMMA [5.I] - *Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione $E(u) = \sum_j D_j f_j$. Esiste una costante positiva $c(\nu)$ tale che $\forall$ n-pla di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*

$$\sum_j \int_\Omega |D_j u|^2 dx \leq c(\nu) \sum_j \int_\Omega |f_j - \alpha_j|^2 dx. \tag{5.5}$$

DIM. - Dalla (5.4) segue che $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $\forall$ n-pla di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_j u \, D_i \varphi \, dx = \sum_j \int_\Omega (f_j - \alpha_j) D_j \varphi \, dx.$$

Assumiamo $\varphi = u$ e sfruttiamo la ellitticità di $E(u)$; si ottiene

$$\nu^{-1} \sum_j \int_\Omega |D_j u|^2 dx \leq \sum_j \| f_j - \alpha_j \|_{L^2(\Omega)} \| D_j u \|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sum_j \| f_j - \alpha_j \|_{L^2(\Omega)} \cdot \sum_j \| D_j u \|_{L^2(\Omega)}.$$

Da cui

$$\nu^{-2}\sum_j \int_\Omega |D_j u|^2 dx \le c(n)\sum_j \| f_j - \alpha_j \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

LEMMA [5.II] - *Se $u \in H^1(I(r))$ è soluzione dell'equazione $E(u) = \sum_j D_j f_j$ esiste una costante positiva $c(\nu)$ tale che $\forall\ 0 < \rho < r$ e per ogni scelta dei numeri reali $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$*

$$\sum_j \int_{I(\rho)} |D_j u|^2 dx \le c(\nu)\left\{(r-\rho)^{-2}\int_{I(r)} |u-\alpha|^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} |f_j - \alpha_j|^2 dx\right\} \tag{5.6}$$

DIM. - Dalla (5.4) segue che $\forall\ \varphi \in H^1_0(I(r))$ e per ogni scelta dei numeri reali $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\sum_{ij}\int_{I(r)} a_{ij}(x) D_j(u-\alpha) D_i\varphi\, dx = \sum_j \int_{I(r)} (f_j - \alpha_j) D_j \varphi\, dx . \tag{5.7}$$

Sia $\theta(x)$ una funzione appartenente a $C_0^\infty(I(r))$ con queste proprietà

$$0 \le \theta(x) \le 1 ;\ \theta(x) = 1 \text{ su } I(\rho) ;\ |D_j\theta(x)| \le \frac{K}{r-\rho} \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{5.8}$$

Nella (5.7) assumiamo $\varphi = \theta^2(u-\alpha)$ e sfruttiamo la ellitticità di $E(u)$; si ottiene, qualunque sia $\varepsilon > 0$,

$$\nu^{-1}\sum_j \int_{I(r)} |D_j\theta(u-\alpha)|^2 dx \le$$

$$\le \sum_{ij}\int_{I(r)} a_{ij} D_i\theta D_j\theta \cdot |u-\alpha|^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} [(f_j-\alpha_j)\theta(u-\alpha)D_j\theta + \theta(f_j-\alpha_j)D_j\theta(u-\alpha)]dx \le$$

$$\le \frac{c(\nu)}{(r-\rho)^2}\int_{I(r)} |u-\alpha|^2 dx + \varepsilon^{-1}\sum_j \int_{I(r)} |f_j-\alpha_j|^2 dx + \varepsilon\sum_j \int_{I(r)} |D_j\theta(u-\alpha)|^2 dx +$$

$$+ \sum_j \int_{I(r)} |f_j - \alpha_j|^2 dx + \frac{c(K,n)}{(r-\rho)^2}\int_{I(r)} |u-\alpha|^2 dx .$$

Di qui segue la tesi pur di scegliere ε sufficientemente piccolo, per es. $\varepsilon = \dfrac{\nu^{-1}}{2}$.

LEMMA [5.III] - *Sia* $u \in H^1(I^*(r))$ *soluzione in* $I^*(r)$ *di* $E(u) = \sum_j D_j f_j$ *e* $u = 0$ *su* $\Gamma_r = \partial I^*(r) \cap \{ x_n = 0 \}$ (4). *Esiste una costante* $c(\nu)$ *tale che* $\forall\ 0 < \rho < r$ *e per ogni n-pla di numeri reali* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$(5.9) \qquad \sum_j \int_{I^*(\rho)} |D_j u|^2 dx \leq c(\nu) \left\{ \frac{1}{(r-\rho)^2} \int_{I^*(r)} |u|^2 dx + \sum_j \int_{I^*(r)} |f_j - \alpha_j|^2 dx \right\} .$$

DIM. - Dalla (5.4) segue che $\forall\ \varphi \in H_0^1(I^*(r))$ e per ogni n-pla di numeri reali $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$(5.10) \qquad \sum_{ij} \int_{I^*(r)} a_{ij} D_j u\, D_i \varphi\, dx = \sum_j \int_{I^*(r)} (f_j - \alpha_j) D_j \varphi\, dx .$$

Sia $\theta(x)$ una funzione di $C_0^\infty\ (I(r))$ con le proprietà (5.8) e $\theta^*(x)$ la sua restrizione a $I^*(r)$. Ovviamente $\theta^{*2} u \in H_0^1(I^*(r))$ (5). Allora basta assumere nella (5.10) $\varphi = \theta^{*2} u$ e procedere esattamente come nella dimostrazione del lemma precedente.

LEMMA [5.IV] - *Per ogni funzione* $u \in \mathrm{H}^1(I^*(r))$ *nulla su* $\Gamma_r = \partial I^*(r) \cap \{x_n = 0\}$ *si ha che*

$$(5.11) \qquad \int_{I^*(r)} |u|^2 dx \leq \frac{r^2}{2} \int_{I^*(r)} |D_n u|^2 dx .$$

DIM. - Basta dimostrare la (5.11) supponendo $u \in C^1(\overline{I^*(r)})$ e $u = 0$ su Γ_r. Sia $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \Gamma_r$ e $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in I^*(r)$. Poiché $u(\bar{x}) = 0$ si può scrivere che

$$u(x) = \int_0^{x_n} D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dt$$

e quindi

$$|u(x)|^2 \leq x_n \int_0^{\sqrt{r^2 - |\bar{x}|^2}} |D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|^2 dt .$$

E integrando su $I^*(r)$

$$\int_{I^*(r)} |u(x)|^2 dx \leq \int_{\Gamma_r} d\bar{x} \int_0^{\sqrt{r^2-|\bar{x}|^2}} |D_n u(x_1, \ldots, x_{-1}, t)|^2 dt \int_0^{\sqrt{r^2-|\bar{x}|^2}} x_n dx_n \leq \frac{r^2}{2} \int_{I^*(r)} |D_n u|^2 dx .$$

(4) Ciò significa che esiste una successione di funzioni $u_n \in C^1(\overline{I^*(r)})$, nulle su Γ_r, che converge ad u in $H^1(I^*(r))$.

(5) Perché $u = 0$ su Γ_r.

6. - Due lemmi fondamentali.

LEMMA [6.I] - *Siano $\varphi(t)$ una funzione reale, non negativa, definita per $t > 0$, $B(t)$ una funzione reale, non negativa, definita per $t > 1$, A una costante > 1, α un numero > 0.*

Supponiamo che $\forall\ p > 1$ esista un $t(p) > 0$ tale che per ogni coppia di valori ρ, r dell'intervallo $(0, t(p)]$ per i quali $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$ risulti

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} \varphi(r) + B(p)\rho^{\alpha}. \tag{6.1}$$

Allora $\forall\ \varepsilon > 0$ e per ogni coppia di valori ρ, r verificanti la relazione $0 < \rho < r < t(A^{1/\varepsilon})$ si ha

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon} \varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon})\frac{Ar^{\varepsilon}}{A-1}\rho^{\alpha-\varepsilon}. \tag{6.2}$$

DIM. - Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $p_{\varepsilon} = A^{1/\varepsilon}$. Per tutti i valori ρ, $r \in (0, t(p_{\varepsilon})]$ tali che $1 < \frac{r}{\rho} \leq p_{\varepsilon}$ la (6.2) segue immediatamente dalla (6.1). Si ha infatti

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha}\varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon})\rho^{\alpha} \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon})r^{\varepsilon}\rho^{\alpha-\varepsilon} \leq$$

$$\leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon})\frac{A}{A-1}r^{\varepsilon}\rho^{\alpha-\varepsilon}.$$

Supponiamo allora che ρ, $r \in (0, t(p_{\varepsilon})]$ e che $\frac{r}{\rho} > p_{\varepsilon}$. Esisterà in tal caso un intero positivo h tale che

$$p_{\varepsilon}^{h} < \frac{r}{\rho} < p_{\varepsilon}^{h+1} \tag{6.3}$$

e di conseguenza

$$1 < \frac{r}{\rho p_{\varepsilon}^{h}} \leq p_{\varepsilon}\,;\ 1 < \frac{\rho p_{\varepsilon}^{h}}{\rho p_{\varepsilon}^{h-1}} = p_{\varepsilon}\,;\ \ldots\,;\ 1 < \frac{\rho p_{\varepsilon}}{\rho} = p_{\varepsilon}.$$

Scriviamo allora la maggiorazione (6.1), con $p = p_{\varepsilon}$. per le coppie di valori $\{\rho p_{\varepsilon}^{h}, r\}$, $\{\rho p_{\varepsilon}^{h-1}, \rho p_{\varepsilon}^{h}\}$, ..., $\{\rho, \rho p_{\varepsilon}\}$ le quali, come si è visto, verificano la condizione che il loro rapporto resta compreso tra 1 e p_{ε}. Avremo

$$\mathrm{i}_0)\qquad \varphi(\rho p_{\varepsilon}^{h}) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} p_{\varepsilon}^{\alpha h}\varphi(r) + B(p_{\varepsilon})\rho^{\alpha}p_{\varepsilon}^{\alpha h}$$

i$_1$) $\varphi(\rho p_\varepsilon^{h-1}) \leq \frac{A}{p_\varepsilon^\alpha}\varphi(\rho p_\varepsilon^h) + B(p_\varepsilon)\rho^\alpha p_\varepsilon^{\alpha(h-1)}$

. . . .

i$_h$) $\varphi(\rho) \leq \frac{A}{p_\varepsilon^\alpha}\varphi(\rho p_\varepsilon) + B(p_\varepsilon)\rho^\alpha.$

Nella i$_1$) maggioriamo $\varphi(\rho p_\varepsilon^h)$ mediante i$_0$). Nella i$_2$) maggioriamo $\varphi(\rho p_\varepsilon^{h-1})$ mediante i$_1$) e così via. Si ottiene in tal modo che

$$\varphi(\rho) \leq A^{h+1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha \varphi(r) + B(p_\varepsilon)\rho^\alpha \sum_{j=0}^{h} A^j \tag{6.4}$$

e di qui, tenuto conto della (6.3) (6),

$$\varphi(\rho) \leq A^{h+1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\varepsilon\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\varphi(r) + B(p_\varepsilon)\frac{A^{h+1}-1}{A-1}r^\varepsilon\rho^{\alpha-\varepsilon}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\varepsilon \leq$$

$$\leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\varphi(r) + B(p_\varepsilon)\frac{A}{A-1}r^\varepsilon\rho^{\alpha-\varepsilon}.$$

E questo conclude la dimostrazione.

Il lemma che segue costituisce una piccola variante del lemma precedente e si dimostra con la stessa tecnica.

LEMMA [6.II] – *Siano* $\varphi(t)$, $B(t)$, A *come nel lemma precedente. Siano* α *e* β *due numeri reali verificanti la relazione* $0 < \beta < \alpha$.

Supponiamo che $\forall\ p > 1$ *esista un* $t(p) > 0$ *tale che, per ogni coppia di valori* ρ, $r \in (0, t(p)]$ *per i quali* $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$, *si abbia*

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha \varphi(r) + B(p)\rho^\beta. \tag{6.5}$$

Allora $\forall\ 0 < \varepsilon < \alpha - \beta$, $\forall\ r \in (0, t(A^{\frac{1}{\varepsilon}})]$ *e* $\forall\ 0 < \rho < r$ *risulta*

$$\varphi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\varphi(r) + B(A^{1/\varepsilon})\frac{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}}}{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}} - A}\rho^\beta. \tag{6.6}$$

---

(6) Dalla (6.3) si ricava che $\left(\frac{\rho}{r}\right)^\varepsilon < A^{-h}$.

DIM. - Fissato ε, $0 < \varepsilon < \alpha - \beta$, poniamo $p_\varepsilon = A^{1/\varepsilon}$. Per tutti i valori ρ, $r \in (0, t(p_\varepsilon)]$ tali che $1 < \frac{r}{\rho} \leq p_\varepsilon$ la (6.6) è facile conseguenza della (6.5) (7).

Supponiamo allora che ρ, $r \in (0, t(p_\varepsilon)]$ e $\frac{r}{\rho} > p_\varepsilon$. Procedendo esattamente come nella dimostrazione del lemma [6.I] si arriva, invece che alla (6.4), alla seguente maggiorazione

$$\varphi(\rho) \leq A^{h+1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha \varphi(r) + B(p_\varepsilon)\rho^\beta \sum_{j=0}^{h}\left(\frac{A}{p_\varepsilon^{\alpha-\beta}}\right)^j \tag{6.7}$$

dove h è un intero positivo tale che $p_\varepsilon^h < \frac{r}{\rho} \leq p_\varepsilon^{h+1}$.

Dalla (6.7) segue facilmente la (6.6) e quindi la tesi; basta osservare che, per le ipotesi fatte, risulta

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^\varepsilon < A^{-h} \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{h}\left(\frac{A}{p_\varepsilon^{\alpha-\beta}}\right)^j < \frac{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}}}{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}} - A}.$$

CAP. II.

Regolarizzazione all'interno.

7. - Proprietà delle soluzioni dell'equazione $E(u) = 0$ a coefficienti costanti.

In questo paragrafo l'operatore $E(u)$ si suppone a coefficienti costanti. Si dimostrano due lemmi, molto simili per il loro contenuto; il primo lemma sarà alla base della regolarizzazione «all'interno» negli spazi di MORREY il secondo servirà per l'analoga regolarizzazione negli spazi hölderiani.

LEMMA [7.I] - *Sia $u(x)$ una funzione $\in C^\infty(\overline{I(r)})$ (8) e soluzione, in $I(r)$, dell'equazione $E(u) = 0$. Esiste una costante positiva $A_0(\nu)$ tale che $\forall\, 0 < \rho \leq r$*

$$\int_{I(\rho)} |u|^2 dx \leq A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{I(r)} |u(x)|^2 dx. \tag{7.1}$$

---

(7) Perché $\frac{\rho}{r} < 1$ e $\frac{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}}}{A^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}} - A} > 1$.

(8) Per quel che segue basterebbe supporre $u \in C^k(\overline{I(r)})$ con k sufficientemente elevato. Ricordiamo che $I(r)$ è la sfera $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < r\}$.

DIM. - Dalla maggiorazione (5.6) del lemma [5.II], ove si ponga $\alpha = \alpha_j = f_j = 0$, segue che per ogni σ positivo e minore di r

$$\sum_j \int_{I(\sigma)} |D_j u|^2 dx \leq \frac{c(\nu)}{(r-\sigma)^2} \int_{I(r)} |u|^2 dx . \tag{7.2}$$

Questa maggiorazione continua a velere se al posto di u mettiamo una qualunque derivata $D^m u$, in quanto $D^m u \in C^\infty(\overline{I(r)})$ ed $E(D^m u) = D^m E(u) = 0$ (perché i coefficienti a_{ij} sono costanti).

Dalla (7.2) si può quindi ottenere una maggiorazione di questo tipo

$$\| u \|^2_{H^k\left(I\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \leq c(\nu, r, k) \int_{I(r)} |u|^2 dx \tag{7.3}$$

dove k è un qualunque intero ≥ 1.

Per un noto teorema di SOBOLEV avremo, se k è sufficientemente elevato [9],

$$\sup_{\overline{I}\left(\frac{r}{2}\right)} |u(x)| \leq c(n, r) \| u \|_{H^k\left(I\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \tag{7.4}$$

e quindi, tenuto conto della (7.3),

$$\sup_{\overline{I}\left(\frac{r}{2}\right)} |u(x)|^2 \leq c(\nu, r) \int_{I(r)} |u|^2 dx . \tag{7.5}$$

Sia ρ un numero positivo e $\leq \frac{r}{2}$; tenuto conto della (7.5) possiamo scrivere che

$$\int_{I(\rho)} |u|^2 dx \leq c(\nu, r)\rho^n \int_{I(r)} |u|^2 dx . \tag{7.6}$$

Con un procedimento «per omotetia» si può precisare la dipendenza da r della costante $c(\nu, r)$. Sia $\lambda > 0$; la funzione $v(x) = u(\lambda x)$ appartiene a $C^\infty\left(\overline{I}\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right)$ ed è soluzione in $I\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ dell'equazione $E(v) = 0$ (perché i coefficienti a_{ij} sono costanti).

---

[9] Il teorema di SOBOLEV in questione, enunciato per la sfera, assicura che: se $u \in H^k(I(r))$ e $k > \frac{n}{2}$ allora u coincide quasi-ovunque con una funzione $\tilde{u}$, continua in $\overline{I(r)}$, la quale verifica la maggiorazione

$$\sup_{\overline{I(r)}} |\tilde{u}| \leq c \| u \|_{H^k(I(r))} .$$

Fissiamo $\lambda = r$ e applichiamo la (7.6) alla funzione $v(x) = u(rx)$; si ottiene, $\forall\ \rho > 0$ e $\leq \frac{r}{2}$,

$$\int\limits_{I\left(\frac{\rho}{r}\right)} |\, v(x)\,|^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_{I(1)} |\, v(x)\,|^2 dx\,.$$

Di qui, applicando l'omotetia $x \to \frac{y}{r}$,

$$\int\limits_{I(\rho)} |\, u(x)\,|^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_{I(r)} |\, u(x)\,|^2 dx\,. \tag{7.7}$$

È chiaro che, pur di modifcare la costante $c(\nu)$, la maggiorazione (7.7) vale per tutti i ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$ ([10]). Si ha quindi la tesi.

