Existencia de máximo de funciones reales continuas en espacios casi numerablemente compactos (*).

Memoria de BALTASAR R. - SALINAS (Zaragoza, España)

Summary. - *By the concept of countable almost-compactness, here defined, a characterization of topological spaces on which each continuous real function has a maximum and minimum is given. Besides a careful study of the relations between several concepts of compactness and axioms of separation is performed.*

§ 1. Introducción

Dada una función real f definida en un conjunto X tiene gran importancia, como se sabe, poder asegurar si f tiene máximo o mínimo en X , esto es, si existe algún punto x_0 de X tal que

$$(1.1) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

para todo $x \in X$.

El primer teorema conocido sobre esta cuestión fué demostrado por WEIERSTRASS y se refiere al caso de funciones continuas de una variable real en un intervalo cerrado y acotado. Conviene que recordemos aquí que fué precisamente WEIERSTRASS quien hizo notar la falta de rigor que hay en admitir sin justificación este teorema para los conjuntos de funciones de lo cual el ejemplo más típico es el «principio de DIRICHLET».

La extensión del teorema de WEIERSTRASS para los espacios abstractos se debe a FRÉCHET [4]. El teorema de FRÉCHET afirma la existencia de máximo y mínimo de una función real continua en un *espacio de convergencia* X ⁽¹⁾ *sucesionalmente compacto*, es decir, que posea la propiedad de de BOLZANO-WEIERSTRASS:

(*) La redacción de este trabajo nos ha sido simplificada por las notas que tomó nuestra alumna Srta. Callaved de una exposición que hicimos de él en el Seminario Matemático de la Universidad de Zaragoza.

(1) Un *espacio de convergencia* o *espacio* (Ω) es un conjunto X sobre el que se ha distinguido una clase de sucesiones $\{x_n\}$ de elementos, llamadas *convergentes*, a las que se asigna uno o varios elementos $\lim x_n$ de X , llamados *límites* de $\{x_n\}$, de forma que se verifiquen las condiciones siguientes:

1. Si los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ son idénticos a un elemento x_0 de X , dicha sucesión es convergente y tiene por límite x_0 , es decir, $x_0 = \lim x_n$.

Toda sucesión $\{x_n\}$ de X contiene una sucesión parcial $\{x_{n_k}\}$ convergente.

Este teorema se extiende también a los espacios topológicos *numerablemente compactos* ⁽²⁾, pero como veremos no es válido para los espacios topológicos, no (T_1) , que posean la propiedad de FRÉCHET:

Cada subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación x_0 ($\in X$).

Esta observación creemos que es oportuna porque según ella si en el teorema que asegura la existencia de máximo y mínimo de una función real continua en un «*espacio compacto*» se entiende por esto, según la denominación clásica, todo espacio topológico que posea la propiedad de FRÉCHET, dicho teorema *no es cierto* ($\cdot$).

Una novedad de gran interés presenta la generalización para funciones semi-continuas del teorema de WEIERSTRASS. Pero tanto este resultado, debido a BAIRE, como los demás teoremas conocidos (hasta hace poco) de existencia de máximo y mínimo de funciones reales continuas en espacios topológicos quedan contenidos en el siguiente:

Dados los espacios topológicos X e Y , si X es numerablemente compacto y existe una aplicación continua f de X sobre Y se sigue que Y es numerablemente compacto ⁽⁴⁾.

En este trabajo extendemos el teorema tantas veces citado de WEIERSTRASS a una clase de espacios topológicos, que denominaremos *casi numerablemente compactos*, que comprende a los numerablemente compactos y a los conocidos por el nombre de H -cerrados ⁽⁵⁾.

La extensión análoga del teorema de BAIRE no es posible porque, como

2. Si una sucesión $\{x_n\}$ es convergente lo mismo ocurre para toda sucesión parcial $\{x_{n_k}\}$ de ella y los límites de ambas sucesiones son idénticos.

Estas son las condiciones exigidas por FRÉCHET. Otros autores imponen alguna condición más.

⁽²⁾ Todo espacio topológico X sucesionalmente compacto es numerablemente compacto. La propiedad recíproca también es cierta si X satisface el primer axioma de contabilidad. Más adelante, en § 2, recordamos la definición de espacio numerablemente compacto.

⁽³⁾ De aquí se deduce que si f es una aplicación continua del espacio topológico X sobre Y puede ocurrir que X posea la propiedad de FRÉCHET y sin embargo el espacio Y no. Creemos que todo esto justifica por sí solo que se abandone dicha definición de compacidad.

⁽⁴⁾ Recordamos que para obtener de aquí el citado teorema de BAIRE para funciones superiormente continuas (o semi-continuas superiormente) basta que se tome por Y el espacio topológico cuyos puntos son los números reales y los abiertos son los conjuntos $G_\alpha = \{x \mid x < \alpha\}$.

⁽⁵⁾ Un espacio de HAUSDORFF X se dice H -cerrado si el conjunto X de los puntos de X es cerrado en todo espacio de HAUSDORFF Y que contenga a X . Véase P. ALEXANDROFF y HOPF [2] págs. 89-92, A. D. ALEXANDROFF [1], STONE [11] TYCHONOFF [12] y KATETOV [7] y [8].

demostraremos, si X es un espacio topológico que posee la propiedad de que toda función superiormente (inferiormente) continua sobre X tiene máximo (mínimo) resulta X numerablemente compacto. Otro resultado semejante a éste que también obtenemos es: Si X es un espacio topológico completamente (casi) regular sobre el que toda función real continua tiene máximo o mínimo, entonces X es casi numerablemente compacto. Este teorema nos ha permitido caracterizar los espacios topológicos sobre los que toda función real continua tiene máximo y mínimo mediante el concepto de casi compacidad numerable. Es importante hacer notar que no es posible suprimir en estos resultados la palabra «casi».

Por la semejanza que tiene con el teorema de TYCHONOFF merece que también destaquemos este otro teorema: El producto topológico $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ de una familia $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de espacios sucesionalmente compactos es un espacio casi numerablemente compacto e igualmente es casi numerablemente compacto, todo subespacio A de X cuya proyección en $\prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ coincida con este espacio cualquiera que sea el subconjunto numerable o finito Λ' de Λ .

Estos resultados han sido completados en un apéndice agregado al final.

§ 2. Definiciones

Comenzaremos recordando los conceptos de espacio compacto y numerablemente compacto para pasar después a definir los espacios casi compactos y casi numerablemente compactos.

DEFINICIÓN 1. - Se dice que un espacio topológico X es compacto si de todo cubrimiento abierto $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de X se puede extraer un cubrimiento finito $\{G_{\lambda_k} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ de X ⁽⁶⁾. De manera abreviada, X es compacto si y solo si

$$(2.1) \quad X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^n G_{\lambda_k} \quad (\lambda_k \in \Lambda)$$

DEFINICIÓN 2. - Se dice que un espacio topológico X es numerablemente compacto si de todo cubrimiento abierto y numerable $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de X se puede extraer un cubrimiento finito $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ de X . De manera abreviada, X es numerablemente compacto si y solo si

$$(2.2) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^n G_k.$$

⁽⁶⁾ N. BOURBAKI [3] pags. 113 y 91, llama «casi compactos» a estos espacios y reserva el término «compacto» para designar a los espacios de HAUSDORFF compactos.

OBSERVACIÓN 1. - Daremos el nombre de propiedad de HEINE-BOREL a la que poseen, según la definición 2. los espacios numerablemente compactos y emplearemos el nombre de propiedad de HEINE-BOREL-LEBESGUE o de BOREL-LEBESGUE para designar a la que caracteriza a los espacios compactos según la definición 1.

