Sur la solution de l'équation du cinquième degré

par KARL BOHLIN (de Stockholm).

1. Les recherches exposées dans la communication suivante sont destinées à former un complément aux mémoires précédents sur le thème dont il s'agit, publiés, en particulier, dans les « Annali di Matematica » ⁽¹⁾ — complément essentiel en effet par rapport aux singularités remarquées de la solution jusqu'ici considérée ⁽²⁾. Au surplus, par la nouvelle réduction de notre problème, nous pourrions nous dispenser de la considération de la solution dite paracyclique, seulement provisoire et imparfaite au point de vue de la rigueur. Les particularités de la théorie des équations algébriques sous la forme libre étant exposées dans les Mémoires antérieurs, il suffira d'en récapituler ici quelques points principaux, tenant aux recherches dont nous aurons à nous occuper.

Les équations normales du troisième, du quatrième et du cinquième degré s'écrivent, comme on sait,

$$z^3 + 3sz = 2\tau, \quad z^4 + 4sz = 3\tau, \quad z^5 + 5sz = 4\tau$$

et pour la troisième d'elles la réduction particulière employée, dite de BRING-JERRARD, est bien connue et citée des ouvrages communs d'algèbre. La réduction à la forme libre, exposée, par exemple, dans le second des Mémoires cités des « Annali », conduit à l'équation du cinquième degré considérée dans ce qui suit :

$$(1) \quad \eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27.$$

⁽¹⁾ I. *Sur l'équation algébrique du cinquième degré*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, Tomo XI, 1932-33; II. *Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré*, « Annali di Matematica », Serie IV, Tomo XII, 1933-34.

⁽²⁾ *Zusätze und Erläuterungen zur Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades auf Grundlage des Racinals*, « Arkiv für Matematik, Astronomi o. Fysik. », K. Vetenskapsakademien, Stockholm, Band 25 A, N.º 6, 1935.

Une méthode directe de former la racine principale d'une équation de forme libre c'est de développer la racine dans les environs de $\frac{1}{u^5} = \infty$ selon les puissances de la quantité u . Nous parviendrons par des approximations successives à une série qui, pour l'équation du troisième degré, se trouve interrompue dès les deux premiers termes

$$\eta = \frac{1}{u} - 1,$$

et qui, pour celle du quatrième degré, est déjà infinie, mais réductible aux expressions algébriques finies

$$\eta = -1 + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}; \quad \eta = +1 + i\sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}.$$

Les résultats, obtenus selon cette méthode pour l'équation (1), sont donnés dans les Mémoires antérieurs. En premier lieu nous trouverons

$$\eta = \frac{1}{u} A - B - uC - u^2 D *.$$

THÉORÈME I. — Tous les termes contenant le facteur u^3 , qui suivraient dans cette expression, s'évanouissent.

Les termes ultérieurs se réunissent aux quatre précédents, en sorte que les coefficients A, B, C, D soient des séries procédant suivant u^5 . Pour chaque équation algébrique on aura en général à employer une *résolvante* de degré inférieur à l'équation originale. Pour l'équation (1) la résolvante valant pour les valeurs de u^5 est bien de la forme

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0,$$

et possède les mêmes points de racines égales que l'équation originale (1), savoir les points

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2}.$$

On peut alors développer les coefficients A, B, C, D suivant les puissances de α ; il sera même plus avantageux encore de choisir la quantité β , définie par

$$\beta = \alpha + \alpha^2,$$

pour élément du développement. C'est en réduisant ces séries en forme de produits infinis suivant les facteurs $(1 + \beta), (1 + \beta^2), \dots$ que la relation fondamentale —

THÉORÈME II. $AD = BC$

— se trouve établie. Introduisons les notations :

$$\delta = \frac{\alpha}{3}; \quad \gamma = \frac{\beta}{3},$$

et posons

$$s = AD = BC.$$

Ainsi qu'il a été démontré dans le Mémoire II, on a alors

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4.$$

En posant encore

$$p = \frac{AC}{D},$$

l'expression de la quantité p est bien

$$p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4,$$

et notre développement, dit *racinal*, sera ainsi :

$$(2) \quad \eta = \frac{1}{u} A - \frac{A^2}{p} - u \frac{p}{A^2} (1-s) - u^2 \frac{1}{A} (1-s).$$

Pour ce qui concerne la quantité A dans cette formule, tandis qu'il ne paraît pas possible d'en trouver un développement en série convenable, on obtient au contraire une expression symétrique de la cinquième puissance d'elle, à savoir

$$(3) \quad A^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6.$$

Nous désignons la racine cinquième de ce polynôme par A_δ , pour faire ressortir la connexion fonctionnelle de A avec la quantité δ .

Il existe encore une autre représentation de A , fondée sur l'expression également symétrique suivante :

$$(4) \quad A^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6.$$

Désignons la racine cinquième de ce polynôme en s par A_s , pour faire ressortir la connexion fonctionnelle entre A et la quantité s , définie ci-haut.

Cette quantité A_s a reçu moins d'attention, d'une part parce que la quantité A_δ paraît suffisante pour le but, et d'autre part parce que l'analogue de la quantité s , dans le cas de l'équation du *quatrième degré*, consiste en une constante, figurant en facteur $\frac{1}{2}$ du dernier terme de l'expression trinôme de la racine dans ce cas. Néanmoins l'introduction de la *quantité* A_s à côté

de A_δ paraît bien propre à contribuer à certaines simplifications, que nous allons succinctement considérer, si même leur signification ne soit pas d'importance plus profonde.

