Problemi con condizioni omogenee al contorno per una certa classe di operatori formalmente ipoellittici.

MAURO PAGNI (a Bologna)

Sunto. - *Vedere le righe seguenti.*

In un precedente lavoro (¹) mi sono occupato dello studio variazionale dei problemi al contorno per una certa classe di operatori quasi-ellittici.

In questa nota tale studio viene esteso prendendo in considerazione una più larga classe di operatori che sono formalmente ipoellittici e più precisamente sono ugualmente forti (nel caso dei coefficienti costanti) di un operatore prodotto di operatori quasi-ellittici (²).

1. - Indichiamo con $x=(x_1, \ldots, x_r)$ i punti di R_x^r (spazio euclideo reale ad r dimensioni), con $y=(y_1, \ldots, y_s)$ i punti di R_y^s (spazio euclideo reale ad s dimensioni) e con $z=(x, y)$ i punti di $R^m = R_x^r \times R_y^s$.

Poniamo $D_{x_h} = -\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_h}$, $h=1, \ldots, r$, $D_{y_k} = -\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial y_k}$, $k=1, \ldots, s$;

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_r}^{\alpha_r}, \quad D_y^\beta = D_{y_1}^{\beta_1} \ldots D_{y_s}^{\beta_s}; \ |\alpha| = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i, \ |\beta| = \sum_{j=1}^{s} \beta_j,$$

α_i, β_j interi non negativi.

Siano $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ due n-ple di interi positivi assegnati ed indichiamo con *I l'insieme delle coppie (a, b), dove $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$, con a_i, b_i interi non negativi sodisfacenti alle condizioni $\dfrac{a_i}{p_i} + \dfrac{b_i}{q_i} \leq 1$ $(i=1, \ldots, n)$.*

Detto Ω un aperto limitato di R^m consideriamo l'operatore differenziale lineare

$$A(x, y;\ D_x, D_y)u = \sum_{\substack{(|\alpha|, |\beta|) \in I \\ (|\gamma|, |\delta|) \in I}} D_x^\gamma D_y^\delta (a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta u(x, y)) \tag{1.1}$$

(¹) M. PAGNI [1].

(²) Per questioni riguardanti operatori siffatti (ugualmente forti di un prodotto di operatori quasi-ellittici) si veda B. PINI [1], G.C. BAROZZI [1], A. CAVALLUCCI [1], M. PAGNI [2], [3].

con $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ funzioni complesse limitate e misurabili in Ω e dove le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni in Ω. L'operatore A viene quindi determinato, fissando le due n-ple $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ e i coefficienti $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ in Ω.

Posto

$$K(\zeta) = K(\xi, \eta) = \sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I} \xi^{2\alpha} \eta^{2\beta}, \tag{1.2}$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s).$$

indichiamo con

$H_K(\Omega)$ *lo spazio hilbertiano delle distribuzioni* u *tali che* $D_x^\alpha D_y^\beta u \in L^2(\Omega)$ *per* $(|\alpha|, |\beta|) \in I$ *con la norma*

$$\|u\|_{H_K(\Omega)} = \Big(\sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I} \| D_x^\alpha D_y^\beta u \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}};$$

$\overset{\circ}{H}_K(\Omega)$ *il sottospazio di* $H_K(\Omega)$ *chiusura di* $\mathfrak{D}(\Omega)$ (3) *in* $H_K(\Omega)$.

Poichè $\overset{\circ}{H}_K(\Omega)$ è uno spazio normale di distribuzioni su Ω, il suo duale $(\overset{\circ}{H}_K(\Omega))'$ è uno spazio di distribuzioni su Ω. Porremo allora *per definizione*

$$H_{K^{-1}}(\Omega) = (\overset{\circ}{H}_K(\Omega))'.$$

È facile provare (4) che lo spazio $H_{K^{-1}}(\Omega)$ *è costituito da tutte e sole le distribuzioni* u *tali che* $u = \sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I} D_x^\alpha D_y^\beta f_{\alpha\beta}$ *con* $f_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$.

2. - Lo studio dei problemi al contorno omogenei per l'equazione

$$Au = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.1}$$

si può fare (come vedremo) seguendo l'impostazione generalizzata di J.L. LIONS [1], prendendo come «operatori elementari» le derivate $D_x^\alpha D_y^\beta$ con $(|\alpha|, |\beta|) \in I$.

Incominciamo con l'osservare che, per l'ipotesi fatte sui coefficienti, Au può pensarsi definito in $H_K(\Omega)$ e non solo $Au \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ (5) ma per quanto sopra detto $Au \in H_{K^{-1}}(\Omega)$.

