Anwendung linearer Integralgleichungen auf Probleme der Statik.

Von L. Holzer und E. Melan (in Wien).

Die übliche Theorie statisch unbestimmter Systeme setzt die unbeschränkte Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes voraus. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei einem einachsigen System in allerdings noch immer idealisierter, aber bedeutend zutreffenderer Weise durch das in Abb. 1 dargestellte Diagram gegeben ist. Unter Zugrundelegung dieses funktionellen Zusammenhanges wurde von dem zweitgenannten der Verfasser eine Theorie statisch unbestimmter Fachwerke entwickelt. Für die Praxis ist aber die Untersuchung von Systemen, die aus biegungssteifen Stäben bestehen, viel wichtiger als jene von Fachwerken. In der Tat haben einige Länder wie z. B. Oesterreich und Deutschland in den einschlägigen Bestimmungen die Berechnung solcher Systeme im Hochbau unter Annahme plastisch-elastischen Verhaltens des Materiales vorzunehmen gestattet. Es mag aber nicht unerwähnt bleiben, dass es an einer exakten Begründung der Theorie für biegungssteife Systeme, die in einigen Punkten von jener der Fachwerke abweicht, bisher gefehlt hat.

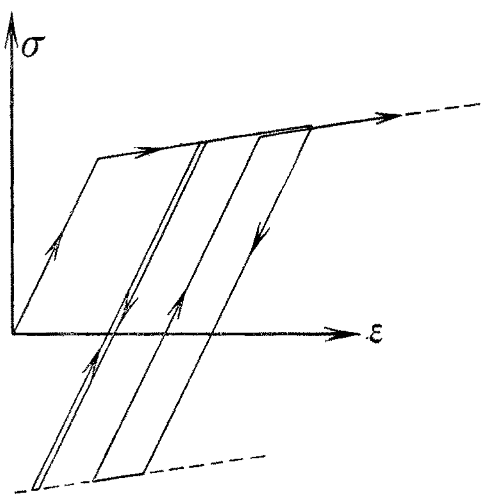

Abb. 1

Wir übertragen wie üblich den in Abb. 1 dargestellten Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung für den einachsigen Spannunszustand auch auf den Zusammenhang zwischen der Aenderung k des Winkels zweier benachbarter Querschnitte des gebogenen Stabes und dem Biegungsmoment u. Wir können also in Abb. 1 an Stelle von s und $\sigma \ldots k$ und u setzen, und erhalten demnach für einen Punkt x der Stabachse, in welchem $u(x)$ innerhalb des Intervalls

$$l_1(x) + c(x)z(x) < u(x) < l_2(x) + c(x)z(x)$$

mit $l_1(x) < l_2(x)$ liegt, die Beziehung

$$k(x) = \mu u(x) + z(x),$$

wobei l_1, l_2, μ und c Grössen sind, welche von der Formgebung des betreffenden Querschnittes und den Materialkonstanten, nicht aber von der Belastung abhängen. Die Aenderung des Winkels zweier benachbarter Querschnitte, im folgenden kurz als Biegung bezeichnet, besteht demnach aus zwei Teilen: einem elastischen Anteil, welcher dem biegenden Moment proportional ist, μu, und einem bleibenden Teil z. c und μ sind stets positive Grössen.

Betrachten wir nun sämtliche Grössen u, z als Funktion nicht nur von x, sondern auch von einem Parameter, etwa der Zeit t, schreiben also genauer $u(x, t)$, $z(x, t)$, so gilt für hinreichend kleine h

$$l_1(x) + c(x)z(x, t+h) < u(x, t+h) < l_2(x) + c(x)z(x, t+h),$$
$$k(x, t+h) = \mu u(x, t+h) + z(x, t+h)$$

mit der Bedingung $z(x, t+h) = z(x, t)$, d. h. $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Bemerkt sei, dass unter den partiellen Ableitungen nach t immer die vorwärts genommenen partiellen Differentialquotienten zu verstehen sind. Die bleibende Winkeländerung bleibt demnach in diesem Falle, unabhängig ob $\frac{\partial u}{\partial t} \gtrless 0$ ist, unverändert.

