Etude des solutions d'équations différentielles du second ordre dépendant d'un paramètre complexe de grand module.

par J. LOMBET - GOFFAR (à Liège)

Résumé. - *Du comportement asymptotique des fonctions de Whittaker, on déduit, dans tout l'intervalle fini $[\alpha, \beta]$ décrit par la variable réelle x , le comportement de deux solutions linéairement indépendantes des équations différentielles dépendant d'un paramètre complexe λ de grand module, dont les « réduites » se ramènent par une transformation de Liouville à l'équation confluyente de Whittaker. Le coefficient de la plus haute puissance de λ dans l'équation donnée possède dans $[\alpha, \beta]$, un zéro d'ordre pair 2ν ; les cas $\nu=1$ ν pair, ν impair ($\nu > 1$) sont étudiés séparément.*

I. - Position du problème.

1. - Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \quad u'' - [a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) + X(x, \lambda)]u = 0;$$

λ désigne un paramètre complexe tel que $|\lambda| \geq \Lambda$ ⁽¹⁾ et la variable réelle x décrit l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où α et β sont deux constantes finies ($\alpha < 0 < \beta$).

La fonction $X(x, \lambda)$ est une fonction continue de x dans $[\alpha, \beta]$, développable en une série de puissances de λ^{-1} uniformément convergente pour $|\lambda| \geq \Lambda$ et elle vérifie la condition $X(x, \infty) = 0$.

La fonction $a(x)$ continue dans $[\alpha, \beta]$ possède en $x=0$, un zéro d'ordre 2ν , ν entier positif ou nul ⁽²⁾.

Nous nous proposons d'étudier les équations (1) dont la « réduite »

$$(2) \quad v'' - [a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)]v = 0$$

se ramène à

$$(3) \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{1-2\mu}{z} \frac{d\eta}{dz} + \left(\frac{k}{z} - \frac{1}{4}\right)\eta = 0$$

par une transformation du type

$$(4) \quad z = f(x, \lambda), \quad v = \eta(z)\psi(x).$$

Les fonctions $f(x, \lambda)$ et $\psi(x)$ que nous allons déterminer doivent posséder sur $[\alpha, \beta]$ des dérivées par rapport à x des deux premiers ordres au moins; k désigne une constante éventuellement complexe.

⁽¹⁾ $|\lambda| \geq \Lambda$ signifie que le « module de λ est suffisamment grand ».

⁽²⁾ Le fait de supposer que le zéro de $a(x)$ se trouve en $x=0$ et non en $x=x_0$ ne nuit en rien à la généralité.

2. - La substitution (4) transforme l'équation différentielle (2) en une équation

$$(5) \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{1}{z'} \left[\frac{z''}{z'} + \frac{2\psi'}{\psi} \right] \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{z'^2} \left[\frac{\psi''}{\psi} - a\lambda^2 - b\lambda - c \right] \eta = 0$$

identique à (3) si

$$(6) \quad \frac{z''}{z'} + \frac{2\psi'}{\psi} = (1 - 2\mu) \frac{z'}{z},$$

$$(7) \quad \frac{\psi''}{\psi} - a\lambda^2 - b\lambda - c = \left(\frac{k}{z} - \frac{1}{4} \right) z'^2.$$

En intégrant la relation (6) par rapport à x , on obtient si la constante d'intégration vaut $(2\lambda)^{2\mu}$,

$$(8) \quad \psi = \frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}}{z'^{\frac{1}{2}}} \cdot (2\lambda)^\mu.$$

On détermine le coefficient $c(x)$ de (2) en identifiant à zéro le terme indépendant de λ dans (7); nous avons

$$(9) \quad c = \frac{\psi''}{\psi}.$$

La relation (7) est alors identiquement vérifiée si

$$z'^2 = 4a\lambda^2,$$

$$b\lambda + k \frac{z'^2}{z} = 0.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$a(x) = g^2(x);$$

il vient par suite,

$$z' = 2g\lambda,$$

$$(10) \quad z = 2\lambda G \quad \text{avec} \quad G = \int_0^x g(s) ds$$

et

$$(11) \quad b = - \frac{2kg^2}{G}.$$

Des formules (8) et (10), on déduit la forme de $f(x, \lambda)$ et de $\psi(x)$

$$f(x, \lambda) = 2\lambda G(x),$$

$$(12) \quad \psi(x) = G_2^{-1/\mu}(x) g^{-1/2}(x) \quad (^3).$$

Les relations (9) et (11) déterminent respectivement les coefficients $c(x)$ et $b(x)$ en fonction du coefficient arbitraire $a(x)$ de l'équation (2).

3. - Nous supposons enfin que la fonction $x^{-2\nu}a(x) \equiv x^{-2\nu}g^2(x)$ possède une dérivée seconde continue et que l'on peut trouver un facteur constant éventuellement complexe h tel que $hx^{-2\nu}g^2(x)$ soit réelle et positive.

Dans ces conditions, on a

$$g^2(x) \equiv x^{2\nu} \{ a_0 + a_1 x + a_2(x)x^2 \}$$

où les coefficients a_0, a_1 sont constants ($a_0 \neq 0$) et où $a_2(x)$ est une fonction continue de x dans $[\alpha, \beta]$.

Pour les valeurs positives de x , $g^2(x)$ est réelle et positive. Pour les valeurs négatives de x , on a

$$\arg g^2(x) = \arg x^{2\nu} = 2\nu\pi.$$

Nous prendrons pour $g(x)$, la racine de $g^2(x)$ positive pour les valeurs positives de x .

La fonction $G(x)$ peut s'écrire

$$G(x) = x_{2\mu}^{1/\mu} \{ b_0 + b_1 x + b_2(x)x^2 \}, \quad \mu = \frac{1}{2(\nu + 1)}$$

où b_0, b_1 sont des constantes et où $b_2(x)$ est une fonction continue de x dans $[\alpha, \beta]$.

Lorsque x est positif, les fonctions $g(x)$ et $G(x)$ possèdent donc l'argument zéro tandis que pour x négatif, elles ont respectivement les arguments $\pi\nu$ et $\pi(\nu + 1)$.

La fonction $\psi(x)$ est réelle, positive et bornée sur $[\alpha, \beta]$. Elle est définie en tout point de $[\alpha, \beta]$ [en $x = 0$, on a $\psi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \{ G^{1/2-1/\mu}(x) \cdot g(x)^{-1/2} \}$] et possède une dérivée seconde continue. On peut donc écrire

$$\psi(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2(x)x^2, \quad \delta_0 \neq 0$$

(³) On convient qu'une quantité élevée à une certaine puissance a son argument multiplié par cette puissance.

où δ_0, δ_1 sont des constantes et où $\delta_2(x)$ désigne une fonction continue de x dans $[\alpha, \beta]$.

4. - Le changement de fonction

$$(13) \quad \eta(z) = z^{-\frac{1}{2}+\mu} M(z)$$

transforme l'équation différentielle (3) en l'équation confluyente de WHITTAKER

$$(14) \quad \frac{d^2 M}{dz^2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1-4\mu^2}{4z^2} - \frac{k}{z} \right] M = 0.$$

Des relations (4) et (13), on déduit que

$$(15) \quad v(x, \lambda) = \psi(x) z^{-\frac{1}{2}+\mu} M(z).$$

Si $\mathcal{W}[v_1, v_2; x]$ désigne le wronskien des fonctions $v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)$, on a

$$(16) \quad \mathcal{W}[v_1, v_2; x] = (2\lambda)^{2\mu} \mathcal{W}[M_1, M_2; z]$$

et aux deux solutions linéairement indépendantes $v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)$ de l'équation (2) correspondent les deux solutions linéairement indépendantes $M_1(z), M_2(z)$ de l'équation (14).