2. **Racines sur l'axe réel des arguments $\frac{1}{u^5}$.** — La formule (2) de la racine amène pour des valeurs assez grandes de $\frac{1}{u^5}$ — soit depuis $\frac{1}{u^5}=27$ à $\frac{1}{u^5}=\infty$ — l'accord presque parfait en sept décimales. Par exemple, s'obtient, pour

$$\frac{1}{u^5}=54, \quad \eta = +0.4925960, \quad \text{valeur vraie: } +0.4925958.$$

A mesure que le paramètre s'approche de l'origine $\frac{1}{u^5}=0$, l'accord se trouve réduit. La formule employée conduit pourtant au point $\frac{1}{u^5}=3$ à la valeur de la racine

$$\eta = -1.581439, \quad \text{valeur vraie: } -1.5518461 = -3^{2/5}.$$

Au lieu du proposé, fait dans le mémoire précédent, de faire usage d'une paire d'équations du quatrième degré, pour arriver à l'accord parfait dans ce point, nous allons proposer le procédé qui suit. Mais nous faisons remarquer d'avance que, selon cette méthode ainsi que par l'autre, il restera des écarts pour des arguments intermédiaires tels que $\frac{1}{u^5}=7$ et $\frac{1}{u^5}=8$; et, si même par quelque méthode il réussit d'anéantir la différence, ayant lieu pour $\frac{1}{u^5}=7$, la différence au point voisin $\frac{1}{u^5}=8$ n'est pas remuée. Voici cependant en quoi consiste le procédé nouveau. Soient

$$\eta_\delta, \quad \eta_s$$

deux valeurs de la racine obtenus en employant la formule (2) et respectivement $A = A_\delta$ et $A = A_s$.

Posons

$$(5) \quad \eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s},$$

et essayons de déterminer la quantité p_s de manière que l'accord

$$\eta = \eta_0$$

aura lieu pour $\frac{1}{u^5}=3$ et pour $\frac{1}{u^5}=27$.

Nous obtenons au moyen de notre formule (2), pour $\frac{1}{u^5} = 3$

$$\eta_8 = 1.5814388, \quad \eta_s = 1.4522155, \quad \text{valeur vraie: } \eta = 1.5518462,$$

d'où se déduit tout de suite

$$p_s = +0.29702.$$

En écrivant

$$p_s = p_0 \left[1 - \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} - \frac{1}{(100)^3} + \dots \right],$$

avec

$$p_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + (u^5)^2} = \frac{3}{10},$$

nous aurons

$$p_s = 0.29702970297\dots,$$

ce qui d'après (5) nous donne $\eta = 1.551846$, tout en accord avec la valeur vraie de η ci-haut.

Pour $\frac{1}{u^5} = 27$ s'obtient

$$\begin{array}{rcl} \log p_s = 9.5222824 & \log \eta_s = 2.09671 & \\ \log p_s = 9.52228 & & \\ p_s \eta_s = +41.7 & & \\ \eta_8 = -42.0 \text{ septième décimale} & & \\ \hline \eta_0 = -0.000000.3. & & \end{array}$$

La formule générale de p_s employée est

$$(6) \quad p_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + (u^5)^2} \cdot \frac{1 + 2(u^5)^2}{[1 + (u^5)^2]^2} \cdot \frac{1}{1 - \left[\frac{(u^5)^2}{1 + (u^5)^2} \right]^4}.$$

Nous avons eu soin de calculer d'après cette méthode les valeurs de η_0 suivantes, intermédiaires à $\frac{1}{u^5} = 3$ et $\frac{1}{u^5} = 27$; $\frac{1}{u^5} = +5, +7, +8, +10.125, +14$ et pour $\frac{1}{u^5} = -9$ — points, ou les valeurs vraies des racines sont données dans le Mémoire I. Sans entrer en particularités dans les calculs, il suffira de constater ici que l'accord s'est trouvée plus grand dans tous les cas, en employant le procédé nouveau relatif à la formule (5), qu'en employant

respectivement η_{δ} ou η_s seules au calcul d'après la formule (2). Voici les valeurs calculées de η_0 et, à côté d'elles, les valeurs vraies η des racines.

TABLEAU I.

	η_0	η
$\frac{1}{u^5} = 3$	— 1.5518462	— 1.5518462
5	— 1.3383009	— 1.3427982
7	— 1.1277686	— 1.1299153
(7) 8	— 1.0247066	— 1.0259724
10.125	— 0.8223538	— 0.8226765
14	— 0.5319309	— 0.5319505
27	0.0000000	0.0000000
— 9	— 2.4082272	— 2.4082245.

Les écarts se trouvent notés dans la troisième colonne du Tableau II, (7-a).

Ainsi qu'il va ressortir du n.^o 5 ci-après, il y aura lieu de considérer encore les éléments suivants

$$\eta_{\delta s} \quad \text{et} \quad \eta_{s\delta},$$

formés en prenant dans l'expression (2) deux termes en A_{δ} et les deux autres de A_s ou inversement. Nous pouvons alors faire l'hypothèse

$$(8) \quad \eta - \eta_0 = \frac{\eta_{\delta s} - \eta_0 + f(\eta_{s\delta} - \eta_0)}{1 + f}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(8-a) \quad \eta = \frac{\eta_{\delta s} + f\eta_{s\delta}}{1 + f}.$$

En déterminant la quantité f d'après la formule linéaire

$$f = a + \frac{b}{u^5},$$

où il est facile de déduire, d'après les données pour $\frac{1}{u^5} = 3$ et $\frac{1}{u^5} = 27$, les coefficients

$$a = 1 + \frac{4 \cdot 3^3}{10^3} = 1.1081; \quad b = 3^2 \cdot \frac{4^2 + 3^3}{10^4} = 0.0387,$$

on aura en effet des écarts encore amoindris, se trouvant dans la quatrième colonne du Tableau suivant.

TABLEAU II.

	$\eta - \eta_0$ formule (8)	$\eta - \eta_0$ formule (5)	écarts (8)-(5)
$\frac{1}{u^5} = 3$	0.000000	0.000000	0.000000
5	- 0.004606	- 0.004497	+ 0.000115
7	- 0.001278	- 0.002147	- 0.000869
(7-a) 8	- 0.000583	- 0.001266	- 0.000683
10.125	- 0.000116	- 0.000323	- 0.000207
14	- 0.000011	- 0.000020	- 0.000009
27	0.000000	0.000000	0.000000
- 9	+ 0.000216	+ 0.000002	- 0.000214.

Ainsi les écarts se trouvent d'après cela très réduits, outre pour $\frac{1}{u^5} = -9$. Il paraît que la formule (5) soit en quelque sorte à préférer.