---

(3) Spazio delle funzioni complesse $u(x, y)$ indefinitamente differenziabili e a supporto compatto $\subset \Omega$.

(4) Per esempio con ragionamento analogo a quello fatto in E. MAGENES e G. STAMPACCHIA [1] per la dimostrazione del teor. 2.1.

(5) Spazio delle distribuzioni su Ω.

Associamo ad Au la forma sesquilineare e continua su $H_K(\Omega) \times H_K(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(\sum_{\substack{(|\alpha|, |\beta|) \in I \\ (|\gamma|, |\delta|) \in I}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y) D_x^\alpha D_y^\beta u \cdot \overline{D_x^\gamma D_y^\delta v} \Big) \, dx \, dy. \tag{2.2}$$

Assegnamo poi:

1) un sottospazio V_K (chiuso) di $H_K(\Omega)$ tale che $\mathring{H}_K(\Omega) \subset V_K \subset H_K(\Omega)$;

2) uno spazio normale di distribuzioni $\mathcal{Q}$, che sia un BANACH, tale che $V_K \subset \mathcal{Q}$.

Il duale di $\mathcal{Q}$, che indichiamo con $\mathcal{Q}'$, è allora uno spazio di distribuzioni in Ω e riesce $\mathcal{Q}' \subset H_{K^{-1}}(\Omega)$.

Denotato con $\mathcal{H}$ lo spazio (di BANACH) della $u \in V_K$ per cui $Au \in \mathcal{Q}'$, con la norma $\| u \|_{\mathcal{H}} = \left(\| u \|_{V_K}^2 + \| Au \|_{\mathcal{Q}'}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, sia infine $\mathcal{N}$ il sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ delle u tali che $< Au, \bar{v} > = a(u, v)$ (6) per ogni $v \in V_K$.

Ciò posto è immediato verificare che l'equazione funzionale nella u

$$a(u, v) = < f, \bar{v} >, \tag{2.3}$$

per ogni $v \in V_K$ e f (fissato) in $\mathcal{Q}'$, è equivalente al problema al contorno omogeneo

$$\begin{cases} Au = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ u \in \mathcal{N} \ (7). \end{cases} \tag{2.4}$$

Nello studio della equazione (2.3) ha un ruolo preponderante la seguente definizione.

DEF. 2.1. - *Diremo che la forma $a(u, v)$ è V_K-ellittica (e che il problema è V_K-ellittico) se esiste una costante $C > 0$ tate che*

$$| a(u, u) | \geq C \| u \|_{H_K(\Omega)}^2 \quad \textit{per ogni} \quad u \in V_K.$$

Sussiste il seguente teorema, la cui dimostrazione si ottiene facilmente facendo ragionamenti analoghi a quelli che si trovano ad es. in E. MAGENES e G. STAMPACCHIA [1] e in M. PAGNI [1].

TEOR. 2.1. - *La V_K-ellitticità di $a(u, v)$ è condizione sufficiente perchè l'equazione* (2.3) *sia risolubile univocamente.*

(6) Con $<,>$ indichiamo la dualità fra $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$.

(7) $u \in \mathcal{N}$ significa che u soddisfa in senso generalizzato a certe condizioni omogenee al contorno di Ω.

3. - Si pone ora il problema di dare delle condizioni di carattere algebrico per la V_K-ellitticità della forma $a(u, v)$ o per lo meno della forma $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$ [8], cioè, come si dice, della «coercività» della forma $a(u, v)$.

Ci occuperemo in quel che segue del caso in cui $V_K = \mathring{H}_K(\Omega)$ (problema di DIRICHLET) ottenendo un risultato che generalizza, agli operatori Au qui considerati, il noto risultato di L. GÅRDING per il problema di DIRICHLET per gli operatori ellittici.

Considerato l'insieme I (che è stato introdotto al n. 1) *diremo che la coppia* $(a_*, b_*) \in I$ *è una coppia massima di* I *se non esiste alcuna coppia* $(a, b) \in I$ *tale che* $a \geq a_*$, $b \geq b_*$, $a + b > a_* + b_*$. *Indichiamo poi con* I_* *l'insieme delle coppie massime di* I.