5. - Commençons par étudier le cas particulier $\nu = 0$. On a $k = 0, \mu = \frac{1}{2}$ et l'équation réduite s'écrit

$$(17) \quad v'' - \{ \lambda^2 g^2(x) + c(x) \} v = 0$$

avec

$$(18) \quad c(x) \equiv \frac{g''(x)}{2g(x)} - \frac{3}{4} \frac{g'^2(x)}{g^2(x)}.$$

L'équation de WHITTAKER correspondante est

$$(19) \quad \frac{d^2 M}{dz^2} - \frac{1}{4} M = 0$$

et a pour solutions linéairement indépendantes

$$W_{0, \frac{1}{2}}(z) \equiv e^{z/2}, \quad W_{0, \frac{1}{2}}(-z) \equiv e^{-z/2}.$$

Lorsque $\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi$, ρ entier, la solution générale de

(18), $M(z)$ possède le comportement asymptotique $e^{\sigma z/2}O(1)$ ⁽⁴⁾ avec $\sigma = (-1)^p$. Puisque $\psi(x)$ est bornée dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, la solution générale de (17) est donc

$$v(x, \lambda) = e^{z/2}O(1) + e^{-z/2}O(1).$$

A $W_{0, \frac{1}{2}}(z)$, correspond la solution de (17)

$$v_1(x, \lambda) = e^{z/2}O(1) = O(1)e^{\lambda \int_0^x g(s) ds};$$

à $W_{0, \frac{1}{2}}(-z)$ correspond la solution de (17)

$$v_2(x, \lambda) = e^{-z/2}O(1) = O(1)e^{-\lambda \int_0^x g(s) ds}.$$

EXEMPLE. - La fonction e^x vérifie les conditions imposées à $g(x)$ dans l'équation (17) quel que soit l'intervalle $[\alpha, \beta]$; l'équation (17) correspondante s'écrit

$$(20) \quad v'' - \left\{ \lambda^2 e^{2x} + \frac{1}{4} \right\} v = 0$$

et a pour solutions linéairement indépendantes

$$v_1(x, \lambda) = e^{\lambda(e^x - 1)}e^{-x/2},$$

$$v_2(x, \lambda) = e^{-\lambda(e^x - 1)}e^{-x/2}.$$

6. - Dans le cas particulier, $b(x) \equiv 0$ ou $k = 0$ ($\nu \geq 1$), M. R. LANGER a exprimé les solutions de l'équation (2) à l'aide des développements asymptotiques ($|\lambda| \geq \Lambda$) des fonctions de HANKEL [2, 3, a] ⁽⁵⁾. Ce résultat découle du fait que les changements de variable et de fonction $\eta = z^{1/2}y$, $z = 2ix$ transforment l'équation (3) en l'équation de BESSEL

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

On remarque, en outre que l'équation de WHITTAKER correspondant à ce cas particulier

$$\frac{d^2 M}{dz^2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1 - 4\mu^2}{4z^2} \right] M = 0$$

⁽⁴⁾ La fonction désignée par $O(1)$ est uniformément bornée ainsi que sa dérivée par rapport à z pour les valeurs de z considérées.

⁽⁵⁾ Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

possède les solutions linéairement indépendantes

$$W_{0,\mu}(z) \equiv \frac{1}{2} (\pi z)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\mu)} H_{\mu}^{(1)}\left(\frac{iz}{2}\right),$$

$$W_{0,\mu}(ze^{-i\pi}) \equiv \frac{1}{2} (\pi z)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\mu/2} H_{\mu}^{(2)}\left(\frac{iz}{2} e^{-i\pi}\right)$$

où $H_{\mu}^{(1)}\left(\frac{iz}{2}\right)$ et $H_{\mu}^{(2)}\left(\frac{iz}{2} e^{-i\pi}\right)$ sont les fonctions de HANKEL.

II. - Propriétés des solutions de l'équation réduite.

7. - La solution générale de l'équation

$$(21) \quad v'' - [\lambda^2 g^2(x) + b(x)\lambda + c(x)]v = 0$$

avec $b \equiv -\frac{2kg^2}{G}$ et $c \equiv \frac{\psi''}{\psi}$, s'écrit

$$v(x, \lambda) = \psi(x) z^{-\frac{1}{2} + \mu} [c_1 M_1(z) + c_2 M_2(z)]$$

où $M_1(z)$ et $M_2(z)$ désignent deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (14).

Pour toutes les valeurs finies de la variable z ($|z| \leq M$) et du module du paramètre complexe λ , nous prendrons comme solutions linéairement indépendantes $M_1(z)$, $M_2(z)$ de (14), les fonctions $M_{k,\mu}(z)$ et $M_{k,-\mu}(z)$ exprimées respectivement par

$$(22) \quad M_1(z) \equiv M_{k,\mu}(z) = z^{\frac{1}{2} + \mu} e^{-z/2} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} + \mu - k}{2\mu + 1} z + \dots \right],$$

$$(23) \quad M_2(z) \equiv M_{k,-\mu}(z) = z^{\frac{1}{2} - \mu} e^{-z/2} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} - \mu - k}{1 - 2\mu} z + \dots \right];$$

2μ est différent d'un entier ($\nu \neq 0$) et les séries intervenant dans les relations (22) et (23) convergent uniformément pour les valeurs finies de z et de k ($|z| \leq M$).

Les fonctions $M_{k,\pm\mu}(z)$ sont uniformes si l'on convient comme au paragraphe 2 qu'une quantité élevée à une certaine puissance a son argument multiplié par cette puissance. De plus, elles vérifient les relations

$$(24) \quad M_{k,\pm\mu}(z) = i^{\rho} e^{\pm i\pi\mu\rho} M_{\sigma k,\pm\mu}(ze^{-i\pi\rho})$$

où ρ désigne un entier et où $\sigma = (-1)^\rho$ et d'après [5], on a

$$(25) \quad \mathcal{M}[M_{k, \mu}, M_{k, -\mu}; z] = -2\mu.$$

Les solutions de l'équation (20) correspondant à $M_{k, \pm\mu}(z)$ s'écrivent

$$(26) \quad v_i(z, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu}M_{k, \pm\mu}(z), \quad i = 1, 2$$

et d'après (16)

$$(27) \quad \mathcal{M}[v_1, v_2; x] = (-2\mu)(2\lambda)^{2\mu}.$$

Puisque $|z| \leq M$, les solutions $v_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) sont uniformément bornées dans l'intervalle considéré.

8. - Lorsque $|z| > M$, on introduit les fonctions de WHITTAKER $W_{\sigma k, \mu}(e^{-i\pi\rho}z)$ où ρ et σ ont été définis au paragraphe 7.

Pour abréger l'écriture, on pose [4, a]

$$(28) \quad W_{\sigma k, \mu}(e^{-i\pi\rho}z) = W_\rho(z).$$

La fonction $W_{k, \mu}(z)$ est définie en fonction des $M_{k, \pm\mu}(z)$ par la relation [1]

$$(29) \quad W_{k, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - k\right)} M_{k, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - k\right)} M_{k, -\mu}(z).$$

De (24), il résulte donc que

$$(30) \quad W_\rho(z) = \frac{e^{-i\pi\mu\rho}\Gamma(-2\mu)}{i^\rho\Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)} M_{k, \mu}(z) + \frac{e^{i\pi\mu\rho}\Gamma(2\mu)}{i^\rho\Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right)} M_{k, -\mu}(z).$$

Si ε désigne un nombre positif arbitrairement petit et si $|z|$ est suffisamment grand, pour les valeurs de $\arg z$ situées dans le secteur

$$(31) \quad \left(\rho - \frac{3}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{3}{2}\right)\pi - \varepsilon,$$

$W_\rho(z)$ possède le développement asymptotique

$$(32) \quad W_\rho(z) = e^{-\frac{\sigma z}{2}(ze^{-i\pi\rho})^{\sigma k}} \left[1 + \frac{O(1)}{z}\right].$$

Dans le secteur

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{3}{2}\right)\pi - \varepsilon, \quad |z| > M,$$

le développement asymptotique de $W_\rho(z)$ est fourni par la relation (32), celui de $W_{\rho+1}(z)$ s'obtient en remplaçant ρ par $\rho + 1$ dans le second membre de (32). Le wronskien de $W_\rho(z)$ et $W_{\rho+1}(z)$ est indépendant de z et peut être évalué à partir des développements asymptotiques de ces fonctions; il vient

$$(33) \quad \mathcal{W}[W_\rho, W_{\rho+1}; z] = \sigma e^{i\pi\sigma k}$$

d'où l'on conclut que $W_\rho(z)$ et $W_{\rho+1}(z)$ sont linéairement indépendantes.