COROLLARIO [7.I] - *Sia $u(x)$ una funzione che verifica le ipotesi del lemma precedente. Per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$ e per ogni n-pla di indici $m = (m_1, \ldots, m_n)$ si ha*

$$\int\limits_{I(\rho)} |\, D^m u\,|^2 dx \leq A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_{I(r)} |\, D^m u\,|^2 dx. \tag{7.8}$$

Basta osservare che la funzione $D^m u$ verifica le ipotesi del lemma [7.I] in quanto $D^m u \in C^\infty(\bar{I}(r))$ ed $E(D^m u) = D^m E(u) = 0$, perché i coefficienti a_{ij} sono costanti.

Nel lemma che segue indichiamo con u_ρ la media integrale $u_{I(\rho)}$.

LEMMA [7.II] - *Sia $u(x) \in C^\infty(\bar{I}(r))$ una soluzione in $I(r)$ dell'equazione $E(u) = 0$. Esiste una costante positiva $A_1(\nu)$ tale che per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$ e $\forall\ \alpha$ reale*

$$\int\limits_{I(\rho)} |\, u - u_\rho\,|^2 dx \leq A_1(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int\limits_{I(r)} |\, u - \alpha\,|^2 dx\,. \tag{7.9}$$

DIM. - Per ogni α reale, la funzione $(u - \alpha)$ verifica le ipotesi del

([10]) Per $r \geq \rho > \frac{r}{2}$ si ha infatti

$$\int\limits_{I(\rho)} u^2 dx \leq \int\limits_{I(r)} u^2 dx = \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_{I(r)} u^2 dx \leq 2^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int\limits_{I(r)} u^2 dx\,.$$

lemma [7.1]. Si avrà pertanto (cfr. (7.3)) per ogni intero $k \geq 1$

$$\| u - \alpha \|^2_{H^k\left(I\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \leq c(\nu, r, k) \int_{I(r)} | u - \alpha |^2 dx . \tag{7.10}$$

Per k sufficientemente elevato, si applica il teorema di SOBOLEV ricordato nella nota (9) e si ottiene

$$\sum_j \sup_{\bar{I}\left(\frac{r}{2}\right)} |D_j u|^2 \leq c(n, r) \|u - \alpha\|^2_{H^k\left(I\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \leq c(\nu, r) \int_{I(r)} | u - \alpha |^2 dx . \tag{7.11}$$

Sia ρ positivo e $\leq \frac{r}{2}$. Per ogni $x \in \bar{I}(\rho)$ si ha

$$| u(x) - u(0) |^2 \leq c(n) \rho^2 \sum_j \sup_{\bar{I}\left(\frac{r}{2}\right)} | D_j u |^2 . \tag{7.12}$$

Dalle (7.12) e (7.11) segue che $\forall\ 0 < \rho \leq \frac{r}{2}$

$$\int_{I(\rho)} | u - u_\rho |^2 dx \leq \int_{I(\rho)} | u(x) - u(0) |^2 dx \leq c(\nu, r)\, \rho^{n+2} \int_{I(r)} | u - \alpha |^2 dx . \tag{7.13}$$

A questo punto si precisa la dipendenza da r della costante $c(\nu, r)$ con un procedimento per omotetia uguale a quello seguito nel lemma precedente e si ha la tesi.

COROLLARIO [7.II] - *Sia $u(x)$ una funzione che verifica le ipotesi del lemma precedente. Per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$, $\forall$ n-pla di indici $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ e per ogni α reale, si ha*

$$\int_{I(\rho)} | D^m u - \{ D^m u \}_\rho |^2 dx \leq A_1(\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I(r)} | D^m u - \alpha |^2 dx . \tag{7.14}$$

Basta osservare che la funzione $D^m u$ verifica le ipotesi del lemma [7.II].

8. - Proprietà delle soluzioni dell'equazione $E(u) = \sum_j D_j f_j$ a coefficienti continui.

Sia $u(x) \in H^1(I(r))$ una soluzione, nella sfera $I(r)$, dell'equazione

$$E(u) = \sum_{ij} D_i \{ a_{ij} D_j u \} = \sum_j D_j f_j \tag{8.1}$$

con $f_j \in L^2(I(r))$ e supponiamo che i coefficienti $a_{ij}(x)$ siano continui in $\overline{I(r)}$.

Poniamo

$$\omega^2(r) = \sup_{ij} \sup_{\overline{I(r)}} | a_{ij}(x) - a_{ij}(0) |^2 \tag{8.2}$$

e indichiamo con $E_0(u)$ l'operatore a coefficienti costanti

$$E_0(u) = \sum_{ij} a_{ij}(0) D_i D_j u . \tag{8.3}$$

Si dimostrano i seguenti lemmi.

LEMMA [8.I] - *Se $u(x)$ e gli a_{ij} verificano le ipotesi dette sopra, esiste una costante positiva $c(\nu)$ tale che per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$*

$$\sum_j \int_{I(\rho)} | D_j u |^2 dx \leq c(\nu) \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^n + \omega^2(r) \right] \sum_j \int_{I(r)} | D_j u |^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} | f_j |^2 dx \right\} . \tag{8.4}$$

DIM. - L'ipotesi che $u(x)$ sia soluzione di $E(u) = \sum_j D_j f_j$ in $I(r)$ significa, come abbiamo ricordato a suo tempo, che $\forall\ \varphi \in H^1_0(I(r))$

$$\sum_{ij} \int_{I(r)} a_{ij}(x) D_j u D_i \varphi \, dx = \sum_j \int_{I(r)} f_j D_j \varphi \, dx .$$

Questa relazione si può scrivere nel seguente modo

$$\sum_{ij} \int_{I(r)} a_{ij}(0) D_j u D_i \varphi \, dx = \sum_i \int_{I(r)} [f_i + \sum_j \{ a_{ij}(0) - a_{ij}(x) \} D_j u] D_i \varphi \, dx . \tag{8.5}$$

Siano ora v e w le soluzioni in $I(r)$ dei seguenti problemi di DIRICHLET ([11])

$$\begin{cases} v - u \in H^1_0(I(r)) \\ \sum_{ij} \int_{I(r)} a_{ij}(0) D_j v D_i \varphi dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in H^1_0(I(r)) \end{cases} \tag{8.6}$$

([11]) Formalmente

$$\begin{aligned} E_0(v) &= 0 \quad \text{in} \quad I(r) \\ v &= u \quad \text{su} \quad \partial I(r) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_0(w) &= \sum_i D_i \{ f_i + \sum_j [a_{ij}(0) - a_{ij}(x)] D_j u \} \quad &\text{in} \quad I(r) \\ w &= 0 \quad &\text{su} \quad \partial I(r) . \end{aligned}$$

Si osservi che, per le ipotesi fatte, $f_i + \sum_j [a_{ij}(0) - a_{ij}(x)] D_j u \in L^2(I(r))$ $(j = 1, \ldots, n)$.

e

$$(8.7)\quad \begin{cases} w \in \overset{\circ}{H}{}^1(I(r)) \\ \sum_{ij} \int_{I(r)} a_{ij}(0) D_j w D_i \varphi dx = \sum_i \int_{I(r)} [f_i + \sum_j \{a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\} D_j u] D_i \varphi\, dx \\ \qquad\qquad \forall\ \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(I(r)). \end{cases}$$

È noto (cfr. ad es. [11]) che entrambi questi problemi ammettono una e una sola soluzione. Per il modo come v e w sono state costruite risulta $v + w = u$ in $I(r)$.

Studiamo separatamente v e w.

La funzione $v \in H^1(I(r))$ ed è soluzione in $I(r)$ dell'equazione $E_0(v) = 0$, a coefficienti costanti. È noto allora che v è di classe C^∞ su ogni sfera $I(R) \subset\subset I(r)$ (cfr. ad es. [11]). Fissiamo R nell'intervallo $\frac{r}{2} \leq R < r$. Applicando il corollario [7.I] si ottiene che $\forall\ \rho \in (0, R]$

$$(8.8)\quad \sum_i \int_{I(\rho)} |D_i v|^2 dx \leq A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sum_i \int_{I(r)} |D_i v|^2 dx \leq 2^n A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_i \int_{I(r)} |D_i v|^2 dx .$$

Ed è chiaro che, per l'arbitrarietà di R, la maggiorazione (8.8) vale, in definitiva, per ogni $0 < \rho \leq r$.

La funzione w, dal canto suo, appartiene ad $\overset{\circ}{H}{}^1(I(r))$ ed è soluzione dell'equazione

$$E_0(w) = \sum_i D_i \{ f_i + \sum_i [a_{ij}(0) - a_{ij}(x)] D_j u \}$$

dove $\{ f_i + \sum_i [a_{ij}(0) - a_{ij}(x)] D_j u \}$, per le ipotesi fatte appartiene a $L^2(I(r))$. Possiamo applicare il lemma [5.I], con $\alpha_j = 0$, e si ottiene facilmente che

$$(8.9)\quad \sum_j \int_{I(\rho)} |D_j w|^2 dx \leq c(\nu) \sum_j \int_{(r)} \{ |f_j|^2 + \omega^2(r) |D_j u|^2 \} dx .$$

Dalle (8.8) e (8.9) segue che per ogni $0 < \rho \leq r$

$$\sum_j \int_{I(\rho)} |D_j u|^2 dx \leq$$

$$(8.10)\quad \leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_j \int_{I(r)} |D_j u|^2 dx + \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_j \int_{I(r)} |D_j w|^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} |f_j|^2 dx + \omega^2(r) \sum_j \int_{I(r)} |D_j u|^2 dx \right\} \leq$$

$$\leq c(\nu)\left\{\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^n (1 + \omega^2(r)) + \omega^2(r)\right] \sum_j \int_{I(r)} |D_j u|^2 dx + \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + 1\right] \sum_j \int_{I(r)} |f_j|^2 dx \right\}.$$

e quindi la tesi.

LEMMA [8.II] - *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente per quanto riguarda la u e le a_{ij}, esiste una costante positiva $c(\nu)$ tale che per ogni ρ dell'intervallo $0<\rho<r$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$*

$$\sum_j \int_{I(\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq \tag{8.11}$$
$$\leq c(\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(\rho)} | D_j u - \beta_j |^2 dx + \omega^2(r) \sum_j \int_{I(r)} | D_j u |^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} | f_j - \alpha_j |^2 dx \right\}.$$

DIM. - Come nel lemma precedente decomponiamo u nella somma

$$u = v + w$$

dove v e w sono soluzioni dei problemi di DIRICHLET (8.6) e (8.7) rispettivamente. La funzione v soddisfa in ogni sfera $I(R) \subset\subset I(r)$ le ipotesi del lemma [7.II]; applicando il corollario [7.II] si ottiene che $\forall\ 0<\rho<r$ e per ogni n-pla di numeri reali $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

$$\sum_i \int_{I(\rho)} | D_i v - \{ D_i v \}_\rho |^2 dx \leq 2^{n+2} A_2(\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_i \int_{I(r)} | D_i v - \beta_i |^2 dx. \tag{8.12}$$

Alla funzione w si applica ancora il lemma [5.I] e si ottiene che $\forall\ 0<\rho\leq r$ e per ogni n-pla di numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$\sum_i \int_{I(\rho)} | D_i w |^2 dx \leq c(\nu) \sum_i \int_{I(r)} \{ | f_i - \alpha_i |^2 + \omega^2(r) | D_i u |^2 \} dx. \tag{8.13}$$

Dalle (8.12) e (8.13) si deduce che per ogni ρ dell'intervallo $0<\rho<r$ [12]

---

[12] Si osservi che

$$\int_{I(\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx = \int_{I(\rho)} | D_j u - \{ D_j v \}_\rho - \{ D_j w \}_\rho |^2 dx \leq$$
$$\leq 2 \left\{ \int_{I(\rho)} | D_j v - \{ D_j v \}_\rho |^2 dx + \int_{I(\rho)} | D_j w - \{ D_j w \}_\rho |^2 dx \right\}$$

e

$$\int_{I(\rho)} | D_j w - \{ D_j w \}_\rho |^2 dx \leq \int_{I(\rho)} | D_j w |^2 dx.$$

$$(8.14)\quad \begin{aligned} &\sum_i \int_{I(\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq \\ &\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(r)} | D_j v - \beta_j |^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} | D_j w |^2 dx\right] \leq \\ &\leq c(\nu)\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(r)} | D_j u - \beta_j |^2 dx + \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} + 1\right] \sum_j \int_{I(r)} | D_j w |^2 dx\right] \leq \\ &\leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(r)} |D_j u - \beta_j|^2 dx + \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} + 1\right] \omega^2(r) \sum_j \int_{I(r)} |D_j u|^2 dx + \sum_j \int_{I(r)} |f_j - \alpha_j|^2 dx\right\} \end{aligned}$$

e quindi la tesi.

9. - Regolarità delle derivate prime.

Come nei paragrafi precedenti Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo in Ω l'equazione $E(u) = \sum_i D_i f_i$ e supponiamo che le funzioni f_i appartengano ad uno spazio $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$. Esaminiamo da prima il caso di λ variabile nell'intervallo $0 \leq \lambda < n$. Per quanto si è visto a suo tempo, ciò equivale a supporre che le f_i appartengano allo spazio di MORREY $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Per quanto riguarda la nomenclatura, se $I(x_0, r)$ è una sfera contenuta in Ω, poniamo

$$\omega^2(x_0, r) = \sup_{ij} \sup_{I(x_0, r)} | a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0) |^2 .$$

TEOREMA [9.I] *Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione $E(u) = \sum_i D_i f_i$ e supponiamo che i coefficienti $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ e le $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ con $0 \leq \lambda < n$. In queste ipotesi $u \in \mathrm{H}^{1,\lambda}(\Omega_0)$, per ogni aperto $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e si ha la maggiorazione*

$$(9.1)\qquad \sum_i \| D_i u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_0)} \leq c(\nu, \lambda, \Omega_0) \{ \sum_i \| D_i u \|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \}.$$

DIM. - Sia δ_0 la distanza di $\overline{\Omega}_0$ da $\complement\Omega$. Sia $I(x_0, r)$ una sfera con centro x_0 e raggio $r \leq \frac{\delta_0}{2}$. Il lemma [8.I] assicura che tutti i ρ dell'intervallo $(0, r)$

$$(9.2)\qquad \sum_i \int_{I(x_0,\rho)} | D_i u |^2 dx \leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \omega^2(x_0, r)\right\} \sum_i \int_{I(r)} | D_i u |^2 dx + c(\nu) r^\lambda \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}$$

dove $c(\nu)$ si può supporre maggiore di uno.

Poiché i coefficienti sono continui in $\overline{\Omega}$, $\omega(x_0, r) \to 0$, quando $r \to 0$, uniformemente rispetto a $x_0 \in \overline{\Omega}_0$; quindi fissato comunque $p > 1$ esiste un $r(p) \leq \frac{\delta_0}{2}$ tale che $\forall\ 0 < r \leq r(p)$ e $\forall\ x_0 \in \overline{\Omega}_0$

$$\omega^2(x_0, r) \leq \frac{1}{p^n}.$$

Da ciò segue che $\forall\ x_0 \in \Omega_0$, e per ogni coppia di valori ρ, r verificanti le relazioni

$$0 < \rho < r \leq r(p); \quad 1 < \frac{r}{\rho} \leq p$$

risulta

$$\omega^2(x_0, r) \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^n. \tag{9.3}$$

La maggiorazione (9.2) e le considerazioni precedenti ci permettono di formulare questo risultato: fissato comunque $p > 1$ esiste $r(p) \leq \frac{\delta_0}{2}$ e positivo tale che $\forall\ x_0 \in \overline{\Omega}_0$ e per ogni coppia di valori ρ, r verificanti le relazioni $0 < \rho < r \leq r(p)$ e $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$ risulta

$$\sum_i \int_{I(x_0, \rho)} |D_i u|^2 dx \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_i \int_{I(x_0, r)} |D_i u|^2 dx + c(\nu) p^\lambda \sum_i \|f_i\|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \cdot \rho^\lambda.$$

Vediamo allora che sono verificate le ipotesi del lemma fondamentale [6.II] ove si assuma, per ogni fissato $x_0 \in \overline{\Omega}_0$,

$$\varphi(t) = \sum_i \int_{I(x_0, t)} |D_i u|^2 dx, \; B(t) = c(\nu) \sum_i \|f_i\|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \cdot t^\lambda, \; A = 2c(\nu), \; \alpha = n, \beta = \lambda.$$

Dal lemma in questione segue allora che fissato per es. $\varepsilon = \frac{n - \lambda}{2}$ e scelto $p = [2c(\nu)]^{2/n-\lambda}$ esiste un $r(\nu, \lambda) \leq \frac{\delta_0}{2}$ tale che $\forall\ x_0 \in \overline{\Omega}_0$, e $\forall\ \rho$, r verificanti le relazioni $0 < \rho < r \leq r(\nu, \lambda)$

$$\sum_i \int_{\Omega_0(x_0, \rho)} |D_i u|^2 dx \leq$$

$$\leq \sum_i \int_{I(x_0, \rho)} |D_i u|^2 dx \leq 2c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n+\lambda}{2}} \sum_i \int_{I(x_0, r)} |D_i u|^2 dx + c(\nu, \lambda) \sum_i \|f_i\|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \cdot \rho^\lambda.$$

Di conseguenza, per ogni $x_0 \in \overline{\Omega}_0$ e per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho < r(\nu, \lambda)$

$$(9.4)\quad \sum_i \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega_0(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \leq 2c(\nu) \frac{1}{r^\lambda(\nu,\lambda)} \sum_i \| D_i u \|^2_{L^2(\Omega)} + c(\nu,\lambda) \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} .$$

D'altra parte se $\rho \geq r(\nu, \lambda)$ si ha, banalmente,

$$(9.5)\quad \sum_j \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega_0(x_0,\rho)} |D_j u|^2 dx \leq \sum_j \frac{1}{r^\lambda(\nu,\lambda)} \int_{\Omega_0} |D_j u|^2 dx \leq \frac{1}{r^\lambda(\nu,\lambda)} \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Da (9.4) e (9.5) segue la tesi.