Erreicht aber u eine der beiden Grenzen des Intervalls, ist also entweder $l_1(x) + c(x)z(x, t) = u(x, t)$ oder $u(x, t) = l_2(x) + c(x)z(x, t)$, so gilt, wenn an der untern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ oder an der obern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ ist, wiederum $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Ist jedoch an der untern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ oder an der obern $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$, so wird $c(x)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Nun sei angenommen, dass die Biegungsmomente in einem statisch unbestimmten Systeme bei einer gegebenen äusseren Belastung durch $y(x, t)$ gegeben seien, wenn nach der üblichen Theorie die unbeschränkte Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes vorausgesetzt wird. Unter Annahme des oben beschriebenen Zusammenhanges zwischen Biegung und biegendem Moment mögen bei derselben äussern Belastung die Momente $u(x, t)$ auftreten. Liegen dann im Augenblicke bereits bleibende Biegungen $z(x, t)$ vor, so gilt

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + u(x, t) = y(x, t) \tag{1}$$

für jeden Punkt der Stabachse. $a(x, \xi)$ stellt sonach das Biegungsmoment an der Stelle x vor, wenn lediglich an der Stelle ξ die bleibende Biegung 1 aufgetreten ist. Wir bemerken, dass sich unschwer beweisen lässt, dass

1°) der Kern $a(x, \xi)$ symmetrisch ist, d. h. $a(x, \xi) = a(\xi, x)$ ist.

2°) der Kern positiv semidefinit ist, demnach für jede integrierbare Funktion $f(x)$

$$\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta a(x, \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi \geqq 0$$

gilt.

Wir setzen ferner noch voraus, dass $y(x, t)$ eine für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ und jedes t definierte Funktion ist, die vorläufig nur der Bedingung zu genügen braucht, dass sie für jedes x und t nach t einseitig differenzierbar ist. Dieselben Eigenschaften postulieren wir hinsichtlich der Differenzierbarkeit von $z(x, t)$ und $u(x, t)$. Unter $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}$ sind immer die vorwärts genommenen Differentialquotienten von y, z, u nach t zu verstehen. Von z postulieren wir noch, dass diese einseitige Differentiation nach t in x gleichmässig erfolgt.

Wir wollen sagen, dass $u(x, t)$ bei festgehaltenem x in Zeitintervallen, wo $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ist, zur Klasse A, in jenen mit $c(x)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ zur Klasse B gehört.

Es ist natürlich nicht möglich, die tatsächlich auftretenden Biegungsmomente $u(x, t)$ in einem bestimmten Augenblick zu bestimmen, wenn nur der Wert $y(x, t)$ im Augenblick t und nicht der ganze Verlauf der $y(x, t)$ bis zu dem betreffenden Augenblick bekannt ist. Nimmt man unbeschränkte Giltigkeit des Hook'schen Gesetzes an, so ist diese Vorgeschichte irrelevant. Entsprechend der Willkürlichkeit, mit der in der Praxis verschiedene mögliche Belastungen auf einander folgen, lässt sich aber im allgemeinen über die Funktion $y(x, t)$ nichts aussagen. Es erscheint daher nachfolgender Satz, dessen exakter Beweis das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet, von besonderer Bedeutung für die Dimensionierung statisch unbestimmter Systeme, deren Material die oben formulierten Eigenschaften besitzt. Wir sprechen diesen Satz wie folgt aus: *Bei einem System, dessen Material den in Abb. 1 dargestellten Zusammenhang zwischen Biegung und Biegungsmoment besitzt, werden sich nach einer hinreichend grossen Anzahl von Belastungsänderungen schliesslich solche bleibende Biegungen einstellen, die sich bei weiteren Belastungswechseln nicht mehr ändern werden, soferne nur die Funktion für jedes* x, t *stets zwischen den Grenzen*

$$m_1(x) \leqq y(x, t) \leqq m_2(x)$$

eingeschlossen ist und

$$m_1(x) - m_2(x) \leqq l_2(x) - l_1(x)$$

gilt. Es werden also nach einer hinreichend grossen Zahl von Wechseln der Belastung, demnach nach Ablauf einer hinreichenden Zeit nur mehr rein elastische Formänderungen auftreten. Die schliesslich eingetretenen bleibenden Biegungen liegen dabei unter einer endlichen Schranke.