Pour atteindre un accord parfait, il faudra pourtant, comme doit ressortir de ces recherches, faire usage de quelque autre procédé.

3. Approximations sur l'axe réel des arguments $\frac{1}{u^5}$. — Afin d'arriver au but, il faudra encore avoir recours à notre équation originelle

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27.$$

Soit (η_0) une valeur approchée de la racine en quelque point, par exemple obtenue par la méthode décrite dans le n.º précédent, et posons

$$(9) \quad \eta = z \cdot (\eta_0).$$

Alors nous pouvons nous assurer que la valeur de z soit à peu près égale à l'unité. Nous aurons l'équation de la forme normale

$$(10) \quad z^5 + 5sz = 4\tau,$$

avec

$$5s = \frac{5}{(\eta_0)^4} \cdot \frac{1}{u^3}; \quad 4\tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5},$$

et il s'agit de réduire cette équation à la forme libre.

Ainsi qu'il fut exposé dans les Mémoires antérieurs, nous avons à ce but la *résolvante*

$$(11) \quad w^4 + 4\tau w = 3s^{\frac{1}{2}}.$$

et les *substitutions*

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/5}}{s^{1/5}}; \quad \zeta_1 = \frac{z \cdot \left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}{s^{1/5}}$$

qui amènent l'équation nouvelle de forme libre

$$\zeta_1^5 + 5u_1\zeta_1 = 1 - 27u_1^5$$

ou bien, en posant

$$\zeta_1 = \eta_1 u_1,$$

l'équation

$$\eta_1^5 + \frac{5\eta_1}{u_1^3} = \frac{1}{u_1^5} - 27,$$

c.-à-d. l'équation primaire, pourtant à d'autres valeurs de $\frac{1}{u^3}$ et $\frac{1}{u^5}$. On peut déterminer, d'après la formule (2) du n.º 1 la racine nouvelle η_1 . Cela étant, nous aurons

$$z = \eta_1 u_1 \cdot \frac{s^{1/5}}{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}$$

après quoi s'obtient la valeur de la racine de l'équation originelle, en seconde approximation, — soit η — selon (9), c.-à-d.

$$\eta = z \cdot (\eta_0).$$

Quelques exemples vont prouver l'effet de ce procédé.

EXEMPLE 1. $\frac{1}{u^5} = 7$. — Selon le Tableau (7-a) ci-haut nous avons la différence $\eta - \eta_0 = -0.001278$, de quoi s'ensuit, en considérant la valeur primaire $\eta_0 = -1.1277686$ du Tableau (7), la valeur

$$(\eta_0) = -1.129047$$

pour la valeur approchée de la racine, devant être employée. Il s'ensuit

$$\log s = 0.2362116; \quad \log \tau = 0.4354110; \quad \log w = 9.912469.$$

Il doit être utile de donner un peu de particularités du calcul dans cet exemple. Ainsi qu'il doit être connu, l'équation du quatrième degré (11) admet elle-même la *résolvante* du troisième degré

$$w_1^3 + 3\tau w_1 = 2s_1^2,$$

dont la solution est donnée d'après les formules connues pour les racines

d'une équation du troisième degré. C'est ainsi que nous obtenons

$$\frac{1}{u_1^5} = 567.0005 \equiv 7.81$$

et

$$\log z = 0.0003337.$$

Nous avons obtenu déjà

$$\log (\eta_0) = 0.0527118_n,$$

de sorte qu'on obtient encore

$$\log \eta = 0.0530455_n$$

c.-à-d.

$$\eta = z \cdot (\eta_0) = -1.129914, \quad \text{valeur vraie : } -1.129915.$$

EXEMPLE 2. $\frac{1}{u^5} = 8$. — Dans ce cas la solution primaire (Tableau I) a donné $\eta_0 = -1.0247066$, d'où, en considérant les écarts du Tableau (7-a)

$$(\eta_c) = -1.0252898,$$

quantité devant être employée comme point de départ. Tout comme dans l'exemple précédent, on trouvera successivement

$$\log s = 0.4984672, \quad \log \tau = 0.6284601, \quad \log w = 0.6485849$$

et puis

$$\frac{1}{u_1^5} = 350.6905, \quad \log z = 0.0002894.$$

Nous avons

$$\log (\eta_0) = 0.0108467_n$$

et l'on déduit par suite

$$\eta = (\eta_0) \cdot z = -1.025973, \quad \text{valeur vraie : } -1.025972.$$

Nous voyons, par ces exemples, comment par le procédé employé les arguments primaires $\left(\frac{1}{u^5} = 7; \frac{1}{u^5} = 8\right)$ viennent être transposés à des points plus lointains $\frac{1}{u_1^5} = 567$ ou $\frac{1}{u_1^5} = 350.6905$, et que désormais ils appartiennent au *domaine racinal* ou extérieur, s'étendant à l'infini, tandis qu'on peut dire que les points primaires $\frac{1}{u^5} = 7$ et $\frac{1}{u^5} = 8$ mêmes appartiennent à un domaine *interne*, se trouvant aux environs plus ou moins étendus autour de l'origine, domaine où, comme nous l'avons vu, l'application de la *formule racinale* (2) est en défaut. Les exemples font voir encore que le procédé employé conduit

bien aux valeurs vraies des racines cherchées. On pourrait être d'avis que le procédé pourrait être poursuivi par des approximations successives. Mais nous allons voir qu'il n'est pas ainsi, et qu'il n'existe pas d'autres approximations successives.

Ajoutons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE 3. $\frac{1}{u^5} = 54$. — Dans ce troisième cas la solution primaire était

$$\eta = + 0.4925960,$$

tout en accord avec la valeur vraie, $+ 0.4925958$. Si pourtant nous nous mettons à l'application du procédé de la solution secondaire, dans ce cas

$$(\eta_0) = + 0.4925960$$

nous sommes conduits, tout comme dans les exemples précédents, aux résultats suivants

$$\log s = 0.2694727, \quad \log \tau = 2.3668493, \quad \log w = 0.9896368$$

et puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1^5} &= 53.99993 & \log z &= 0.0000002 \\ \log (\eta_0) &= 9.6524909 \\ \log \eta &= 9.6924911 \\ \eta &= + 0.492596. \end{aligned}$$

Ainsi la seconde solution amène l'argument de départ $\left(\frac{1}{u^5} = 54\right)$ et la valeur primaire même de la racine η .