Posto

$$\| u \|_* = \Big(\sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I_*} \| D_x^\alpha D_y^\beta u \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

vale la seguente proposizione

PROP. 3.1. - *In* $\mathring{H}_K(\Omega)$ *le norme* $\| u \|_*$, $\| u \|_{H_K(\Omega)}$ *sono equivalenti.*

Dalle definizioni segue che

$$\| u \|_* \leq \| u \|_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathring{H}_K(\Omega). \tag{3.1}$$

Per mostrare l'esistenza di una costante C tale che

$$\| u \|_{H_K(\Omega)} \leq C \| u \|_* \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathring{H}_K(\Omega), \tag{3.2}$$

incominciamo col provare che, per ogni coppia di multi-indici (γ, δ), esiste una costante $C_1(\gamma, \delta)$ tale che per ogni $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ si ha

$$\| D_x^\alpha D_y^\beta u \|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(\gamma, \delta) \| D_x^\gamma D_y^\delta (D_x^\alpha D_y^\beta u) \|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Infatti se $u(x, y) \in \mathfrak{D}(\Omega)$ riesce

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{x_h} \frac{\partial u}{\partial x_h}(x_1, \ldots, t, \ldots, x_r; y)\, dt,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{x_h} \frac{\partial u}{\partial x_h}(x_1, \ldots, t, \ldots, x_r; y)\, dt \right|^2 \leq |\Omega| \int_{-\infty}^{x_h} \left| \frac{\partial u}{\partial x_h} \right|^2 dt \leq |\Omega| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_h} \right|^2 dt$$

---

[8] Con $(u, v)_{L^2(\Omega)}$ si è indicato il prodotto scalare di u, v in $L^2(\Omega)$.

($|\Omega| =$ diametro di Ω); ed integrando su Ω

$$\int_\Omega |u(x, y)|^2 dx\, dy \leq |\Omega|^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_h}\right|^2 dx\, dy .$$

Da ciò segue in modo ovvio la (3.3); e da quest'ultima segue la (3.2) per ogni $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Tenuto conto della definizione di $\overset{\circ}{H}_K(\Omega)$ si ha infine la piena validità della (3.2).

PROP. 3.2. - *Ad ogni* $\varepsilon > 0$ *corrisponde un numero* $\lambda(\varepsilon)$ *tale che*

$$\Big(\sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I - I_*} \| D_x^\alpha D_y^\beta u \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \| u \|_{H_K(\Omega)} + \lambda(\varepsilon) \| u \|_{L^2(\Omega)}$$

per ogni $u \in \overset{\circ}{H}_K(\Omega)$.

Posto $\xi = \xi_1, \dots, \xi_r \in R_x^r$, $\eta = \eta_1, \dots, \eta_s \in R_y^s$, $\zeta = (\xi, \eta) \in R^m$

$$K_1(\zeta) = \sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I - I_*} \xi^{2\alpha} \eta^{2\beta}, \quad K_*(\zeta) = \sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I_*} \xi^{2\alpha} \eta^{2\beta} \tag{3.4}$$

si ha

$$\frac{K_1(\zeta)}{K_*(\zeta) + t} \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \longrightarrow 0+ \quad \text{uniformemente rispetto a} \quad \zeta \in R^m. \tag{3.5}$$

Infatti osservato che $\lim\limits_{|\zeta| \to \infty} \dfrac{K_1(\zeta)}{K_*(\zeta) + t} = 0$, ad ogni $\varepsilon > 0$ resta associato un $\rho_\varepsilon > 0$ tale che per $|\zeta| \geq \rho_\varepsilon$ riesce $\dfrac{K_1(\zeta)}{K_*(\zeta) + t} < \varepsilon$. Indicato con M il sup di $K_1(\zeta)$ nella sfera $|\zeta| \leq \rho_\varepsilon$ si ha

$$\frac{K_1(\zeta)}{K_*(\zeta) + t} \begin{cases} < \varepsilon & \text{per} \quad t > 0 \quad \text{e} \quad |\zeta| \geq \rho_\varepsilon, \\ < \dfrac{M}{t} & \text{per} \quad t > 0 \quad \text{e} \quad |\zeta| \leq \rho_\varepsilon \end{cases}$$

e quindi per $t > \dfrac{M}{\varepsilon}$, $\dfrac{K_1(\zeta)}{K_*(\zeta) + t} < \varepsilon$ qualunque $\zeta \in R^m$.

Infine indicata con $\hat{u}(\zeta)$ la trasformata di FOURIER della $u(z) = u(x, y)$, $\hat{u}(\zeta) = \int e^{-i\langle z, \zeta\rangle} u(z) dz$, si ha, per $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$,

$$\sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I - I_*} \| D_x^\alpha D_y^\beta u \|^2_{L^2(\Omega)} = (2\pi)^{-m} \int K_1(\zeta) |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta$$

$$\sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I_*} \| D_x^\alpha D_y^\beta u \|^2_{L^2(\Omega)} = (2\pi)^{-m} \int K_*(\zeta) |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta .$$

Da qui, tenendo conto della (3.5), segue facilmente la voluta proposizione.