Dans le secteur $S_\rho(z)$ défini par

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{si} \quad \Re[\sigma k] \leq 0,$$

ou

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon \quad \text{si} \quad \Re[\sigma k] > 0,$$

la solution générale de l'équation de WHITTAKER (14)

$$c_1 W_\rho(z) + c_2 W_{\rho\pm 1}(z) \quad (^6), \quad \text{avec} \quad c_2 \neq 0,$$

est représentée asymptotiquement par

$$(34) \quad c_2 e^{\frac{4}{2}\sigma z} (ze^{-i\pi(\rho+1)} - \sigma k) O(1).$$

Dans ce secteur, $W_{\rho+1}(z)$ [resp. $W_\rho(z)$] tend vers l'infini [resp. zéro] lorsque $|z| \rightarrow \infty$, $\arg z \neq (\rho \pm 1)\frac{\pi}{2}$.

Nous dirons que $W_{\rho+1}(z)$ est la *solution dominante* dans $S_\rho(z)$.

Il n'existe, par suite, dans $S_\rho(z)$, qu'une solution $W_\rho(z)$ possédant un développement asymptotique différent de (34); toutes les autres solutions sont asymptotiquement identiques.

Dans $S_{\rho+1}(z)$, la solution dominante est $W_\rho(z)$.

Pour obtenir le développement asymptotique de $W_\rho(z)$ lorsque $\arg z$

(⁶) Pour $\arg z \neq \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi$, on prend la solution $W_{\rho+1}(z)$; si $\arg z = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi$, on utilise $W_{\rho-1}(z)$.

n'appartient pas au secteur (31), on utilise les relations suivantes

$$(35) \quad \begin{aligned} W_{k, \mu}(ze^{i\pi\rho}) &= \frac{2\pi i^{\rho-1} e^{-i\pi k}}{\Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - k\right)} \frac{\sin \pi\mu}{\sin 2\pi\mu} W_{-k, \mu}(ze^{-i\pi}) + \\ &+ \frac{i^{\rho}}{\sin 2\pi\mu} W_{k, \mu}(z) [\sin \pi\mu\rho e^{-2i\pi k} + \sin \pi\mu(\rho + 2)] \end{aligned}$$

lorsque ρ est un entier pair et

$$(36) \quad \begin{aligned} W_{k, \mu}(ze^{i\pi\rho}) &= \frac{i^{\rho-1} W_{k, \mu}(ze^{-i\pi})}{\sin 2\pi\mu} [\sin \pi\mu(\rho + 1)e^{2i\pi k} + \sin \pi\mu(\rho - 1)] + \\ &+ \frac{2i^{\rho}\pi e^{i\pi k}}{\Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - k\right)} W_{-k, \mu}(z) \frac{\sin \pi\mu(\rho + 1)}{\sin 2\pi\mu}, \end{aligned}$$

lorsque ρ est un entier impair.

9. - Pour obtenir le comportement asymptotique de $W_{\tau}(z)$ où $\tau = \rho + \nu + 1$ dans $S_{\rho}(z)$, nous distinguerons deux cas.

i) ν est impair. Si l'on remarque qu'à un nombre τ pair (resp. impair) correspond un nombre ρ pair (resp. impair), on déduit de (30) que

$$(37) \quad W_{\tau}(z) = K W_{\rho+1}(z) + K_1 W_{\rho}(z),$$

où

$$(38) \quad K = \frac{2\pi e^{-i\pi\sigma k}}{i^{\nu} \sin 2\pi\mu \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right)},$$

$$K_1 = -i^{-\nu} \left[1 - \frac{2ie^{-i\pi\sigma k - i\pi\mu} \cos \pi(\sigma k - \mu)}{\sin 2\pi\mu} \right];$$

les constantes K et K_1 sont finies et K est différent de zéro lorsque $k + \frac{1}{2} \pm \nu$ est différent d'un entier.

On a de même

$$(39) \quad W_{\tau}(z) = K_2 W_{\rho-1}(z) + K_3 W_{\rho}(z)$$

où

$$K_2 = \frac{2\pi e^{i\pi\sigma k}}{i^\nu \sin 2\pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)}, \quad (40)$$

$$K_3 = -i^{-\nu} \left[1 + 2ie^{i\pi\sigma k + i\pi\mu} \frac{\cos(\sigma k - \mu)\pi}{\sin 2\pi\mu} \right];$$

les constantes K_2 et K_3 sont finies et K_2 est différente de zéro lorsque $k + \frac{1}{2} \pm \mu$ n'est pas entier.

Des relations (37) et (39), il résulte que $W_\tau(z)$ et $W_\rho(z)$ sont linéairement indépendantes.

Ces relations fournissent en outre, une expression asymptotique de $W_\tau(z)$ valable dans le secteur $S_\rho(z)$. En effet, de (37), on déduit pour $|z| > M$ et

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (41) \quad W_\tau(z) = \frac{2\pi e^{i\pi\sigma k\rho}}{i^\nu \sin 2\pi\mu \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right)} e^{\frac{\sigma z}{2}} z^{-\sigma k} \left[1 + \frac{O(1)}{z} \right];$$

lorsque $\Re(\sigma k) > 0$, ce développement n'est valable que dans le secteur

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon, \quad (|z| > M).$$

De (39), on conclut que la relation (41) est valable si $\Re(\sigma k) > 0$, dans le secteur

$$|z| > M, \quad \left(\rho - \frac{3}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon,$$

si $\Re(\sigma k) \leq 0$, dans le secteur

$$|z| > M, \quad \left(\rho - \frac{3}{2}\right)\pi \leq \arg z \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon.$$

L'expression asymptotique (41) est donc valable dans tout le secteur $S_\rho(z)$.

ii). ν est pair. A un nombre ρ pair correspond un entier $\tau + 1$ pair et à un nombre ρ impair correspond un entier $\tau + 1$ impair. On a donc d'après (30)

$$(42) \quad W_{\tau+1}(z) = K_4 W_{\rho+1}(z) + K_5 W_\rho(z),$$

où

$$K_4 = \frac{\pi e^{-i\pi\sigma k}}{i^{\nu+1} \sin \pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)},$$

$$K_5 = \frac{e^{i\pi\mu}}{i^{\nu+2}} \left[i - \frac{\pi e^{-i\pi\sigma k}}{\sin \pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} + \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)} \right];$$

K_4 et K_5 sont des constantes finies et K_4 est différente de zéro si $k + \frac{1}{2} \pm \mu$ n'est pas entier.