Das vorerwähnte Problem der technischen Mechanik führt somit auf die lineare Integralgleichung erster Art (1) mit symmetrischem positiv semidefiniten Kern. Hiebei ist $u(x, t)$ an die Bedingung gebunden

$$l_1(x) + c(x)z(x, t) \leqq u(x, t) \leqq l_2(x) + c(x)z(x, t) \tag{2}$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $l_1(x)$, $l_2(x)$, $c(x)$, wo $l_1(x) < l_2(x)$ und $c(x) > 0$ im ganzen Grundintervall $[\alpha, \beta]$ gilt.

Wir erwähnten schon: z soll nach t einseitig differenzierbar sein und zwar gleichmässig in x, d. h. es soll

$$z(x, t+h) - z(x, t) = h\frac{\partial z}{\partial t} + h\rho(h, t, x)$$

$(h > 0)$ mit folgendem Gesetz für $\rho(h, t, x)$ gelten: Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann $|\rho(h, t, x)| < \varepsilon$ durch $h < \delta(t, \varepsilon)$ erreicht werden, wo δ von x nicht abhängt.

I.

Ersetzt man in (1) das Argument t in y, z, u durch $t+h$, subtrahiert man (1) und setzt man

$$y(x, t+h) - y(x, t) = \Delta y(x, t),$$

analog Δz, Δu, so bleibt:

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)\Delta z(\xi, t)d\xi + \Delta u(x, t) = \Delta y(x, t). \tag{3}$$

Postulieren wir ausser den bereits erwähnten Bedingungen noch die Stetigkeit von $z(x, t)$ nach beiden Veränderlichen zugleich, dann können wir behaupten: die Gleichung (3) hat nur eine Lösung.

Dies scheint sehr auffallend, da zwei unbekannte Funktionen $\Delta z(x, t)$ und $\Delta u(x, t)$ auftreten.

Wir zeigen, dass bei Annahme zweier Funktionensysteme

$$\Delta z = \Delta' z, \quad \Delta u = \Delta' u; \qquad \Delta z = \Delta'' z, \quad \Delta u = \Delta'' u, \tag{4}$$

sich $\Delta' z = \Delta'' z$ ergibt. Daraus folgt dann

$$\Delta' u = \Delta'' u.$$

Einsetzung der beiden Systeme (4) in (3) und Subtraktion gibt:

$$\int_\alpha^\beta a(x,\xi)(\Delta' z - \Delta'' z)d\xi + \Delta' u - \Delta'' u = 0. \tag{5}$$

Division von (5) durch h und Grenzübergang $h \to +0$ gibt, wenn analog wie früher:

$$\left.\frac{\Delta' z}{h}\right|_{h\to+0} = \left.\frac{z'(x, t+h) - z'(x,t)}{h}\right|_{h\to+0} = \frac{\partial z'}{\partial t}$$

ebenso

$$\left.\frac{\Delta'' z}{h}\right|_{h\to+0} = \frac{\partial z''}{\partial t}$$

gesetzt wird, ähnlich $\frac{\partial u'}{\partial t}$, $\frac{\partial u''}{\partial t}$ definiert werden:

$$\int_\alpha^\beta a(x,\xi)\left(\frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z''}{\partial t}\right)d\xi + \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u''}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Mit den Abkürzungen

$$\zeta = \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z''}{\partial t}, \quad \chi = \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u''}{\partial t}$$

schreibt sich (6) kürzer:

$$\int_\alpha^\beta a(x,\xi)\zeta(\xi,t)d\xi + \chi(x,t) = 0. \tag{6a}$$

Die einseitige Differentiation nach dem Parameter t unter dem Integralzeichen rechtfertigt sich nach der obigen Annahme über gleichmässige einseitige Differentiation.

Multiplikation von (6a) mit $\zeta(x,t)$ und Integration über $[\alpha\beta]$ gibt:

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta a(x,\xi)\zeta(x,t)\zeta(\xi,t)dx d\xi + \int_\alpha^\beta \zeta(x,t)\chi(x,t)dx = 0 \tag{7}$$

oder in sofort verständlicher Schreibung

$$I' + I'' = 0. \tag{7a}$$

1°) Nun gilt

$$I' \geqq 0. \tag{8}$$

Beweis: $a(x, \xi)$ ist positiv semidefinit.