OSSERVAZIONE [9.I] - Se nel teorema [9.I] si suppone che le $f_i \in L^{(2,n)}(\Omega) \backsim \backsim L^\infty(\Omega)$ (da non confondere con $\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$, spazio «limite» di JOHN e NIRENBERG) non si ottiene che la u ha le derivate prime in $L^{(2,n)}(\Omega)$, cioè limitate, ma solamente che le derivate $D_j u$, $j = 1, 2, \dots, n$, appartengono a $L^{(2,n-\varepsilon)}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Infatti se le $f_j \in L^{(2,n)}(\Omega)$ la dimostrazione del teorema precedente si ripete fino alla formulazione di questo risultato:

Fissato comunque $p > 1$ esiste un $r(p) \leq \frac{\delta_0}{2}$ e positivo tale che $\forall\, x_0 \in \overline{\Omega}$ e per ogni coppia di valori ρ, r verificanti le relazioni $0 < \rho < r \leq r(p)$ e $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$ risulta

$$\sum_i \int_{I(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \leq 2c(\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_i \int_{I(x_0,r)} |D_i u|^2 dx + c(\nu) p^n \sum_i \| f_i \|^2_{L^{(2,n)}(\Omega)} \rho^n .$$

E qui si vede, ove si assuma $\varphi(t) = \sum_i \int_{I(x_0,t)} |D_i u|^2 dx$, che sono verificate le ipotesi del lemma fondamentale [6.I] (anziché [6.II]) per cui si può solo concludere che le $D_i u \in L^{(2,n-\varepsilon)}(\Omega)$, per ogni ε positivo.

Esaminiamo ora il caso limite in cui $f_j \in \mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$.

TEOREMA [9.II] - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$ *una soluzione in* Ω *dell'equazione* $E(u) = \sum_i D_i f_i$ *e supponiamo che* $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *e che i coefficienti* a_{ij} *siano hölderiani in* $\overline{\Omega}$. *In queste ipotesi* $u \in H^{1,n}(\Omega_0)$ *per ogni aperto* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *e si ha la maggiorazione*

$$(9.6)\quad \sum_j ||| D_j u |||^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega_0)} \leq c(\nu, a_{ij}, \Omega_0) \left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} \right\} .$$

Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, sia δ_0 la distanza di $\bar{\Omega}_0$ da $\complement\Omega$, sia infine Ω_1 un aperto verificante la condizione $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. Per fissare le idee prendiamo Ω_1 in modo che risulti uguale a $\frac{\delta_0}{2}$ la distanza di $\bar{\Omega}_0$ da $\complement\Omega_1$ e la distanza di $\bar{\Omega}_1$ da $\complement\Omega$.

Sia α, $0 < \alpha < 1$, l'esponente di hölderianità dei coefficienti a_{ij} in $\bar{\Omega}$. Poiché $\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega)$, se utilizziamo il risultato del teorema [9.I] con $\lambda = n - 2\alpha$, abbiamo che le derivate $D_j u$ appartengono a $\mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega_1)$ e si ha la maggiorazione

$$(9.7) \qquad \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega_1)} \leq c(\nu, \alpha, \Omega_1) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega)} \} .$$

Sia r un numero positivo e $\leq \frac{\delta_0}{2}$. Il lemma [8.II], ove si assuma $\beta_j = \{ D_j u \}_r$ e $\alpha_j = f_{j,r}$ [13] assicura che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}_0$ e per tutti i ρ dell'intervallo $(0, r)$

$$\sum_j \int_{I(x_0,\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq$$

$$(9.8) \qquad \leq c(\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + \omega^2(x_0, r) \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u |^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_j \int_{I(x_0,r)} | f_j - f_{j,r} |^2 dx \right\} .$$

Poniamo

$$(9.9) \qquad M = \sup_{ij} \| a_{ij} \|^2_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} .$$

Dalle (9.8) e (9.7) segue allora

$$\sum_j \int_{I(x_0,\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq$$

$$\leq c(\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + M r^n \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega_1)} + \right.$$

$$(9.10) \qquad \left. + r^n \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega_1)} \right\} \leq c(\nu) \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx +$$

$$+ c(\nu, M, \Omega_0) r^n \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} \}$$

---

[13] Ricordiamo che con v_r indichiamo la media integrale di v sulla sfera $I(x_0, r)$.

$\forall\ x_0 \in \overline{\Omega}_0$, e per ogni coppia di valori ρ, r che verificano la relazione $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$.

Posto

$$\varphi(t) = \sum_j \int_{I(x_0,t)} |D_j u - \{D_j u\}_t|^2 dx, \quad B(t) = c(\nu, M, \Omega_0) t^n \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} \}.$$

dalle (9.10) segue che $\forall\ x_0 \in \overline{\Omega}_0$ e per tutte le coppie ρ, r verificanti le relazioni $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$, $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$ risulta

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + B(p)\rho^n. \tag{9.11}$$

Siamo quindi nelle ipotesi esatte del lemma fondamentale [6.II].

Fissato $\varepsilon = 1$, dalla (6.6) del lemma in questione segue che per ogni $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + B[c(\nu)] \frac{c(\nu)}{c(\nu) - 1} \rho^n.$$

Da cui

$$\sum_j \frac{1}{\rho^n} \int_{\Omega_0(x_0,\rho)} |D_j u - \{D_j u\}_\rho|^2 dx \leq \\ \leq \frac{2^n c(\nu)}{\delta_0^n} \sum_j \int_{I\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)} |D_j u - \{D_j u\}_{\frac{\delta_0}{2}}|^2 dx + c(\nu, M, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} \} \leq^{(14)} \\ \leq c(\nu, M, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} \}. \tag{9.12}$$

D'altra parte se $x_0 \in \overline{\Omega}_0$ e $\rho \geq \frac{\delta_0}{2}$ si ha banalmente

$$\sum_j \frac{1}{\rho^n} \int_{\Omega_0(x_0,\rho)} |D_j u - \{D_j u\}_\rho|^2 dx \leq \frac{c}{\delta_0^n} \sum_j \int_{\Omega_0} |D_j u|^2 dx. \tag{9.13}$$

Dalle (9.12) e (9.13) segue la tesi.

---

(14) Osserviamo che

$$\int_\Omega v_\Omega{}^2 dx \leq \int_\Omega |v|^2 dx.$$

LEMMA [9.I] - *Sia* $u \in H^1(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione* $E(u) = \sum_i D_i f_i$ *con* $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega)$ *e* $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$. *Allora* u *ha le derivate prime localmente limitate in* Ω *e per ogni sfera* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *risulta*

$$(9.14) \qquad \sum_j \sup_{\bar{\Omega}_0} | D_j u |^2 \leq c(\nu, a_{ij}, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega)} \}.$$

La dimostrazione di questo lemma è analoga a quella del teorema precedente. Per comodità del lettore essa viene esposta nella Appendice II.

TEOREMA [9.III] - *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente per quanto riguarda* u, f_j *e* a_{ij}, *su ogni aperto* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *risulta* $u \in H^{1,\beta}(\Omega_0)$ *dove* $\beta = n + 2\alpha$ *se* $0 < \alpha < 1$ *e* $\beta = n + 2 - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, *se* $\alpha = 1$. *Si ha inoltre la maggiorazione*

$$(9.15) \qquad \sum_j ||| D_j u |||^2_{\mathfrak{L}^{(2,\beta)}(\Omega_0)} \leq c(\nu, \beta, a_{ij}, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega)} \}.$$

Se $\alpha = 1$, $c(\nu, \beta, a_{ij}, \Omega_0) \longrightarrow +\infty$ *quando* $\beta \longrightarrow n + 2$.

DIM. - Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e δ_0 la distanza di $\bar{\Omega}_0$ da $\complement\Omega$. Il lemma [8.II], ove si assuma $\beta_j = \{ D_j u \}_r$ e $\alpha_j = f_{j,r}$, assicura che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}_0$ e per ogni coppia ρ, r tale che $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$

$$\sum_j \int_{I(x_0,\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq$$

$$(9.16) \qquad \leq c(\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0,\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + \omega^2(x_0, r) \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u |^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_j \int_{I(x_0,r)} | f_j - f_{j,r} |^2 dx \right\}.$$

Poniamo, come si è fatto precedentemente, $M = \sup_{ij} ||| a_{ij} |||^2_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$ e ricordiamo l'inclusione $\mathfrak{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,n+\alpha)}(\Omega)$. Da (9.16) e dal lemma [9.I] segue allora che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}_0$, e per ogni coppia di numeri ρ, r verificanti le relazioni $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$, $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$ si ha

$$(9.17) \qquad \sum_j \int_{I(x_0,\rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq$$

$$\leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0,r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + c(\nu, M, \Omega_0)\rho^{n+2} \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2, n+2\alpha)}(\Omega)} \} \rho^{n+2\alpha}.$$

Posto

$$\varphi(t) = \sum_j \int_{I(x_0,t)} | D_j u - \{ D_j u \}_t |^2 dx,$$

$$B(t) = c(\nu, M, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2, n+2\alpha)}(\Omega)} \} t^{n+2\alpha}$$

la (9.17) si può anche scrivere

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + B(\rho)\rho^{n+2}. \tag{9.18}$$

E qui si vede che se $0 < \alpha < 1$ si può applicare il lemma fondamentale [6.II] se invece $\alpha = 1$ si applica il lemma fondamentale [6.I]. La tesi segue allora con un ragionamento uguale a quello con cui si è conclusa la dimostrazione del teorema [9.II] e che riteniamo di non dover ripetere.

10. - Teorema generale.

I risultati di regolarità dimostrati nel numero precedente si possono riassumere nel seguente modo:

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u(x) \in H^1(\Omega)$ una soluzione in Ω dell'equazione ellittica

$$\sum_{ij} D_i \{ a_{ij} D_j u \} = \sum_i D_i f_i \tag{10.1}$$

dove $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ per un un certo λ dell'intervallo $[0, n+2]$.

Sia Ω_0 un qualunque aperto strettamente contenuto in Ω. Allora:

i$_1$) Se i coefficienti a_{ij} sono continui in $\bar{\Omega}$ e $0 \leq \lambda < n$, la soluzione $u \in H^{1,\lambda}(\Omega_0)$.

i$_2$) Se i coefficienti a_{ij} sono hölderiani in $\bar{\Omega}$ (non importa con quale esponente) e $\lambda = n$ la soluzione $u \in H^{1,n}(\Omega_0)$.

i$_3$) Se $n < \lambda < n+2$ e se i coefficienti $a_{ij} \in C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\bar{\Omega})$ allora $u \in H^{1,\lambda}(\Omega)$.

i$_4$) Se, infine, $\lambda = n+2$ e i coefficienti $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ allora $u \in H^{1,n+2-\varepsilon}(\Omega_0)$ $\forall \, \varepsilon > 0$.

In tutti quattro i casi si ha la maggiorazione

$$(10.2) \qquad \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\beta)}(\Omega_0)} \leq c(\nu, \beta, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \}$$

dove $\beta = \lambda$ se $0 \leq \lambda < n+2$, e $\beta = n+2-\varepsilon$ se $\lambda = n+2$. La costante c viene a dipendere anche dal modulo di continuità o dal coefficiente di HÖLDER dei coefficienti a_{ij}.

Questo risultato relativo alle derivate prime della u si estende alle derivate di ordine superiore se si fanno convenienti ipotesi sui coefficienti a_{ij} e sul secondo membro dell'equazione.

Si dimostra infatti il seguente teorema:

TEOREMA [10.I] - *Sia $u(x) \in H^{k+2}(\Omega)$, k intero ≥ 0, una soluzione debole in Ω dell'equazione $E(u) = f$ (15) e supponiamo che $f \in H^{k,\lambda}(\Omega)$ con $0 \leq \lambda \leq n+2$. Sia Ω_0 un qualunque aperto strettamente contenuto in Ω. Allora*

a) se i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \lambda < n$ la soluzione $u \in H^{k+2,\lambda}(\Omega_0)$.

b) Se i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$, per un certo $0 < \alpha \leq 1$, e $\lambda = n$ la soluzione $u \in H^{k+2,n}(\Omega)$.

c) Se $n < \lambda < n+2$ e i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1,\frac{\lambda-n}{2}}(\overline{\Omega})$ allora $u \in H^{k+2,\lambda}(\Omega_0)$.

d) Se infine $\lambda = n+2$ e i cofficienti $a_{ij} \in C^{k+1,1}(\overline{\Omega})$ allora $u \in H^{k+2,n+2-\varepsilon}(\Omega_0)$ $\forall \varepsilon > 0$.

In tutti quattro i casi si ha la maggiorazione

$$(10.3) \qquad \sum_{|m|=k+2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\beta)}(\Omega_0)} \leq c(\nu, \beta, \Omega_0) \{ \| u \|^2_{H^{k+2}(\Omega)} + \| f \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega)} \}$$

dove $\beta = \lambda$ se $0 \leq \lambda < n+2$ e $\beta = n+2-\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, se $\lambda = n+2$.

DIM. - Il teorema si dimostra per induzione. Supponiamo $k = 0$; possiamo supporre anche che Ω e Ω_0 siano dei «cubi» a facce parallele agli iperpiani coordinati (basterà poi sfruttare la nota proprietà di copertura dei compatti). Supponiamo, per fissare le idee, che $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \lambda < n$ (caso a)). Sia h il massimo intero non negativo tale che $2h < \lambda \leq 2(h+1)$. Fissiamo dei «cubi» $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_h$ verificanti la relazione

$$\Omega_0 \subset\subset \Omega_h \subset\subset \Omega_{h-1} \subset\subset \dots \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega.$$

(15) Ciò significa, come abbiamo ricordato a suo tempo, che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} D_j u \, D_i \varphi \, dx = - \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

Dalle ipotesi: $u \in H^2(\Omega)$ e $E(u) = f$ in Ω, segue che

$$E(D_t u) = D_t f - \sum_j D_i \{ \sum_j D_t a_{ij} \cdot D_j u \} \qquad (t = 1, 2, \dots, n). \tag{10.4}$$

D'altra parte (cfr. Appendice I)

$$u \in H^2(\Omega) \Rightarrow D_j u \in \mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega), \quad j = 1, \dots, n,$$

e poiché le funzioni $D_t a_{ji}$ sono continue in $\bar{\Omega}$ anche $D_t a_{ij} \cdot D_j u \in \mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)$ (cfr. App. I). Quindi, nell'equazione (10.4), i coefficienti dell'operatore E sono in $C^1(\bar{\Omega})$ e il secodo membro è somma di derivate di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)$. Utilizzando i risultati del numero prececente si ottiene che $D_t u \in H^{1,2}(\Omega_1)$ per $t = 1, \dots, n$ e si ha la maggiorazione

$$\sum_j \| D_t D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega_1)} \leq c_1 \{ \sum_j \| D_t D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)} + \tag{10.5}$$

$$+ \sum_i \| \sum_j D_t a_{ij} \cdot D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)} \}.$$

Un semplice calcolo prova che

$$\sum_i \| \sum_j D_t a_{ij} \cdot D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)} \leq c \sup_{ij} \max_{\bar{\Omega}} | D_t a_{ij} |^2 \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)} \leq c \| u \|^2_{H^2(\Omega)} .$$

Dalla (10.5) segue in definitiva ([16])

$$\sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega_1)} \leq c_1 \{ \sum_{|m|=1}^{2} \| D^m u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \}. \tag{10.6}$$

A questo punto sappiamo che $u \in H^{2,2}(\Omega_1)$ e quindi (cfr. App. I) $D_j u \in \mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_1)$, $j = 1, \dots, n$. Quindi ora sappiamo che il secondo membro dell'equazione (10.4) è somma di derivate di funzioni $\in \mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_1)$. Applichiamo ancora i risultati del numero precedente e otteniamo

$$\sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_2)} \leq$$

$$\leq c_2 \{ \sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{L^2(\Omega_1)} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_1)} + \sum_{it} \| \sum_j D_t a_{ij} \cdot D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_1)} \} \leq$$

$$\leq c_2 \{ \sum_{|m|=1}^{2} \| D^m u \|^2_{L^2(\Omega_1)} + \| f \|^2_{\mathcal{L}^{(2,4)}(\Omega_1)} + \sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega_1)} \}.$$

([16]) Si utilizza anche l'inclusione $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{(2,2)}(\Omega)$.

Tenuto conto della (10.6) si ha in definitiva ([17])

(10.7) $$\sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,4)}(\Omega_2)} \leq c_2 \{ \sum_{|m|=1}^{2} \| D^m u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \} .$$

Iterando questo precedimento $h+1$ volte si arriva alla maggiorazione (10.3) con $k=0$.

In modo del tutto analogo si ragiona per casi *b*), *c*), *d*) tenendo conto delle ipotesi sui coefficienti, proprie di questi casi, e del fatto che $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$, è uno spazio di moltiplicatori per $\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è uno spazio di moltiplicatori per $\mathcal{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega) \backsim C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (cfr. App. I). Il caso *d*), in particolare, si riduce al caso *c*) ricordando che $\forall\, \varepsilon > 0$ $\mathcal{L}^{(2,n+2)}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{(2,n+2-\varepsilon)}(\Omega)$.