4. Sur les singularités de la solution. Les points isolines. — Tandis que il faut supposer que les points sur l'axe réel ou dans ses environs, auxquels tout d'abord nous avons adjugé une solution « paracyclique », viendront se transposer à l'aide de la méthode nommée au domaine racinal, il y aura de l'intérêt de considérer à part les points *isolines* proprement dits. Ce sont en particulier les points, où la solution (2) prend des valeurs infinies. C'est ce qui a lieu pour $A_\delta = 0$ et pour $p = 0$. Considérons les δ -isolines. Ce sont les racines de l'équation ⁽¹⁾

$$A_\delta = 0,$$

⁽¹⁾ *Zusätze und Erläuterungen zur Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades auf Grundlage des Racinals*, « Arkiv für Matematik, Astronomi o. Fysik », K. Vetenskapsakademien, Stockholm, Band 25 A, N.º 6, 1935.

savoir

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -1.6911970, & \delta_3, \delta_4 &= -0.1498669 \pm i 0.2554175, \\ \delta_2 &= -0.5912970, & \delta_5, \delta_6 &= -1.7088867 \mp i 2.9124605,\end{aligned}$$

auxquelles correspondent

$$\begin{aligned}\text{pour } \delta_1, \delta_2 & \quad \frac{1}{u^5} = +0.027 \quad \text{et} \quad +0.713, \\ \text{» } \delta_5, \delta_6 & \quad \text{des valeurs encore plus petites,} \\ \text{» } \delta_3, \delta_4 & \quad \frac{1}{u^5} = +15.23295 \pm i 10.49492.\end{aligned}$$

Les quatre premiers de ces points appartiennent au domaine des solutions « paracycliques ». Mais quant aux deux derniers il y aura de difficulté d'appliquer une solution de cette sorte.

Si, comme nous avons essayé, on introduit encore l'expression

$$A_s = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6,$$

il faut aussi considérer les *s-isolines*, tenant à l'équation

$$A_s = 0$$

du sixième degré, qui toutefois, comme au cas antérieur, se réduit au troisième degré. En effet, en posant

$$s + \frac{1}{s} = x \quad \text{et} \quad x = y - 2,$$

elle se réduit à

$$y^3 + y + 30 = 0,$$

avec la racine réelle $y = -3$. Il n'y a pas lieu d'exposer ici les valeurs de $\frac{1}{u^5}$ correspondantes qu'on en déduit. De même pour les *p-isolines* on aura à résoudre l'équation

$$p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4 = 0,$$

ce qui conduit, par la substitution $\delta = y - \frac{1}{4}$, à l'équation

$$y^4 - \frac{26}{16}y^2 - \frac{39}{256} = 0.$$

5. Sur une représentation de la racine dans les points isolines. — Il s'agit des points

$$\frac{1}{u^5} = 15.2329 + i 10.4949$$

du n.º précédent, où l'expression principale (2) devient infinie.

Pour l'éviter on pourrait introduire dans cette formule la quantité A_s au lieu de A_{δ} , ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} A_s &= -2.4366 - i 0.0584 \\ -\frac{A_s^2}{p} &= -1.7306 + i 3.8982 \\ -u \frac{p}{A_s^2} (1-s) &= -0.1123 - i 0.1664 \\ -u^2 \frac{1}{A_s} (1-s) &= +0.3443 - i 0.0698.\end{aligned}$$

Puisque la valeur vraie de la racine, dans le point considéré, est

$$\eta = -0.25161 + i 0.48639,$$

la représentation n'étant pas atteinte par l'expression complète en A_s , on peut introduire la représentation $\eta_{\delta s}$, qui, à cause de $A_{\delta} = 0$, se réduit aux deux derniers termes

$$\eta_{\delta s} = -u \frac{p}{A_s^2} (1-s) - u^2 \frac{1}{A_s} (1-s),$$

ce qui donne

$$\eta_{\delta s} = +0.2330 - i 0.2362.$$

Soit $\eta_0 = \eta_{\delta s}$. L'expression diffère pourtant encore de

$$\eta = -0.2516 + i 0.4864,$$

mais il est facile de trouver l'expression

$$(12) \quad \eta = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + i k_0},$$

qui, pour $k_0 = \frac{3}{10}$, fait représenter la racine. On pourra même donner à la quantité k_0 une forme, qui pour l'axe réel se réduit à *zéro* et aux points isolines retient la valeur de $3/10$ à peu près. Si l'on pose

$$\frac{1}{u^5} = \alpha + i\beta = \lambda e^{i\varphi},$$

cela est atteint par la formule

$$k_0 = \sin^2 \varphi.$$

Pour les isolines serait à peu près

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3},$$

et $k_0 = 4/13$. Au surplus nous aurions, pour $\varphi = 90^\circ$, $k_0 = 1$.

Pour les points des racines égales

$$\frac{1}{u^5} = 7 + i\sqrt{32},$$

on aurait de cette manière $k_0 = 0.39505$ et la formule (12) donnerait

$$\eta = 1.96338 - i 0.1382,$$

tandis que, en réalité,

$$\eta = 1.7796 - i 1.4492.$$

Évidemment ainsi la formule (12) doit être toute particulière pour les points isolines.

6. Les points de racines égales. — Nous avons entrepris d'éprouver encore la formule (5)

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s},$$

pour les points

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2},$$

des racines égales.

Quoique, ainsi qu'il y aurait lieu de prévoir, l'accord parfait avec la réalité n'est pas atteint par cela, le résultat confirme pourtant l'utilité de la formule (5) à un certain degré, aussi pour des valeurs complexes, comme celles relatives aux racines égales.