2^0) $\zeta(x, t) \neq 0$ könnte nur in zwei Fällen eintreten:

α) wenn $\Delta' u(x, t)$ und $\Delta'' u(x, t)$ beide zur Klasse B gehörten. Dann wäre

$$\zeta(x, t)\chi(x, t) = c(x)\zeta^2(x, t) > 0$$

wegen $c(x) > 0$.

β) Wenn z. B. $\Delta' u$ zur Klasse A, aber $\Delta'' u$ zur Klasse B gehörte. Dann wäre

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = 0, \quad \text{sgn.} \frac{\partial u''}{\partial t} = \text{sgn.} \frac{\partial z''}{\partial t} = - \text{sgn.} \frac{\partial u'}{\partial t}, \quad \text{sgn.} \zeta\chi = - \text{sgn.} \frac{\partial z''}{\partial t} \frac{\partial u'}{\partial t} = + 1.$$

Es bleibt

$$\zeta(x, t)\ \chi(x, t) \geqq 0, \tag{9}$$

somit

$$I'' \geqq 0. \tag{9a}$$

Aus (9a), (8) und (7a) folgt sofort:

$$I' = I'' = 0.$$

Aus $I'' = 0$, wo der Integrand nach (9) nicht negativ ist, darf nicht ohne weiters geschlossen werden: $\zeta(x, t)\chi(x, t) = 0$, da diese Funktion im allgemeinen unstetig ist.

Erwägen wir die Sache z. B., wenn für $x = x_1$ die Funktion $u'(x, t)$ die obere Grenze erreicht und gleichzeitig u' von der Klasse B ist. Dann ist

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \gamma > 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} > 0.$$

Sei für ein $h > 0$

$$\Delta' z(x_1, t) = h\gamma + h\rho_1,$$

wo ρ_1 der vorhin gegebenen Bedingung für ρ genügt, also für hinreichend kleines h

$$\Delta' z(x_1, t) > h\frac{\gamma}{2} \tag{10a}$$

ist.

Weiter gilt für hinreichend kleine h und jedes x mit $\alpha \leqq x \leqq \beta$ wegen der gleichmässigen einseitigen Differenzierbarkeit von z nach t in x, da $\frac{\partial z''}{\partial t} \geqq 0$ auf Grund unserer Voraussetzungen ist:

$$\Delta' z(x, t) \leqq 2h\frac{\partial z'}{\partial t}. \tag{10b}$$

Wir nehmen h von vornherein so klein an, dass sowohl (10a) als auch (10b) erfüllt ist, halten aber dieses h fest.

Die Ungleichung (10a) mit x statt x_1 gilt dann wegen der Stetigkeit von z_1 in einem ganzen Intervall $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ mit $\alpha_1 < \beta_1$ und $\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1$.

In dem Intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$ gilt also bei dem nunmehr festgehaltenen $h > 0$:

$$2h \frac{\partial z'}{\partial t} > \frac{\gamma h}{2}$$

oder

$$\frac{\partial z'}{\partial t} > \frac{\gamma}{4} > 0.$$

In den anderen Fällen ist die Rechnung ganz ähnlich.

Wir können sagen: tritt $\frac{\partial z'}{\partial t} \neq 0$ für $x = x_1$ ein, so gilt dies bei festgehaltenem t für ein ganzes Intervall $[\alpha_1, \beta_1]$ von x mit x_1 als Element u. zw. so, dass $\frac{\partial z'}{\partial t}$ in $[\alpha_1, \beta_1]$ nach unten beschränkt ist.

Daraus folgt sofort: gibt es überhaupt Werte x mit $\zeta(x, t) \neq 0$, dann auch mindestens ein Intervall $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$ mit

$$|\zeta(x, t)| > \eta > 0.$$

Nun führen wir den Beweis zu Ende, indem wir zeigen: da $I'' = 0$ ist, so ist $\zeta(x, t) = 0$.

Wir führen die Grösse Γ, die untere Grenze von $c(x)$ in $[\alpha, \beta]$ ein. Es ist $\Gamma > 0$, da $c(x)$ im Gesamtintervall positiv und stetig ist. Im Teilintervalle $[\alpha' \beta']$ bleibt:

$$\zeta(x, t)\chi(x, t) = c(x)\zeta^2(x, t) \geqq \eta^2\Gamma > 0.$$

Sofort folgt:

$$I'' \geqq \int_{\alpha'}^{\beta'} \zeta(x, t)\chi(x, t)dx \geqq \eta^2\Gamma(\beta' - \alpha') > 0$$

im Widerspruch zu (10).