Supponiamo ora che il teorema sia vero per un certo $k > 2$ e dimostriamo che esso è vero per $k+1$. Per fissare le idee mettiamoci nel caso *a*). Supponiamo allora

$$0 \leq \lambda < n, \quad u \in H^{k+1}(\Omega), \quad a_{ij} \in C^k(\overline{\Omega}), \quad f \in H^{k-1,\lambda}(\Omega)$$

e inoltre

(10.8) $$E(u) = f \quad \text{in } \Omega.$$

Poichè $H^{k-1,\lambda}(\Omega) \subset H^{k-2,\lambda}(\Omega)$, avendo supposto vero il teorema per k possiamo dire intanto che su ogni cubo $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ risulta $u \in H^{k,\lambda}(\Omega_1)$ e si ha la maggiorazione

(10.9) $$\sum_{|m|=k} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \leq c \{ \| u \|^2_{H^k(\Omega)} + \| f \|^2_{H^{k-2,\lambda}(\Omega)} \} .$$

Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. Dall'equazione (10.8) ricaviamo che per $t = 1, 2, \dots, n$

(10.10) $$E(D_t u) = D_t f - \sum_{ij} \{ D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u + D_t a_{ij} \cdot D_i D_j u \} .$$

Per quanto si è detto sopra il secondo membro appartiene a $H^{k-2,\lambda}(\Omega_1)$ e si prova facilmente che ([18])

(10.11) $$\begin{aligned} &\sum_t \| D_t f - \sum_{ij} D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u - \sum_{ij} D_t a_{ij} \cdot D_i D_j u \|^2_{H^{k-2,\lambda}(\Omega_1)} \leq \\ &\leq c \{ \| f \|^2_{H^{k-1,\lambda}(\Omega_1)} + \| u \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} \} . \end{aligned}$$

([17]) Si utilizza anche il fatto che $\| f \|_{\mathfrak{L}^{(2,4)}(\Omega_1)} \leq \| f \|_{\mathfrak{L}^{(2,4)}(\Omega)}$ e l'inclusione $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,4)}(\Omega)$.

([18]) $$\sum_t \| D_t f - \sum_{ij} D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u - \sum_{ij} D_t a_{ij} \cdot D_i D_j u \|^2_{H^{k-2,\lambda}(\Omega_1)} \leq$$

Poiché il teorema è supposto vero per k, dalla maggiorazione (10.9), scritta con $D_t u$ al posto di u, si ha:

$$\sum_{t} \sum_{|m|=k} \| D^m D_t u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_0)} \leq$$

$$\leq c \left\{ \sum_t \| D_t u \|^2_{H^k(\Omega_1)} + \sum_t \| D_t f - \sum_{ij} D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u - \sum_{ij} D_t a_{ij} \cdot D_i D_j u \|^2_{H^{k-2,\lambda}(\Omega_1)} \right\}$$

e tenuto conto della (10.11)

$$(10.12) \quad \sum_{|m|=k+1} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_0)} \leq c \left\{ \| u \|^2_{H^{k+1}(\Omega_1)} + \| f \|^2_{H^{k-1,\lambda}(\Omega_1)} + \| u \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} \right\}.$$

Da questa maggiorazione e dalla (10.9) segue in definitiva

$$(10.13) \qquad \sum_{|m|=k+1} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_0)} \leq c \left\{ \| u \|^2_{H^{k+1}(\Omega)} + \| f \|^2_{H^{k-1,\lambda}(\Omega)} \right\}$$

cioè la tesi.

In modo perfettamente analogo si applica l'induzione nei casi *b*), *c*), *d*).

CAP. III.

Regolarizzazione al bordo con condizioni di Dirichlet.

Sia $I^*(r)$ la semisfera $\{ x : x \in \mathbb{R}^n, \ |x| < r, x_n > 0 \}$; indichiamo con Γ_r la parte della sua frontiera che appartiene all'iperpiano $x_n = 0$ $[\Gamma_r = \partial I^*(r) \cap \cap \{ x_n = 0 \}]$.

In questo capitolo consideriamo soluzioni dell'equazione $E(u) = \sum_i D_i f_i$, nella semisfera $I^*(r)$, le quali si annullano su Γ_r; per soluzioni di questo tipo stabiliremo dei teoremi di regolarità, sulle semisfere $I^*(\rho)$ con $0 < \rho < r$, analoghi a quelli dimostrati nel capitolo precedente.

Anche in questo caso ci procureremo prima alcune maggiorazioni integrali per soluzioni regolari dell'equazione $E(u) = 0$ a coefficienti costanti;

$$\leq c \left\{ \sum_t \| D_t f \|^2_{H^{k-2,\lambda}(\Omega_1)} + \sum_{i,j,t} \| D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u + D_i a_{ij} \cdot D_i D_j u \|^2_{H^{k-2}(\Omega_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j,t} \sum_{|m|=k-2} \| D^m (D_t D_i a_{ij} \cdot D_j u + D_i a_{ij} D_i D_j u) \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \right\} \leq$$

$$\leq c \left\{ \| f \|^2_{H^{k-1,\lambda}(\Omega_1)} + \sum_{ij} \| a_{ij} \|^2_{C^k(\bar{\Omega})} \| u \|^2_{H^k(\Omega_1)} + \sum_{ij} \| a_{ij} \|^2_{C^k(\bar{\Omega})} \cdot \sum_{1 \leq |m| \leq k} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \right\} \leq$$

$$\leq c \left\{ \| f \|^2_{H^{k-1,\lambda}(\Omega_1)} + \| u \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} \right\}.$$

utilizzeremo poi queste maggiorazioni nel caso dei coefficienti variabili facendo uso dell'artificio di KORN e dei lemmi fondamentali [6.I] e [6.II].

Ci limiteremo a tratteggiare quelle dimostrazioni, o parti di dimostrazioni, che sono una ripetizione di ragionamenti già sviluppati nel capitolo precedente.

11· - Equazione omogenea a coefficienti costanti.

In tutto questo paragrafo i coefficienti dell'operatore $E(u)$ si suppongono costanti.

LEMMA [11.I] - *Sia $u(x)$ una funzione di $C^\infty(\overline{I^*(r)})$ soluzione in $I^*(r)$ dell'equazione $E(u)=0$ e nulla su Γ_r. Esiste una costante positiva $A_0(\nu)$ tale che $\forall\, 0<\rho\leq r$*

$$\int_{I^*(\rho)} |u|^2 dx \leq A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{I^*(r)} |u|^2 dx. \tag{11.1}$$

DIM. - Dal lemma [5.III], ove si ponga $a_j=f_j=0$, segue che per ogni σ dell'intervallo $0<\sigma<r$

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(\sigma)} |D_j u|^2 dx \leq \frac{c(\nu)}{(r-\sigma)^2}\int_{I^*(r)} |u|^2 dx. \tag{11.2}$$

Questa maggiorazione continua a valere se al posto di u mettiamo una qualunque derivata «tangenziale» della u, cioè una qualunque derivata fatta rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, perché se $D^m u$ è una derivata tangenziale si ha ancora

$$D^m u \in C^\infty(\overline{I^*(r)}),\quad D^m u = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_r,\quad E(D^m u) = D^m E(u) = 0.$$

Lo stesso discorso invece non vale per le derivate in cui figurino derivazioni anche rispetto alla variabile x_n perché queste derivate non si annullano su Γ_r.

Si supera questa difficoltà con un artificio ben noto. Si voglia per es. maggiorare l'integrale della derivata «normale» $D_n^2 u$. Dalla maggiorazione (11.2), scritta per una qualunque derivata tangenziale $D_h u$, $h=1, \dots, n-1$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n-1}\int_{I^*(\rho)} |D_j D_h u|^2 dx \leq c(\nu,\sigma,r)\sum_{h=1}^{n-1}\int_{I^*\left(\frac{r+\sigma}{2}\right)} |D_h u|^2 dx \leq c(\nu,\sigma,r)\int_{I^*(r)} |u|^2 dx. \tag{11.3}$$

Dall'equazione $E(u)=0$ ci ricaviamo $D_n^2 u$ [19]

$$(11.4)\qquad D_n^2 u = -\frac{1}{a_{nn}} \sum_{ij}^{*} a_{ij} D_i D_j u .$$

Nella sommatoria Σ^* gli indici i e j non assumono contemporaneamente il valore n. Dalle (11.4) e (11.3) segue allora che

$$\int_{I^*(\sigma)} | D_n^2 u|^2 dx \leq c \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I^*(\sigma)} | D_i D_j u |^2 dx \leq c(\nu, \sigma, r) \int_{I^*(r)} | u |^2 dx .$$

In questo modo si riesce a maggiorare la norma in $L^2(I^*(\sigma))$ di tutte le derivate seconde della u con la norma in $L^2(I^*(r))$ della u

$$(11.5)\qquad \sum_{|m|=2} \int_{I^*(\sigma)} | D^m u |^2 dx \leq c(\nu, \sigma, r) \int_{I^*(r)} | u |^2 dx .$$

Partendo da questa maggiorazione, e con uguale tecnica, si maggiora la norma in $L^2(I^*(\sigma))$ delle derivate terze e così via. In generale indicato con k un qualunque intero ≥ 1, e scelto $\sigma = \frac{r}{2}$, si dimostra la seguente maggiorazione

$$(11.6)\qquad \| u \|^2_{H^k(I^*(r/2))} \leq c(\nu, k, r) \int_{I^*(r)} | u |^2 dx .$$

A questo punto si ragiona esattamente come nella dimostrazione dei lemmi [7.I] e [7.II].

Se k è sufficientemente elevato, il teorema di SOBOLEV assicura che

$$(11.7)\qquad \sum_{i} \sup_{\bar{I}^*(r/2))} | D_j u |^2 \leq c(n, r) \| u \|^2_{H^k(I^*(r/2))} .$$

Dalle (11.6) e (11.7) segue allora che per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq \frac{r}{2}$

$$(11.8)\qquad \begin{aligned} \int_{I^*(\sigma)} | u(x) |^2 dx &= \int_{I^*(\rho)} | u(x) - u(0) |^2 dx \leq \\ &\leq c(n)\rho^{n+2} \sum_{i} \sup_{\bar{I}^*(r/2)} | D_j u |^2 \leq c(\nu, r)\rho^{n+2} \int_{I^*(r)} | u(x) |^2 dx . \end{aligned}$$

---

[19] $a_{nn} \neq 0$ perché $E(u)$ è ellittico.

Si precisa la dipendenza di $c(\nu, r)$ da r con un discorso per omotetia. Si considera la funzione $v(x) = u(rx)$;

$$v(x) \in C^\infty(\overline{I^*(1)}), \quad v(x) = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_1, \; E(v) = 0 \quad \text{in} \quad I^*(1).$$

Si scrive la maggiorazione (11.8) per la funzione $v(x)$ e le semisfere $I^*\left(\frac{\rho}{r}\right)$ e $I^*(1)$

$$\int_{I^*\left(\frac{\rho}{r}\right)} |v(x)|^2 dx \leq c(\nu, 1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(1)} |v(x)|^2 dx.$$

A questo punto si applica l'omotetia $x \longrightarrow \frac{y}{r}$ e si ottiene

$$\int_{I^*(\rho)} |u(x)|^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(r)} |u(x)|^2 dx. \tag{11.9}$$

Pur di modificare la costante $c(\nu)$ la maggiorazione (11.9) vale per tutti i ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$. E il lemma è dimostrato.

COROLLARIO [11.I] - *Se la funzione $u(x)$ verifica le ipotesi del lemma precedente, per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq r$ e per $h = 1, 2, \dots, n-1$, si ha*

$$\int_{I^*(\rho)} |D_h u|^2 dx \leq A_0(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(r)} |D_h u|^2 dx. \tag{11.10}$$

Basta osservare che ogni derivata «tangenziale» $D_h u$ verifica in $I^*(r)$ le ipotesi del lemma [11.I]

$$D_h u \in C^\infty(\overline{I^*(r)}), \quad D_h u = 0 \quad \text{su} \quad \Gamma_r, \; E(D_h u) = 0.$$

LEMMA [11.II] - *Sia $u(x)$ una funzione di $C^\infty(\overline{I^*(r)})$ soluzione in $I^*(r)$ dell'equazione $E(u) = 0$ e nulla su Γ_r. Esiste una costante positivn $A_1(\nu)$ tale che* $\forall\, 0 < \rho \leq r$

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u|^2 dx \leq A_1(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n} \int_{I^*(r)} |D_n u|^2 dx \tag{11.11}$$

e

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u - \{D_n u\}_\rho|^2 dx \leq A_1(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(r)} |D_n u - \{D_n u\}_r|^2 dx. \tag{11.12}$$

DIM. - Si parte dalla maggiorazione (11.6); si applica il teorema di SOBOLEV e si ottiene, per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq \frac{r}{2}$,

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u|^2 dx \leq c(n)\rho^n \sup_{\bar{I}^*(r/2)} |D_n u|^2 \leq \tag{11.13}$$

$$\leq c(n, r)\rho^n \|u\|^2_{H^k(I^*(r/2))} \leq c(\nu, r)\rho^n \int_{I^*(r)} |u|^2 dx.$$

Poiché $u = 0$ su Γ_r, si applica il lemma [5.IV] e si ottiene

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u|^2 dx \leq c(\nu, r) r^2 \rho^n \int_{I^*(r)} |D_n u|^2 dx. \tag{11.14}$$

Di qui, con il solito ragionamento per omotetia, si dimostra la (11.11). Per quanto riguarda la (11.12) osserviamo che, qualunque sia la costante reale c, la funzione $(u(x) - cx_n)$ verifica ancora le ipotesi del lemma. Per questa funzione si può allora scrivere la maggiorazione (11.6)

$$\|u - cx_n\|^2_{H^k(I^*(r/2))} \leq c(n, k, r) \int_{I^*(r)} |u - cx_n|^2 dx. \tag{11.15}$$

Da questa maggiorazione e dal teorema di SOBOLEV segue che per ogni $0 < \rho \leq \frac{r}{2}$

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u - D_n u(0)|^2 dx \leq c\rho^{n+2} \sup_{\bar{I}^*(r/2)} \sum_{|m|=2} |D^m(u - cx_n)|^2 \leq \tag{11.16}$$

$$\leq c(\nu, r)\rho^{n+2} \int_{I^*(r)} |u - cx_n|^2 dx.$$

D'altra parte il lemma [5.IV] assicura che

$$\int_{I^*(r)} |u - cx_n|^2 dx \leq \frac{r^2}{2} \int_{I^*(r)} |D_n u - c|^2 dx. \tag{11.17}$$

Quindi per ogni ρ dell'intervallo $0 < \rho \leq \frac{r}{2}$

$$\int_{I^*(\rho)} |D_n u - D_n u(0)|^2 dx \leq c(\nu, r) r^2 \rho^{n+2} \int_{I^*(r)} |D_n u - c|^2 dx. \tag{11.18}$$

Con il solito ragionamento per omotetia si prova che

$$\int_{I^*(\rho)} | D_n u - D_n u(0) |^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(r)} | D_n u - c |^2 dx.$$

Scelto $c = \{ D_n u \}_r$ si ha in definitiva

$$\int_{I^*(\rho)} | D_n u - \{ D_n u \}_\rho |^2 dx \leq \int_{I^*(\rho)} | D_n u - D_n u(0)|^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(r)} | D_n u - \{ D_n u \}_r |^2 dx.$$

12. - Equazione $E(u) = \sum_i D_i f_i$ a coefficienti continui.

In questo paragrafo supponiamo che i coefficienti a_{ij} dell'operatore $E(u)$ siano continui nella semisfera $\overline{I^*(r)}$. Poniamo

$$\omega^2(r) = \sup_{ij} \sup_{\overline{I}^*(r)} | a_{ij}(x) - a_{ij}(0) |^2$$

e indichiamo con $E_0(u)$ l'operatore a coefficienti costanti

$$E_0(u) = \sum_{ij} a_{ij}(0) D_i D_j u\,.$$

LEMMA [12.I] - *Sia* $u \in H^1(I^*(r))$ *una soluzione dell'equazione* $E(u) = \sum_j D_j f_j$ *con* $f_j \in L^2(I^*(r))$ *e* $u = 0$ *su* Γ_r. *Esiste una costante* $c(\nu) > 0$ *tale che* $\forall\ \rho$ *dell'intervallo* $0 < \rho < r$

$$\sum_i \int_{I^*(\rho)} | D_i u |^2 dx \leq c(\nu) \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \omega^2(r) \right] \sum_i \int_{I^*(r)} | D_i u |^2 dx + \sum_j \int_{I^*(r)} | f_j |^2 dx. \right\} \tag{12.1}$$

DIM. - La dimostrazione di questo lemma, tenuto conto dei risultati del numero precedente, è del tutto simile a quella del lemma [8.I].

Si decompone u nella somma $v + w$ dove v e w sono soluzioni dei seguenti problemi

$$\begin{cases} v - u \in H^1_0(I^*(r)) \\ E_0(v) = 0 \quad \text{in} \quad I^*(r) \end{cases} \tag{12.1}$$

e

$$\begin{cases} w \in H^1_0(I^*(r)) \\ E_0(w) = \sum_i D_i \{ f_i + \sum_j [a_{ij}(0) - a_{ij}(x)] D_j u \} \quad \text{in} \quad I^*(r)\,. \end{cases} \tag{12.3}$$

La funzione v verifica in ogni semisfera $I^*(\rho)$ con $0<\rho<r$ le ipotesi dei lemmi [11.I] e [11.II], per cui dalla maggiorazione (11.10), se $j=1,\dots,n-1$, e dalla maggiorazione (11.11) se $j=n$, si ottiene che $\forall\ 0<\rho<r$

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(\rho)}|D_j v|^2dx\leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(r)}|D_j v|^2dx. \tag{12.4}$$

Alla funzione w si applica invece il lemma [5.I], con $\Omega\equiv I^*(r)$ e $\alpha_j=0$, e si ottiene che $\forall\ 0<\rho\leq r$

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(\rho)}|D_j w|^2dx\leq c(\nu)\sum_j\int_{I^*(r)}\{|f_j|^2+\omega^2(r)|D_j u|^2\}\,dx. \tag{12.5}$$

Dalle (12.4) e (12.5) segue facilmente la tesi,

LEMMA [12.II] - *Nelle stesse ipotesi del lemma precedente esiste una costante* $c(\nu)>0$ *tale che* $\forall\ \rho$ *dell'intervallo* $0<\rho<r$ *e* $\forall\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ *risulta*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I^*(\rho)}|D_j u|^2dx\leq\\ &\leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{I^*(r)}|D_j u|^2dx+\omega^2(r)\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(r)}|D_j u|^2dx+\sum_j\int_{I^*(r)}|f_j-\alpha_j|^2dx\right\}\end{aligned} \tag{12.6}$$

e

$$\int_{I^*(\rho)}|D_n u-\{D_n u\}_\rho|^2dx\leq$$

$$\leq c(\nu)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{I^*(r)}|D_n u-\{D_n u\}_r|^2dx+\omega^2(r)\sum_{j=1}^{n}\int_{I^*(r)}|D_j u|^2dx+\sum_j\int_{I^*(r)}|f_j-\alpha_j|^2dx\right\}.$$

DIM. - Si ragiona esattamente come per il lemma precedente. Si spezza u nella somma $v+w$ con v e w soluzioni dei problemi (12.2) e (12.3). Alla funzione w si applica il lemma [5.I]; alla funzione v si applica la maggiorazione (11.10), se $j=1,\dots,n-1$, e la maggiorazione (11.12), se $j=n$. La tesi segue poi facilmente.