On obtient de même, la relation

$$(43) \quad W_{\tau+1}(z) = K_6 W_{\rho-1}(z) + K_7 W_{\rho}(z)$$

où

$$(44) \quad K_6 = \frac{\pi e^{i\pi\sigma k}}{i^{\nu+1} \sin \pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)},$$

$$K_7 = \frac{1}{i^{\nu+1}} \left[e^{i\pi\mu} - \frac{\pi i e^{-i\pi\mu} e^{i\pi\sigma k}}{\sin \pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} + \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)} \right];$$

les constantes K_6 et K_7 sont finies et K_6 est différente de zéro si $k + \frac{1}{2} \pm \mu$ n'est pas entier.

On voit donc, d'après (42) et (43) que $W_{\tau+1}(z)$ possède dans $S_{\rho}(z)$ le développement asymptotique

$$(45) \quad W_{\tau+1}(z) = \frac{\pi e^{i\pi\sigma k_{\rho}}}{i^{\nu+1} \sin \pi\mu \Gamma\left(\frac{1+2\mu}{2} - \sigma k\right) \Gamma\left(\frac{1-2\mu}{2} - \sigma k\right)} e^{\frac{\sigma z}{2}} z^{-\sigma k} O(1).$$

10. - La solution de l'équation (21) correspondant à $W_{\rho}(z)$ s'écrit

$$(46) \quad v_{\rho}(x, \lambda) = \psi(x) z^{\mu - \frac{1}{2}} W_{\rho}(z).$$

D'après la relation (33), les solutions linéairement indépendantes de (14) dans les secteurs $S_{\rho}(z)$, mod. $\frac{1}{\mu} \left(\rho = 0, \dots, \frac{1}{\mu} - 1 \right)$ sont les fonctions $W_{\rho}(z)$, $W_{\rho+1}(z)$ lorsque $\arg z \neq \left(\rho - \frac{1}{2} \right) \pi$; pour $\arg z = \left(\rho - \frac{1}{2} \right) \pi$ les deux solutions linéairement indépendantes de (14) sont $W_{\rho}(z)$, $W_{\rho-1}(z)$.

La relation (46) fait correspondre $v_\rho(x, \lambda)$, $v_{\rho-1}(x, \lambda)$, $v_{\rho+1}(x, \lambda)$ respectivement à $W_\rho(z)$, $W_{\rho-1}(z)$, $W_{\rho+1}(z)$.

De (30), (22), (23), il résulte que

$$(47) \quad v_\rho(x, \lambda) = O(1),$$

$$(48) \quad v'_\rho(x, \lambda) = O(\lambda^{2\mu})$$

pour $|z| \leq M$, $|\lambda| \geq \Lambda$.

Pour $|z| > M$ et

$$\left(\rho - \frac{3}{2}\right)\pi + \varepsilon \leq \arg z \leq \left(\rho - \frac{3}{2}\right)\pi - \varepsilon,$$

on a

$$(49) \quad v_\rho(x, \lambda) = e^{-\frac{1}{2}\sigma z z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}}} O(1),$$

$$(50) \quad v'_\rho(x, \lambda) = e^{-\frac{1}{2}\sigma z z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}}} O(\lambda), \quad |\lambda| \geq \Lambda.$$

Dans $S_\rho(z)$, les fonctions $v_\rho(x, \lambda)$ et $v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes puisque

$$(51) \quad \mathcal{W}[v_\rho, v_{\rho \pm 1}; x] = (2\lambda)^{2\mu} \sigma e^{i\pi \sigma k}.$$

Les fonctions $v_\tau(x, \lambda)$ et $v_\rho(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes si $k + \frac{1}{2} \pm \mu$ est différent d'un entier lorsque ν est impair. Lorsque ν est pair, les fonctions $v_{\tau+1}(x, \lambda)$ et $v_\rho(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes sous la même condition.

III. - Relation entre les solutions des équations (1) et (21)

11. - L'équation différentielle (21) peut s'écrire

$$(52) \quad v'' - \{\lambda^2 g^2(x) - \omega(x, \lambda)\} v = 0$$

avec

$$(53) \quad \omega(x, \lambda) = \frac{kz'^2(x, \lambda)}{z(x, \lambda)} - \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

En outre, l'équation (1) est équivalente à

$$(54) \quad u'' - \{\lambda^2 g^2(x) - \omega(x, \lambda)\} u = \theta(x, \lambda)u$$

où

$$(55) \quad \theta(x, \lambda) = \omega(x, \lambda) + \lambda b(x) + c(x) + X(x, \lambda)$$

est une fonction continue de x dans $[\alpha, \beta]$ si les conditions des paragraphes 1 et 3 sont réalisées; de plus $\theta(x, \lambda)$ est uniformément bornée par rapport à λ pour $|\lambda| \geq \Lambda$.

Soient $\bar{v}(x, \lambda)$ et $\widehat{v}(x, \lambda)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (52), $v(x, \lambda)$ une solution quelconque de cette équation et x_0 un point de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et posons

$$K(x, t, \lambda) = - \frac{\bar{v}(x, \lambda)\widehat{v}(t, \lambda) - \widehat{v}(x, \lambda)\bar{v}(t, \lambda)}{\mathcal{W}[\bar{v}, \widehat{v}; t]} \theta(t, \lambda).$$

Alors, la fonction $u(x, \lambda)$ définie par l'équation intégrale

$$(56) \quad u(x, \lambda) = v(x, \lambda) + \int_{x_0}^x K(x, t, \lambda) u(t, \lambda) dt$$

est une solution de l'équation différentielle (1) et puisque

$$K'(x, t, \lambda) = - \frac{\bar{v}'(x, \lambda)\widehat{v}(t, \lambda) - \widehat{v}'(x, \lambda)\bar{v}(t, \lambda)}{\mathcal{W}[\bar{v}, \widehat{v}; t]} \theta(t, \lambda),$$

on a

$$(57) \quad u'(x, \lambda) = v'(x, \lambda) + \int_{x_0}^x K'(x, t, \lambda) u(t, \lambda) dt.$$

A la solution $v_\rho(x, \lambda)$ définie au paragraphe 10, la relation (56) fait correspondre la solution $u_{\rho, x_0}(x, \lambda)$ de (54) qui se réduit à $v_\rho(x, \lambda)$ pour $x = x_0$ et dont la dérivée $u'_{\rho, x_0}(x, \lambda)$ vaut $v'_\rho(x, \lambda)$ en $x = x_0$.

On a donc

$$u_{\rho, x_0}(x_0, \lambda) = v_\rho(x_0, \lambda) \quad \text{et} \quad u'_{\rho, x_0}(x_0, \lambda) = v'_\rho(x_0, \lambda).$$

REMARQUE. - Si M désigne un nombre positif fixé assez grand, $|z(x, \lambda)|$ est inférieur à M dans l'intervalle $[x_{-\Lambda}, x_\Lambda]$ de $[\alpha, \beta]$ qui contient l'origine et dont les extrémités varient avec λ . A l'extérieur de $[x_{-\Lambda}, x_\Lambda]$, on a $|z(x, \lambda)| > M$.

IV. - Comportement asymptotique ($|\lambda| \geq \Lambda$) de deux solutions linéairement indépendantes de (1) pour $x > 0$.

12. - Rappelons d'abord un lemme [4(a), 4(b)].