Es folgt

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial z''}{\partial t},$$

also wegen

$$\Delta' z(x, t) = \int_0^h \frac{\partial z'}{\partial t}(x, t + s)ds$$

und der analogen Formel für $\Delta'' z(x, t)$:

$$\Delta' z = \Delta'' z, \tag{11}$$

was zu beweisen war.

II.

Bleibt die Funktion $y(x, t)$ immer zwischen den von t unabhängigen Grenzen

$$m_1(x) \leqq y(x, t) \leqq m_2(x), \tag{12}$$

wobei die Bedingung

$$m_2(x) - m_1(x) = l_2(x) - l_1(x)$$

genügt, so gibt es eine Funktion $\bar{z}(x)$, so dass für

$$z(x, t_0) = \bar{z}(x)$$

sich $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ ergibt.

Darüber hinaus ergibt sich: $z(x, T) = \bar{z}(x)$ für $T > t_0$, d. h. für $t > t_0$ ändert sich z nicht mehr.

Wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} m_1(x) &= l_1(x) + c(x)z(x) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + v(x, t), \\ m_2(x) &= l_2(x) + c(x)z(x) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + v(x, t). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Setzt man in (12) für $y(x, t)$ den Wert aus (1), hingegen für $m_1(x)$ und $m_2(x)$ den Wert aus (14) ein, so bleibt:

$$l_1(x) + c(x)z(x, t) + v(x, t) \leqq u(x, t) \leqq l_2(x) + c(x)z(x, t) + v(x, t). \tag{15}$$

Vergleich von (15) mit (2) lehrt, dass $u(x, t)$ bei positivem $v(x, t)$ nur die obere Grenze des Bereiches (2) annehmen kann, bei negativem $v(x, t)$ nur die untere Grenze.

Also an der unteren Grenze ist sicher $v(x, t) \leqq 0$, da aber dort $\frac{\partial z}{\partial t} \leqq 0$ ist, so folgt $v(x, t)\frac{\partial z}{\partial t} \geqq 0$. Analog beweist sich dieselbe Ungleichung auch für die obere Grenze. Gilt in (2) kein Gleichheitszeichen, so ist $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, also gilt allgemein:

$$v(x, t)\frac{\partial z}{\partial t} \geqq 0. \tag{16}$$

Sei $v(x, t) \equiv 0$ für jedes x. Identitätszeichen sollen von jetzt ab Gleichheit für jedes x bei festgehaltenem t bedeuten.

Wir setzen dies in die erste der Gleichungen (14) ein. Statt $m_1(x) - l_1(x)$

schreiben wir $\varphi(x)$. Da der Parameter t dann nur mehr in $z(x, t)$ vorkommt, schreiben wir dafür $z(x)$.

Es bleibt die lineare Integralgleichung dritter Art:

$$c(x)z(x) + \int_{\alpha}^{\beta} a(x, \xi)z(\xi)d\xi = \varphi(x). \tag{17}$$

Im folgenden sei unter $\sqrt{c(x)}$, $\sqrt{c(x)c(\xi)}$ die positive Quadratwurzel verstanden. Wir dividieren (17) durch $\sqrt{c(x)}$. Hier wird die Voraussetzung $c(x) > 0$ angewendet. Mit

$$s(x) = z(x)\sqrt{c(x)}, \quad b(x, \xi) = \frac{a(x, \xi)}{\sqrt{c(x)c(\xi)}}, \quad \varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{c(x)}}$$

geht (17) in die lineare Integralgleichung zweiter Art:

$$s(x) = \varphi_1(x) - \int_{\alpha}^{\beta} b(x, \xi)s(\xi)d\xi \tag{18}$$

über.

Der Kern $b(x, \xi)$ ist:

1°) symmetrisch. Dies ist trivial;

2°) positiv semidefinit.