DEFINICIÓN 3. - Diremos que un espacio topológico X es casi compacto si para todo cubrimiento $\{F_\lambda^0 \mid \lambda \in \Lambda\}$ de X , formado por interiores F_λ^0 de conjuntos cerrados F_λ , existe un número finito de estos que cubren conjuntamente X . De manera abreviada, X es casi compacto si y solo si

$$(2.3) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{\lambda_k}^0 \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^n F_{\lambda_k} \quad (\lambda_k \in \Lambda).$$

DEFINICIÓN 4. - Diremos que un espacio topológico X es casi numerablemente compacto si para todo cubrimiento numerable $\{F_k^0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ de X , formado por interiores F_k^0 de conjuntos cerrados F_k , existe un número finito de estos que cubren conjuntamente X . De manera abreviada, X es casi numerablemente compacto si y solo si

$$(2.4) \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^0 \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^n F_k.$$

Por la ley de dualidad se pueden expresar estas definiciones de manera equivalente así:

DEFINICIÓN 1'. - Un espacio topológico X se dice compacto si toda familia $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos cerrados de X con intersección vacía posee una subfamilia finita $\{F_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ cuya intersección es vacía. Abreviadamente, X es compacto si y solo si

$$(2.1)' \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_{\lambda_k} = \emptyset \quad (\lambda_k \in \Lambda).$$

DEFINICIÓN 2'. - Un espacio topológico X se dice numerablemente compacto si toda familia numerable $\{F_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de conjuntos cerrados de X con intersección vacía posee una subfamilia finita $\{F_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ cuya intersección es vacía. Abreviadamente, X es numerablemente compacto si y solo si

$$(2.2)' \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_k = \emptyset.$$

DEFINICIÓN 3' - Diremos que un espacio topológico X es casi compacto cuando toda familia $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de abiertos de X , cuyas clausuras tienen intersección vacía, posee una subfamilia finita $\{G_{\lambda_k} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ con intersección vacía. Abreviadamente, X es casi compacto si y solo si

$$(2.3)' \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k} = \emptyset \quad (\lambda_k \in \Lambda).$$

DEFINICIÓN 4' - Diremos que un espacio topológico X es casi numerablemente compacto cuando toda familia numerable $\{G_k \mid k=1, 2, \dots\}$ de abiertos de X , cuyas clausuras tienen intersección vacía, posee una subfamilia finita $\{G_k \mid k=1, 2, \dots, n\}$ con intersección vacía. Abreviadamente, X es casi numerablemente compacto si y solo si

$$(2.4)' \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n G_k = \emptyset.$$

OBSERVACIÓN 2. - Estos conceptos de compacidad se extienden, como es habitual, para un conjunto A de un espacio topológico X directamente o bien por medio del espacio topológico A definido por la topología inducida sobre A por X .

TEOREMA 1. - Para que un espacio topológico X sea casi (numerablemente) compacto es necesario y suficiente que para todo cubrimiento abierto (y numerable) $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de X se pueda encontrar un número finito $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \dots, G_{\lambda_n}$ de dichos conjuntos de manera que

$$(2.5) \quad X = \bigcup_{k=1}^n \bar{G}_{\lambda_k}.$$

DEMOSTRACIÓN - La condición es necesaria. En efecto, si $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento abierto (y numerable) de X , siendo $G_\lambda \subset (\bar{G}_\lambda)^0$, se deduce que $\{(\bar{G}_\lambda)^0 \mid \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento (numerable) de X formado por interiores de cerrados. Por consiguiente, si X es casi (numerablemente) compacto, existe un número finito $\bar{G}_{\lambda_1}, \bar{G}_{\lambda_2}, \dots, \bar{G}_{\lambda_n}$ de clausuras de dichos conjuntos que cubren conjuntamente X , o sea (2.5).

La condición es suficiente. En efecto, si de todo cubrimiento abierto (y numerable) $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de X se puede extraer un número finito $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \dots, G_{\lambda_n}$ de dichos conjuntos de modo que

$$X = \bigcup_{k=1}^n \bar{G}_{\lambda_k}$$

resulta, en particular, si $\{F_\lambda^0 \mid \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento (numerable) de X formado por interiores de cerrados, que se puede encontrar un número finito $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \dots, F_{\lambda_n}$ de dichos conjuntos F_λ de manera que

$$X = \bigcup_{k=1}^n \overline{F_{\lambda_k}^0} \subset \bigcup_{k=1}^n F_{\lambda_k},$$

es decir,

$$X = \bigcup_{k=1}^n F_{\lambda_k}.$$

COROLARIO 1. - *Un espacio de HAUSDORFF es casi compacto si y solo si es H -cerrado ⁽³⁾.*

COROLARIO 2. - *Todo conjunto casi compacto de un espacio de HAUSDORFF es cerrado.*

Las definiciones 3' y 4' de casi compacidad se pueden formular de forma equivalente, según se deduce del teorema 2, utilizando los conjuntos derivados en lugar de las clausuras. Para demostrar este teorema conviene probar antes:

LEMA 1. - *Si X es un espacio topológico y $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de abiertos de X tal que*

$$(2.6) \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset \quad (7),$$

resulta

$$(2.7) \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{G_\lambda - F} = \emptyset$$

para

$$F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{G_\lambda}.$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si fuese

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{G_\lambda - F} \neq \emptyset$$

(7) Designamos como es habitual por A' el conjunto derivado de A .

existiría al menos un punto

$$x_0 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{G_\lambda - F} \quad (\subset F).$$

Pero entonces, siendo

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda - F)' \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset,$$

resultaría

$$x_0 \notin (G_\lambda - F)'$$

para algún $\lambda \in \Lambda$ y, por tanto,

$$x_0 \in G_\lambda - F$$

para algún $\lambda \in \Lambda$, de donde teniendo presente que $x_0 \in F$ llegaríamos al absurdo

$$(G_\lambda - F) \cap F \neq \emptyset.$$

TEOREMA 2. - Sea X un espacio topológico y A el conjunto de los puntos aislados de X , es decir, el conjunto de los puntos x de X tales que $\{x\}$ es abierto. Entonces, para que X sea casi (numerablemente) compacto es necesario y suficiente que para toda familia (numerable) $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de abiertos de X con

$$(2.6) \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset$$

se pueda encontrar una subfamilia finita $\{G_{\lambda_k} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ de $\mathcal{G}$ de modo que

$$(2.8) \quad \bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k} = A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN. - Desde luego la condición es suficiente puesto que cualquiera que sea la familia (numerable) $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de abiertos con

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda = \emptyset$$

resulta

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset \text{ y } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \emptyset,$$

y de aquí se deduce en virtud de (2.8) que existe una subfamilia finita $\{G_{\lambda_k} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ de $\mathcal{G}$ con intersección vacía.

La condición es necesaria. En efecto, si $\mathbf{X}$ es casi (numerablemente) compacto y $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia (numerable) de abiertos con

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset,$$

por el lema 1 y la definición 3' (definición 4') existe una subfamilia finita $\{G_{\lambda_k} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ de $\mathcal{G}$ con la propiedad de que

$$\bigcap_{k=1}^n (G_{\lambda_k} - F) = \emptyset$$

y, por tanto,

$$\bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k} \subset F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda.$$

Para terminar basta tener presente que

$$\begin{aligned} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{G}_\lambda &= (A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda \right) \\ &= A \cap \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset \bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio (T_1) y $A \neq \emptyset$, no puede sustituir en el teorema 2 la condición (2.8) por

$$(2.8)' \quad \bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k} = \emptyset.$$

En efecto, si $x_0 \in A$ y tomamos $G_\lambda = \{x_0\}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ es

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G'_\lambda = \emptyset$$

y sin embargo para toda familia finita $\{G_{\lambda_k} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ con $\lambda_k \in \Lambda$ resulta

$$\bigcap_{k=1}^n G_{\lambda_k} = \{x_0\} \neq \emptyset.$$

En el caso de espacios casi numerablemente compactos son también útiles los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 3. - *Un espacio topológico $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto si y solo si para toda sucesión decreciente (en sentido estricto) $\{G_k\}$ de conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ resulta*

$$(2.9) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto y $\{G_k\}$ es una sucesión decreciente de abiertos de $\mathbf{X}$ debe ser $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \neq \emptyset$ porque si fuese $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k = \emptyset$ resultaría, según la definición 4',

$$G_n = \bigcap_{k=1}^n G_k = \emptyset$$

para algún n y $\{G_k\}$ no sería decreciente.

Recíprocamente, si para toda sucesión decreciente $\{G_k\}$ de abiertos de $\mathbf{X}$ resulta (2.9), $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto. En efecto, sea $\{G_k^*\}$ una sucesión de conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ con $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k^* = \emptyset$. Entonces, si ponemos

$$G_n = \bigcap_{k=1}^n G_k^* \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$\{G_n\}$ es una sucesión no creciente de conjuntos abiertos tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^n \bar{G}_k^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k^* = \emptyset$$

y, por consiguiente, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k = \emptyset$. De aquí resulta que todos los conjuntos G_n son idénticos desde un lugar n_0 en adelante y, por tanto, $G_n = \emptyset$ para $n \geq n_0$, o bien existen infinitos G_n distintos y se puede encontrar una sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$ de $\{G_n\}$ que sea decreciente, pero entonces por lo que hemos supuesto tendríamos

$$G_{n_{k_0}} = \bigcap_{k=1}^{k_0} G_{n_k} = \emptyset$$

para algún entero k_0 ya que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_{n_k} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n = \emptyset,$$

y no sería decreciente $\{G_{n_k}\}$. Desechando este caso se deduce que existe un entero n tal que

$$\bigcap_{k=1}^n G_k^* = G_n = \emptyset.$$

TEOREMA 4. - *Un espacio topológico X es casi numerablemente compacto si y solo si para toda sucesión decreciente (en sentido estricto) $\{G_n\}$ de conjuntos abiertos de X resulta*

$$(2.10) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. - Como $G'_k \subset \bar{G}_k$ será suficiente probar, según el teorema 3, que si X es casi numerablemente compacto y $\{G_n\}$ es una sucesión decreciente de abiertos de X resulta

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset.$$

Efectivamente, si fuese

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k = \emptyset.$$

por el teorema 2 tendríamos

$$G_n = \bigcap_{k=1}^n G_k = A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \subset G_{n+p}$$

para algún n y cada $p > 0$, lo que es evidentemente absurdo ya que por hipótesis $G_n \supset G_{n+1} \neq \emptyset$.