Pour les valeurs de λ , telles que $|\lambda| \geq \Lambda$, on définit un intervalle $\alpha_1(\lambda) \leq x \leq \alpha_2(\lambda)$. Si x, t et x_0 appartiennent à cet intervalle et si les fonctions $v(x, \lambda)$ et $K(x, t, \lambda)$ respectivement coefficient et noyau de l'équation intégrale (56) sont des fonctions continues des variables x et t , telles que

$$(58) \quad v(x, \lambda) = O(1),$$

$$\int_{x_0}^x |K(x, t, \lambda)| dt = O(\lambda^{-j}), \quad j > 0,$$

alors, la solution $u_{x_0}(x, \lambda)$ de (56) égale à $v(x, \lambda)$ pour $x = x_0$, diffère de $v(x, \lambda)$ par une expression de l'ordre de λ^{-j} et

$$(59) \quad u_{x_0}(x, \lambda) = v(x, \lambda) + O(\lambda^{-j}).$$

Ce lemme peut être modifié de la manière suivante: si les hypothèses (58) sont remplacées par

$$i). \quad v(x, \lambda) = O(1) \text{ ou } \sup_{x \in [\alpha_1, \alpha_2]} |v(x, \lambda)| = N_1,$$

ii). $K(x, t, \lambda)$ tend uniformément vers zéro pour $\lambda \rightarrow \infty$, la relation (59) devient

$$(60) \quad u_{x_0}(x, \lambda) = v(x, \lambda) + O(\|K\|)$$

où nous avons posé

$$\|K\| = \sup_{x \in [\alpha_1, \alpha_2]} \int_{x_0}^x |K(x, t, \lambda)| dt.$$

Pour démontrer la relation (60), on utilise le développement de NEUMANN de la fonction $u_{x_0}(x, \lambda)$

$$(61) \quad u_{x_0}(x, \lambda) = v(x, \lambda) + K \circ v + K^2 \circ v + \dots + K^{(n+1)} \circ v + \dots$$

avec

$$K^{(i)} \circ v = \int_{x_0}^x K^{(i)}(x, t, \lambda) v(t, \lambda) dt.$$

De l'inégalité

$$|K^{(n)}| \leq \|K\|^n N_1,$$

on déduit que la série (61) majorée par la série uniformément convergente pour $|\lambda| \geq \Lambda$,

$$N_1 + \|K\| N_1 + \dots + \|K\|^n N_1 + \dots$$

est uniformément convergente pour $|\lambda| \geq \Lambda$.

La quantité $u_{x_0}(x, \lambda) - v(x, \lambda)$ est donc majorée par la série

$$N_1[\|K\| + \|K\|^2 + \dots + \|K\|^n + \dots]$$

et l'on a

$$u_{x_0}(x, \lambda) - v(x, \lambda) = O(\|K\|).$$

Les fonctions

$$\bar{v}(x, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu}M_{k, \mu}(z),$$

$$(62) \quad \widehat{v}(x, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu}M_{k, -\mu}(z)$$

sont bornées pour $|z| \leq M$ et leur wronskien est égal à $(-2\mu)(2\lambda)^{2\mu}$, (voir (27)).

Il en résulte puisque $\theta(t, \lambda) = O(\lambda^{-1})$ que

$$\int_0^x |K(x, t, \lambda)| dt = O(\lambda^{-4\mu-1}) \int_{z(0)}^{z(x)} z^{2\mu-1} dz = O(\lambda^{-4\mu-1})$$

et d'après le lemme, on a

$$(63) \quad u_{\rho, 0}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{lorsque } |z| \leq M.$$

Puisque $v'_{\rho}(x, \lambda) = O(\lambda^{2\mu})$, il vient

$$(64) \quad u'_{\rho, 0}(x, \lambda) = v'_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}), \quad \text{lorsque } |z| \leq M.$$

13. - Pour étudier le comportement des solutions de l'équation (1) pour les différentes valeurs du paramètre complexe λ , nous considérerons d'abord l'intervalle $[0, \beta]$.

Dans $S_{\rho}(\lambda)$, désignons par $\bar{v}(x, \lambda)$, $\widehat{v}(x, \lambda)$ les solutions linéairement indé-

pendantes de l'équation (52) définies respectivement par

$$(65) \quad \begin{aligned} \bar{v}(x, \lambda) &\equiv v_\rho(x, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu} W_\rho(z), \\ \widehat{v}(x, \lambda) &\equiv \begin{cases} v_{\rho+1}(x, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu} W_{\rho+1}(z) & \text{pour } \arg z \neq \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi, \\ v_{\rho-1}(x, \lambda) = \psi(x)z^{-\frac{1}{2}+\mu} W_{\rho-1}(z) & \text{pour } \arg z = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi; \end{cases} \end{aligned}$$

soit $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ la solution de l'équation intégrale (56) qui se réduit à $v(x, \lambda) \equiv v_\rho(x, \lambda)$ pour $x = \beta$.

Si l'on pose

$$\Delta(v_\rho, v_{\rho\pm 1}) = v_\rho(x)v_{\rho\pm 1}(t) - v_\rho(t)v_{\rho\pm 1}(x),$$

$$V_\rho(x, \lambda) = e^{\frac{1}{2}\sigma x} z^{-\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} \bar{v}(x, \lambda),$$

$$V_{\rho\pm 1}(x, \lambda) = e^{-\frac{1}{2}\sigma x} z^{\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} \widehat{v}(x, \lambda),$$

$$U_{\rho, \beta}(x, \lambda) = e^{\frac{1}{2}\sigma x} z^{-\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} u_{\rho, \beta}(x, \lambda),$$

les fonctions $V_\rho(x, \lambda)$ et $V_{\rho\pm 1}(x, \lambda)$ sont $O(1)$ pour $|z| > M$ et de l'équation intégrale (56), il résulte que

$$(66) \quad U_{\rho, \beta}(x, \lambda) = V_\rho(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}) \int_x^\beta z(t)^{2\mu-1} U_{\rho, \beta}(t, \lambda) dt$$

puisque pour $t > x$ dans l'intervalle $[x_\lambda, \beta]$, $\arg[z(t) - z(x)] = \arg \lambda$ et $e^{\sigma[z(x) - z(t)]}$ est bornée. Toutefois, lorsque $\Re \sigma k > 0$, la quantité $\left[\frac{z(x)}{z(t)}\right]^{-2\sigma k}$ n'est pas bornée pour les petites valeurs de $\frac{z(x)}{z(t)}$. Mais si $\frac{z(x)}{z(t)} = \delta$, ($\delta > 0$), on a

$$|e^{\sigma[z(x) - z(t)]}| \leq e^{M\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \sin \varepsilon}$$

et puisque $e^{-M \sin \varepsilon / \delta} \delta^{-2\sigma k}$ est bornée quel que soit $\delta > 0$ et tend vers zéro si $\delta \rightarrow 0$, l'expression $e^{\sigma[z(x) - z(t)]} \left[\frac{z(x)}{z(t)}\right]^{-2\sigma k}$ est bornée pour les valeurs de x, t, z considérées.

En appliquant le lemme du paragraphe 12 à l'équation intégrale (66), on

voit que

$$U_{\rho, \beta}(x, \lambda) = V_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2}) \quad \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$$

$$U_{\rho, \beta}(x, \lambda) = V_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

On en déduit

$$(67) \quad u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{-\frac{1}{2}\sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2}) \quad \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$$

$$(68) \quad u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{-\frac{1}{2}\sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

D'après les relations (50), (57), on obtient

$$(69) \quad u'_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v'_{\rho}(x, \lambda) + e^{-\frac{1}{2}\sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1}), \quad \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$$

$$(70) \quad u'_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v'_{\rho}(x, \lambda) + e^{-\frac{1}{2}\sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda), \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

14. - Lorsque $x \in [0, x_{\Lambda}]$, on a $|z(x)| \leq M$ et l'équation intégrale (56) s'écrit

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + I_1 + I_2$$

si l'on désigne respectivement par I_1 , I_2 les deux intégrales

$$I_1 = \int_{x_{\Lambda}}^{\beta} \frac{\Delta(v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}) \theta(t, \lambda)}{\mathcal{N}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}; t]} u_{\rho, \beta}(t, \lambda) dt,$$

$$I_2 = \int_x^{x_{\Lambda}} \frac{\Delta(v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}) \theta(t, \lambda)}{\mathcal{N}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}; t]} u_{\rho, \beta}(t, \lambda) dt$$