DEF. 3.1. - *Diremo che l'operatore A soddisfa la condizione i) se esiste una costante* $c > 0$ *tale che*

$$\mathcal{R}e\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I_*}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y)\,\xi^{\alpha+\gamma}\eta^{\beta+\delta}\Big) \geq c \sum_{(|\alpha|,|\beta|)\in I_*} \xi^{2\alpha}\eta^{2\beta} \tag{3.6}$$

per ogni $(x, y)\in\Omega$ *e qualunque sia* $(\xi, \eta)\in R^m$.

TEOR. 3.1. - *Se i coefficienti* $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ *di A, per cui* $(|\alpha|, |\beta|), (|\gamma|, |\delta|)\in I_*$, *sono continui in* $\overline{\Omega}$ *e se A soddisfa la condizione i), la forma* $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$ *è* $\mathring{H}_K$*-ellittica, per* λ *sufficientemente grande.*

La dimostrazione di questo teorema, dopo le premesse fatte, si può condurre al solito modo. Posto

$$a_*(u, v) = \int_\Omega\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I_*}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, x)\,D_x^\alpha D_y^\beta u\cdot\overline{D_x^\gamma D_y^\delta v}\Big)dxdy$$

e supposto i coefficienti $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ costanti e che valga la (3.6), si ha

$$\mathcal{R}e\, a_*(u, u) \geq C\,\|u\|^2_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathring{H}_K(\Omega). \tag{3.7}$$

Infatti, essendo in $\mathring{H}_K(\Omega)$ le norme $\|u\|_{H_K(\Omega)}$ e $\|u\|_*$ equivalenti (Prop. 3.1), la (3.7) equivale alla disuguaglianza

$$\mathcal{R}e\, a_*(u, u) \geq C_1\,\|u\|^2_* \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathring{H}_K(\Omega) \quad (\text{con } C_1 \text{ costante}). \tag{3.8}$$

D'altronde condizione necessaria e sufficiente perchè valga la (3.8) per ogni $u\in\mathring{H}_K(\Omega)$ è che valga per ogni $u\in\mathfrak{D}(\Omega)$,

Orbene per la relazione di PARSEVAL, se $u\in\mathfrak{D}(\Omega)$ si ha

$$\mathcal{R}e\, a_*(u, u) = (2\pi)^{-m}\int \mathcal{R}e\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I_*}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^{\alpha+\gamma}\eta^{\beta+\delta}\Big)\,|\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta$$

e

$$\|u\|^2_* = (2\pi)^{-m}\int\Big(\sum_{(|\alpha|,|\beta|)\in I_*} \xi^{2\alpha}\eta^{2\beta}\Big)\,|\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Di qui la (3.8) e quindi la (3.7).

Dopo di ciò, abbandonata l'ipotesi degli $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ costanti, si scompone l'integrale

$$\mathcal{R}e\int_\Omega\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)\,D_x^\alpha D_y^\beta u\cdot\overline{D_x^\gamma D_y^\delta u}\Big)\,dxdy$$

mediante partizione dell'unità, in integrali estesi a regioni sufficientemente piccole, e a questi integrali si applica il cosidetto ártificio di KORN riportandosi allora al caso dei coefficienti costanti e si ottiene un λ_0 (servendosi della Prop. 3.2) tale che per $\lambda \geq \lambda_0$ riesca

$$\mathcal{R}e\ a(u, u) \geq c \| u \|^2_{H_K(\Omega)} - \lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u \in \overset{\circ}{H}_K(\Omega)$$

con c costante positiva.

OSSERVAZIONE - Se $p = p_1 = ... = p_n$, $q = q_1 = ... = q_n$ si riottiene come caso particolare il teor. 2.3 di M. PAGNI [1], se di più $p = q$ si riottiene la nota disuguaglianza di L. GÅRDING per il problema di DIRICHLET per le equazioni ellittiche.

4. - Studieremo in questo n. i legami che intercorrono fra la V_K-ellitticità della forma $a(u, v)$ e l'ipoellitticità dell'operatore A.