§ 3. La propiedad de Fréchet y análogas

Es cosa conocida de que todo espacio numerablemente compacto X posee la propiedad de FRÉCHET. La recíproca de esta proposición es cierta si X es un espacio (T_1) pero no en general. Para poner esta afirmación en evidencia basta considerar el siguiente:

EJEMPLO 1. - Sea $\mathbf{X}$ el espacio topológico, reunión de los dos conjuntos numerables $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, donde la familia de abiertos está formada exclusivamente por $\emptyset$ y todo conjunto G reunión de un número cualquiera de pares $\{a_k, b_k\}$,

Este espacio $\mathbf{X}$ no es numerablemente compacto puesto que los conjuntos $G_k = \{a_k, b_k\}$ forman un cubrimiento abierto y numerable de $\mathbf{X}$ del que evidentemente no se puede extraer ningún subcubrimiento finito de $\mathbf{X}$. Sin embargo $\mathbf{X}$ posee la propiedad de FRÉCHET porque todo conjunto X_0 de $\mathbf{X}$ no vacío tiene al menos un punto de acumulación, por ejemplo, si $a_k \in X_0$ el punto b_k es de acumulación de X_0 .

Es interesante ver que, no obstante es válida la afirmación siguiente:

TEOREMA 5. - *Para que un espacio topológico $\mathbf{X}$ sea numerablemente compacto es necesario y suficiente que para todo conjunto numerable*

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad (x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j)$$

de $\mathbf{X}$ exista al menos un punto x_0 de acumulación de cada uno los conjuntos

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

es decir,

$$(3.1) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k \neq \emptyset \quad (^{\circ}).$$

DEMOSTRACIÓN. - La condición es necesaria. En efecto, si $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto, siendo

$$\bigcap_{k=1}^n \bar{X}_k \supset X_n \neq \emptyset$$

para todo n , tendremos

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{X}_k \neq \emptyset$$

y, por consiguiente, existe al menos un punto

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{X}_k.$$

(^o) Esta condición es equivalente a que todo subconjunto infinito de $\mathbf{X}$ posea al menos un punto de ω -acumulación.

Este punto es de acumulación de cada X_n porque como para p suficientemente grande $x_0 \notin X_{n+p}$, resulta

$$x_0 \in X'_{n+p} \subset X'_n,$$

La condición es suficiente. En efecto, si $\{F_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ es una familia numerable de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita tendremos que

$$\{F_n^*\} = \left\{ \bigcap_{k=1}^n F_k \right\}$$

es una sucesión no creciente de conjuntos cerrados y no vacíos que son idénticos desde un lugar n_0 en adelante y, por consiguiente,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^* = F_{n_0}^* \neq \emptyset,$$

o bien existen infinitos F_n^* distintos y se puede encontrar una sucesión decreciente $\{F_{n_k}^* \mid \subset \{F_n^*\}$. Si tomamos en este caso

$$x_k \in F_{n_k}^* - F_{n_{k+1}}^* \quad (F_{n_k}^* - F_{n_{k+1}}^* \neq \emptyset)$$

existe por hipótesis al menos un punto x_0 de acumulación de cada uno de los conjuntos

$$X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\} \subset F_{n_k}^*.$$

Por tanto, $x_0 \in F_{n_k}^*$ para cada k y

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{n_k}^* \neq \emptyset.$$

TEOREMA 6. - *Para que un espacio topológico $\mathbf{X}$ sea casi numerablemente compacto es necesario y suficiente que para todo conjunto numerable $X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ y toda familia $\{V_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de entornos V_k de $X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ exista al menos un punto x_0 de acumulación de cada V_k , es decir,*

$$(3.2) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. - La condición es necesaria. Siendo V_k un entorno de X_k existe un abierto G_k tal que

$$X_k \subset G_k \subset V_k$$

y para demostrar (3.2) bastará probar que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset.$$

Efectivamente, si fuese

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k = \emptyset,$$

como por hipótesis $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto, por el teorema 2 tendríamos

$$X_n \subset \bigcap_{k=1}^n G_k = A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \subset A$$

para $n \geq n_0$, siendo A el conjunto de los puntos aislados de $\mathbf{X}$, pero entonces sería $\{X_n \mid n \geq n_0\}$ una sucesión decreciente de abiertos y resultaría, según el teorema 4,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k = \bigcap_{k=n_0}^{\infty} X'_k \neq \emptyset$$

lo que está en contradicción con la hipótesis $\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k = \emptyset$. Luego $\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset$.

La condición es suficiente. Por el teorema 4 bastará probar que si $\{G_k\}$ es una sucesión decreciente de abiertos de $\mathbf{X}$ se tiene

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset.$$

En efecto, siendo $\{G_k\}$ decreciente existe un conjunto $X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ con

$$x_k \in G_k - G_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Entonces, como G_k es un entorno de $X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$, existe por hipótesis un punto x_0 que es de acumulación de cada G'_k y, por consiguiente,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \neq \emptyset.$$

OBSERVACIÓN 4. — En los teoremas 5 y 6 se pueden sustituir las condiciones (3.1) y (3.2) por

$$(3.3) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{X}_k \neq \emptyset$$

y

$$(3.4) \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \neq \emptyset,$$

respectivamente.

COROLARIO 2'. — Si todo conjunto cerrado y numerable del espacio topológico X es casi numerablemente compacto, entonces X posee la propiedad de FRÉCHET.

§ 4. — Relaciones entre los conceptos de compacidad y casi compacidad.

De las definiciones dadas se sigue inmediatamente:

TEOREMA 7. — Todo espacio compacto es numerablemente compacto. 2. Todo espacio casi compacto es casi numerablemente compacto. 3. Todo espacio compacto es casi compacto. 4. Todo espacio numerablemente compacto es casi numerablemente compacto. Esto se puede expresar esquemáticamente así:

$$\begin{array}{ccc} \text{compacidad} & \Rightarrow & \text{compacidad numerable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{casi compacidad} & \Rightarrow & \text{casi compacidad numerable} \end{array}$$

TEOREMA 8. — Cada espacio topológico X regular y casi compacto, es compacto ⁽⁹⁾.

DEMOSTRACIÓN. — En efecto, sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de X : $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Entonces, para cada $x \in X$ existe un abierto G_λ de dicha familia tal que $x \in G_\lambda$ y por ser X regular se puede encontrar un conjunto cerrado F_x con la propiedad de que

$$x \in F_x^0 \subset F_x \subset G_\lambda$$

⁽⁹⁾ Un espacio topológico X se dice *regular* si para cada punto x y cada entorno U de x existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset U$. Un espacio regular que sea además (T_1) se llama *espacio* (T_3) . Algunos autores reservan el nombre de «espacio regular» para designar los espacios (T_3) .

y, por consiguiente,

$$\mathbf{X} = \bigcup_{x \in \mathbf{X}} F_x^0.$$

De donde se deduce, siendo $\mathbf{X}$ casi compacto, que existe una subfamilia finita $\{F_{x_k} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ de $\{F_x \mid x \in \mathbf{X}\}$ tal que

$$\mathbf{X} = \bigcup_{k=1}^n F_{x_k}.$$

Por tanto, como para cada F_{x_k} existe un abierto G_{λ_k} con $\lambda_k \in \Lambda$ que contiene a F_{x_k} , tendremos que $\{G_{\lambda_k} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ es un cubrimiento finito de $\mathbf{X}$ con $\lambda_k \in \Lambda$ y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 9. - Si $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto y tal que todo abierto G es reunión numerable $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^0$ de interiores de conjuntos cerrados $F_n \subset G$ resulta $\mathbf{X}$ numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si $\{G_h \mid h = 1, 2, \dots\}$ es un cubrimiento abierto y numerable de $\mathbf{X}$, tendremos que cada G_h es reunión numerable $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{hk}^0$ de interiores de cerrados $F_{hk} \subset G_h$. Por tanto, siendo $\mathbf{X}$ casi numerablemente compacto y $\mathbf{X} = \bigcup_{h,k=1}^{\infty} F_{hk}^0$, existe un número finito de cerrados: $F_{1h_1}, F_{2h_2}, \dots, F_{nh_n}$, con la propiedad

$$\mathbf{X} = \bigcup_{h=1}^n F_{h h_i}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{X} = \bigcup_{h=1}^n G_h$$

y el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 5. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico normal ⁽¹⁰⁾ y tal que todo abierto es un conjunto $(\mathcal{F}_0)$, entonces cada abierto G de $\mathbf{X}$ es reunión numerable $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^0$ de interiores de conjuntos cerrados $F_n \subset G$.