La *résolvante* a dans ce cas la forme

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -3u^5 = -\frac{3}{7 + 4i\sqrt{2}},$$

et fournit la valeur

$$\alpha = \frac{-1 + 2i\sqrt{2}}{2},$$

devant être employée. On déduit de la manière usuelle successivement les quantités β , γ , δ ainsi que p et δ . Ayant obtenu à la suite A_δ et A_s , on a formé les valeurs

$$\eta_\delta = +1.98826 + i 1.47790, \quad \eta_s = +1.26052 + i 2.18996.$$

De plus, au moyen de la formule (6), s'obtient

$$p_s = [9.51813] + i [7.60732].$$

Évidemment on aurait pu se contenter avec la valeur $p_s = 1/3$.

Notre formule (5) donne ainsi

$$\eta_0 = \frac{\eta_s + p_s \eta_s}{1 + p_s} = 1.8061 - i 1.6528,$$

à quoi on peut comparer la valeur vraie

$$\eta = 1.7796 - i 1.4492.$$

Le calcul donne ainsi la partie réelle de l'approximation suffisante, mais il vaudra mieux d'apporter la partie imaginaire de l'expression simple de

$$\eta_s = 1.98826 - i 1.47790,$$

en mettant pour point de départ du calcul suivant

$$(\eta_0) = 1.8061 - i 1.4779.$$

7. Les points de racines égales (*suite*). — Il va se trouver que le point de départ de la seconde approximation soit arbitraire. Néanmoins nous avons employé la valeur indiquée à la fin du n.^o précédent. Le résultat du calcul soit donné tout d'abord. On a trouvé

$$\eta = 1.7794 - i 1.4493,$$

la valeur vraie étant

$$\eta = 1.7796 - i 1.4492.$$

Ainsi cet exemple vérifie de nouveau le procédé employé. Il peut être utile d'en adjoindre ici un exposé succinct. Le calcul fut conduit de la même manière que dans le n.^o 3, savoir en mettant dans l'équation originelle

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^2} - 27,$$

la substitution

$$\eta = (\eta_0) \cdot z,$$

par où l'équation

$$z^5 + 5s z = 4\tau,$$

est obtenue, avec

$$5s = \frac{5}{(\eta_0)^4 u^3}; \quad 4\tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5}.$$

Au cours du calcul il s'est trouvé que

$$\tau^4 + s^5 = 0,$$

relation simplifiant la question, qui désormais peut être traitée, sans des

calculs numériques, comme il suit. À traduire à la forme libre sert la *résolvante*

$$w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$$

et les substitutions

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/3}}{s^{1/3}}; \quad \zeta_0 = z \cdot \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/3}}{s^{1/3}},$$

par où s'obtient l'équation

$$\zeta_0^5 + 5u_0\zeta_0 = 1 - 27u_0^5.$$

Pour la solution de la résolvante du quatrième degré il sera avantageux de mettre

$$w = z_1; \quad \tau = s_1; \quad s^{3/2} = \tau_1.$$

L'équation prend avec cela la forme

$$z_1^4 + 4s_1z_1 = 3\tau_1.$$

Elle possède de nouveau la résolvante

$$w_1^3 + 3\tau_1w_1 = 2s_1^2,$$

et se trouve, par les substitutions

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{3/2}}{s_1^{1/2}}; \quad \zeta_1 = z_1 \cdot \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{1/2}}{s_1^{1/2}},$$

réduite à la forme libre

$$\zeta_1^4 + 4u_1\zeta_1 = 1 - 4u_1^4.$$

Soit

$$\zeta_1 = u_1\eta_1,$$

pour transformer aux deux équations séparées :

$$\eta_1^2 + 2\eta_1 = \frac{1}{u_1^2} - 2, \quad \eta_1^2 - 2\eta_1 = -\frac{1}{u_1^2} - 2,$$

de manière que, par exemple,

$$\zeta_1 = \eta_1 u_1 = -u_1 + \sqrt{1 - u_1^2},$$

soit l'une des solutions.

Pour la résolvante du troisième degré nous avons la solution bien connue

$$w_1 = [s_1^2 + \sqrt{s_1^4 + \tau_1^3}]^{1/3} + [s_1^2 - \sqrt{s_1^4 + \tau_1^3}]^{1/3},$$

ou bien, d'après les désignations introduites,

$$w_1 = [\tau^2 + \sqrt{\tau^4 + s^3}]^{1/3} + [\tau^2 - \sqrt{\tau^4 + s^3}]^{1/3}.$$

On trouve ainsi, par suite de la condition

$$\tau^4 + s^5 = 0,$$

les valeurs

$$w_1 = 2(\tau^2)^{1/3}; \quad u_1 = \frac{\tau^{1/2}}{\tau^{1/2}} = 1; \quad \zeta_1 = -1,$$

puis encore

$$z_1 = -\tau^{1/3}; \quad w = z_1 = -\tau^{1/3},$$

et enfin

$$\frac{1}{u_0^5} = -81; \quad z = -\eta_0 \cdot \frac{\tau^{1/5}}{3^{3/5}}.$$

À la détermination de η_0 servirait l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

mais, la valeur de cette racine est connue ⁽¹⁾ et égale à

$$\eta_0 = +3^{3/5},$$

de sorte qu'on obtient

$$z = -\tau^{1/3}$$

et, en considérant la relation

$$4\tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5},$$

on trouve

$$\tau^{1/5} = -\frac{(-5 + i\sqrt{2})^{1/5}}{(\eta_0)}.$$

On a ainsi

$$\eta = (5 - i\sqrt{2})^{1/5}$$

ce qui, en effet, est la valeur de chacune des racines égales. La valeur de la racine principale s'en déduit en multipliant par

$$\lambda = -1.65063,$$

racine de l'équation

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0,$$

ainsi qu'il est facile de se convaincre. Notre résultat devient par cela

$$\eta = 1.7794 - i 1.4493,$$

ainsi qu'il fut noté à l'introduction du n.º présent.

⁽¹⁾ « Annali di Matematica », Tomo XI, pag. 270.