Puisque $v_{\rho}(x, \lambda)$ et $v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)$ sont bornées dans l'intervalle $[0, x_{\Lambda}]$, on a d'après (67), (68) (dans I_1 , on sait que $t \in [x_{\Lambda}, \beta]$)

$$I_1 = \begin{cases} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) & \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4}, \\ O(\lambda^{-2}) & \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Pour $x \in [0, x_A]$, [resp. $t \in [x, x_A]$], les fonctions $v_\rho(x, \lambda)$, $v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)$ [resp. $v_\rho(t, \lambda)$, $v_{\rho \pm 1}(t, \lambda)$] sont bornées et l'on a

$$I_2 = O(\lambda^{-4\mu-1}).$$

Les hypothèses du lemme du paragraphe 12 sont donc vérifiées pour l'équation intégrale

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = f(x, \lambda) + I_2$$

avec

$$f(x, \lambda) \equiv v_\rho(x, \lambda) + I_1 = O(1).$$

On en conclut

$$(71) \quad u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_\rho(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(72) \quad u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_\rho(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M.$$

En procédant de la même manière, on obtient pour la dérivée $u'_{\rho, \beta}(x, \lambda)$

$$(73) \quad u'_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v'_\rho(x, \lambda) + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda), \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(74) \quad u'_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v'_\rho(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}), \quad \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M.$$

15. - Recherchons maintenant le comportement des fonctions $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ dans $S_\rho(\lambda)$, pour les différentes valeurs du paramètre complexe λ ; comme nous le verrons ci-dessous, $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ et $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ sont deux solutions de l'équation (1) linéairement indépendantes dans $S_\rho(\lambda)$.

Remarquons d'abord que les fonctions $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ ⁽⁷⁾ sont les solutions de l'équation intégrale (56) où $x_0 = 0$ et $v(x, \lambda) \equiv v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)$.

Lorsque $x \in [0, x_A]$, le comportement de $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ et de sa dérivée $u'_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ s'obtient comme au paragraphe 12; on a

$$(75) \quad u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{pour } |z| \leq M,$$

$$(76) \quad u'_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}), \quad \text{pour } |z| \leq M.$$

(7) On utilise les solutions $u_{\rho-1, 0}(x, \lambda)$ et $v_{\rho-1}(x, \lambda)$ lorsque $\arg z = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi$, pour $\operatorname{Re} \sigma k \leq 0$.

Si $x \in [x_A, \beta]$, l'équation intégrale (56) s'écrit

$$u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\rho \pm 1}(x, \lambda) - I_3 - I_4$$

avec

$$I_3 = \int_0^{x_A} \frac{\Delta(v_\rho, v_{\rho \pm 1})\theta(t, \lambda)}{\mathcal{W}[v_\rho, v_{\rho \pm 1}; t]} u_{\rho \pm 1, 0}(t, \lambda) dt,$$

$$I_4 = \int_{x_A}^x \frac{\Delta(v_\rho, v_{\rho \pm 1})\theta(t, \lambda)}{\mathcal{W}[v_\rho, v_{\rho \pm 1}; t]} u_{\rho \pm 1, 0}(t, \lambda) dt.$$

La relation (75) donne le comportement de la fonction $u_{\rho \pm 1, 0}(t, \lambda)$ de I_3 et il vient

$$I_3 = e^{\frac{1}{2}\sigma z(x)} z(x)^{-\sigma x + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1})$$

puisque seule la fonction $v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)$ de I_3 n'est pas bornée.

En posant

$$U_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = e^{-\frac{1}{2}\sigma z(x)} z(x)^{\sigma k + \frac{1}{2} - \mu} u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda),$$

nous voyons que

$$I_4 e^{-\frac{1}{2}\sigma z(x)} z(x)^{\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} = O(\lambda^{-2\mu-1}) \int_{x_A}^x z(t)^{2\mu-1} U_{\rho \pm 1, 0}(t, \lambda) dt$$

car la fonction $e^{-\sigma[z(x)-z(t)]} \left[\frac{z(x)}{z(t)} \right]^{2\sigma k}$ est bornée pour $t < x$.

Le noyau $K(x, t, \lambda)$ de l'équation intégrale

$$(77) \quad U_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = F(x, \lambda) - e^{-\frac{1}{2}\sigma z(x)} z(x)^{\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} I_4$$

avec

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &\equiv V_{\rho \pm 1}(x, \lambda) - e^{-\frac{1}{2}\sigma z(x)} z(x)^{\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} I_3 \\ &= O(1) \end{aligned}$$

vérifie la relation

$$\int_{x_A}^x |K(x, t, \lambda)| dt = \begin{cases} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) & \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \\ O(\lambda^{-2}) & \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}; \end{cases}$$

du lemme du paragraphe 12, on déduit alors

$$U_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = V_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$$

$$U_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = V_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}) \quad \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

Il en résulte que

$$(78) \quad u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{si} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$(79) \quad u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}) \quad \text{si} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

Pour la dérivée $u'_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ on obtient

$$(80) \quad u'_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda) \quad \text{si} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$(81) \quad u'_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\rho \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu}) \quad \text{si} \quad \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

16. - Il reste à démontrer que les solutions $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ et $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ de l'équation différentielle (1) sont linéairement indépendantes. Le wronskien des deux solutions $u_{\rho+1, 0}(x, \lambda)$ [ou $u_{\rho-1, 0}(x, \lambda)$ si $\arg z = \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\pi$] et $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ est indépendant de x et peut être évalué à l'aide des relations (75), (76) et (71), (72), (73), (74).

Pour $|\lambda| \geq \Lambda$, $\arg \lambda = \arg z \in S_\rho(\lambda)$, il vient

$$(82) \quad \mathcal{W}[u_{\rho, \beta}, u_{\rho \pm 1, 0}] = \mathcal{W}[v_\rho, v_{\rho \pm 1}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda) \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$(83) \quad \mathcal{W}[u_{\rho, \beta}, u_{\rho \pm 1, 0}] = \mathcal{W}[v_\rho, v_{\rho \pm 1}] + O(\lambda^{-2\mu-1}) \quad \text{pour} \quad \mu \neq \frac{1}{4}.$$

Le tableau suivant, fournit les solutions linéairement indépendantes de (1) correspondant à $0 \leq \arg \lambda \leq 2\pi$, $x > 0$

<i>valeurs de λ</i>	<i>Solutions linéairement indépendantes</i>	
i). $\operatorname{Re} \sigma k > 0$		
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$	$u_{0, \beta}(x, \lambda)$	$u_{1, 0}(x, \lambda)$
$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$	$u_{1, \beta}(x, \lambda)$	$u_{0, 0}(x, \lambda)$
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$u_{2, \beta}(x, \lambda)$	$u_{1, 0}(x, \lambda)$
ii). $\operatorname{Re} \sigma k \leq 0$		
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$u_{0, \beta}(x, \lambda)$	$u_{1, 0}(x, \lambda)$
$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$	$u_{1, \beta}(x, \lambda)$	$u_{0, 0}(x, \lambda)$
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$u_{2, \beta}(x, \lambda)$	$u_{1, 0}(x, \lambda)$

V. - Comportement asymptotique de deux solutions linéairement indépendantes de (1) pour $x < 0$.

17. - Nous étudierons maintenant le comportement des solutions de l'équation (1) lorsque x est négatif, $x \geq \alpha$; dans ce cas, on a

$$\arg z = \arg \lambda + \pi(\nu + 1).$$

D'importantes modifications s'introduisent ici.