⁽¹⁰⁾ Un espacio topológico $\mathbf{X}$ se dice *normal* si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos, A y B , existen dos entornos disjuntos U y V de A y B , respectivamente. Un espacio normal que sea además (T_1) se llama *espacio* (T_4) . Algunos autores reservan el nombre de «espacio normal» para designar los espacios (T_4) .

TEOREMA 10. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico (T_4) casi numerablemente compacto, $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN. - Supongamos que exista un conjunto numerable $X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ sin puntos de acumulación. Entonces, siendo $\mathbf{X}$ regular, se puede encontrar un entorno U_k de $X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ de manera que $x_{k-1} \notin \bar{U}_k$ para $k > 1$. Como según esto X_1 y $F = \bigcap_{k=2}^{\infty} U'_k$ son dos conjuntos cerrados disjuntos y $\mathbf{X}$ es normal, existe un entorno U_1 de X_1 tal que $\bar{U}_1 \cap F = \emptyset$. Por tanto, $V_k = U_1 \cap U_k$ es un entorno de X_k y

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V'_k = \bar{U}_1 \cap F = \emptyset,$$

lo que es contradictorio con la hipótesis de ser $\mathbf{X}$ casi numerablemente compacto en virtud del teorema 6. Luego $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto

TEOREMA 11. - Si $\mathbf{X} = (X, \mathfrak{S})$ es un espacio topológico, la familia $\mathfrak{S}$ ($\subset \mathfrak{S}$) de los conjuntos G^* que son reunión $\bigcup_{\lambda} F_{\lambda}^0$ de interiores de cerrados $F_{\lambda} \subset G^*$ define un espacio topológico $\mathbf{X}^* = (X, \mathfrak{S}^*)$. Este espacio $\mathbf{X}^*$ es compacto si $\mathbf{X}$ es casi compacto.

DEMOSTRACIÓN. - La primera parte resulta teniendo presente:

a) Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathfrak{S}^*$,

b) La reunión $\bigcup_{\lambda} G_{\lambda}^*$ de conjuntos de $\mathfrak{S}^*$ pertenece a $\mathfrak{S}^*$. En efecto, si G_{λ}^* es reunión $\bigcup_{\mu} F_{\lambda\mu}^0$ de interiores de cerrados $F_{\lambda\mu} \subset G_{\lambda}^*$, tendremos que $\bigcup_{\lambda} G_{\lambda}^*$ es reunión $\bigcup_{\lambda, \mu} F_{\lambda\mu}^0$ de interiores de cerrados $F_{\lambda\mu} \subset \bigcup_{\lambda} G_{\lambda}^*$.

c) La intersección $G_1^* \cap G_2^*$ de dos conjuntos de $\mathfrak{S}^*$ pertenece a $\mathfrak{S}^*$.

Efectivamente, si G_1^* y G_2^* son reunión $\bigcup_{\lambda'} F_{\lambda'}^0$ y $\bigcup_{\lambda''} F_{\lambda''}^0$ de interiores de cerrados $F_{\lambda'} \subset G_1^*$ y $F_{\lambda''} \subset G_2^*$ resulta

$$\begin{aligned} G_1^* \cap G_2^* &= \left(\bigcup_{\lambda'} F_{\lambda'}^0 \right) \cap \left(\bigcup_{\lambda''} F_{\lambda''}^0 \right) = \bigcup_{\lambda', \lambda''} F_{\lambda'}^0 \cap F_{\lambda''}^0 \\ &= \bigcup_{\lambda', \lambda''} (F_{\lambda'} \cap F_{\lambda''})^0 \in \mathfrak{S}^* \end{aligned}$$

puesto que $F_{\lambda'} \cap F_{\lambda''} \subset G_1^* \cap G_2^*$.

Finalmente, $\mathbf{X}^*$ es compacto si $\mathbf{X}$ es casi compacto. En efecto, si $\{G_{\lambda}^* \mid \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbf{X}^*$ en la topología $\mathfrak{S}^*$, siendo cada G_{λ}^* reunión $\bigcup_{\mu} F_{\lambda\mu}^0$ de interiores de cerrados $F_{\lambda\mu} \subset G_{\lambda}^*$ en la topología $\mathfrak{S}$,

tendremos

$$X = \bigcup_{\lambda, \mu} F_{\lambda\mu}^0,$$

de donde resulta por ser $\mathbf{X}$ casi compacto que existe un número finito $F_{\lambda_1\mu_1}, F_{\lambda_2\mu_2}, \dots, F_{\lambda_n\mu_n}$ de dichos cerrados con la propiedad

$$X = \bigcup_{k=1}^n F_{\lambda_k\mu_k}$$

y, por consiguiente,

$$X = \bigcup_{k=1}^n G_{\lambda_k}^* \quad (F_{\lambda_k\mu_k} \subset G_{\lambda_k}^*).$$

TEOREMA 12. - Sea $\mathbf{X}^*$ el espacio topológico construido a partir de $\mathbf{X}$ según el método del teorema 11, entonces:

1. $\mathbf{X}^*$ es un espacio (T_1) si y solo si $\mathbf{X}$ es un espacio (T_2) , es decir, de HAUSDORFF.

2. $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$ si y solo si $\mathbf{X}$ es un espacio regular.

DEMOSTRACIÓN. - 1. El hecho de ser $\mathbf{X}$ un espacio de HAUSDORFF equivale a que para cada punto x de X el conjunto $\{x\}$ sea intersección $\bigcap_{\lambda} \tilde{G}_{\lambda}$ de las clausuras de todos los conjuntos G_{λ} , abiertos en $\mathbf{X}$, que contienen x , es decir, equivale a que $X - \{x\}$ sea reunión $\bigcup_{\lambda} (X - G_{\lambda})^0$ de los interiores de todos los conjuntos cerrados $F_{\lambda} = X - G_{\lambda} \subset X - \{x\}$. Ahora bien, esto no significa otra cosa que $X - \{x\}$ es un conjunto abierto en $\mathbf{X}^*$ para todo $x \in X$, o lo que es igual que $\mathbf{X}^*$ es un espacio (T_1) .

2. Siendo evidentemente $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$, para demostrar que $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$ si $\mathbf{X}$ es un espacio regular bastará probar que cada abierto G en $\mathbf{X}$ es reunión $\bigcup_x F_x^0$ de interiores de cerrados en $\mathbf{X}$: $F_x \subset G$. Efectivamente, como entonces para todo $x \in G$ existe un conjunto cerrado F_x en $\mathbf{X}$ con la propiedad

$$x \in F_x^0 \subset F_x \subset G,$$

resulta $G = \bigcup_{x \in X} F_x^0$ con $F_x \subset G$.

Recíprocamente, si $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$ cada abierto G en $\mathbf{X}$ es reunión $\bigcup_{\lambda} F_{\lambda}^0$ de interiores de cerrados en $\mathbf{X}$: $F_{\lambda} \subset G$. Por tanto, cualquiera que sea el punto $x \in G$ existe un conjunto cerrado F_{λ} tal que

$$x \in F_{\lambda}^0 \subset F_{\lambda} \subset G$$

y $\mathbf{X}$ es regular.

OBSERVACIÓN 6. - El teorema 8 se puede obtener también como consecuencia de los teoremas 11 y 12.

TEOREMA 13. - Dados los espacios topológicos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ sean $\mathbf{X}^*$ e $\mathbf{Y}^*$ los espacios topológicos contruidos a partir de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ según el método del teorema 11. Entonces, toda aplicación continua f de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ es una aplicación continua de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{Y}^*$.

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, como cada conjunto G^* abierto en $\mathbf{Y}^*$ es reunión $\bigcup_{\lambda} F_{\lambda}^0$ de interiores de cerrados en $\mathbf{Y}$: $F_{\lambda} \subset G^*$, se deduce

$$\begin{aligned} f^{-1}(G^*) &= \bigcup_{\lambda} f^{-1}(F_{\lambda}^0) \subset \bigcup_{\lambda} f^{-1}(F_{\lambda})^0 \\ &\subset \bigcup_{\lambda} f^{-1}(F_{\lambda}) = f^{-1}(G^*) \end{aligned}$$

y, por tanto, que $f^{-1}(G^*)$ es reunión $\bigcup f^{-1}(F_{\lambda})^0$ de interiores de cerrados en $\mathbf{X}$: $f^{-1}(F_{\lambda}) \subset f^{-1}(G^*)$. Luego $f^{-1}(G^*)$ es un conjunto abierto en $\mathbf{X}^*$ cualquiera que sea el conjunto abierto G^* en $\mathbf{Y}^*$ y f es una aplicación continua de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{Y}^*$.