8. **L'invariante κ .** — Nous pourrions tout d'abord introduire une quantité κ , définie par

$$(13) \quad \kappa = \frac{s^5}{\tau^4} = \frac{1}{(u^5)^3} \cdot \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4},$$

et indépendante du choix de la valeur de (η_0) . Cette quantité admet des simplifications en cas des racines égales :

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2},$$

et précisément dans ces points on a

$$\kappa = -1.$$

La quantité κ se trouve, en général, propre aux développements dont il s'agit.

On peut se demander quels points $\frac{1}{u^5}$ viennent correspondre à une valeur κ d'avance donnée. Soit

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$$

l'équation donnée et

$$z^5 + 5sz = 4\tau$$

la transformée, provenant en mettant $\eta = (\eta_0)z$. Puisque la quantité (η_0) s'en va de l'expression de κ , nous sommes autorisés de prendre $(\eta_0) = 1$. En mettant $\frac{1}{u^5} = \varepsilon$ la quantité κ s'écrit

$$\kappa = \frac{256 \varepsilon^3}{(\varepsilon - 27)^4}.$$

On obtient ainsi une équation du quatrième degré en ε , à savoir

$$\varepsilon^4 - \left(108 + \frac{256}{\kappa}\right) \varepsilon^3 + 6\varepsilon^2(27)^2 - 4\varepsilon(27)^3 + (27)^4 = 0.$$

Par l'application de la substitution

$$(14) \quad \frac{27}{\varepsilon} = x + 1 = 27u^5$$

l'équation se réduit à la forme normale

$$(15) \quad x^4 + 4s_0x = 3\tau_0,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$s_0 = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{\kappa}; \quad \tau_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \frac{1}{\kappa}.$$

En effectuant la solution nous aurons à considérer la résolvante

$$w_0^3 + 3\tau_0 w_0 = 2s_0^2$$

et à mettre, d'après le procédé de solution de l'équation du quatrième degré,

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w_0}{2}\right)^{3/4}}{s_0^{1/2}}; \quad w_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{x^{2/3}} R,$$

où nous aurons bien

$$R = [1 + \sqrt{1+x}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1+x}]^{1/3}.$$

Sans entrer dans les particularités des déductions, les résultats suivants sont à noter. On aura

$$u_0 = -i \left(\frac{R}{2}\right)^{3/4}; \quad x = i \frac{4}{3} \frac{1}{x^{1/3}} \frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^{3/4}} \cdot \zeta_0,$$

où ζ_0 soit l'une des racines des équations séparées

$$\zeta_0^2 + 2u_0\zeta_0 = 1 - 2u_0^2; \quad \zeta_0^2 - 2u_0\zeta_0 = -1 - 2u_0^2$$

c.-à-d.

$$\zeta_0 = -u_0 + i\sqrt{1-u_0^2}; \quad \zeta_0 = +u_0 + i\sqrt{1+u_0^2}.$$

Dans notre cas ce sont les racines

$$\zeta_0 = u_0 \pm i\sqrt{1+u_0^2}$$

qu'il faut employer. L'une de ces racines reconduit à la valeur primaire de $\frac{1}{u^5}$, l'autre cependant à un point nouveau $\frac{1}{u^5}$. Au contraire, les racines

$$\zeta_0 = -u_0 \pm \sqrt{1-u_0^2}$$

vont conduire à des résultats étrangers à la questions. Nous n'insisterons pas de plus sur ces circonstances, parceque l'équation (15) ne fut employée que pour le contrôle.

9. Sur la solution de l'équation proposée: $\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$. — L'équation importante (15) du n.º précédent, tout en prouvant l'existence de points transposés de $\frac{1}{u^5}$, ne conduit pas immédiatement à une valeur η de la racine cherchée. C'est ce qui est atteint seulement par le procédé suivant, d'ailleurs plus simple que l'emploi de la formule (15). Remarquons d'avance qu'il n'y

a qu'une seule approximation, en faisant usage des points transposés de $\frac{1}{u^5}$.

Car une approximation ultérieure reconduirait au point primaire. En second lieu, comme la valeur approchée (η_0), considérée dans ce qui précède, s'en va des formules définitives, on pourra déjà d'avance supposer (η_0) = 1 et écrire

$$\eta = z,$$

par où notre équation secondaire

$$z^5 + 5sz = 4\tau$$

soit assujettie aux conditions

$$s = \frac{1}{u^3}; \quad \tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{4}; \quad z = \frac{1}{(u^5)^3} \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4} = \frac{s^5}{\tau^4}.$$

Nous allons au surplus introduire quelques désignations améliorées définitives.

Soit

$$w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$$

la résolvante de notre équation en z et mettons, afin de réduire à la forme libre,

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/3}}{s^{1/3}}; \quad z = \zeta_0 \frac{s^{1/3}}{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/3}},$$

par où s'obtient

$$\zeta_0^5 + 5u_0\zeta_0 = 1 - 27u_0^5$$

où bien l'équation, obtenue par la substitution

$$\eta_0 = \frac{\zeta_0}{u_0},$$

suivante

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

tout analogue, du reste, à l'équation originelle, mais au paramètre transposé $\frac{1}{u_0}$.

SOLUTION DE LA RÉSOVANTE: $w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$. — Il sera commode de mettre

$$w = z_1; \quad \tau = s_1; \quad s^{5/3} = \tau_1$$

de manière que

$$z_1^4 + 4s_1z_1 = 3\tau_1$$

à quoi appartient la *résolvante* du troisième degré :

$$w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2.$$

Afin de réduire l'équation en z_1 du *quatrième degré* à la forme libre, nous aurons à employer les substitutions

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{3/4}}{s_1^{1/2}}; \quad z_1 = \frac{s_1^{1/2}}{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{1/4}} \cdot \zeta_1,$$

d'où s'obtient

$$\zeta_1^4 + 4u_1 \zeta_1 = 1 - 4u_1^4,$$

équation qui, au moyen de la substitution

$$\eta_1 = \frac{\zeta_1}{u_1},$$

se partage en deux équations du *second degré*, qui à leur tour possèdent les racines

$$\eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1}; \quad \eta_1 = +1 + i\sqrt{\frac{1}{u_1^2} + 1}.$$

C'est, dans notre cas, la solution

$$\eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1}$$

qu'il faut employer. Le signe *minus* de la racine carrée reconduirait au point du départ. Les racines complexes conduisent à des points étrangers.