Facciamo alcune premesse

PROP. 4.1. - *Siano Ω un aperto limitato $\neq \emptyset$ di R^m e $k_1(\zeta)$, $k_2(\zeta)$ due funzioni peso temperate* (9) *definite in R^m per le quali riesca*

$$\int |k_2(\zeta) \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \leq C_1 \int |k_1(\zeta) \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathfrak{D}(\Omega); \tag{4.1}$$

allora esiste una costante C per cui

$$k_2(\zeta) \leq C k_1(\zeta) \quad \zeta \in R^m \text{ (10)}. \tag{4.2}$$

Fissiamo una funzione $u(z) \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e $\neq 0$ e poniamo $u_\nu(z) = u(z) e^{i<z, \nu>}$. Riesce $u_\nu(z) \in \mathfrak{D}(\Omega)$ e $\hat{u}_\nu(\zeta) = \hat{u}(\zeta - \nu)$. Applicando la (4.1) si ha

$$\int |k_2(\zeta + \nu) \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \leq C_1 \int |k_1(\zeta + \nu) \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta. \tag{4.3}$$

Indicata con $M_{k_i}(\zeta)$ $(i = 1, 2)$ la funzione submoltiplicativa associata a k_i si ha (11)

$$k_1(\zeta + \nu) \leq M_{k_1}(\zeta) k_1(\nu),$$
$$k_2(\zeta + \nu) \geq k_2(\nu) M_{k_2}^{-1}(-\zeta), \qquad \zeta, \nu \in R^m$$

(9) Secondo la definizione di L. HÖRMANDER (L. HÖRMANDER [1] Def. 2.1.1) e cioè una funzione positiva $k(\zeta)$ definita in R^m si chiamerà *funzione peso temperata* se esistono due costanti positive C e N tali che $k(\zeta + \nu) \leq (1 + C|\zeta|)^N k(\nu)$; $\zeta, \nu \in R^m$.

(10) La proposizione enunciata è sostanzialmente contenuta nel Teorema 2 2 2 di L. HÖRMANDER [1].

(11) Vedasi L. HÖMANDER [1] in quel che segue la Def. 2.1.1.

e quindi dalla (4.3) la

$$k_2^2(\nu)\int |M_{\overline{k}_2}^{-2}(-\zeta)\,\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \leq C_1 k_1^2(\nu)\int |M_{k_1}(\zeta)\,\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \tag{4.4}$$

per ogni $\nu \in R^m$. Dalla (4.4) segue la (4.2).

Detto $P(\zeta)$ un polinomio a coefficienti complessi nelle m variabili $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ poniamo

$$P^{(\mu)}(\zeta) = \frac{\partial^{|\mu|} P(\zeta)}{\partial \zeta_1^{\mu_1} \dots \partial \zeta_m^{\mu_m}} \quad \text{e} \quad \tilde{P}(\zeta)^2 = \sum_{|\mu| \geq 0} |P^{(\mu)}(\zeta)|^2 \tag{4.5}$$

$\mu_1, \dots, \mu_m$ interi non negativi.

Consideriamo i due polinomi

$$K(\zeta), \text{ definito in (1.2), e } K_0(\zeta) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\frac{|\alpha^{(i)}|}{p_i} + \frac{|\beta^{(i)}|}{q_i} \leq 1} \xi^{2\alpha^{(i)}} \eta^{2\beta^{(i)}} \Big), \tag{4.6}$$

$\zeta = (\xi, \eta)$, $\alpha^{(i)} = \alpha_1^{(i)} \dots, \alpha_r^{(i)}$, $\beta^{(i)} = \beta_1^{(i)} \dots, \beta_s^{(i)}$, con $\alpha_h^{(i)}$, $\beta_k^{(i)}$ interi non negativi.

È facile vedere che in essi figurano gli stessi monomi e che quindi (i termini di K_0 e K sono tutti non negativi) dette C_1 e C_2 due costanti opportune si ha

$$C_1 K_0(\zeta) \leq K(\zeta) \leq C_2 K_0(\zeta), \qquad \zeta \in R^m. \tag{4.7}$$

Osservato che $K_0(\zeta) = |K_0(\zeta)| \leq \tilde{K}_0(\zeta)$, dalla (4.7) segue facilmente che $K(\zeta)$ è ugualmente forte di $K_0(\zeta)$ (12).

D'altronde il polinomio $K_0(\zeta)$, prodotto di polinomi quasi-ellittici (tali sono evidentemente i suoi fattori), è ipoellittico (13). Segue allora, da quanto sopra detto, che $K(\zeta)$ è ipoellittico (14).