Remarquons d'abord que la solution $v_{\tau}(x, \lambda)$ (τ entier) de l'équation (21) tend vers zéro lorsque $|z| \rightarrow \infty$ et $\operatorname{Re} \sigma k \leq 0$, dans le secteur

$$\pi\left(\tau - \nu - \frac{3}{2}\right) \leq \arg \lambda \leq \pi\left(\tau - \nu - \frac{1}{2}\right)$$

identique à

$$\pi\left(\rho - \frac{1}{2}\right) \leq \arg \lambda \leq \pi\left(\rho + \frac{1}{2}\right)$$

si $\tau = \rho + \nu + 1$.

Lorsque $\operatorname{Re} \sigma k > 0$, ce secteur se réduit à

$$\pi\left(\tau - \nu - \frac{3}{2}\right) + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq \pi\left(\tau - \nu - \frac{1}{2}\right) - \varepsilon.$$

A un entier ν impair, correspond un entier τ pair (resp. impair) si ρ est pair (resp. impair) mais à un entier ν pair correspond un entier τ impair (resp. pair) si ρ est pair (resp. impair). On a donc

$$v_{\tau}(x, \lambda) = e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(1), \quad \text{pour } \nu \text{ impair,}$$

$$v_{\tau}(x, \lambda) = e^{\sigma z(x)/2} z(x)^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(1), \quad \text{pour } \nu \text{ pair.}$$

Les résultats relatifs au cas où ν est pair se déduisent de ceux que nous allons obtenir pour ν impair, en permutant les rôles des indices τ et $\tau \pm 1$.

Supposons donc ν impair et $x \in [\alpha, x_{-A}]$ c'est-à-dire $|z| > M$.

La solution $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ de l'équation différentielle (1) vérifie l'équation intégrale

$$(84) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) - \int_{\alpha}^x \frac{\Delta(v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}) \theta(t, \lambda)}{\mathcal{M}[v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}; t]} u_{\tau, \alpha}(t, \lambda) dt.$$

Si l'on introduit dans l'équation intégrale (84) la formule (47), la définition de $(\Delta v_{\tau}, v_{\tau \pm 1})$ et les relations

$$V_{\tau}(x, \lambda) = e^{\sigma z(x)/2} z(x)^{-\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} v_{\tau}(x, \lambda),$$

$$V_{\tau \pm 1}(x, \lambda) = e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} v_{\tau \pm 1}(x, \lambda),$$

$$U_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = e^{\sigma z(x)/2} z(x)^{-\sigma k - \mu + \frac{1}{2}} u_{\tau, \alpha}(x, \lambda),$$

on voit que

$$U_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = V_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}) \int_{\alpha}^x z(t)^{2\mu-1} U_{\tau, \alpha}(t, \lambda) dt$$

puisque la fonction $e^{\sigma[z(x)-z(t)]} \left[\frac{z(x)}{z(t)} \right]^{-2\sigma k}$ est bornée pour $t < x$ ($|t| > |x|$), $\arg \lambda \in S_{\rho}(\lambda)$.

Il en résulte d'après le lemme du paragraphe 12,

$$U_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = V_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$U_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = V_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

Il vient finalement

$$(85) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$(86) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

Pour la dérivée $u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$, on obtient

$$(87) \quad u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$$

$$(88) \quad u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(x)/2} z(x)^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M.$$

18. - Lorsque $x \in [x_{-\Lambda}, 0]$, $|z(x)| \leq M$, l'équation intégrale (56) devient

$$u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) - I_5 - I_6$$

avec

$$I_5 = \int_{\alpha}^{x_{-\Lambda}} \frac{\Delta(v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}) \theta(t, \lambda)}{\mathcal{N}[v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}; t]} u_{\tau, \alpha}(t, \lambda) dt,$$

$$I_6 = \int_{x_{-\Lambda}}^x \frac{\Delta(v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}) \theta(t, \lambda)}{\mathcal{N}[v_{\tau}, v_{\tau \pm 1}; t]} u_{\tau, \alpha}(t, \lambda) dt.$$

La fonction $u_{\tau, \alpha}(t, \lambda)$ de l'intégrale I_5 est donnée par les relations (85), (86) et puisque $v_{\tau}(x, \lambda)$, $v_{\tau \pm 1}(x, \lambda)$ sont bornées pour $x \in [\alpha, x_{-\Lambda}]$, on a

$$I_5 = \begin{cases} O(\lambda^{-2} \lg \lambda) & \text{pour } \mu = \frac{1}{4}, \\ O(\lambda^{-2}) & \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Les fonctions $v_{\tau}(x, \lambda)$, $v_{\tau \pm 1}(x, \lambda)$, $v_{\tau}(t, \lambda)$, $v_{\tau \pm 1}(t, \lambda)$ de I_6 sont bornées et pour l'équation intégrale

$$u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = f_1(x, \lambda) - I_6$$

avec

$$f_1(x, \lambda) \equiv v_{\tau}(x, \lambda) - I_5 = O(1),$$

les hypothèses du lemme du paragraphe 12, sont vérifiées.

Il vient, par suite

$$(89) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(90) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M.$$

Le même procédé appliqué à la dérivée $u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ donne

$$(91) \quad u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(92) \quad u'_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M.$$

19. - La seconde solution de (1) correspondant au cas où x est négatif et où ν est un entier positif impair est la fonction $u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda)$. En procédant comme au paragraphe 15, on obtient

$$(93) \quad u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } |z| \leq M,$$

$$(94) \quad u'_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}), \quad \text{si } |z| \leq M,$$

$$(95) \quad u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(96) \quad u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(97) \quad u'_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$$

$$(98) \quad u'_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-4\mu}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M.$$

Les solutions $u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda)$ et $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ [ou $u_{\tau-1, 0}(x, \lambda)$ et $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ lorsque $\arg z = \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\pi$] sont linéairement indépendantes puisque

$$\mathcal{W}[u_{\tau \pm 1, 0}; u_{\tau, \alpha}] = \mathcal{W}[v_{\tau \pm 1}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda) \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{W}[u_{\tau \pm 1, 0}; u_{\tau, \alpha}] = \mathcal{W}[v_{\tau \pm 1}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-2\mu-1}) \quad \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

REMARQUE. - En procédant de manière analogue dans le cas où ν est pair, on obtient les résultats suivants:

si $\mu = \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(\mathbf{x})/2} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

$$u'_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\sigma z(\mathbf{x})/2} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda),$$

$$u_{\tau, 0}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{\sigma z/2} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

$$u'_{\tau, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + e^{\sigma z/2} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1} \lg \lambda),$$

si $\mu = \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

$$u'_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda),$$

$$u_{\tau, 0}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2}),$$

$$u'_{\tau, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-3/2});$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| > M,$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\sigma z/2} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2}),$$

$$u'_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\sigma z/2} z^{\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-1}),$$

$$u_{\tau, 0}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{\sigma z/2} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}),$$

$$u'_{\tau, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + e^{\sigma z/2} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu}),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}, \quad |z| \leq M,$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}),$$

$$u'_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v'_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}),$$

$$u_{\tau, 0}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}),$$

$$u'_{\tau, 0}(x, \lambda) = v'_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2\mu-1}).$$

Puisque

$$\mathcal{W}[u_{\tau\pm 1, \alpha}, u_{\tau, 0}] = \mathcal{W}[v_{\tau\pm 1}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{W}[u_{\tau\pm 1, \alpha}, u_{\tau, 0}] = \mathcal{W}[v_{\tau\pm 1}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-2\mu-1} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4},$$

on voit que les solutions $u_{\tau\pm 1, \alpha}(x, \lambda)$ et $u_{\tau, 0}(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes.

VI. - Comportement asymptotique de deux solutions linéairement indépendantes de (1), pour $x \in [\alpha, \beta]$.

20. - Lorsque aucun des nombres $k \pm \mu + \frac{1}{2}$ n'est entier, on peut obtenir le comportement de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) dans tout l'intervalle $[\alpha, \beta]$, pour $|\lambda| \geq \Lambda$, $\arg \lambda \in S_{\rho}(\lambda)$. Les deux solutions en question sont les fonctions $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ et $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ [resp. $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$, $u_{\tau\pm 1, \alpha}(x, \lambda)$] lorsque ν est un entier impair [resp. ν pair].