SOLUTION DE LA RÉSOVANTE: $w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2$. — En ayant recours aux désignations de τ_1 , et s_1 , introduites ci-haut, nous trouverons

$$w_1 = \tau^{2/3} R$$

où l'on aura enfin

$$R = [1 + \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3}.$$

RÉSUMÉ DES FORMULES POUR L'ÉQUATION: $\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$. — Selon

ce que nous avons mentionné, le procédé va s'ordonner comme il suit.

Point de départ:

$$\kappa = \frac{1}{(u^5)^3} \cdot \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4}; \quad \tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{4}.$$

On trouvera successivement :

$$R = [1 + \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3},$$

$$\frac{1}{u_1^2} = \left(\frac{R}{2}\right)^{-3/2}, \quad \eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1},$$

$$(A) \quad \frac{1}{u_0^5} = 81 \cdot \frac{\kappa^{1/3}}{\eta_1^4 \left(\frac{R}{2}\right)^2}, \quad (B) \quad f = \frac{\tau}{27} \cdot \eta_1^3 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^{3/2},$$

après quoi la racine cherchée est donné sous la forme

$$(C) \quad \eta = f^{1/5} \cdot \eta_0.$$

La détermination de η_0 sera effectuée selon l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^2} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

en faisant usage du développement *racinal* [voir (2) ou (D) ci-bas].

Si le point $\frac{1}{u^5}$ considéré se trouvait dans le domaine *interne*, où plusieurs singularités et divergences des valeurs obtenues à l'emploi immédiat de la formule (2) ont lieu, le point transposé $\frac{1}{u_0^5}$ sera au contraire en général situé dans le domaine *externe* ou *racinal*, où le développement racinal, c.-à-d.

$$(D) \quad \eta_0 = \frac{1}{u_0} A - \frac{A^2}{p} - u_0 \frac{p}{A^2} (1-s) - u_0^2 \frac{1}{A} (1-s),$$

conduit, en général, à la valeur juste de la racine η_0 .

En général il suffit de calculer la quantité A dans la formule pour η_0 d'après l'expression originelle (3) :

$$(b) \quad A_\delta^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6,$$

de laquelle ne diffère, en général, que peu l'expression secondaire (4) :

$$(b_1) \quad A_s^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6,$$

où

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4.$$

La formule générale donnant η_0 est pourtant, selon (5) :

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s},$$

η_δ et η_s désignant les valeurs obtenues suivant que la formule (b) ou (b₁) est employée.

Pour la quantité p_s fut proposée la formule (6), destinée soit au point $\frac{1}{u^5} = 27$ soit au point $\frac{1}{u^5} = 3$. Mais, parceque le dernier n'appartient pas aux points transposés, il n'est plus nécessaire d'avoir recours à la formule générale (6), qui, de plus, ne s'étend au point second spécial de notre équation, savoir $\frac{1}{u^5} = -9$, que par la condition que, pour lui, A_s soit échangée en A_{s_1} où s_1 se déduit de la formule inverse

$$\gamma = s_1 + 2s_1^2 + 4s_1^3 + 3s_1^4.$$

Dans ces circonstances il paraît que la valeur simple de

$$p_s = \frac{1}{3}; \quad \lg p_s = 9.5228787$$

soit à adopter pour les points transposés, de manière qu'il faudra bien mettre :

$$(c) \quad \eta_o = \frac{\eta_s + \frac{1}{3} \eta_s}{1 + \frac{1}{3}}.$$

Si le point considéré se trouvait déjà dans le domaine externe, la transformation secondaire le conduirait au même point, ou, en prenant le signe *minus* de la racine carrée, au domaine intérieure. Il va sans dire qu'alors le développement racinal (2) doit être immédiatement employé.

REMARQUE. — Il faut rappeler que ce n'est qu'à l'aide d'une formule spéciale (5) ou (8-a), et en utilisant à la foi les deux expressions A_s et A_{s_1} , qu'on parvient pour l'axe réel depuis $\frac{1}{u^5} = 3$ à $\frac{1}{u^5} = 27$ à une représentation de la racine d'accord plus marqué. C'est cela pour la partie interne de l'axe réel. Puisque les arguments sont transposés au domaine externe, c'est cependant qui ne sera pas d'importance. Les écarts vont en diminuant quand on s'approche de point $\frac{1}{u^5} = 27$, point de racine *zéro*, à considérer comme point limite des domaines *interne* et *externe*. À ce point même il existe une petite différence de A_s et A_{s_1} , nécessitant l'emploi de la formule de secours (5) ou (c) pour arriver à la valeur *zéro* de la racine. Il faut présumer que les écarts au delà du point $\frac{1}{u^5} = 27$ soient de plus en plus presque insensibles, mais que pourtant ils puissent être de caractère systématique. Si à quelque instant l'emploi de plus de sept décimales paraît désirable, on peut avoir recours

à l'équation originelle $z^5 + 5sz = 4\tau$, afin d'obtenir par une approximation ultérieure faite sur cette formule un nombre de chiffres plus grand. Parceque en tout cas il faudra contrôler les calculs, en ayant recours à l'équation initiale, c'est qui se fera sans difficulté. Mais, nous n'insisterons pas ici de plus sur cette question.

10. **Exemples.** — Le cas de racines égales fut déjà exposé dans ce qui précède. Nous allons considérer le cas des *isolines*, où la singularité la plus essentielle dans le domaine intérieure a lieu. Ces points sont

$$\frac{1}{u^5} = + 15.2329 + i 10.4949.$$

On obtient dans ce cas

$$z = + 0.2814 - i 26.216, \quad z^{1/5} = [8.02646_n] + i [0.47286], \\ R = - 0.000206 - i 0.22434,$$

et il suffira de mentionner encore les résultats suivants

$$\frac{1}{u_0^5} = 56.830 + i 25.394, \quad f = \frac{\tau}{27} \eta_1^3 \left(\frac{R}{2}\right)^{3/2} = [8.74099_n] + i [9.60069], \\ f^{1/5} = [8.35953_n] + i [9.92080], \quad \eta_0 = [9.77197] + i [9.45598],$$

d'où s'ensuit

$$\eta = - 0.25164 + i 0.48639, \quad \text{valeur vraie: } - 0.25161 + i 0.48639,$$

l'accord étant ainsi établi.