Supponiamo che la forma $a(u, v)$ associata all'operatore $A = A(x, y, D_x, D_y)$ (definito in 1.1) sia V_K-ellittica e che inoltre A sia a coefficienti costanti $A = A(D_x, D_y) = A(D)$.

(12) Se due operatori $P(D)$, $Q(D)$ (o due polinomi $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$) sono tali che $\tilde{Q}(\zeta)/\tilde{P}(\zeta) < C$, $\zeta \in R^m$ (C costante) diremo che *Q è più debole di P* e scriveremo $Q \prec P$, o che *P è più forte di Q* e scriveremo $P \succ Q$. Se $P \prec Q \prec P$ i due polinomi verranno detti ***ugualmente forti***. Condizione necessaria e sufficiente perchè $Q \prec P$ è che esista una costante C_1 tale che $|Q(\zeta)| \leq C_1 \tilde{P}(\zeta)$, $\zeta \in R^m$ (v. L HÖRMANDER [1] Teor. 3.3.2).

(13) Vedasi G. C. BAROZZI [1].

(14) Polinomi ugualmente forti di un polinomio ipoellittico sono ipoellittici (v. ad es. Teor. 4.1.6 L. HÖRMANDER [1]).

In queste ipotesi proveremo che $A(D)$ *è ipoellittico*: più precisamente che, posto $K(D) = K(D_x, D_y) = \sum_{(|\alpha|, |\beta|) \in I} D_x^{2\alpha} D_y^{2\beta}$, *$A(D)$ è ugualmente forte di $K(D)$*.

Si ha infatti, nelle dette ipotesi, usando la trasformata di FOURIER

$$(4.8) \qquad \left| \int A(\zeta) \, |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \right| \geq C \int K(\zeta) \, |\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

D'altronde dall'essere $K(\zeta)$ ipoellittico e ≥ 1 segue l'esistenza di una costante C_1 tale che $C_1 K(\zeta) > \tilde{K}(\zeta)$ per $\zeta \in R^m$.

Da ciò, tenuto conto che $\tilde{A}(\zeta) \geq |A(\zeta)|$, si ottiene dalla (4 8) la

$$(4.9) \qquad \int |\tilde{A}(\zeta)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \geq C_2 \int |\tilde{K}(\zeta)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

(C_2 costante positiva).

Ricordato che $\tilde{A}(\zeta)$, $\tilde{K}(\zeta)$ sono due funzioni peso temperate (v. L. HÖRMANDER [1]) e che quindi tali sono pure le funzioni $\tilde{A}(\zeta)^{\frac{1}{2}}$, $\tilde{K}(\zeta)^{\frac{1}{2}}$ (v. L. HÖRMANDER [1] Teor. 2.1.1), per la Prop. 4.1 si ottiene dalla (4.9) che $\tilde{A}(\zeta) > C \tilde{K}(\zeta)$; cioè $A > K$.

È poi immediato verificare che $|A(\zeta)| < C_1 K(\zeta)$ e quindi che $A < K$. Si conclude così nel modo voluto.

Supponiamo infine (abbandonando l'ipotesi dei coefficienti costanti) *che siano continui in Ω i coefficienti $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ (di A) per cui $(|\alpha|, |\beta|), (|\gamma|, |\delta|) \in I_*$ e naturalmente che la forma $a(u, v)$ associata ad A sia V_K-ellittica.* Mostreremo che l'operatore $A(x, y; D_x, D_y)$ è in Ω di «forza costante» più precisamente che detto (x_0, y_0) un arbitrario punto di Ω, l'operatore $A(x_0, y_0; D_x, D_y)$ è ugualmente forte di $K(D)$.

Sia $(x_0, y_0) = z_0$ un arbitrario punto di Ω, poniamo per brevità di scrittura

$$a^0(u, v) = \int_\Omega \Big(\sum_{\substack{(|\alpha|, |\beta|) \in I \\ (|\gamma|, |\delta|) \in I}} a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_0, y_0) D_x^\alpha D_y^\beta u \cdot \overline{D_x^\gamma D_y^\delta v} \Big) dx \, dy.$$

Dalla supposta V_K-ellitticità di $a(u, v)$ si ha

$$(4.10) \qquad |a(u, u)| \geq C \, \| u \|^2_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Tenuto conto della continuità dei coefficienti $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ (quelli per cui $(|\alpha|, |\beta|), (|\gamma|, |\delta|) \in I_*$), fissato ε positivo e $< \dfrac{C}{4l}$ (C è la costante che figura in (4.10) e l è il numero degli addendi della $\sum_{\substack{(|\alpha|, |\beta|) \in I \\ (|\gamma|, |\delta|) \in I}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}$) si determini una sfera aperta di centro z_0, contenuta in Ω, sfera che indicheremo con Ω_0, tale che

$$(4.11)\qquad \sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I_*}} |a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y) - a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_0,y_0)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad (x,y)\in\Omega_0 .$$