Nous traiterons encore de façon détaillée le cas où ν est impair.

Le comportement de $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ est donné par les relations (67), (68) pour $|z| > M$, $x > 0$ et celui de $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ par les relations (85), (86) pour $|z| > M$, $x < 0$. Le wronskien de ces deux fonctions est indépendant de x et peut être calculé en $x = 0$, à l'aide des relations (71), (72), (73), (74), (89), (90), (91) et (92). Il vient

$$(99) \quad \mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\tau, \alpha}] = \mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda),$$

si $\mu = \frac{1}{4}$, ν impair,

$$(100) \quad \mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\tau, \alpha}] = \mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\tau}] + O(\lambda^{-2\mu}),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}$, ν impair.

Les fonctions $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ et $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ sont donc linéairement indépendantes [d'après (37), (39)] et $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions indépendantes $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ et $u_{\rho\pm 1, 0}(x, \lambda)$; on a

$$(101) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = C_{11}u_{\rho, \beta}(x, \lambda) + C_{21}u_{\rho\pm 1, 0}(x, \lambda)$$

avec

$$(102) \quad C_{11} = \frac{\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\rho\pm 1, 0}]}{\mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\rho\pm 1, 0}]}, \quad C_{21} = \frac{\mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\tau, \alpha}]}{\mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\rho\pm 1, 0}]}.$$

Puisque

$$\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\rho \pm 1, 0}] = \mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho \pm 1}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda),$$

pour $\mu = \frac{1}{4}$,

$$\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\rho \pm 1, 0}] = \mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho \pm 1}] + O(\lambda^{-2\mu-1}),$$

pour $\mu \neq \frac{1}{4}$,

on déduit aisément des relations (99), (100), (82), (83) que

$$(103) \quad C_{11} = \frac{\mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho \pm 1}]}{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}]} + O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$(104) \quad C_{11} = \frac{\mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho \pm 1}]}{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}]} + O(\lambda^{-4\mu-1}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4},$$

$$(105) \quad C_{21} = \frac{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\tau}]}{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}]} + O(\lambda^{-2} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$(106) \quad C_{21} = \frac{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\tau}]}{\mathcal{W}[v_{\rho}, v_{\rho \pm 1}]} + O(\lambda^{-4\mu-1}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

En remplaçant dans (101), C_{11} , C_{21} , $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ et $u_{\rho \pm 1, 0}(x, \lambda)$ par leurs valeurs fournies respectivement par les relations (103) [ou (104)], (105) [ou (106)], (68) [ou (67)] et (78) [ou (79)] et en tenant compte de (37) et (39), on trouve

$$(107) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + v_{\rho}(x, \lambda)O(\lambda^{-2} \lg \lambda) + v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)O(\lambda^{-2} \lg \lambda)$$

si $\mu = \frac{1}{4}$,

$$(108) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + v_{\rho}(x, \lambda)O(\lambda^{-4\mu-1}) + v_{\rho \pm 1}(x, \lambda)O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4},$$

ou

$$(109) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{\frac{4}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu + \frac{4}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

si $\mu = \frac{1}{4}$, $x > 0$, $|z| > M$,

$$(110) \quad u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + e^{\frac{4}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu + \frac{4}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}$, $x > 0$, $|z| > M$, dans le secteur $S_{\rho}(\lambda)$.

Rappelons que la solution $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ linéairement indépendante de $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ est fournie par les relations (67) et (68).

21. — Lorsque x est négatif, les rôles de ρ et τ sont inversés. En $x = 0$, on obtient

$$\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}, u_{\rho, \beta}] = \mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho}] + O(\lambda^{-3/2} \lg \lambda) \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}, u_{\rho, \beta}] = \mathcal{W}[v_{\tau}, v_{\rho}] + O(\lambda^{-2\mu-1}) \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

De plus, $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions indépendantes $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$, $u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda)$; on a

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = C_{12} u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) + C_{22} u_{\tau \pm 1, 0}(x, \lambda)$$

avec

$$C_{12} = \frac{\mathcal{W}[u_{\rho, \beta}; u_{\tau \pm 1, 0}]}{\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\tau \pm 1, 0}]}, \quad C_{22} = \frac{\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\rho, \beta}]}{\mathcal{W}[u_{\tau, \alpha}; u_{\tau \pm 1, 0}]}.$$

En procédant comme au paragraphe 19, on obtient finalement

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{\frac{1}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

$$\text{si } \mu = \frac{1}{4}, \quad x < 0, \quad |z| > M,$$

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{\frac{1}{2}\sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{1}{2}} O(\lambda^{-4\mu}),$$

$$\text{si } \mu \neq \frac{1}{4}, \quad x < 0, \quad |z| > M \quad \text{dans le secteur } S_{\rho}(\lambda).$$

Dans ce cas, la solution $u_{\tau, \alpha}(x, \lambda)$ linéairement indépendante de $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ est fournie par les relations (85), (86).

Pour $|z| \leq M$, on a enfin dans $S_{\rho}(\lambda)$

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{4},$$

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4},$$

$$u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{pour } \mu = \frac{1}{4},$$

$$u_{\tau, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{pour } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

22. - Dans le cas où ν est pair, on obtient pour $x > 0$, $\arg \lambda \in S_\rho(\lambda)$,

si $\mu = \frac{1}{4}$, $|z| > M$,

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2} \sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}$, $|z| > M$,

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2} \sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}).$$

La solution $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ linéairement indépendante de $u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda)$ est fournie par les relations (67) et (68).

Pour $x < 0$, il vient

si $\mu = \frac{1}{4}$, $|z| > M$,

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2} \sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}$, $|z| > M$,

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + e^{\frac{i}{2} \sigma z} z^{-\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-4\mu-1}).$$

La solution $u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda)$ linéairement indépendante de $u_{\rho, \beta}(x, \lambda)$ est donnée par les relations

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\frac{i}{2} \sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-2} \lg \lambda),$$

si $\mu = \frac{1}{4}$, $|z| > M$,

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + e^{-\frac{i}{2} \sigma z} z^{\sigma k + \mu - \frac{i}{2}} O(\lambda^{-2}),$$

si $\mu \neq \frac{1}{4}$, $|z| > M$.

Pour $|z| \leq M$, on a donc dans $S_\rho(\lambda)$

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$u_{\rho, \beta}(x, \lambda) = v_{\rho}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4},$$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-2} \lg \lambda), \quad \text{si } \mu = \frac{1}{4},$$

$$u_{\tau \pm 1, \alpha}(x, \lambda) = v_{\tau \pm 1}(x, \lambda) + O(\lambda^{-4\mu-1}), \quad \text{si } \mu \neq \frac{1}{4}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BUCHHOLZ, *Die Konfluente hypergeometrische Funktion*, Springer Verlag 1953.
 - [2] A. ERDÉLYI, *Asymptotic expansions*, «Dover Publications», 1956.
 - [3] R. LANGER, a) *On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel Functions of large order*, «Transactions of the American Mathematical Society n° 33» (1931).
b) *The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order*, «Transactions of the American Mathematical Society n° 36» (1934).
 - [4] R. MC KELVEY, a) *The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two*, «Transactions of the American Mathematical Society n° 79» (1955).
b) *Solution about a singular point of a linear differential equation involving a large parameter*, «Transactions of the American Mathematical Society n° 92» (1959).
 - [5] L. J. SLATER, *Confluent hypergeometric Functions*, «Cambridge University Press».
-