COROLARIO 3. - Sea $\mathbf{Y}$ un espacio topológico regular y $\mathbf{X}^*$ el espacio topológico contruido a partir de $\mathbf{X}$ según el método del teorema 11. Entonces, toda aplicación continua f de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$ es también una aplicación continua de $\mathbf{X}^*$ en $\mathbf{Y}$.

DEMOSTRACIÓN. - Resulta del teorema 13 teniendo presente que $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}$ en virtud del teorema 12.

OBSERVACIÓN 7. - Este corolario y el teorema 11 permiten extender algunas proposiciones sobre funciones continuas en espacios compactos a funciones continuas en espacios casi compactos.

OBSERVACIÓN 8. - El proceso del teorema 11 se puede prolongar haciendo corresponder a cada número ordinal α un espacio topológico $\mathbf{X}^{(\alpha)} = (\mathbf{X}, \mathcal{G}^{(\alpha)})$ de la siguiente manera:

1. $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}$.
2. $\mathcal{G}^{(\alpha)} = (\mathcal{G}^{(\alpha-1)})^*$ para todo número finito $\alpha = n$ o transfinito de primera especie.
3. $\mathcal{G}^{(\alpha)} = \bigcap_{\lambda < \alpha} \mathcal{G}^{(\lambda)}$ para todo número transfinito de segunda especie.

Entonces, existe un número α_0 correspondiente a un número cardinal no superior al de la clase $\mathcal{G}$ de los conjuntos abiertos de $\mathbf{X}$ tal que

$$\mathbf{X}^{(\alpha)} \neq \mathbf{X}^{(\alpha_0)} \text{ para } \alpha < \alpha_0$$

y

$$\mathbf{X}^{(\alpha)} = \mathbf{X}^{(\alpha_0)} \text{ para } \alpha \geq \alpha_0.$$

Este espacio topológico $\mathbf{X}^{(\alpha)}$, que designaremos por $\mathbf{X}^{(\phi)}$, según el teorema 12 es regular y por el corolario 3 satisface $\mathcal{C}(\mathbf{X}^{(\phi)}, \mathbf{Y}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ para cada espacio regular $\mathbf{Y}$ ⁽¹⁾.

TEOREMA 14. - Sea $\mathbf{X} = (X, \mathcal{G})$ un espacio topológico definido por la topología $\mathcal{G}$ sobre el conjunto X y $\mathcal{H}$ una familia de subconjuntos de X tal que:

1. $\emptyset \in \mathcal{H}$.
2. La reunión $H_1 \cup H_2$ de dos conjuntos de $\mathcal{H}$ pertenece a $\mathcal{H}$.
3. Si el conjunto abierto G está contenido en un conjunto $H \in \mathcal{H}$ resulta $G = \emptyset$.

Entonces, la familia $^*\mathcal{G}$ de los conjuntos *G que son reunión $\bigcup_{\lambda} (G_{\lambda} - H_{\lambda})$ de conjuntos $G_{\lambda} - H_{\lambda}$ con $G_{\lambda} \in \mathcal{G}$ y $H_{\lambda} \in \mathcal{H}$ define un espacio topológico $^*\mathbf{X} = (X, ^*\mathcal{G})$. Si $\mathbf{X}$ es casi (numerablemente) compacto, este espacio $^*\mathbf{X}$ lo es también. Además, $^*\mathbf{X}$ no posee la propiedad de FRECHÉT si $\mathcal{H}$ satisface la condición:

4. Existe un conjunto infinito $H_0 \in \mathcal{H}$ tal que $H_0 - \{x\} \in \mathcal{H}$ para todo punto x de acumulación (en $\mathbf{X}$) de H_0 .

DEMOSTRACIÓN. - Para demostrar que $^*\mathbf{X}$ es un espacio topológico debemos comprobar que se verifican:

- a) Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $^*\mathcal{G}$. Evidente.
- b) La reunión $\bigcup_{\lambda} ^*G_{\lambda}$ de conjuntos de $^*\mathcal{G}$ pertenece a $^*\mathcal{G}$. Evidente.
- c) La intersección $^*G_1 \cap ^*G_2$ de dos conjuntos de $^*\mathcal{G}$ pertenece a $^*\mathcal{G}$.

En efecto, si

$$^*G_1 = \bigcup_{\lambda'} (G_{\lambda'} - H_{\lambda'}) \text{ con } G_{\lambda'} \in \mathcal{G} \text{ y } H_{\lambda'} \in \mathcal{H}$$

y

$$^*G_2 = \bigcup_{\lambda''} (G_{\lambda''} - H_{\lambda''}) \text{ con } G_{\lambda''} \in \mathcal{G} \text{ y } H_{\lambda''} \in \mathcal{H},$$

resulta

$$\begin{aligned} ^*G_1 \cap ^*G_2 &= \bigcup_{\lambda'_1 \lambda''} (G_{\lambda'_1} - H_{\lambda'_1}) \cap (G_{\lambda''} - H_{\lambda''}) \\ &= \bigcup_{\lambda' \lambda''} (G_{\lambda' \lambda''} - H_{\lambda' \lambda''}) \in ^*\mathcal{G} \end{aligned}$$

puesto que $G_{\lambda' \lambda''} = G_{\lambda'} \cap G_{\lambda''} \in \mathcal{G}$ y $H_{\lambda' \lambda''} = H_{\lambda'} \cup H_{\lambda''} \in \mathcal{H}$ según la condición 2.

Para demostrar que $^*\mathbf{X}$ es casi (numerablemente) compacto si $\mathbf{X}$ lo

⁽¹⁾ Designamos por $\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ el conjunto de las aplicaciones continuas de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$.

es, vamos a probar que el interior $(*F)^{\circ}$ en $*X$ de cualquier conjunto $*F$, cerrado en $*X$, es el interior F° en X de un conjunto $F \subset *F$ cerrado en X . En efecto, siendo $*F$ cerrado en $*X$, $*F$ es intersección $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_{\lambda} \cup H_{\lambda})$ de conjuntos $F_{\lambda} \cup H_{\lambda}$ donde F_{λ} es cerrado en X y $H_{\lambda} \in \mathcal{H}$. Por tanto, si $x \in (*F)^{\circ}$ existe un abierto $*G_0 = G_0 - H_0$ con $G_0 \in \mathcal{G}$ y $H_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$x \in G_0 - H_0 \subset *F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_{\lambda} \cup H_{\lambda}).$$

De aquí se deduce

$$G_0 - F_{\lambda} \subset H_0 \cup H_{\lambda}$$

para cada $\lambda \in \Lambda$ y en virtud de 2 y 3 que $x \in G_0 \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda}$, $x \in (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda})^{\circ}$ y

$$(*F)^{\circ} \subset F^{\circ} \text{ con } F \subset *F$$

si ponemos $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda}$. Como por otra parte $F^{\circ} \subset (*F)^{\circ}$ por la condición 1, resulta

$$F^{\circ} = (*F)^{\circ}.$$

Supongamos ahora que $(*F_{\lambda})^{\circ} \mid \lambda \in \Lambda$ sea un cubrimiento de $*X$ formado por interiores $(*F_{\lambda})^{\circ}$ en $*X$ de cerrados $*F_{\lambda}$ en $*X$, entonces para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un conjunto $F_{\lambda} \subset *F_{\lambda}$, cerrado en X , tal que $F_{\lambda}^{\circ} = (*F_{\lambda})^{\circ}$, y

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (*F_{\lambda})^{\circ} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda}^{\circ}.$$

De esto resulta, si X es casi (numerablemente) compacto (y Λ numerable), que se puede encontrar un número finito $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \dots, F_{\lambda_n}$ de dichos conjuntos F_{λ} de forma que

$$X = \bigcup_{k=1}^n F_{\lambda_k} \subset \bigcup_{k=1}^n *F_{\lambda_k}.$$

Por consiguiente, existe un cubrimiento finito $\{*F_{\lambda_k} \mid k=1, 2, \dots, n\}$ de X con $\lambda_k \in \Lambda$ y $*X$ es casi (numerablemente) compacto.

Para concluir es suficiente probar que si $\mathcal{H}$ satisface la condición 4 el conjunto H_0 carece de puntos de acumulación en $*X$. En efecto, si existiese un punto x de acumulación en $*X$ de H_0 , sería también x punto de acumulación en X de H_0 puesto que $\mathcal{G} \subset *\mathcal{G}$. Ahora bien, esto es absurdo porque el conjunto $*G = X - H_1$ con $H_1 = H - \{x_0\} \in \mathcal{H}$ es un entorno de x en $*X$ que no contiene ningún punto de H_0 .

EJEMPLO 2. - Sea X el intervalo $[0,1]$ de la recta real R y $\mathbf{X}$ el espacio topológico inducido por R sobre X . Entonces, para construir el espacio $^*\mathbf{X}$, según el método del teorema 14, se puede tomar por $\mathcal{K}$ una cualquiera de las clases $\mathcal{K}_k$ siguientes:

a) $\mathcal{K}_1$ es la clase de los subconjuntos de un conjunto infinito H_0 de $\mathbf{X}$ que carezca de puntos interiores.

b) $\mathcal{K}_2$ es la clase de los subconjuntos numerables de X .

c) $\mathcal{K}_3$ es la clase de los conjuntos de medida nula de X .