On obtient, en utilisant la deuxième racine

$$R_2 = 2.12017 - i 1.99063,$$

le même point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = + 56.830 + i 25.394,$$

mais à l'emploi de la troisième racine

$$R_3 = - 2.11821 + i 2.21497,$$

aucun résultat utile n'est trouvé.

Si nous écrivons d'une manière schématique

$$R = (+)^{1/5} + (-)^{1/5} \quad \text{et} \quad (+) = \rho e^{i\theta} \quad \text{et} \quad (-) = \rho e^{i\theta},$$

on aura à appliquer à $\frac{\pi}{3}$ dans l'expression de

$$R = (+)^{1/5} + (-)^{1/5},$$

240° et 0° pour le premier terme et pour le second respectivement.

On aura les correspondances suivantes :

$\frac{\vartheta}{3} : + 240^\circ ; + 0^\circ$	$\frac{\vartheta}{3} : + 240^\circ ; + 0^\circ$
$\eta_1 : \quad \quad - \quad \quad +$	$\eta_1 : \quad \quad - \quad \quad -$
$\frac{1}{u_0^5} = 56.830 + i 25.39$	$\frac{1}{u_0^5} = 14.20 + i 23.03$
<i>point transposé</i>	<i>point contraposé</i>
$\frac{\vartheta}{3} : + 0^\circ ; + 240^\circ$	$\frac{\vartheta}{3} : + 0^\circ ; + 240^\circ$
$\eta_1 : \quad \quad - \quad \quad -$	$\eta_1 : \quad \quad - \quad \quad +$
$\frac{1}{u_0^5} = + 15.23 + i 10.49$	$\frac{1}{u_0^5} = 56.83 + i 25.39$
<i>point primaire</i>	<i>point transposé.</i>

À la détermination de la racine dans les isolines appartient encore la quantité η_0 , devant être calculée par le racinal (2) de l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

dans le point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = + 56.830 + i 25.395.$$

Il n'y a lieu de reproduire des calculs que quelques traits principaux. On a obtenu

$$\alpha = - 0.045587 + i 0.021198$$

et puis les valeurs correspondentes de β , γ , δ , s , p , pour enfin parvenir à la valeur A_δ^5

$$A_\delta^5 = + 0.912734 + i 0.038368.$$

Ensuite s'obtient, au moyen de la formule

$$\eta_0 = \frac{1}{u_0} A - \frac{A^2}{p} - u_0 \frac{p}{A^2} (1-s) - u_0^2 \frac{1}{A} (1-s),$$

la valeur cherchée

$$\eta_0 = \eta_\delta = + 0.59155 + i 0.28575 ;$$

c'est la valeur inscrite ci-haut dans la première partie des calculs.

EXEMPLE : $\frac{1}{u^5} = 7$. — On aura dans ce cas

$$\kappa = \frac{7^3}{5^4} \quad \text{et} \quad \tau = - 5,$$

et l'on obtient de plus

$$\frac{1}{u_1^2} = +5,$$

et pour η_1 les quatre valeurs

$$+1, \quad -3, \quad +1 + i\sqrt{6}, \quad +1 - i\sqrt{6},$$

desquelles la première est à employer. Le point transposé devient

$$\frac{1}{u_0^5} = 7.81,$$

et dans ce point on trouve

$$\eta_0 = 0.339318,$$

de quoi enfin

$$\eta = -1.129914, \quad \text{valeur vraie : } -1.129915.$$

EXEMPLE : $\frac{1}{u^5} = 8$. — Le calcul fournit le point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = +350.6905,$$

puis, dans ce point,

$$\eta_0 = 1.8088863,$$

et enfin, pour la racine η , la valeur

$$\eta = -1.025973, \quad \text{valeur vraie : } 1.025972.$$

Aussi confirmées sont les formules pour les points

$$\frac{1}{u^5} = 3; \quad \frac{1}{u^5} = -9; \quad \frac{1}{u^5} = 16; \quad \frac{1}{u^5} = 21; \quad \frac{1}{u^5} = 36,$$

et d'autres qui furent considérés de plus ou de moins.

11. Sur le choix des signes et des quadrants. — Dans les formules figurent des racines telles que

$$1^o) \quad x^{1/5}; \quad 2^o) \quad f^{1/5}.$$

Dans le cas de quantités réelles il n'y a pas de difficulté par rapport à cela. Dans les cas complexes, comme il s'agit d'une racine principale, on aura, pour $x^{1/5}$ et $f^{1/5}$, à appliquer des valeurs convenables de $\frac{2k\pi}{5}$ et $\frac{2k\pi}{5}$.

Nous pouvons choisir les k de manière que les racines soient homologues aux valeurs x et f mêmes. Il peut arriver qu'on aura les mêmes quadrants, mais aussi que les quadrants soient opposés. Soient $a + bi$ les expressions

des quantités mêmes et $\alpha + \beta i$ les expressions de leurs racines. Ce qu'on doit exiger de α , β , c'est qu'elles s'accomodent de façon homologue aux quantités a , b , les quadrants devant être les mêmes ou bien les opposés, ce qui sera en général autrement pour les racines troisièmes et pour les cinquièmes.

Quant au choix des quadrants dans l'expression binome

$$3^o) \quad R = [1 + \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1 + \kappa}]^{1/3},$$

nous nous avons déjà prononcé dans ce qui précède. Il faudra les choisir de manière que des résultats étrangers soient évités. Nous n'entrerons pas ici sur cette question en général. Dans le cas des isolines, le choix juste se trouve indiqué par ce qu'on peut y arriver de deux manières différentes.