13. - Regolarità delle derivate prime.

Dimostriamo il seguente teorema:

TEOREMA [13.I] - *Sia* $u(x)\in H^1(I^*(1))$ *una soluzione dell'equazione* $E(u)=\sum_j D_j f_j$; *supponiamo che* $u=0$ *su* Γ_1 *e* $f_j\in\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))$. *Sia* R *un numero* *positivo minore di* 1. *Allora*

i$_1$) *Se i coefficienti* $a_{ij} \in C^0(\overline{I^*(1)})$ *e* $0 \leq \lambda < n$, *la soluzione* $u \in H^{1,\lambda}(I^*(R))$.

i$_2$) *Se i coefficienti* a_{ij} *sono hölderiani in* $\overline{I^*(1)}$ (*non importa con quale esponente*) *e* $\lambda = n$, *la soluzione* $u \in H^{1,n}(I^*(R))$.

i$_3$) *Se* $n < \lambda < n + 2$ *e i coefficienti* $a_{ij} \in C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\overline{I^*(1)})$ *allora* $u \in H^{1,\lambda}(I^*(R))$.

i$_4$) *Se, infine,* $\lambda = n + 2$ *e i coefficienti* $a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{I^*(1)})$ *la soluzione* $u \in H^{1,n+2-\varepsilon}(I^*(1))$, $\forall\ \varepsilon > 0$.

In tutti quattro i casi si ha la maggiorazione

$$\sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\beta)}(I^*(R))} \leq c(\nu, \beta, R) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \} \tag{13.1}$$

dove $\beta = \lambda$ *se* $0 \leq \lambda < n + 2$ *e* $\beta = n + 2 - \varepsilon$ *se* $\lambda = n + 2$.

DIM. CASO i$_1$) - Fissato R, $0 < R < 1$, poniamo $\delta_0 = \dfrac{1-R}{2}$. Sia x_0 un generico punto di $\overline{I^*(R)}$ e ρ un numero dell'intervallo aperto $(0, \delta_0)$. Possiamo limitarci a considerare due casi: il caso che la sfera $I(x_0, \rho)$ sia interna a $I^*(1)$ oppure il caso che $x_0 \in \Gamma_R$ e quindi $I(x_0, \rho) \cap I^*(1) \equiv I^*(x_0, \rho)$.

Nel primo caso si ripete inalterata la dimostrazione del lemma [9.I] e si prova che

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{I(x_0,\rho) \cap I^*(R)} | D_j u |^2 dx \leq c(\nu, \lambda, R) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \}. \tag{13.2}$$

Nel secondo caso, $x_0 \in \Gamma_R$, si ragiona come nella dimostrazione del teorema [9.I] con l'unica differenza che si utilizza il lemma [12.I], anziché il lemma [8.I]. Si pone $\omega^2(x_0, r) = \sup_{ij} \sup_{\overline{I^*(x_0, r)}} | a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0) |^2$; poiché i coefficienti a_{ij} sono continui in $\overline{I^*(1)}$, fissato comunque $p > 1$ esiste un $r(p) \leq \delta_0$ tale che per $0 < r \leq r(p)$ e $\forall\ x_0 \in \overline{I^*(R)}$

$$\omega^2(x_0, r) \leq \frac{1}{p^n}.$$

Da questo fatto e dal lemma [12.I] segue allora che, fissato comunque $p > 1$, esiste ua $r(p) \leq \delta_0$ tale che $\forall\ x_0 \in \overline{I^*(R)}$ e $\forall$ coppia di valori ρ, r verificanti le relazioni

$$0 < \rho \leq r < r(p)\,;\ 1 < \frac{\rho}{r} \leq p$$

risulta

$$(13.3)\quad \sum_{i=1}^{n}\int_{I^*(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \leq c(\nu)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_{i=1}^{n}\int_{I^*(x_0,r)} |D_i u|^2 dx + c(\nu)\rho^\lambda \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \cdot \rho^\lambda .$$

A questo punto si applica il lemma fondamentale [6.II] assumendo

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n}\int_{I^*(x_0,t)} |D_i u|^2 dx,\quad B(t) = c(\nu)\, t^\lambda \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))},\quad \alpha = n,\ \beta = \lambda$$

e si prova che $\forall\ 0 < \rho \leq r(\nu,\lambda) \leq \delta_0$

$$(13.4)\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho^\lambda}\int_{I^*(x_0,\rho)\cap I^*(R)} |D_i u|^2 dx \leq c(\nu,\lambda,R)\left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \right\}.$$

Pur di alterare la costante $c(\nu,\lambda,R)$ le maggiorazioni (13.2) e (13.4) valgono qualunque sia $\rho > 0$. Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|^2_{L^{(2,\lambda)}(I^*(R))} =$$

$$= \sum_i \sup_{\substack{x_0 \in \bar I^*(R)\\ \rho > 0}} \rho^{-\lambda}\int_{I(x_0,\rho)\cap I^*(R)} |D_i u|^2 dx \leq c(\nu,\lambda,R)\left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \right\}.$$

CASO i_2) - Fissato R, $0 < R < 1$, sia $\delta_0 = \dfrac{1-R}{2}$, x_0 un generico punto di $\bar I^*(R)$ e ρ un numero dell'intervallo $(0, \delta_0)$.

Ragioniamo come nel caso i_1). Se la sfera $I(x_0,\rho)$ è interna a $I^*(1)$ si procede come nella dimostrazione del teorema [9.II] e si prova che

$$(13.5)\quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\rho^n}\int_{I(x_0,\rho)\cap I^*(R)} |D_j u - \{D_j u\}_\rho|^2 dx \leq \\ &\leq c(\nu,R)\left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))} \right\}. \end{aligned}$$

Se invece $x_0 \in \Gamma_R$, e quindi $I(x_0,\rho)\cap I^*(1) = I^*(x_0,\rho)$, si procede in questo modo: sia α l'esponente di HÖLDER di coefficienti a_{ij}. Poiché $\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,n-2\alpha)}(\Omega) \sim L^{(2,n-2\alpha)}(\Omega)$ applicando il risultato del caso i_1) con $\lambda = n - 2\alpha$ si trova che le derivate $D_j u \in L^{(2,n-2)}\left(I^*\left(\dfrac{1+R}{2}\right)\right)$ e si ha la maggiorazione

$$(13.6)\quad \sum_{j=1}^{n} \| D_j u \|^2_{L^{(2,n-2\alpha)}\left(I^*\left(\frac{1+R}{2}\right)\right)} \leq c(\nu,\alpha,R)\left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{L^{(2,n-2\alpha)}(I^*(1))} \right\}.$$

A questo punto si utilizza il lemma [12.II] e più precisamente la maggiorazione (12.6) se $1 \leq j \leq n-1$ e la maggiorazione (12.7) se $j = n$. Da queste maggiorazioni e della (13.6) si ottiene che $\forall\ x_0 \in \Gamma_R$ e $\forall\ 0 < \rho < r \leq \delta_0$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{I^*(x_0,\rho)} |D_j u|^2 dx \leq$$

$$(13.7)\quad \begin{aligned} &\leq c(\nu,\alpha)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I^*(x_0,r)} |D_j u|^2 dx + r^n \left[\sum_j \| D_j u \|^2_{L^{(2,n-2\alpha)}\left(I^*\left(\frac{1+R}{2}\right)\right)} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))}\right]\right\} \leq c(\nu,\alpha,R)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I^*(x_0,r)} |D_j u|^2 dx + \right. \\ &\left. + r^n \left[\Sigma \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))}\right]\right\} \end{aligned}$$

e analogamente, per $j = n$,

$$\int_{I^*(x_0,\rho)} | D_n u - \{ D_n u \}_\rho |^2 dx \leq$$

$$(13.8)\quad \begin{aligned} &\leq c(\nu,\alpha,R)\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{I^*(x_0,r)} | D_n u - \{ D_n u \}_r |^2 dx + r^n \left[\sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \sum_j \| f_j \|_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{I^*(x_0,t)} | D_j u |^2 dx$$

$$B(t) = c(\nu,\alpha,R) \left\{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_{j=1}^{n} \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))} \right\} t^n$$

$$\psi(t) = \int_{I^*(x_0,t)} | D_n u - \{ D_n u \}_t |^2 dx .$$

Dalle (13.7) e (13.8) si ottiene allora che fissato comunque $p > 1$ per ogni coppia di valori (ρ, r) tali che

$$0 < \rho < r \leq \delta_0,\ 1 < \frac{r}{\rho} \leq p$$

si ha

$$\varphi(\rho) \leq c(\nu, \alpha, R)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + B(p)\rho^n$$

e

$$\psi(\rho) \leq c(\nu, \alpha, R)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \psi(r) + B(p)\rho^n .$$

A questo punto si applica il lemma fondamentale [6.II], come abbiamo fatto parecchie volte, e si trova che $\forall\ x_0 \in \Gamma_R$ e $\forall\ 0 < \rho \leq r(\nu, \alpha) \leq \delta_0$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\rho^n} \int_{I^*(x_0,\rho)\cap I^*(R)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\rho^n} \int_{I^*(x_0,\rho)} | D_j u |^2 dx \leq \\ \leq c(\nu, \alpha, R) \{ \sum_{j=1}^{n} \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \sum_{j=1}^{n} \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))} \}\end{aligned} \tag{13.9}$$

e per $j = n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^n} \int_{I^*(x_0,\rho)\cap I^*(R)} | D_n u - \{ D_n u \}_\rho |^2 dx \leq c(\nu, \alpha, R) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(I^*(1))} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(I^*(1))} \} .\end{aligned} \tag{13.10}$$

Dalle maggiorazioni (13.5), (13.9), (13.10) segue la tesi per il caso i_2).

Ci risparmiamo a questo punto di dare per esteso anche la dimostrazione dei casi i_3) e i_4). Il lettore avrà capito infatti, dagli schemi di dimostrazione che abbiamo dato per i casi i_1) e i_2), che le dimostrazioni di queste proposizioni non differiscono da un punto di vista logico dalle dimostrazioni dei teoremi di regolarità all'interno che abbiamo dato nel n. 9. L'unica differenza sta nel fatto che quando si tratta di maggiorare l'integrale delle derivate prime sulle semisfere $I^*(x_0, \rho)$ aventi il centro x_0 sul piano $x_n = 0$ anziché far uso dei lemmi del n. 8, valevoli per «sfere», si utilizzano i lemmi del n. 11 (per i casi i_3) e i_4) si utilizzerà il lemma [11.II]) distinguendo, se necessario, il caso delle derivate tangenziali da quello della derivata normale (come si è fatto nella proposizione i_2)).

14. - Teorema generale.

I risultati di regolarità, relativi alle derivate prime, che abbiamo dimostrato nel n. precedente, si estendono in opportune ipotesi sui coefficienti e sul termine noto dell'equazione, alle derivate di ordine superiore così come si è fatto nel n. 10 per la regolarità all'interno.

Indichiamo con $H^1_{\Gamma_R}$ l'insieme delle funzioni di $H^1(I^*(R))$ che si annullano su Γ_R.

Si dimostra il seguente teorema:

TEOREMA [14.I] - *Sia $u(x) \in H^1_{\Gamma_1} \cap H^{k+2}(I^*(1))$ una soluzione debole in $I^*(1)$ dell'equazione $E(u) = f$ e supponiamo che $f \in H^{k,\lambda}(I^*(1))$ con $0 \leq \lambda \leq n+2$. Sia R un qualunque numero positivo e minore di 1. Allora:*

a) Se i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{I^*(1)})$ e $0 \leq \lambda < n$ la soluzione $u \in H^{k+2,\lambda}(I^*(R))$.

b) Se i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1,\alpha}(\overline{I^*(1)})$, per un certo $0 < \alpha \leq 1$, e $\lambda = n$ la soluzione $u \in H^{k+2,n}(I^*(R))$.

c) Se $n < \lambda < n+2$ e i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1,\frac{\lambda-n}{2}}(\bar{I}^*(1))$ allora $u \in H^{k+2,\lambda}(I^*(R))$.

d) Se infine $\lambda = n+2$ e i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1,1}(\overline{I^*(1)})$ allora $u \in H^{k+2,n+2-\varepsilon}(I^*(R))$ $\forall\ \varepsilon > 0$. In tutti quattro i casi si ha la maggiorazione

$$(14.1) \qquad \sum_{|m|=k+2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\beta)}(I^*(R))} \leq c(\nu, \beta, R) \{ \| u \|^2_{H^{k+2}(I^*(1))} + \| f \|^2_{H^{k,\lambda}(I^*(1))} \}$$

dove $\beta = \lambda$ se $0 \leq \lambda < n+2$ e $\beta = n+2-\varepsilon$ se $\lambda = n+2$.

Di questo teorema ci limiteremo a tratteggiare la dimostrazione. Essa differisce dalla dimostrazione del teorema [10.1] solo nell'accorgimento che dovremo usare per maggiore la norma delle derivate «non tangenziali».

Supponiamo da prima $k = 0$; allora

$$(14.2) \qquad u \in H^1_{\Gamma_1} \cap H^2(I^*(1)) \quad \text{ed} \quad E(u) = f \quad \text{con} \quad f \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1)).$$

Sia $D_h (h = 1, \ldots, n-1)$ una derivata tangenziale prima. Dalle ipotesi (14.2) segue che

$$(14.3) \qquad D_h u \in H^1_{\Gamma_1} \quad \text{ed} \quad E(D_h u) = D_h f - \sum_i D_i \{ \sum_j D_h a_{ij} \cdot D_j u \}.$$

Se $0 \leq \lambda \leq 2$ il secondo membro dell'equazione è somma di derivate di funzioni $\in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))$ in quanto l'ipotesi $u \in H^2(I^*(1))$ implica che $D_j u \in \mathfrak{L}^{(2,2)}(I^*(1))$ (cfr. App. I). Possiamo quindi applicare i risultati di regolarità trovati nel numero precedente e otteniamo che

$$(14.4) \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n-1} \| D_j D_h u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c(\nu, R) \{ \| u \|^2_{H^2(I^*(1))} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} + \\ + \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \}.$$

A questo punto resta da maggiorare la norma $\| D_n^2 u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))}$. Dall'equazione $E(u)=f$ si ricava che per quasi tutti gli $x \in I^*(1)$

$$D_n^2 u = \frac{1}{a_{nn}} \left\{ f - \sum_{ij=1}^{n} D_i a_{ij} \cdot D_j u - \sum_{ij}{}^* a_{ij} D_i D_j u \right\} \tag{14.5}$$

dove nella sommatoria Σ^* gli indici i, j non assumono contemporaneamente il valore n.

Di qui si ha

$$\| D_n^2 u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c \left\{ \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} + \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n-1} \| D_j D_h u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \right\} \tag{14.6}$$

e tenuto conto della maggiorazione (14.4) e del fatto che

$$\sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c \sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\bar\lambda)}(I^*(R))} \quad \text{con } \bar\lambda = \max[\lambda - 2, 0] \tag{14.7}$$

dalla (14.5) si ha in definitiva

$$\| D_n^2 u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c(\nu, R) \{ \| u \|_{H^2(I^*(1))} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \}. \tag{14.8}$$

La (14.4) e la (14.7) assicurano che il teorema è vero se $k=0$ e $0 \leq \lambda \leq 2$. Supponiamo ora che $2 \leq \lambda \leq 4$. Sappiamo già che $u \in H^{2,2}(I^*(R_1))$ per ogni $0 < R_1 < 1$ e quindi $D_j u \in \mathfrak{L}^{(2,4)}(I^*(R_1))$ per ogni $0 < R_1 < 1$.

Nella (14.3) il secondo membro dell'equazione è somma di derivate di funzioni appartenenti a $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R_1))$ per ogni $0 < R_1 < 1$.

I risultati di regolarità del numero precedente assicurano allora che per ogni $0 < R < R_1 < 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{n-1} \| D_j D_h u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c(\nu, R) \{ \| u \|^2_{H^2(I^*(R_1))} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R_1))} +$$
$$+ \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R_1))} \}. \tag{14.9}$$

Questa maggiorazione insieme alla (14.6) e alla (14.7) ci permette di concludere che se $k=0$ e $2 \leq \lambda \leq 4$

$$\sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq$$
$$\leq c(\nu, R) \{ \| u \|^2_{H^2(I^*(1))} + \| f \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} + \sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda-2)}(I^*(R_1))} \}.$$

E poiché $0 \leq \lambda - 2 \leq 2$ sappiamo già che la quantità $\sum_{|m|=2} \| D^m u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda-2)}(I^*(R_1))}$ che figura a secondo membro si può maggiorare in termini di $\| u \|_{H^2(I^*(1))}$ e $\| f \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))}$ e quindi il teorema è dimostrato per $k = 0$ e $0 \leq \lambda \leq 4$.

Procedendo in questo modo si dimostra che il teorema è vero per $k = 0$ e $0 \leq \lambda \leq n + 2$.

Il teorema si dimostra poi per $k > 0$ qualunque con un ragionamento per induzione, esattamente come abbiamo fatto per il teorema [10.I].

Cap. IV.

Problema di Dirichlet per un aperto limitato.

15. - Problema di Dirichlet con dato al bordo nullo.