COROLARIO 4. - Existen espacios de HAUSDORFF casi compactos, es decir, H -cerrados, que no son numerablemente compactos.

DEMOSTRACIÓN. - Resulta del teorema 14 y del ejemplo 2.

OBSERVACIÓN 9. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico numerablemente compacto y $\mathcal{K}$ satisface las cuatro condiciones del teorema 14, $\mathbf{X}$ no es regular. Sea H_0 el conjunto al que se refiere la condición 4. Entonces, como $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto, existe un punto x_0 de acumulación en $\mathbf{X}$ de H_0 y, por consiguiente, de $H_0 - \{x_0\}$. Siendo, evidentemente, $H_0 - \{x_0\}$ cerrado en $^*\mathbf{X}$ y $x_0 \notin H_0 - \{x_0\}$, para demostrar que $^*\mathbf{X}$ no es regular es suficiente probar que todo par de entornos de x_0 y $^*F = H_0 - \{x_0\}$ tienen intersección no vacía. En efecto, si

$$^*G_0 = G_0 - H_0 \supset \{x_0\} \quad (G_0 \in \mathcal{G}, H_0 \in \mathcal{K})$$

y

$$^*G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda - H_\lambda) \supset ^*F \quad (G_\lambda \in \mathcal{G}, H_\lambda \in \mathcal{K})$$

y fuese $^*G \cap ^*G = \emptyset$, tendríamos

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [(G_0 \cap G_\lambda) - (H_0 \cup H_\lambda)] \\ &= (G_0 - H_0) \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda - H_\lambda) = \emptyset \end{aligned}$$

y, por tanto, $G_0 \cap G_\lambda \subset H_0 \cup H_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. De aquí se deduce, en virtud de las condiciones 2 y 3 que satisface $\mathcal{K}$, $G_0 \cap G_\lambda = \emptyset$ para cada $\lambda \in \Lambda$, $G_0 \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \emptyset$ y $G_0 \cap ^*F = \emptyset$. Como esto último está en contradicción con el hecho de ser x_0 un punto de acumulación en $\mathbf{X}$ de $H_0 - \{x_0\}$ tendremos $^*G_0 \cap ^*G \neq \emptyset$ y la proposición queda probada.

En vista de la observación 9 abandonamos el método del teorema 14 para construir un espacio regular casi numerablemente compacto pero no numerablemente compacto. Esto lo lograremos mediante el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3. - Sea X el conjunto de las funciones medibles x sobre la recta real R que verifican $|x(t)| \leq 1$ para todo $t \in R$, y $\mathbf{X}$ el espacio

topológico $(X, \mathcal{G})$ definido sobre X por la topología $\mathcal{G}$ engendrada por la familia de conjuntos:

$$\mathcal{G}: E_t^I = \{x \mid x(t) \in I, x \in X\}.$$

donde I es un intervalo abierto en $I_0 = [-1, 1]$ y $t \in R$.

Es fácil ver que $\mathbf{X}$ es un espacio de HAUSDORFF. En efecto, si $x_1 \neq x_2$ existe un punto $t \in R$ tal que $x_1(t) \neq x_2(t)$ y, por consiguiente, dos intervalos abiertos disjuntos, I_1 e I_2 , tales que $x_k(t) \in I_k$ para $k = 1, 2$. Entonces, $E_t^{I_1}$ y $E_t^{I_2}$ son dos entornos disjuntos de x_1 y x_2 , respectivamente.

Para demostrar que $\mathbf{X}$ es regular es suficiente probar que cualquiera que sea el punto $x \in X$ y el entorno

$$U = \bigcap_{k=1}^n E_{t_k}^{I_k}$$

de x , perteneciente a la base de $\mathcal{G}$ engendrada por $\mathcal{G}$, existe un entorno

$$V = \bigcap_{k=1}^{k=1} E_{t_k}^{J_k}$$

de x tal que

$$\bar{V} = \bigcap_{k=1}^n E_{t_k}^{\bar{J}_k} \subset U,$$

pero para esto basta tener presente que para cada k se puede encontrar un intervalo abierto J_k de forma que $x(t_k) \in J_k$ y $\bar{J}_k \subset I_k$.

Para demostrar que $\mathbf{X}$ es casi numerablemente compacto es suficiente probar, según el teorema 6, que cualquiera que sea el conjunto numerable $X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ y la familia $\{V_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de entornos V_k de $X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ existe un punto $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V'_k$. Efectivamente, siendo $\bigcap_{k=1}^n V_k$ un entorno de x_n , existe un conjunto

$$U_n = \bigcap_{k=1}^{k_n} E_{t_{n,k}}^{I_{n,k}} \quad (t_{n,k'} \neq t_{n,k''} \text{ para } k' \neq k'')$$

que contiene a x_n y está contenido en $\bigcap_{k=1}^n V_k$ y, por tanto,

$$X_n \subset G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k \subset V_n.$$

El conjunto $\{t_{n,k} \mid k=1, 2, \dots, k_n; n=1, 2, \dots\}$ es numerable y, por consiguiente, podemos escribirle en la forma $\{t_k \mid k=1, 2, \dots\}$. Entonces, siendo $|x_k(t)| \leq 1$ en $\mathbf{R}$ y el intervalo $[-1, 1]$ un conjunto sucesionalmente compacto, por el proceso de la diagonal de CANTOR podemos construir una sucesión $\{n_i\}$ de modo que cada sucesión $\{x_{n_i}(t_k)\}$ converja para $i \rightarrow \infty$ hacia un punto α_k de $[-1, 1]$. Si definimos ahora x_0 poniendo

$$x_0(t_k) = \alpha_k \quad \text{para } k=1, 2, \dots$$

y

$$x_0(t) = 0 \quad \text{para } t \notin \{t_k \mid k=1, 2, \dots\},$$

resulta que x_0 es una función medible que pertenece a $\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V'_n$ por ser x_0 límite de la sucesión $\{x_{n_i}^*\}$ definida por

$$x_n^*(t_k) = x_n(t_k) \quad \text{para } k=1, 2, \dots$$

y

$$x_n^*(t) = 0 \quad \text{para } t \notin \{t_k \mid k=1, 2, \dots\},$$

y $x_n^* \in U_n \subset G_k$ para $k \leq n$.

Finalmente, $\mathbf{X}$ no es numerablemente compacto porque si ponemos

$$x_n(0) = 0,$$

$$x_n(t) = 1 \quad \text{para } 0 < t < 1/2^n$$

y

$$x_n(t + 2^{-n}) = -x_n(t),$$

y $X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ resulta $\bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k = \emptyset$. En efecto, si $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k$, por ser

$$f: \quad f(x) = x(t + 2^{-n}) - x(t) \quad (f = f_t, n)$$

y

$$g: \quad g(x) = x(-t) + x(t) \quad (g = g_t)$$

funciones continuas en $\mathbf{X}$ y nulas sobre X_{n+1} , se deduce $f(x_0) = 0$ y $g(x_0) = 0$, es decir,

$$x_0(t + 2^{-n}) = x_0(t)$$

y

$$x_0(-t) = -x_0(t)$$

para cada entero $n \geq 0$ y $t \in \mathbf{R}$. De esto resulta, siendo x_0 una función medible acotada, que

$$x_0(t) \sim 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (0 \cos. n\pi t + 0 \operatorname{sen.} n\pi t)$$

y, por consiguiente, $x_0(t) = 0$ en casi todo $\mathbf{R}$. Por tanto, existe un número irracional α que satisface $x_0(z) = 0$ y un entorno E_{α}^I de x_0 con $I = (-1, 1)$ que tiene intersección vacía con X_1 puesto que $x_n(z) = \pm 1$ para todo n . Como esta conclusión está en evidente contradicción con la hipótesis $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k$ se sigue $\bigcap_{k=1}^{\infty} X'_k = \emptyset$ ⁽¹²⁾.

En resumen:

TEOREMA 15. — *Existen espacios topológicos (T_3) que son casi numerablemente compactos pero no numerablemente compactos ni, por consiguiente, casi compactos.*

De manera análoga que hemos demostrado que el espacio topológico $\mathbf{X}$ del ejemplo 3 es casi numerablemente compacto se puede probar:

TEOREMA 16. — *El producto topológico $\mathbf{X} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{X}_{\lambda}$ de una familia $\{\mathbf{X}_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ de espacios topológicos sucesionalmente compactos es un espacio casi numerablemente compacto, así como también es casi numerablemente compacto todo subespacio $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ cuya proyección en $\prod_{\lambda \in \Lambda'} \mathbf{X}_{\lambda}$ coincida con este espacio cualquiera que sea el subconjunto finito o numerable Λ' de Λ .*

§ 5. La existencia de máximo y mínimo de funciones continuas.