Si ha evidentemente

$$(4.12)\qquad |a(u,u)| \geq C\|u\|^2_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathfrak{D}(\Omega_0)$$

e quindi

$$(4.13)\qquad |a(u,u) - a^0(u,u)| + |a^0(u,u)| \geq C\|u\|^2_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad a\in\mathfrak{D}(\Omega_0).$$

D'altronde per $u\in\mathfrak{D}(\Omega_0)$

$$|a(u,u) - a^0(u,u)| = \Bigg|\int_{\Omega_0}\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I_*}}[a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y) - a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_0,y_0)]D_x^\alpha D_y^\beta u\cdot\overline{D_x^\gamma D_y^\delta u}\Big)dx\,dy +$$

$$(4.14)\qquad + \int_{\Omega_0}\Big(\sum_{\substack{(|\alpha|,|\beta|)\in I-I_* \\ (|\gamma|,|\delta|)\in I-I_*}}[a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y) - a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_0,y_0)]D_x^\alpha D_y^\beta u\cdot\overline{D_x^\gamma D_y^\delta u}\Big)dx\,dy\Bigg| \leq$$

$$\leq l\varepsilon\|u\|^2_{H_K(\Omega)} + 2lM\sum_{(|\alpha|,|\beta|)\in I-I_*}\|D_x^\alpha D_y^\beta u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

dove M è un numero $> |a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x,y)|$ per $(|\alpha|,|\beta|)$, $(|\gamma|,|\delta|)\in I$ e $(x,y)\in\Omega$.

Per la Prop. 3.2 si potrà determinare un $\rho > 0$ tale che il secondo addendo dell'ultimo membro di (4.14) sia $< \varepsilon\|u\|^2_{H_K(\Omega)} + \rho\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ per ogni $u\in\mathfrak{D}(\Omega_0)$. Si ha così dalla (4.14)

$$(4.15)\qquad |a(u,u) - a^0(u,u)| \leq \frac{C}{2}\|u\|^2_{H_K(\Omega)} + \rho\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathfrak{D}(\Omega_0).$$

Dalla (4.13) e (4.15) segue

$$(4.16)\qquad |a^0(u,u)| + \rho\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{C}{2}\|u\|^2_{H_K(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathfrak{D}(\Omega_0).$$

Di qui usando la relazione di PARSEVAL,

$$(4.17)\qquad \int(|A(z_0;\zeta)| + \rho)|\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \geq \frac{C}{2}\int K(\zeta)|\hat{u}(\zeta)|^2 d\zeta \quad \text{per ogni} \quad u\in\mathfrak{D}(\Omega_0).$$

Tennto conto di quanto si è detto in precedenza nel caso dei coefficienti costanti si ha

$$(4.18) \qquad \tilde{A}(z_0;\,\zeta) + \rho > C_1\tilde{K}(\zeta) \qquad \zeta \in R^m, \quad C_1 \text{ costante positiva.}$$

Da qui osservato che $\lim\limits_{|\zeta|\to\infty} \tilde{K}(\zeta) \longrightarrow \infty$, segue

$$(4.19) \qquad \tilde{A}(z_0;\,\zeta) \longrightarrow \infty \quad \text{per} \quad |\zeta| \longrightarrow \infty.$$

Essendo $\tilde{A}(z_0;\,\zeta) > 0$ ($\tilde{A}(z_0;\,\zeta) = 0$ per qualche ζ, comporta $\tilde{A}(z_0;\,\zeta) \equiv 0$) si ha, tenuto conto della (4.19), che esiste una costante C tale che $C\tilde{A}(z_0;\,\zeta) > \tilde{A}(z_0;\,\zeta) + \rho$. Si ottiene così, in virtù della (4.18), che $A(z_0;\,\zeta) > K(\zeta)$. Essendo, ovviamente, $A(z_0;\,\zeta) < K(\zeta)$ si conclude che $A(z_0;\,\zeta)$ e $K(\zeta)$ sono egualmente forti.