Siano A e B due aperti limitati di $\mathbb{R}^n$ e $x \to \mathcal{T}(x)$ una applicazione di A in B di componenti scalari $\mathcal{T}_i(x)$. Diciamo che $x \to \mathcal{T}(x)$ è di classe $C^{k,\alpha}$, k intero > 0 e $0 < \alpha \leq 1$, se le funzioni $\mathcal{T}_i(x) \in C^{k,\alpha}(\bar{A})$, $i = 1, \ldots, n$.

Un omeomorfismo $x \to \mathcal{T}(x)$ di A su B si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^{-1}$ sono di classe $C^{k,\alpha}$.

Diciamo che un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto $\Omega(x_0)$ e un omeomorfismo $x \to \mathcal{T}(x)$ di classe $C^{k,\alpha}$ che muta $\bar{\Omega}(x_0)$ nella sfera $\bar{I}(1)$ e, in particolare, $\Omega(x_0) \cap \Omega$ nella semisfera $I^*(1)$ e $\Omega(x_0) \cap \partial\Omega$ in Γ_1.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, per semplicità, convesso. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$
(15.1) \qquad \begin{aligned} & E(u) = f + \sum_j D_j f_j \quad \text{in } \Omega \\ & u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega . \end{aligned}
$$

Supponiamo che i coefficienti a_{ij} siano continui in $\bar{\Omega}$, che l'operatore $E(u)$ sia ellittico e che le funzioni f, $f_j (j = 1, \ldots, n)$ appartengano a $L^2(\Omega)$.

Risolvere il problema (15.1) vorrà dire allora trovare una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che

$$
(15.2) \qquad \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij}(x) D_j u D_i \varphi \, dx = -\int_\Omega f \varphi \, dx + \sum_j \int_\Omega f_j D_j \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).
$$

È noto (cfr. ad es. [11]) che nelle ipotesi in cui ci siano posti questo problema ammette una e una sola soluzione in $H^1_0(\Omega)$ e la soluzione $u(x)$

verifica la maggiorazione

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c \{ \sum_j \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \}. \tag{15,3}$$

È altresì noto il seguente teorema di regolarità

TEOREMA [15.I] - *Sia $u(x)$ la soluzione in $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ dell'equazione $E(u) = f$ con $f \in H^k(\Omega)$ (k intero ≥ 0). Se i coefficienti $a_{ij} \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ e Ω è di classe C^{k+2} allora $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)$ e si ha la maggiorazione*

$$\|u\|^2_{H^{k+2}(\Omega)} \leq c(\nu, k) \|f\|^2_{H^k(\Omega)}. \tag{15.4}$$

Non daremo la dimostrazione di questo risultato che è ormai classico nella teoria dei problemi ai limiti per operatori ellittici. Il lettore può consultare ad es. il lavoro [11] e [1].

Volendo collegare i risultati di regolarità che ora daremo con quello contenuto nel teorema [15.I] possiamo dire, grosso modo, che la nostra questione consiste in questo: facciamo variare il termine noto f in certi sottospazi lineari di $H^k(\Omega)$, precisamente negli spazi $H^{k,\lambda}(\Omega)$ con $0 < \lambda \leq n + 2$, e cerchiamo in quali sottospazi lineari di $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)$ varia la soluzione dell'equazione $E(u) = f$. Sotto opportune ipotesi per i coefficienti a_{ij} e l'aperto Ω noi dimostreremo che $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2,\lambda}(\Omega)$.

Tutto si ridurrà a utilizzare, con tecnica ormai standard, i risultati di tipo locale dimostrati nei capitoli II e III e le proprietà di «invarianza» degli spazi $H^{k,\lambda}(\Omega)$ (cfr. App. I, teor. [V]).

16. - Risultati di regolarità negli spazi $H^{k,\lambda}(\Omega)$.

Indichiamo con (D_0) il problema di DIRICHLET

$$(D_0) \qquad \begin{aligned} & u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \\ & E(u) = \sum_j D_j f_j + f; \quad f, f_j \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Questo problema, come si è osservato più sopra, ammette una e una sola soluzione. Si dimostrano questi teoremi di regolarità:

TEOREMA [16.I] - *Sia $u(x)$ la soluzione del problema (D_0); si hanno i seguenti risultati*

i$_1$) *Se $f = 0$, $f_j \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ con $0 \leq \lambda < n$, $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ e Ω è di classe C^1 allora $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{1,\lambda}(\Omega)$ e si ha la maggiorazione*

$$\|u\|^2_{H^{1,\lambda}(\Omega)} \leq c \sum_j \|f_j\|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}. \tag{16.1}$$

i$_2$) *Se* $f_j = 0$, $f \in H^{k,\lambda}(\Omega)$ *con* k *intero* ≥ 0 *e* $0 \leq \lambda < n$, $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* C^{k+2}, *allora* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2,\lambda}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(16.2) \qquad \| u \|^2_{H^{k+2,\lambda}(\Omega)} \leq c \| f \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega)} .$$

TEOREMA [16.II] - *Sia* $u(x)$ *la soluzione del problema* (D_0), *allora*

i$_3$) *Se* $f = 0$, $f_j \in \mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$, $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{1,\alpha}$ *(non importa con quale* α, $0 < \alpha \leq 1$) *allora* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{1,n}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(16.3) \qquad \| u \|^2_{H^{1,n}(\Omega)} \leq c \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} .$$

i$_4$) *Se* $f_j = 0$, $f \in H^{k,n}(\Omega)$ *(*k *intero* ≥ 0*)*, $a_{ij} \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{k+2,\alpha}$ *(non importa con quale* α, $0 < \alpha \leq 1$) *allora* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2,n}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(16.4) \qquad \| u \|^2_{H^{k+2,n}(\Omega)} \leq c \| f \|^2_{H^{k,n}(\Omega)} .$$

TEOREMA [16.III] - *Sia* $u(x)$ *la soluzione del problema* (D_0); *si hanno i seguenti risultati:*

i$_5$) *Se* $f = 0$, $f_j \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ *con* $n < \lambda \leq n + 2$, $a_{ij} \in C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\overline{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{1,\frac{\lambda-n}{2}}$ *allora* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{1,\beta}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(16.5) \qquad \| u \|^2_{H^{1,\beta}(\Omega)} \leq c \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}$$

dove $\beta = \lambda$ *se* $n < \lambda < n + 2$ *e* $\beta = n + 2 - \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, *se* $\lambda = n + 2$.

i$_6$) *Se* $f_j = 0$, $f \in H^{k,\lambda}(\Omega)$, *con* k *intero* ≥ 0 *e* $n < \lambda \leq n + 2$, $a_{ij} \in C^{k+1,\frac{\lambda-n}{2}}(\overline{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{k+2,\frac{\lambda-n}{2}}$ *allora* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap H^{k+2,\beta}(\Omega)$ *e si ha la maggiorazione*

$$(16.6) \qquad \| u \|^2_{H^{k+2,\beta}(\Omega)} \leq c \| f \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega)}$$

dove $\beta = \lambda$ *se* $n < \lambda < n + 2$ *e* $\beta = n + 2 - \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, *se* $\lambda = n + 2$.

Il primo di questi teoremi è un teorema di regolarità negli «spazi di MORREY». Il secondo, relativo al caso $\lambda = n$, è un teorema di regolarità in certi «spazi limite» di cui abbiamo parlato nei n. 3 e 4. Infine il terzo teorema è un teorema di regolarità negli «spazi hölderiani». Se si tien conto di quanto si è detto nei n. 3 e 4 esso si può enunciare anche nel seguente modo:

i'₅) *Se* $f=0$, $f_j \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *con* $0<\alpha\leq 1$, $a_{ij}\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{1,\alpha}$ *allora* $u\in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, *dove* $\beta=\alpha$ *se* $\alpha<1$ *e* $\beta=1-\varepsilon$ $\forall\, \varepsilon>0$ *se* $\alpha=1$, *e si ha la maggiorazione*

$$\| u \|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} \leq c \sum_j \| f_j \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} . \tag{16.7}$$

i'₆) *Se* $f_j=0$, $f\in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, k *intero* ≥ 0 *e* $0<\alpha\leq 1$, $a_{ij}\in C^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ *e* Ω *è di classe* $C^{k+2,\alpha}$ *allora* $u\in C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})$, *dove* $\beta=\alpha$ *se* $\alpha<1$ *e* $\beta=1-\varepsilon$, $\forall\,\varepsilon>0$, *se* $\alpha=1$, *e si ha la maggiorazione*

$$\| u \|_{C^{k+2,\beta}(\bar{\Omega})} \leq c \| f \|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} . \tag{16.8}$$

In entrambi questi casi u *si annulla su* $\partial\Omega$ *nel «senso classico» cioè la restrizione di* u *a* $\partial\Omega$ *è uguale a zero* ([20]).

Dimostriamo, a titolo illustrativo, il teorema [16.I] (gli altri due teoremi si dimostrano con ragionamenti perfettamente analoghi). Per fissare le idee mettiamoci nelle ipotesi del caso i₁).

L'aperto Ω è limitato e di classe C^1 quindi esiste un numero finito di aperti $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ tali che $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\Omega=\bigcup_{j=0}^{m}\Omega_j$ e per ogni Ω_j, $1\leq j\leq m$, esiste un omeomorfismo $\mathcal{T}_{(j)}$ di classe C^1 che muta $\Omega_j\cap\bar{\Omega}$ nella semisfera $I^*(1)\cup\Gamma_1$ e, in particolare, $\Omega_j\cap\partial\Omega$ in Γ_1.

La funzione $u(x)$ è soluzione in Ω dell'equazione $E(u)=\sum_j D_j f_j$ con $f_j\in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ e $a_{ij}\in C^0(\bar{\Omega})$; quindi, per il teorema [9.I], $u\in H^{1,\lambda}(\Omega_0)$ e si ha la maggiorazione

$$\sum_j \| D_j u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_0)} \leq c \{ \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \} . \tag{16.9}$$

Fissato ora j, $1\leq j\leq m$, indichiamo ancora con u la restrizione di u a $\Omega_j\cap\Omega$ e con y il generico punto di $I^*(1)$. Si dimostra che la funzione $v(y)= =(u\circ\mathcal{T}^{-1}_{(j)})(y)$ appartiene ad $H^1_{\Gamma_1}(I^*(1))$ e verifica, in senso debole, in $I^*(1)$ una equazione del tipo (cfr. App. III)

$$E_{(j)}(v)=\sum_i D_i b_{ij}(y) D_j v(y) = \sum_j D_j F_j(y)$$

dove $b_{ij}(y)\in C^0(\overline{I^*(1)})$, $F_j(y)\in\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))$ e l'operatore $E_{(j)}$ è ellittico in $I^*(1)$ con una costante di ellitticità $K\nu$.

([20]) Per quest'ultima affermazione cfr. ad es. il lemma [9.1] di [1].

Allora il teorema [13.I] assicura che, per ogni $0 < R < 1$, $v(y) \in H^{1,\lambda}(I^*(R))$ e si ha la maggiorazione

$$\sum_j \| D_j v \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(R))} \leq c \left\{ \| v \|^2_{H^1(I^*(1))} + \sum_j \| F_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(I^*(1))} \right\}. \tag{16.10}$$

Applicando nella (16.10) l'omeomorfismo $\mathcal{T}_{(j)}$ si ottiene ([21])

$$\begin{aligned} \sum_j \| D_j u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_{j,R})} &\leq c \left\{ \| u \|^2_{H^1(\Omega_j \cap \Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_j \cap \Omega)} \right\} \leq \\ &\leq c \left\{ \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \right\} \end{aligned} \tag{16.11}$$

dove con $\Omega_{j,R}$ si è indicato l'aperto $\mathcal{T}^{-1}_{(j)}[I^*(R)]$.

Per l'arbitrarietà di R, si può supporre R così vicino a 1 che gli aperti $\Omega_0, \Omega_{1,R}, \ldots, \Omega_{m,R}$ costituiscano ancora un ricoprimento di Ω. Dalle (16.9) e (16.11) si ha allora

$$\| u \|^2_{H^{1,\lambda}(\Omega)} \leq c \left\{ \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \right\}. \tag{16.12}$$

E poiché, per quanto si è osservato nel n. 15, vale la maggiorazione

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} \leq c \sum_j \| f_j \|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}$$

dalla (16.12) segue in definitiva

$$\| u \|^2_{H^{1,\lambda}(\Omega)} \leq c \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}$$

cioè la maggiorazione (16.2).

In modo analogo si ragiona se siamo nelle ipotesi del caso i_2).

17. - Problema di Dirichlet con dato al bordo non nullo.

Il problema di DIRICHLET con dato al bordo non nullo si pone formalmente nel seguente modo:

Assegnamo in Ω le funzioni g, f ed $f_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ e supponiamo che $g \in H^1(\Omega)$ ed f, $f_j \in L^2(\Omega)$. Si chiede di trovare una funzione $u \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} & u - g \in H^1_0(\Omega) \\ & E(u) = \sum_j D_j f_j + f \quad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{D_g}$$

([21]) Cfr. il teorema [V] della App. I e la formula (III.4) della App. III.

Supponiamo i coefficienti continui in $\bar{\Omega}$. Il problema (D_g) equivale al problema omogeneo (D_0) nella funzione incognita $w = u - g$. Infattti, se u è soluzione del problema (D_g) la funzione w risolve il problema di DIRICHLET

$$(17.1)\qquad \begin{aligned} & w \in H_0^1(\Omega) \\ & E(w) = f + \sum_j D_j f_j - E(g) = \sum_i D_i [f_i - \sum_j a_{ij} D_j g] + f \end{aligned}$$

e viceversa. E il problema (17.1) è un problema del tipo (D_0) perchè le funzioni f ed $[f_i - \sum_j a_{ij} D_j g]$, $i = 1, \ldots, n$, appartengono a $L^2(\Omega)$.

Poniamo

$$F_i = f_i - \sum_j a_{ij} D_j g$$

e indichiamo con $\mu = \mu(\lambda)$ la funzione così definita

$$\mu(\lambda) = 0 \qquad \text{se } 0 \leq \lambda < n$$

$$\mu(\lambda) = \frac{\lambda - n}{2} \qquad \text{se } n < \lambda \leq n + 2$$

$$\mu(\lambda) = \alpha,\ \alpha \text{ fissato nell'intervallo } (0, 1],\ \text{se } \lambda = n.$$

Dalle proprietà degli spazi $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ [cfr. App. I] segue immediatamente che

a) se $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, $g \in H^{1,\lambda}(\Omega)$ e $a_{ij} \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ allora $F_i \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

b) Se $f_i = 0$, $g \in H^{k+2,\lambda}(\Omega)$, k intero ≥ 0, e $a_{ij} \in C^{k,\mu}(\bar{\Omega})$ allora $F_i \in H^{k,\lambda}(\Omega)$.

Queste considerazioni e i risultati di regolarità dimostrati nel numero precedente per il problema «omogeneo» (D_0) ci permettono allora di enunciare il seguente teorema:

TEOREMA [17.I] - *Sia $u \in H^1(\Omega)$ la soluzione del problema di Dirichlet (D_g).*

i$_1$) *Se $g \in H^{1,\lambda}(\Omega)$, $f = 0$, $f_i \in \mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, $a_{ij} \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ e l'aperto Ω è di classe $C^{1,\mu}$, la funzione $u \in H^{1,\beta}(\Omega)$ e si ha la maggiorazione*

$$(17.2)\qquad \| u \|^2_{H^{1,\beta}(\Omega)} \leq c \{ \sum_i \| f_i \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} + \| g \|^2_{H^{1,\lambda}(\Omega)} \}.$$

i$_2$) *Se $g \in H^{k+2,\lambda}(\Omega)$, $f_i = 0$, $f \in H^{k,\lambda}(\Omega)$, $a_{ij} \in C^{k+1,\mu}(\bar{\Omega})$ e l'aperto Ω è di classe $C^{k+2,\mu}$, con k intero ≥ 0, la funzione $u \in H^{k+2,\beta}(\Omega)$ e si ha la maggiorazione*

$$(17.3)\qquad \| u \|^2_{H^{k+2,\beta}(\Omega)} \leq c \{ \| f \|^2_{H^{k,\lambda}(\Omega)} + \| g \|^2_{H^{k+2,\lambda}(\Omega)} \}.$$

Nelle (17.2) *e* (17.3) $\beta = \lambda$ *se* $0 \leq \lambda < n + 2$ *e* $\beta = n + 2 - \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, *se* $\lambda = n + 2$.

Il problema di DIRICHLET con dati al bordo non nulli si potrebbe porre in un modo meno formale se si fosse risolto il problema di caratterizzare lo spazio di BANACH delle funzioni g su $\partial\Omega$ che sono «traccia» di funzioni di $H^{k,\lambda}(\Omega)$.

Questo problema non presenta difficoltà per i valori del parametro λ che appartengono all'intervallo $n < \lambda \leq n+2$ perchè in tal caso $H^{k,\lambda}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{k,\frac{\lambda-n}{2}}(\bar{\Omega})$.

Per $0 \leq \lambda < n$ il problema è risolto in un mio lavoro del 1960 ([7]) ma solo per gli spazi $H^{1,\lambda}(\Omega)$. In tutti gli altri casi il problema si può considerare aperto.

APPENDICE I.

Ulteriori proprietà degli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$. Spazi $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Nel n. 3 abbiamo definito gli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$. Nel lavoro [4] ho introdotto delle famiglie di spazi più generali, che ho indicato con $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ ([22]), nelle quali rientrano come caso particolare gli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ qualora si assuma $k=0$.

Voglio richiamare, in questa appendice, la definizione e qualche proprietà degli spazi $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$. Questo mi darà l'occasione di ricordare qualche ulteriore proprietà degli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, proprietà che abbiamo sfruttato nel corso del lavoro e che, per brevità, non ho ritenuto di includere nel n. 3.

Enunciamo una schematizzazione astratta del procedimento mediante il quale, a partire dallo spazio $L^2(\Omega)$, si possono definire sia gli spazi di MORREY, sia gli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ ed $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$, sia altre famiglie di spazi (gli spazi di LORENTZ ad es.).

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia $J = \{E\}$ una famiglia di sottoinsiemi misurabili ([23]) di Ω, contenente Ω. Sia V un sottospazio di $L^2(\Omega)$ di dimensione finita.