Con objeto de hacer una exposición completa de la cuestión que tratamos y de facilitar la comprensión de otras demostraciones comenzaremos probando el ya citado teorema de BAIRE.

⁽¹²⁾ Siendo por el teorema de TYCHONOFF del producto el espacio $I^{\mathbf{R}}$ compacto para $I = [-1, 1]$, existe un punto x_0 de acumulación en $I^{\mathbf{R}}$ de cada uno de estos conjuntos X_k . Este punto por lo que acabamos de probar no pertenece a $\mathbf{X}$, por tanto, x_0 es una función no medible. De esto resulta inmediatamente que $H_1 = \{t \mid x_0(t) = 1\}$ y $H_{-1} = \{t \mid x_0(t) = -1\}$ son conjuntos no medibles. Parece que de esta forma hemos conseguido demostrar la existencia de conjuntos lineales no medibles sin hacer uso del axioma de la elección, pero no es así porque según es sabido el teorema de TYCHONOFF implica dicho axioma. Véase, J. L. KELLEY, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fund. Math. 37 (1950), 75-76.

TEOREMA 17 - Si X es un espacio numerablemente compacto, no vacío, y si f es una función real superiormente (inferiormente) continua en X , f tiene máximo (mínimo).

DEMOSTRACIÓN 1. - En efecto, si existiese una función f superiormente continua en X que careciese de máximo, como se puede encontrar una sucesión creciente $\{\lambda_n\}$ de números reales con

$$\lim_n \lambda_n = \sup_{x \in X} f(x) \quad (\neq -\infty \text{ por ser } X \neq \emptyset)$$

los conjuntos

$$G_n = \{x \mid f(x) < \lambda_n\}$$

formarían un cubrimiento abierto y numerable de X que no poseería ningún subcubrimiento finito y, por consiguiente, X no sería numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN 2. - Evidentemente, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X con

$$\lim_n f(x_n) = M \equiv \sup_{x \in X} f(x).$$

En el caso que existan infinitos puntos $x_n = x_0$ sería $f(x_0) = M$ y f tendría máximo. Por tanto, podemos suponer que todos los puntos x_n son distintos y forman un conjunto numerable

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Entonces, siendo X numerablemente compacto, existe un punto x_0 que es de acumulación de cada conjunto

$$X_k = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}.$$

De aquí resulta $f(x_0) = M$ porque si fuese $f(x_0) \neq M$ podríamos elegir el número real λ de modo que $f(x_0) < \lambda < M$ y el entorno

$$G = \{x \mid f(x) < \lambda\}$$

de x_0 no contendría ningún punto de X_k para k suficientemente grande, lo cual está en contradicción con el hecho de ser x_0 un punto adherente de cada X_k .

COROLARIO 5. - Si X es un espacio numerablemente compacto, no vacío, y f es una función real continua en X , f tiene máximo y mínimo.

OBSERVACIÓN 10. - No se puede mejorar el corolario 5 exigiendo que $\mathbf{X}$ posea la propiedad de FRÉCHET en lugar de que sea numerablemente compacto. En efecto, si $\mathbf{X}$ es el espacio topológico del ejemplo 1, la función real f definida poniendo

$$f(x) = (-1)^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

para $x = a_k$ y $x = b_k$ es continua y sin embargo carece de máximo y mínimo.

TEOREMA 18. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio casi numerablemente compacto, no vacío, y si f es una función real continua en $\mathbf{X}$, f tiene máximo y mínimo.

DEMOSTRACIÓN 1. - En efecto, si existiese una función real f continua en $\mathbf{X}$ que careciese de máximo, pudiéndose encontrar una sucesión creciente $\{\lambda_n\}$ de números reales con

$$\lim_n \lambda_n = \sup_{x \in \mathbf{X}} f(x),$$

los interiores F_n^0 de los conjuntos cerrados

$$F_n = \{x \mid f(x) \leq \lambda_n\}$$

formarían un cubrimiento numerable de $\mathbf{X}$ puesto que

$$F_n^0 \supset G_n = \{x \mid f(x) < \lambda_n\}$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{X},$$

pero entonces, siendo

$$\bigcup_{k=1}^n F_k = F_n \neq \mathbf{X}$$

para todo n , $\mathbf{X}$ no sería casi numerablemente compacto contra lo supuesto. Del mismo modo se prueba la existencia del mínimo.

DEMOSTRACIÓN 2. - Será suficiente demostrar la existencia del máximo. Sea

$$M = \sup_{x \in \mathbf{X}} f(x),$$

entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ tal que

$$\lim_n f(x_n) = M.$$

Por tanto, descartando el caso trivial que existan infinitos puntos x_n idénticos, podemos suponer todos los x_n distintos. Siendo $\mathbf{X}$ casi numerablemente compacto, si designamos por U_n el entorno

$$\{x \mid |f(x) - f(x_n)| < 1/n\}$$

de x_n y ponemos $V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k$, se deduce por el teorema 6 que existe un punto x_0 que es de acumulación de cada uno de dichos conjuntos V_n . De aquí resulta, como vamos a ver, $f(x_0) = M$ y, por consiguiente, que f tiene máximo. En efecto, si fuese $f(x_0) < M$, cada conjunto

$$G_\lambda = \{x \mid f(x) < \lambda\}$$

con $\lambda \in (f(x_0), M)$ sería un entorno de x_0 que tendría intersección vacía con V_n para n suficientemente grande, puesto que

$$f(x) > f(x_n) - 1/n > \lambda$$

para $x \in U_n$ y $n \geq n_\lambda$.

OBSERVACIÓN 11. - *Como ya hemos dicho antes en § 1 y veremos más tarde con el teorema 21 no se puede mejorar el teorema 17 suponiendo $\mathbf{X}$ casi numerablemente compacto en lugar de numerablemente compacto.* Desde luego el lector puede comprobar que no se puede demostrar esta pretendida generalización siguiendo la misma marcha que en el teorema 18.

OBSERVACIÓN 12. - *Como aplicación de la observación 7 se puede probar que toda función real continua en un espacio casi compacto $\mathbf{X}$ tiene máximo y mínimo.* Para ello basta tener presente que según el corolario 3 es $\mathcal{C}(\mathbf{X}^*, \mathbf{R}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ y que $\mathbf{X}^*$ es compacto.

De forma análoga se demuestran los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 19. - *Dados los espacios topológicos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, si f es una aplicación continua de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$, la imagen $f(X)$ de cada conjunto $X \subset \mathbf{X}$ (numerablemente) compacto es también un conjunto (numerablemente) compacto,*

TEOREMA 20. - *Dados los espacios topológicos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, si f es una aplicación continua de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{Y}$, la imagen $f(X)$ de cada conjunto $X \subset \mathbf{X}$ casi (numerablemente) compacto es también un conjunto casi (numerablemente) compacto.*

§ 6. Los recíprocos de los teoremas de existencia de máximo y mínimo.

TEOREMA 21. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico sobre el que toda función real superiormente (inferiormente) continua tiene máximo (mínimo), $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN. - En efecto, si $\mathbf{X}$ no fuese numerablemente compacto existiría una sucesión creciente (en sentido estricto) $\{G_n\}$ de conjuntos abiertos con la propiedad

$$(6.1) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{X}.$$

Entonces, si definimos la función real f en $\mathbf{X}$ poniendo

$$(6.2) \quad f(x) = 1 - \frac{1}{n}$$

para $x \in G_n - G_{n-1}$, ($G_0 = \emptyset$), resulta que f es superiormente continua en cada punto x_0 de $\mathbf{X}$ puesto que se puede encontrar un entero n_0 de modo que $x_0 \in G_{n_0} - G_{n_0-1}$ y cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$ se tiene

$$f(x) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n_0} < f(x_0) + \varepsilon$$

para todo $x \in G_{n_0}$.

Para terminar basta observar que

$$\sup_{x \in \mathbf{X}} f(x) = 1$$

y

$$f(x) < 1$$

para cada $x \in \mathbf{X}$.

COROLARIO 6. - Toda función real superiormente (inferiormente) continua tiene máximo (mínimo) en un espacio topológico $\mathbf{X}$, no vacío, si y solo si $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto.

DEFINICIÓN 5. - Un espacio topológico $\mathbf{X}$ se dice completamente regular si para cada punto x_0 de $\mathbf{X}$ y cada entorno U de x_0 existe una función real continua f tal que $f(x) = 0$ para $x \in \mathbf{X} - U$ y $f(x_0) \neq 0$. Diremos que $\mathbf{X}$ es completamente casi regular si para cada punto x_0 de $\mathbf{X}$ y cada

entorno U de x_0 existe una función real continua f tal que $f(x) = 0$ para $x \in X - U$ y $f(x_1) \neq 0$ para algún punto $x_1 \in U$ ⁽¹³⁾.