Beweis zu 2°). Mit $f(x) = f_1(x)\sqrt{c(x)}$ wird aus

$$I(f) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} b(x, \xi)f(x)f(\xi)dxd\xi,$$

wo $f(x)$ eine beliebige integrierbare Funktion bedeutet:

$$I(f) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} a(x, \xi)f_1(x)f_1(\xi)dxd\xi \geqq 0.$$

Als symmetrischer positiv semidefiniter Kern hat $b(x, \xi)$ nur positive Eigenwerte, daher ist -1 kein Eigenwert. Also ist nach dem Grundtheorem über Integralgleichungen die Gleichung (18) somit auch (17) eindeutig lösbar. $\bar{z}(x)$ sei die Lösung von (17).

Damit ist zunächst $\bar{z}(x)$ eingeführt.

Nun zeigen wir, dass die Funktion $z(x, t)$ bei Verlauf von $y(x, t)$ gemäss Gl. (12) jedenfalls $\bar{z}(x)$ nahezukommen strebt.

Wir ersetzen in (17) $z(x)$ durch seinen Wert $\bar{z}(x)$ und addieren die erste Gleichung (14). Mit der Abkürzung

$$w(x, t) = \bar{z}(x) - z(x, t)$$

bleibt:

(19)
$$v(x, t) = c(x)w(x, t) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)w(\xi, t)d\xi.$$

Aus $v(x, t) \equiv 0$ folgt $w(x, t) \equiv 0$, da $b(x, \xi)$ nicht den Eigenwert -1 hat. Also $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$ hat $w(x, t) \equiv 0$ zur Folge. Umgekehrt folgt aus $w(x, t) \equiv 0$, dass $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$ ist.

Mit

$$I = \int_\alpha^\beta v(x, t)w(x, t)dx,$$

d. h.

$$I = \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta a(x, \xi)w(\xi, t)dxd\xi + \int_\alpha^\beta c(x)w^2(x, t)dx$$

oder entsprechend

$$I = L_1 + L_2$$

folgt:

1°) Es ist $I \geqq 0$. Denn es gilt:
$L_1 \geqq 0$, da $a(x, \xi)$ positiv semidefinit ist und
$L_2 \geqq 0$ wegen $c(x) > 0$.

2°) $I = 0$ hat $L_1 = L_2 = 0$ zur Folge.

3°) Aus $L_2 = \int_\alpha^\beta c(x)w^2(x, t)dx = 0$ folgt, da $c(x) > 0$ und $w(x, t)$ stetig ist: $w(x, t) \equiv 0$, also $v(x, t) \equiv 0$, d. h. $z(x, t) = \bar{z}(x)$.

Aendert sich v um Δv, also w um

(20)
$$\Delta w = -\Delta z(x, t),$$

so ergibt sich eine Aenderung von I um ΔI, wobei

(21)
$$\Delta I = \int_\alpha^\beta v\Delta w dx + \int_\alpha^\beta w\Delta v dx + \int_\alpha^\beta \Delta v\Delta w dx$$

oder kurz

(22)
$$\Delta I = K_1 + K_2 + K_3$$

ist.

Nun ist aber:

(23)
$$\Delta v(x, t) = c(x)\Delta w(x, t) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)\Delta w(\xi, t)d\xi.$$

Einsetzen von v aus (19) in das Integral K_1, von Δv aus (23) in das Integral K_2 von (22) zeigt, dass $K_1 = K_2$ ist, und gibt:

(24) $$\Delta I = \int_\alpha^\beta (2v + \Delta v) \Delta w dx.$$

Division von (24) durch h und Grenzüberganz $h \to +0$, gibt, da wegen (20) $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial t}$ ist:

(25) $$\frac{\partial I}{\partial t} = -2 \int_\alpha^\beta v(x, t) \frac{\partial z}{\partial t} dx,$$

also wegen (16):

(26) $$\frac{\partial I}{\partial t} \leqq 0.$$

Man sieht, dass mit wachsender Zeit I nicht zunimmt. Im allgemeinen wird also $z(x, t)$ gegen $\bar{z}(x)$ zustreben.

Ist I schliesslich, etwa für $t = t_0$, Null geworden, so gilt $z(x, t_0) = \bar{z}(x)$. Für ein $t > t_0$ ist weiter $I = 0$, somit $w(x, t) \equiv 0$ oder $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$, es ist damit die letzte aufgestellte Behauptung bewiesen, dass dann $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ und $\Delta z = 0$ ist. Ist dieser Grenzfall erreicht, so treten weitere bleibende Formänderungen nicht mehr hinzu.