Quanto detto nel presente n. si compendia nel

TEOR. 4.1. - *Dalla V_K-ellitticità di $a(u, v)$, nelle ipotesi di continuità in Ω dei coefficienti $a_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, y)$ per cui $(|\alpha|, |\beta|)$, $(|\gamma|, |\delta|) \in I_*$, segue che, in ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, l'operatore $A(x_0, y_0, D_x;\, D_y)$ è ugualmente forte di* $K(D_x, D_y) = \sum\limits_{(|\alpha|, |\beta|) \in I} D_x^{2\alpha} D_y^{2\beta}$.

Il teorema ora enunciato è assai utile per lo studio della regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno qui considerati (V_K-ellittici) perchè permette di utilizzare i già noti risultati sulla regolarizzazione delle soluzioni delle equazioni ipoellittiche ([15]).

5. - Terminiamo con un semplice esempio riguardante il problema di DIRICHLET.

Consideriamo l'operatore $Au = \dfrac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} - \dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6} - \dfrac{\partial^6 u}{\partial y^6}$, che è uno dei più semplici operatori ipoellittici di ordine pari non quasi-ellittico.

Volendo interpretare esplicitamente le condizioni al contorno è opportuno considerare l'aperto $\Omega = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}$ ([16]).

Nel caso dell'operatore preso in esame è $p_1 = q_2 = 2$, $p_2 = q_1 = 1$ e l'insieme I è costituito dalle disposizioni, con ripetizione, a due a due dei numeri 0, 1, 2 e dalle coppie (3, 0), (0, 3). I_* (l'insieme delle coppie massime) è costituito dalle coppie (3, 0), (0, 3), (2, 2). $H_K(\Omega)$ è formato dall'insieme delle funzioni $u(x, y)$ dotate di derivate (nel senso delle distribuzioni in Ω) di quadrato sommabile in Ω sino al terzo ordine e aventi la derivata $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ pure di

([15]) Si veda L HÖRMANDER [1] e quanto detto in [2.4] di M. PAGNI [1].

([16]) Si è già segnalata ampiamente questa opportunità in M. PAGNI [1].

quadrato sommabile in Ω. La norma $\|u\|_{H_K(\Omega)}$ è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle norme in $L^2(\Omega)$ di dette derivate.

È subito visto che, fatto $V_K = \overset{\circ}{H}_K(\Omega)$, il problema è V_K-ellittico e che quindi il problema di DIRICHLET con dati al contorno omogenei è «ben posto» [17]. Detto problema equivale (prendiamo $\mathcal{Q} = \overset{\circ}{H}_K(\Omega)$) a

$$Au = f \quad \text{in} \quad \Omega, \; f \in H_{K^{-1}}(\Omega)$$

$$u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega, \; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sui lati} \quad x = a, \; x = b, \; c < y < d,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{sui lati} \quad y = c, \; y = d, \; a < x < b;$$

l'annullarsi dei dati al contorno essendo inteso nel senso delle tracce di u come elemento di $H_K(\Omega)$ [18].

Si osservi che pur essendo l'operatore di ottavo ordine i dati del problema di DIRICHLET sono solo tre.

BIBLIOGRAFIA

G. C. BAROZZI: [1] *Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici*; Boll. U. M. I. s. III, Anno XX, 1965.

A. CAVALLUCCI: [1] *Su una questione di invarianza di polinomi ugualmente forti a prodotti di polinomi quasi-ellittici*; Boll. U. M. I. s. III, Anno XX, 1965.

L. HÖRMANDER: [1] *Linear partial differential operators*; Springer, Berlin, 1963.

J. L. LIONS: [1] *Problémes aux limites en théorie des distributions*; Acta Math. vol. 94, 1955.

E. MAGENES e G. STAMPACCHIA: [1] *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*; Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, vol. XII, 1958.

M. PAGNI: [1] *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali*; Atti Sem. Mat. e Fis. Univ. Moderna, vol. XIII, 1964. [2] *Un teorema di tracce*; Rend Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. XXXVIII, 1965 [3] *Problemi al contorno per una certa classe di operatori ipoellittici*; Atti del Convegno di Nervi sulle equazioni a derivate parziali, 1965, Cremonese, Roma.

B. PINI: [1] *Sulle tracce di un certo spazio funzionale* I; Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. XXXVII, 1964, II ibidem, vol. XXXVIII, 1965.

---

(17) Se prendiamo $\mathcal{Q} = \overset{\circ}{H}_K(\Omega)$ si ha che Au è un isomorfismo algebrico e topologico di $\overset{\circ}{H}_K(\Omega)$ su $H_{K^{-1}}(\Omega)$.

(18) Si veda B. PINI [1] e M. PAGNI [2].