Per ogni $E \in J$ poniamo

$$V(E) = \{ v : v = | u |_E ,\ u \in V \}$$

$V(E)$ è un sottospazio di dimensione finita di $L^2(E)$.

([22]) Nel lavoro in questione ho definito gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ per un qualunque $p \geq 1$. Per gli scopi di questo lavoro il caso che interessa è $p = 2$.

([23]) Di misura positiva.

Indichiamo con $P(V, E)$ l'operatore di proiezione (ortogonale) di $L^2(E)$ su $V(E)$.

DEF. [I] - *Indichiamo con* $\mathcal{L}(\theta, V, J)$, $\theta \geq 0$, *il sottospazio lineare di* $L^2(\Omega)$ *delle funzioni* u *tali che*

$$\text{(I.1)} \qquad |||u|||^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} = \sup_{E \in J} (\text{mis } E)^{-\theta} \int_E |u - P(V, E)u|^2 dx < +\infty \text{ (}^{24}\text{)}$$

normalizzato nel seguente modo

$$\text{(I.2)} \qquad \|u\|_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + |||u|||_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} .$$

Si dimostra facilmente che $\mathcal{L}(\theta, V, J)$ è completo e quindi è uno spazio di BANACH.

Sia $\{u_n\}$ una successione di CAUCHY in $\mathcal{L}(\theta, V, J)$. Allora

a) esiste una costante positiva M tale che $\sup_n \|u_n\|_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} \leq M$.

b) $\{u_n\}$ è una successione di CAUCHY in $L^2(\Omega)$.

Da *b*) segue che esiste una funzione $u \in L^2(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$. Verifichiamo che $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J)$. Per ogni $E \in J$

$$\text{(I.3)} \qquad \int_E |u_n - P(V, E)u_n|^2 dx \leq |||u_n|||^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} (\text{mis } E)^\theta \leq M (\text{mis } E)^\theta .$$

D'altra parte se $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ anche $u_n|_E \to u|_E$ in $L^2(E)$ e quindi $P(V, E)u_n \to P(V, E)u$ in $L^2(E)$, $\forall E \in J$, Dalla (I.3) segue allora che

$$\forall E \in J ; \int_E |u - P(V, E)u|^2 dx \leq M (\text{mis } E)^\theta .$$

Quindi $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J)$. Resta da far vedere che $u_n \to u$ in $\mathcal{L}(\theta, V, J)$.

Poiché $\{u_n - u\}$ è una successione di CAUCHY in $\mathcal{L}(\theta, V, J)$, tutto si riduce a dimostrare questo fatto:

Sia $\{u_n\}$ *una successione di Cauchy in* $\mathcal{L}(\theta, V, J)$ *e supponiamo che* $u_n \to 0$ *in* $L^2(\Omega)$, *allora* $u_n \to 0$ *in* $\mathcal{L}(\theta, V, J)$.

---

(24) Più correttamente si dovrebbe scrivere $P(V, E)(u|_E)$ anziché $P(V, E)u$. Per semplicità continueremo a indicare con u anche la restrizione di $u \in L^2(\Omega)$ a uno qualunque dei sottoinsiemi E.

Osserviamo che $u \to |||u|||_{\mathcal{L}(\theta, V, J)}$ è in generale, una seminorma in $\mathcal{L}(\theta, V, J)$ perché $|||u|||_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} = 0$ equivale a dire che $u \in V$.

Basta far vedere che $|||u_n|||_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} \to 0$.

Fissato $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un $n(\varepsilon)$ che $\forall\ n,\ m > n(\varepsilon)$

$$|||u_n - u_m|||^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} < \varepsilon . \tag{I.4}$$

D'altra parte, fissato $E \in J$, è possibile trovare un $n(\varepsilon, E)$ tale che per $m > n(\varepsilon, E)$ ([25])

$$\int_E |u_m - P(V, E)u_m|^2 dx \leq \varepsilon\,(\text{mis}\ E)^\theta . \tag{I.5}$$

Allora $\forall\ n > n(\varepsilon)$ e $\forall\ m > \max\{n(\varepsilon),\ n(\varepsilon, E)\}$ si ha

$$\frac{1}{(\text{mis}\ E)^\theta} \int_E |u_n - P(V, E)u_n|^2 dx \leq$$

$$\leq c \left\{ |||u_n - u_m|||^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} + \frac{1}{(\text{mis}\ E)^\theta} \int_E |u_m - P(V, E)u_m|^2 dx \right\} \leq 2c\,\varepsilon .$$

E quindi, per l'arbitrarietà di E,

$$|||u_n|||^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J)} \leq 2c\,\varepsilon,\ \ \forall\ \ n > n(\varepsilon).$$

E la tesi è dimostrata.

Un'altra proprietà di verifica immediata è questa:

Due spazi di BANACH $\mathcal{L}(\theta, V, J_1)$ e $\mathcal{L}(\theta, V, J_2)$, relativi alle famiglie di sottoinsiemi $J_1 = \{E_1\}$ ed $J_2 = \{E_2\}$, sono equivalenti ([26]) se è verificata una condizione di questo tipo:

Esiste un numero reale $\beta \geq 1$ *tale che*

i$_1$) $\forall\ E_1 \in J_1$ *si possono trovare due insiemi* E_2', $E_2'' \in J_2$ *verificanti le relazioni*

$$\begin{gathered} E_2' \subset E_1 \subset E_2'' \\ \frac{\text{mis}\ E_2''}{\text{mis}\ E_2'} \leq \beta \end{gathered} \tag{I.6}$$

([25]) Questo perché $|u_n - P(V, E)u_n| \to 0$ in $L^2(E)$.

([26]) Equivalenti nel senso degli spazi di BANACH.

i$_2$) $\forall$ $E_2 \in J_2$ *si possono trovare due insiemi* E_1', $E_1'' \in J_1$ *tali che*

$$\text{(I.7)} \qquad \begin{aligned} & E_1' \subset E_2 \subset E_1'' \\ & \frac{\text{mis } E_1''}{\text{mis } E_1'} \leq \beta . \end{aligned}$$

Supponiamo ad esempio che $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J_2)$. Sia $E_1 \in J_1$, E_2' ed E_2'' gli insiemi di J_2 che verificano la condizione (I.6). Poiché $E_1 \subset E_2''$, $V(E_1)$ si può definire nel seguente modo

$$V(E_1) = \{ v : v = u|_{E_1},\ u \in V(E_2'') \} .$$

Quindi

$$P(V, E_2'')u|_{E_1} \in V(E_1).$$

Da ciò segue che

$$\int_{E_1} | u - P(V, E_1)u |^2 dx \leq \int_{E_1} | u - P(V, E_2'')u |^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{E_2''} | u - P(V, E_2'')u |^2 dx \leq \| u \|^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J_2)} (\text{mis } E_2'')^\theta \leq$$

$$\leq \| u \|^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J_2)} \beta^\theta (\text{mis } E_2')^\theta \leq \| u \|^2_{\mathcal{L}(\theta, V, J_2)} \beta^\theta (\text{mis } E_1)^\theta .$$

Quindi $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J_1)$ e

$$\| u \|_{\mathcal{L}(\theta, V, J_1)} \leq (1 + \beta^{\theta/2}) \| u \|_{\mathcal{L}(\theta, V, J_2)} .$$

In modo analogo si dimostra, sfruttando la (I.7), che se $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J_1)$ allora $u \in \mathcal{L}(\theta, V, J_2)$ e vale la maggiorazione

$$\| u \|_{\mathcal{L}(\theta, V, J_2)} \leq (1 + \beta^{\theta/2}) \| u \|_{\mathcal{L}(\theta, V, J_1)} .$$

Qualche esempio di spazi $\mathcal{L}(\theta, V, J)$.

Come J prendiamo la famiglia di insiemi $\{ \Omega(x, r);\ x \in \Omega,\ 0 < r \leq \text{diam}\, \Omega \}$.

Es. I. - Assumiamo $V = \{ 0 \}$; $\mathcal{L}(\theta, V, J)$ è equivalente allo spazio di MORREY $L^{(2, \theta n)}(\Omega)$.

Es. II. - Assumiamo come V il sottospazio di $L^2(\Omega)$ delle funzioni costanti su Ω; allora $\mathcal{L}(\theta, V, J)$ è equivalente a $\mathcal{L}^{(2, \theta n)}(\Omega)$.

Es. III. - Indichiamo con $\mathcal{P}_k$ l'insieme delle restrizioni ad Ω dei polinomi di grado $\leq k$ (k intero ≥ 0) e assumiamo $V = \mathcal{P}_k$. Lo spazio $\mathcal{L}(\theta, V, J)$

è equivalente allo spazio $\mathcal{L}_k^{(2,\theta n)}(\Omega)$ (cfr. [4]) cioè allo spazio delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ tali che

$$\|\!| u |\!\|^2_{\mathcal{L}_k^{(2,\theta n)}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \left\{ \rho^{-n\theta} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u - P|^2 dx \right\} < +\infty$$

normalizzato nel seguente modo

$$\| u \|_{\mathcal{L}_k^{(2,\theta n)}(\Omega)} = \| u \|_{L^2(\Omega)} + \|\!| u |\!\|_{\mathcal{L}_k^{(2,\theta n)}(\Omega)} . \tag{I.8}$$

Per $k = 0$ si ritrova l'esempio II; in altri termini gli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ si identificano con gli spazi $\mathcal{L}_0^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Proprietà degli spazi $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Per fissare le idee, assumiamo in $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ la norma (I.8) e supponiamo che Ω sia di tipo (A). In accordo con quanto si è fatto nel corso del lavoro continueremo a indicare con $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ lo spazio $\mathcal{L}_0^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Innanzitutto si dimostra (cfr. [4]) che se $\lambda > 2(k+1) + n$

$$u \in \mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{P}_k .$$

Per questo motivo ci limiteremo a far variare il parametro λ nell'intervallo $[0, 2(k+1) + n]$.

Poniamo

$$\begin{aligned} &\theta(\lambda) = 0 && \text{se} \quad 0 \le \lambda < n \\ &\theta(\lambda) = \left[\frac{\lambda - n}{2}\right] && \text{se} \quad n \le \lambda < n + 2(k+1) \ (^{27}) \\ &\theta(\lambda) = k && \text{se} \quad \lambda = n + 2(k+1). \end{aligned}$$

Si hanno questi teoremi

TEOREMA [I] - $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo a $\mathcal{L}_{\theta(\lambda)}^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

Per la dimostrazione si veda [4].

TEOREMA [II] - *Se* $n + 2k < \lambda \le n + 2(k+1)$ *risulta* $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, *dove* $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{2} - k$. *Se* Ω *è convesso allora* $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ *è isomorfo a* $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Per la dimostrazione si veda [4].

---

(27) $\left[\dfrac{\lambda - n}{2}\right]$ è la parte intera di $\dfrac{\lambda - n}{2}$.

Da questi teoremi si ricava il seguente quadro di proprietà:

a) per $0 \leq \lambda < n$, $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ e quindi allo spazio di MORREY $L^{(2,\lambda)}(\Omega)$.

b) Per $n < \lambda < n+2$, $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{2}$.

In generale

c) Se $n + 2r < \lambda < n + 2(r+1)$, $r = 0, 1, \ldots, k$, $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $C^{r,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{2} - r$.

d) Se infine $\lambda = n + 2(k+1)$, $\mathcal{L}_k^{(2,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{k,1}(\bar{\Omega})$.

Ai valori $n, n+2, \ldots, n+2k$ del parametro λ, corrispondono altrettanti «spazi limite» dei quali quello relativo a $\lambda = n$ è lo spazio di JOHN e NIRENBERG.

TEOREMA [III] - *Se Ω è convesso, per ogni λ dell'intervallo $0 \leq \lambda \leq n+2$ si ha l'inclusione*

$$H^{1,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_1^{(2,\lambda+2)}(\Omega).$$

DIM. - Per ogni $x_0 \in \Omega$ ed $r > 0$, $\Omega(x_0, r)$ è convesso. Fissato $\Omega(x_0, r)$ consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_i \{ D_i u \}_r (x_i - x_{0,i}).$$

Per una nota disuguaglianza di POINCARÉ si ha che

$$\int_{\Omega(x_0,r)} |[u(x) - P(x)] - [u_r - P(x)_r]|^2 dx \leq c [\text{mis}\ \Omega(x_0, r)]^{2/n} \sum_i \int_{\Omega(x_0,r)} |D_i u - \{D_i u\}_r|^2 dx.$$

Quindi

$$\inf_{Q \in \mathcal{P}_1} \int_{\Omega(x_0,r)} |u(x) - Q(x)|^2 dx \leq c\, r^{2+\lambda} \sum_i ||| D_i u |||^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}.$$

Di conseguenza

$$||| u |||^2_{\mathcal{L}_1^{(2,\lambda+2)}(\Omega)} \leq c \sum_i ||| D_i u |||^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)}$$

ed anche

$$\text{(I.9)} \qquad \| u \|_{\mathcal{L}_1^{(2,\lambda+2)}(\Omega)} \leq c \| u \|_{H^{1,\lambda}(\Omega)}.$$

COROLLARIO [I] - *Nelle stesse ipotesi del teorema predente, se* $0 \leq \lambda < n$ *allora*

$$H^{1,\lambda}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,\lambda+2)}(\Omega).$$

Segue facilmente dal teorema precedente e dal teorema [I].

DEF. [II] - *Dati due spazi di Banach A e B, costituiti di funzioni definite su* Ω, *diciamo che A è uno spazio di moltiplicatori per B se* $\forall\ \varphi \in A$ *e* $\forall\ u \in B$ *si ha*

$$\varphi u \in B \quad e \quad \| \varphi u \|_B \leq c \| \varphi \|_A \| u \|_B .$$

Si ha il seguente teorema

TEOREMA [IV] - i$_1$) $C^0(\bar{\Omega})$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$ *se* $0 \leq \lambda < n$.

i$_2$) $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, *è uno spazio di moltiplicatori per* $\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$.

i$_3$) $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $\mathfrak{L}^{(2,\lambda+2\alpha)}(\Omega)$.

DIM. CASO i$_1$) - Per $0 \leq \lambda < n$ risulta $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega) \backsim L^{(2,\lambda)}(\Omega)$. Sia $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$ e $u \in L^{(2,\lambda)}(\Omega)$; si ha

$$\int_{\Omega(x_0,r)} | \varphi u |^2 dx \leq \sup_{\bar{\Omega}} | \varphi |^2 \int_{\Omega(x_0,r)} | u |^2 dx .$$

Quindi

$$\| u\varphi \|_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} \leq c \| u\varphi \|_{L^{(2,\lambda)}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{C^0(\bar{\Omega})} \| u \|_{L^{(2,\lambda)}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{C^0(\bar{\Omega})} \| u \|_{\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)} .$$

CASO i$_2$) - Sia $\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ (per un certo $0 < \alpha \leq 1$) e $u \in \mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)$. Per ogni $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ risulta

$$\int_{\Omega(x_0,r)} | u\varphi - \{ u\varphi \}_r |^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega(x_0,r)} | u(x)\,\varphi(x_0) - u(x)\,[\varphi(x) - \varphi(x_0)] - \varphi(x_0)u_r - u(x)\,\{ \varphi(x) - \varphi(x_0) \}_r |^2 dx \leq$$

$$\leq c \left\{ \sup_{\bar{\Omega}} | \varphi |^2 \int_{\Omega(x_0,r)} | u(x) - u_r |^2 dx + r^{2\alpha} \| \varphi \|^2_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \cdot \int_{\Omega(x_0,r)} | u |^2 dx \right\} \leq \text{[28]}$$

---

[28] Si sfrutta il fatto che $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega) \subset \mathfrak{L}^{(2,n-\varepsilon)}(\Omega) \backsim L^{(2,n-\varepsilon)}(\Omega) .$$

Quindi, scelto $\varepsilon = 2\alpha$,

$$\int_{\Omega(x_0,r)} | u |^2 dx \leq r^{n-2\alpha} \| u \|^2_{L^{(2,n-2\alpha)}(\Omega)} \leq r^{n-2\alpha} \| u \|^2_{\mathfrak{L}^{(2,n)}(\Omega)} .$$

$$\leq c\,\{\sup_{\bar\Omega}|\varphi|^2 r^n \, ||| u |||^2_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} + r^n \, ||| \varphi |||^2_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \| u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)}\} \leq$$

$$\leq c r^n \| \varphi \|^2_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \| u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} .$$

Quindi

$$||| u\varphi |||^2_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|^2_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \| u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} .$$

E ciò prova che $u\varphi \in \mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)$ e che

$$\| u\varphi \|_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} = \| u\varphi \|_{L^2(\Omega)} + ||| u\varphi |||_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} \leq c \| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\bar\Omega)} \| u \|_{\mathcal{L}^{(2,n)}(\Omega)} .$$

CASO i_3) – Questo caso è banale perchè, essendo Ω di tipo (A), $\mathcal{L}^{(2,n+2\alpha)}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

COROLLARIO [II] – *Sia k un intero positivo; allora*

i_1) $C^k(\bar\Omega)$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $H^{k,\lambda}(\Omega)$ *se* $0 \leq \lambda < n$.

i_2) $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$, *è uno spazio di moltiplicatori per* $H^{k,n}(\Omega)$.

i_3) $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ *è uno spazio di moltiplicatori per* $H^{k,n+2\alpha}(\Omega)$.

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti limitati di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con x il gererico punto in Ω_1 e con y il generico punto in Ω_2.

TEOREMA [V] – *Se $x \longrightarrow \mathcal{T}(x)$ è un omeomorfismo di classe C^k, k intero ≥ 1, di $\bar\Omega_1$ su $\bar\Omega_2$, l'applicazione $\varphi : u(y) \longrightarrow v(x) = (u \circ \mathcal{T})(x)$ è un isomorfismo tra $H^{h,\lambda}(\Omega_2)$ e $H^{h,\lambda}(\Omega_1)$, per ogni intero $0 \leq h \leq k-1$ e per $0 \leq \lambda \leq n+2$.*

DIM. – Indichiamo con $J(x)$ e $J^{-1}(y)$ gli Jacobiani delle trasformazioni $y = \mathcal{T}(x)$ e $x = \mathcal{T}^{-1}(y)$. Poiché questi Jacobiani sono limitati esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di $\bar\Omega_1$ si ha

$$c_1 | x_1 - x_2 | \leq | \mathcal{T}(x_1) - \mathcal{T}(x_2) | \leq c_2 | x_1 - x_2 | .$$

Da ciò segue che per ogni $x \in \Omega_1$ e $\forall\, \rho > 0$ [29]

$$\Omega_2(\mathcal{T}(x), c_1\rho) \subset \mathcal{T}(\Omega_1(x), \rho) \subset \Omega_2(\mathcal{T}(x), c_2\rho) \tag{I.10}$$

e, similmente, per ogni $y \in \Omega_2$ e $\rho > 0$

$$\Omega_1\left(\mathcal{T}^{-1}(y), \frac{\rho}{c_2}\right) \subset \mathcal{T}^{-1}(\Omega_2(y, \rho)) \subset \Omega_1\left(\mathcal{T}^{-1}(y), \frac{\rho}{c_2}\right) . \tag{I.11}$$

---

[29] Ricordiamo che $\Omega_1(x, \rho) = I(x, \rho) \cap \Omega_1$ e $\Omega_2(y, \rho) = I(y, \rho) \cap \Omega_2$.

Ricordiamo inoltre che se $x \to \mathcal{T}(x)$ è un omeomorfismo di classe C^k, l'applicazione $\varphi : u(y) \to v(x) = (u \circ \mathcal{T})(x)$ è un isomorfismo di $H^h(\Omega_2)$ su $H^h(\Omega_1)$ per ogni intero $0 \leq h \leq k$.

Supponiamo $h = 0$. Sia $u(y) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)$ e $v(x) = u(\mathcal{T}(x))$. Per quanto si è detto sopra, $v(x) \in L^2(\Omega_1)$ e per ogni $x_0 \in \Omega_1$ e $\rho > 0$

$$\int_{\Omega_1(x_0,\rho)} |v(x) - v_\rho|^2 dx \leq \int_{\Omega_1(x_0,\rho)} |v(x) - [u(y)]_{\Omega_2(\mathcal{T}(x_0), c_2\rho)}|^2 dx =$$

$$= \int_{\mathcal{T}(\Omega_1(x_0),\rho)} |u(y) - [u]_{\Omega_2(\mathcal{T}(x_0), c_2\rho)}|^2 |J^{-1}(y)| dy \leq c \int_{\Omega_2(\mathcal{T}(x_0), c_2\rho)} |u(y) - [u]_{\Omega_2(\mathcal{T}(x_0), c_2\rho)}|^2 dy \leq$$

$$\leq c\, c_2^\lambda \rho^2 \| u \|^2_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)} .$$

Quindi $v(x) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)$ e

$$\| v \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \leq c \| u \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)} . \tag{I.12}$$

In modo perfettamente analogo si dimostra la maggiorazione contraria. Il teorema è quindi dimostrato per $h = 0$.

Sia, in generale, $k > 1$ e h un intero verificante la relazione $1 \leq h \leq \leq k - 1$. Sia $u(y) \in H^{h,\lambda}(\Omega_2)$ e $v(x) = u(\mathcal{T}(x))$. Per quanto si è detto sopra, $v \in H^h(\Omega_1)$ e si ha la maggiorazione

$$\| v \|_{H^h(\Omega_1)} \leq c \| u \|_{H^h(\Omega_2)} . \tag{I.13}$$

Inoltre le derivate $D^s u$, con $|s| = h$, appartengono a $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)$, quindi, per quanto si è dimostrato precedentemente, $D^s u \circ \mathcal{T}(x) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)$ e si ha la maggiorazione

$$\| D^s u \circ \mathcal{T}(x) \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \leq c \| D^s u \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)} . \tag{I.14}$$

D'altra parte, una qualunque derivata $D^m v(x)$, con $|m| = h$, è una combinazione lineare di funzioni $D^s u \circ \mathcal{T}(x)$

$$D^m v(x) = \sum_{|s| \leq h} D^s u \circ \mathcal{T}(x) \cdot a_s(x)$$

nella quale i coefficienti $a_s(x)$ appartengono a $C^1(\overline{\Omega})$ ([30]). Ne segue (cfr teor. [IV]) che $D^m v(x) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)$ e si ha la maggiorazione

$$\| D^m v \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \leq c \left\{ \| u \|_{H^h(\Omega_2)} + \sum_{|s| = h} \| D^s u \circ \mathcal{T}(x) \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \right\} . \tag{I.15}$$

([30]) Questo per l'ipotesi che l'omeomorfismo $x \to \mathcal{T}(x)$ sia di classe C^k.

Dalle (I.13), (I.15) e (I.14) si deduce che

$$\| v \|_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} \leq c \| u \|_{H^{k,\lambda}(\Omega_2)} . \tag{I.16}$$

In modo analogo si dimostra la maggiorazione inversa. Il teorema è completamente dimostrato.

APPENDICE II.

Dimostrazione del lemma [9.I].

Sia Ω_0 una sfera strettamente contenuta in Ω, δ_0 la distanza di $\bar{\Omega}_0$ da $\complement\Omega$ e Ω_1 un aperto verificante la condizione $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ e $\operatorname{dist}[\bar{\Omega}_0, \complement\Omega_1] = \operatorname{dist}[\bar{\Omega}_1, \complement\Omega] = \frac{\delta_0}{2}$. Dal teorema [9.I] segue che

$$\sum_j \| D_j u \|^2_{L^{(2, n-\alpha)}(\Omega_1)} \leq c(\nu, \alpha, \Omega_1) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|_{L^{(2,n-\alpha)}(\Omega)} \} . \tag{II.1}$$

Il lemma [8.II], ove si assuma $\beta_j = \{ D_j u \}_r$ e $a_j = f_{j,r}$, $M = \sup_{ij} |\!|\!| a_{ij} |\!|\!|^2_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$, assicura che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}_0$ e per tutti i ρ dell'intervallo $(0, r)$ $\left(r \leq \frac{\delta_0}{2} \right)$

$$\sum_j \int_{I(x_0, \rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq c(\nu) \Bigg\{ \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+2} \sum_j \int_{I(x_0, r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + \tag{II.2}$$

$$+ M r^{n+\alpha} \sum_j \| D_j u \|^2_{L^{(2, n-\alpha)}(\Omega_1)} + r^{n+\alpha} \sum_j |\!|\!| f_j |\!|\!|^2_{\mathfrak{L}^{(2, n+\alpha)}(\Omega)} \Bigg\} .$$

Da (II.1) e (II.2) segue che $\forall\, x_0 \in \bar{\Omega}_0$ e per ogni coppia ρ, r tale che $0 < \rho < r \leq \frac{\delta_0}{2}$, $1 < \frac{r}{\rho} \leq p$

$$\sum_j \int_{I(x_0, \rho)} | D_j u - \{ D_j u \}_\rho |^2 dx \leq c(\nu) \left(\frac{\rho}{r} \right)^{u+2} \sum_j \int_{I(x_0, r)} | D_j u - \{ D_j u \}_r |^2 dx + \tag{II.3}$$

$$+ c(\nu, M, \Omega_0) p^{n+\alpha} \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathfrak{L}^{(2, n+\alpha)}(\Omega)} \} \cdot \rho^{n+\alpha} .$$

Nello stabilire questa maggiorazione si è tenuto conto dell'inclusione $\mathfrak{L}^{(2, n+\alpha)}(\Omega) \subset L^{(2, n-\alpha)}(\Omega)$.

A questo punto applicando il lemma fondamentale [6.II] e un tipo di ragionamento ormai standard (vedi ad es. la dimostrazione del teor. [9.II]) si ottiene che

$$\text{(II.4)}\qquad \sum_j \||D_j u\||^2_{\mathcal{L}^{(2,n+\alpha)}(\Omega_0)} \le c(\nu, \alpha, a_{ij}, \Omega_0) \{ \sum_j \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_j \| f_j \|^2_{\mathcal{L}^{(2,n+\alpha)}(\Omega)} \}.$$

Quindi, per le proprietà degli spazi $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega)$, $D_j u \in C^{0,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_0)$ $(j = 1, \ldots, n)$. D'altra parte ([31])

$$\text{(II.5)}\qquad \sup_{\bar{\Omega}_0} | D_j u |^2 \le c(\alpha, \Omega_0) \{ \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega_0)} + \||D_j u\||^2_{C^{0,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_0)} \} \le$$

$$\le c(\alpha, \Omega_0) \{ \| D_j u \|^2_{L^2(\Omega_0)} + \||D_j u\||^2_{\mathcal{L}^{(2,n+\alpha)}(\Omega_0)} \}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dalle (II.4) e (II.5) segue la tesi del lemma.

APPENDICE III.

Complementi relativi al n. 16.

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti limitati di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con x il generico punto di Ω_1 e con y il generico punto di Ω_2. Indichiamo con $\mu = \mu(\lambda)$ la funzione così definita

$$\mu(\lambda) = 0 \qquad \text{se } 0 \le \lambda = n$$

$$\mu(\lambda) = \frac{\lambda - n}{2} \qquad \text{se } n < \lambda \le n + 2$$

$$\mu(\lambda) = \alpha, \qquad \alpha \text{ fissato nell'intervallo } (0, 1], \text{ se } \lambda = n.$$

Sia $u(x)$ una funzione di $H^1(\Omega_1)$ la quale, $\forall\ \varphi(x) \in H^1_0(\Omega_1)$, verifica

---

([31]) Sia $v \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$, $0 < \beta \le 1$, e $p \ge 1$. Per ogni coppia di punti $x, y \in \bar{\Omega}$

$$| u(x) |^p \le 2^p \{ | u(x) - u(y) |^p + | u(y) |^p \} \le$$

$$\le 2^p \{ \||u\||^p_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} | x - y |^{p\beta} + | u(y) |^p \} \le c[\text{diam. } \bar{\Omega}]^{p\beta} \{ \||u\||^p_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} + | u(y) |^p \}.$$

Integrando rispetto a y su Ω

$$| u(x) |^p \le c(\Omega, \beta, p) \{ \||u\||^p_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} + \| u \|^p_{L^p(\Omega)} \}, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Da questo discorso segue, in particolare, il fatto ben noto che in $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ sono equivalenti tutte le norme

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} + \||u\||_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})}, \quad p \ge 1.$$

la relazione

$$\sum_{ij}\int_{\Omega_1} a_{ij}(x)D_j u D_i\varphi dx = \sum_j \int_{\Omega_1} f_j D_j\varphi dx \tag{III.1}$$

dove $f_j \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)$ e $a_{ij}(x) \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_1)$.

Sia $x \longrightarrow \mathcal{T}(x)$ un omeomorfismo di classe $C^{1,\mu}$ di $\bar{\Omega}_1$ su $\bar{\Omega}_2$. Indichiamo con $J(x)$ e $J^{-1}(y)$ gli Jacobiani delle trasformazioni $y = \mathcal{T}(x)$ e $x = \mathcal{T}^{-1}(y)$. È noto che, nelle ipotesi fatte sull'omeomorfismo $\mathcal{T}$, l'applicazione $\varphi : v(y) \longrightarrow v \circ \mathcal{T}(x)$ è un isomorfismo di $H^1(\Omega_2)$ su $H^1(\Omega_1)$ e di $H^1_0(\Omega_2)$ su $H^1_0(\Omega_1)$.

Poniamo

$$v(y) = u \circ \mathcal{T}^{-1}(y)$$

$v \in H^1(\Omega_2)$ e dalla (III.1) si ricava che, $\forall\ \psi \in H^1_0(\Omega_2)$, la funzione $v(y)$ verifica la relazione

$$\sum_{hk}\int_{\Omega_2} b_{hk}(y) D_k v\, D_h\psi dy = \sum_h \int_{\Omega_2} F_h D_h\psi dy$$

dove

$$F_h(y) = \sum_j (f_j \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot (D_j\mathcal{T}_h \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot J^{-1}(y) \tag{III.2}$$

e

$$b_{hk}(y) = \sum_{ij} (a_{ij} \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot (D_j\mathcal{T}_h \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot (D_i\mathcal{T}_k \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot J^{-1}(y). \tag{III.3}$$

Verifichiamo che $b_{hk} \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_2)$ ed $F_h \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)$.

Le funzioni a_{ij} appartengono a $C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_1)$, $\mathcal{T}^{-1}$ è di classe $C^{1,\mu}$ e quindi $a_{ij} \circ \mathcal{T}^{-1} \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_2)$. D'altra parte

$$(D_j\mathcal{T}_h \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot (D_j\mathcal{T}_k \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot J^{-1}(y) \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_2).$$

Da ciò segue che $b_{hk} \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}_2)$.

Per quanto riguarda la funzione $F_h(y)$ si ragiona in modo analogo: $f_j(x) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)$ e $\mathcal{T}^{-1}$ è di classe $C^{1,\mu}(\Omega_2)$ quindi (App. I, teor. [V]) $(f_j \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)$. D'altra parte

$$(D_j\mathcal{T}_h \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot J^{-1}(y) \in C^{0,\mu}.$$

Per il teorema [IV] della App. I si conclude allora che $F_h(y) \in \mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)$. Sempre per i teoremi [IV] e [V] della App. I si ha la seguente maggiorazione

$$\text{(III.4)} \qquad \begin{aligned} &\| F_h(y) \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_2)} \leq c \| F_h \circ \mathcal{T}(x) \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} = \\ &= c \left\| \sum_j f_j(x) D_j \mathcal{T}_h(x) \frac{1}{J(x)} \right\|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} \leq c \sum_j \| f_j \|_{\mathcal{L}^{(2,\lambda)}(\Omega_1)} . \end{aligned}$$

Similmente, se la funzione $u(x) \in H^1(\Omega_1)$ verifica $\forall\ \varphi \in H^1_0(\Omega_1)$ la relazione

$$\sum_{ij} \int_{\Omega_1} a_{ij}(x) D_j u\, D_i \varphi dx = - \int_{\Omega_1} f \varphi dx .$$

con $f \in H^{k,\lambda}(\Omega_1)$ e $a_{ij}(x) \in C^{k+1,\mu}(\bar{\Omega}_1)$ e se l'omeomorfismo $x \longrightarrow \mathcal{T}(x)$ è di classe $C^{k+2,\mu}$ allora la funzione

$$v(y) = u \circ \mathcal{T}^{-1}(y)$$

appartiene ad $H^1(\Omega_2)$ e verifica, $\forall\ \psi \in H^1_0(\Omega_2)$, la relazione

$$\sum_{ij} \int_{\Omega_2} b_{ij}(y) D_j v\, D_i \psi\, dy = - \int_{\Omega_2} F(y) \psi(y)\, dy$$

dove i coefficienti b_{ij}, dati dalla (III.3), appartengono a $C^{k+1,\mu}(\bar{\Omega}_2)$ e la funzione $F(y) = (f \circ \mathcal{T}^{-1})(y) \cdot J^{-1}(y)$, in virtù dei teoremi [V] e [IV] della App. I, appartiene ad $H^{k,\lambda}(\Omega_2)$. Anche in in questo caso si ha la maggiorazione

$$\text{(III.5)} \qquad \begin{aligned} &\| F(y) \|_{H^{k,\lambda}(\Omega_2)} \overset{(32)}{\leq} c \| F \circ \mathcal{T}(y) \|_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} = c \left\| f \frac{1}{J(x)} \right\|_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} \leq {}^{(33)} \\ &\leq c \| f \|_{H^{k,\lambda}(\Omega_1)} . \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, New Jersey.

[2] S. AGMON . A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. on Pure and Appl. Mathem. vol, XII, 1959.
Idem. II, Comm. pure and appl. Mathem., vol. XVII, 1964.

---

(32) Cfr. App. I, teorema [V].

(33) Cfr. App. I, Corollario [II].

[3] S. CAMPANATO, ***Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni***, Ann. S. N. Sup. Pisa vol XVII, 1963.

[4] S. CAMPANATO, ***Proprietà di una famiglia di spazi funzionali***, Ann. S. N. Sup. Pisa vol. XVIII, 1964.

[5] S. CAMPANATO, ***Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano L^p in $C^{h,\alpha}$***, Ann. S. N. Sup. Pisa, vol. XVIII, 1964.

[6] S. CAMPANATO - M. K. V. MURTHY, ***Una generalizzazione del teorema di Riesz - Thorin***, Ann. S. N. Sup. Pisa, vol. XIX, 1965.

[7] S. CAMPANATO, ***Caratterizzazione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime***, Ann. S. N. Sup. Pisa, vol. XV, 1961.

[8] S. CAMPANATO, ***Proprietà di inclusione per spazi di Morrey***, Ricerche di Matem., vol. XII, 1963.

[9] A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, ***Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations***, Comm. Pure and Appl. Mathem vol. VIII, 1955.

[10] F. JOHN - L. NIRENBERG, ***On functions of bounded mean oscillation***, Comm. Pure and Appl. Mathem , vol XIV, 1961.

[11] E. MAGENES - G. STAMPACCHIA, ***I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico***, Ann. S. N. Sup. Pisa, vol. XII, 1958.

[12] N. G. MEYERS, ***Mean oscillation over cubes and hölder continuity***, Proceedings Amer. Math. Society, vol. 15, 1964.

[13] C. MIRANDA, ***Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti***, Memorie Acc. Lincei, vol. III, 1952.

[14] C. MIRANDA, ***Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico***, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[15] G. B. MORREY, ***Second order elliptic system of differential equations***, Contributions to the theory of Partial Differential Equations, Ann. of Math. Sludies No 33, Princeton University Press, 1954.

[16] G. STAMPACCHIA, ***$\mathfrak{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation***, Comm. pure and appl. Math., vol. XVII, 1964.

[17] L. BERS - F. JOHN - M. SCHECHTER, ***Partial differential equations***, Lectures in Applied Math., vol. III, New York - Publ. Wiley, 1964.