TEOREMA 22. - Si X es un espacio topológico completamente casi regular sobre el que toda función real continua tiene máximo o mínimo, X es casi numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN. - Supongamos que X no fuera casi numerablemente compacto. Entonces, por el teorema 3 existe una sucesión decreciente $\{G_n\}$ de abiertos con

$$(6.3) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n = \emptyset.$$

Evidentemente, esta sucesión se puede suponer que satisface la condición

$$(6.4) \quad G_n - \bar{G}_{n+1} \neq \emptyset$$

para todo n , ya que en caso contrario se podría extraer de ella una sucesión "parcial" $\{G_{n_k}\}$ de forma que $G_{n_k} - \bar{G}_{n_{k+1}} \neq \emptyset$ ⁽¹⁴⁾.

Por ser entonces $G_n - \bar{G}_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n y ser X completamente casi regular se puede encontrar una función $f_n \in \mathcal{C}(X, R)$ y un punto $x_n \in G_n - \bar{G}_{n+1}$ de manera que $f_n(x) = 0$ para $x \notin G_n - \bar{G}_{n+1}$ y $f_n(x_n) \neq 0$.

Consideremos la función real

$$(6.5) \quad f: \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

donde los coeficientes c_n están determinados por las ecuaciones recurrentes

$$(6.6) \quad \sum_{k=1}^n c_k f_k(x_n) = (-2)^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

es decir,

$$c_n = (-2)^n f_n(x_n)^{-1} - f_n(x_n)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_k(x_n).$$

⁽¹³⁾ De acuerdo con esta definición se dirá que X es *casi regular* si para cada punto x_0 de X y cada entorno U de x_0 existe un punto $x \in U$ que posee un entorno cerrado $V \subset U$.

⁽¹⁴⁾ Si fuese $\bar{G}_{n+p} \supset G_n$ para $n = n_0$ y cada $p > 0$ resultaría

$$\bar{G}_{n_0+p} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n = \emptyset$$

para todo $p > 0$, y $\{G_n\}$ no sería decreciente.

La serie (6.5) es convergente y f es continua. En efecto, si x_0 es un punto cualquiera de $\mathbf{X}$, en virtud de (6.3) existe un entero n_0 tal que $x_0 \notin \bar{G}_{n_0}$. Entonces, $U = \mathbf{X} - \bar{G}_{n_0}$ es un entorno de x_0 que tiene intersección vacía con cada G_n de índice $n \geq n_0$ y, por consiguiente,

$$(6.7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n f_n(x) \quad (\neq \pm \infty)$$

para $x \in U$, y f es continua en U y, en particular, en el punto x_0 .

Además,

$$\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \sup_{x \in \mathbf{X}} f(x) = +\infty$$

puesto que

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x_n) = (-2)^n \quad (x_n \in G_{n+p} \text{ para } p > 0)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Por tanto, f carece de máximo y mínimo y el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 13. - *El teorema 22 no se puede mejorar afirmando que $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto.* En efecto, el espacio topológico $^*\mathbf{X}$ del ejemplo 2 a) con $H_0 = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$ es completamente casi regular y toda función $f \in \mathcal{C}(^*\mathbf{X}, \mathbf{R})$ tiene máximo y mínimo por ser $^*\mathbf{X}$ casi numerablemente compacto, pero dicho espacio $^*\mathbf{X}$ no es numerablemente compacto.

LEMA 2. - *Todo espacio topológico (T_4) es completamente regular.*

DEMOSTRACIÓN. - Resulta, como se sabe, del teorema de URYSOHN. En efecto, dado un punto x_0 de $\mathbf{X}$ y un entorno abierto U de x_0 , los conjuntos $F_0 = \mathbf{X} - U$ y $F_1 = \{x_0\}$ son cerrados y disjuntos y por el teorema de URYSOHN existe una función $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ que toma el valor cero en F_0 y el valor uno en F_1 .

COROLARIO 7. - *Si $\mathbf{X}$ es un espacio topológico (T_4) sobre el que toda función real continua tiene máximo o mínimo, $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. - Se deduce del teorema 22, lema 2 y teorema 10.

Este corolario se puede demostrar también aplicando el teorema de prolongación de TIETZE. Efectivamente, si $\mathbf{X}$ no fuese numerablemente compacto existiría un subconjunto numerable $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ que carecería de puntos de acumulación. Entonces, si definimos f_0 en F poniendo

$$(6.8) \quad f_0(x_n) = (-2)^n,$$

por ser f_0 continua y F un conjunto cerrado existe, según el teorema de Tietze, una prolongación continua (finita) f de f_0 en $\mathbf{X}$ que, evidentemente, no tiene máximo ni mínimo puesto que

$$\inf_{x \in X} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \sup_{x \in X} f(x) = +\infty \quad (^{15}).$$

COROLARIO 8. - Si $\mathbf{X}$ es un espacio métrico sobre el que toda función real continua tiene máximo o mínimo, $\mathbf{X}$ es numerablemente compacto y, por consiguiente, compacto.

OBSERVACIÓN 14. - Se puede demostrar directamente que si $\mathbf{X}$ es un espacio métrico no numerablemente compacto existe una función real continua sobre $\mathbf{X}$ que carece de máximo. En efecto, en tal caso existe un conjunto numerable $F = \{x_1, x_2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ que carece de puntos de acumulación. Si ponemos entonces

$$F_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{y} \quad F_n^* = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\},$$

se prueba fácilmente que la función real

$$f: \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho(x, F_n)}{\rho(x, F_n) + \rho(x, F_n^*)} \quad (x \in \mathbf{X}),$$

donde $\rho(x, A)$ es la distancia de x y A , es continua y carece de máximo por ser

$$\sup_{x \in X} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad f < 1.$$

El corolario 6 resuelve el problema de caracterizar los espacios topológicos que poseen la propiedad de que toda función real superiormente continua tiene máximo. Esto ha sido posible de manera tan sencilla porque cualquiera que sea el conjunto abierto G de $\mathbf{X}$ existe una función superiormente continua f tal que $G = \{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Lo mismo podemos decir sobre la caracterización de los espacios topológicos (T_4) que poseen propiedad análoga para las funciones reales continuas ya que todo abierto G es reunión de conjuntos $G_f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$

(¹⁵) Véase, HEWITT [6] pág. 69. La demostración de la Nota II, pág. 76 de [2], que cita HEWITT, no es correcta por no asegurar que la prolongación sea finita. Para una demostración rigurosa véase DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T., *Linear Operators I*, pág. 17, New York, Interscience Publishers, Inc., 1958.

con $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$. Esta cuestión ha quedado resuelta por el teorema 18 y el corolario 7.

Para resolver este problema para los espacios topológicos generales esta observación nos conduce hacerlo mediante el espacio topológico $\widehat{\mathbf{X}}$ definido por la topología $\widehat{\mathcal{G}}$ engendrada por la familia $\widehat{\mathcal{G}}_b$ de los conjuntos $\widehat{G} = f^{-1}(A)$ de $\mathbf{X}$ que son imagen recíproca de un conjunto abierto arbitrario A de $\mathbf{R}$ por una función cualquiera $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$. Es evidente que todo conjunto

$$\widehat{G}_f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

con $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$, pertenece a $\widehat{\mathcal{G}}_b$; pero también es cierta la propiedad recíproca, esto es, que para cada conjunto $\widehat{G} = f^{-1}(A)$ de $\widehat{\mathcal{G}}_b$ existe una función $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$ tal que $\widehat{G} = \widehat{G}_f$. En efecto, si $B = \mathbf{R} - A$ y definimos las funciones g y f_0 por

$$g(y) = \rho(y, B)$$

y

$$f_0(x) = g(f(x)) \quad (f_0 = g \circ f),$$

resulta $\widehat{G} = \widehat{G}_{f_0}$. De aquí se deduce que $\widehat{\mathcal{G}}_b$ es una base de $\widehat{\mathcal{G}}$ y que toda reunión numerable de conjuntos de $\widehat{\mathcal{G}}_b$ pertenece a $\widehat{\mathcal{G}}_b$ puesto que

a) $\emptyset \in \widehat{\mathcal{G}}_b$ y $X \in \widehat{\mathcal{G}}_b$. Basta tener presente que

$$\emptyset = \{x \mid 0(x) \neq 0\} \quad (0(x) \equiv 0)$$

y

$$X = \{x \mid 1(x) \neq 0\} \quad (1(x) \equiv 1).$$

b) Si $\widehat{G}_{f_k} \in \widehat{\mathcal{G}}_b$ para $k = 1, 2$ ($f_k \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$), el conjunto $\widehat{G}_{f_1} \cap \widehat{G}_{f_2}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{G}}_b$. Basta observar que $\widehat{G}_{f_1} \cap \widehat{G}_{f_2} = \widehat{G}_f$ para $f = f_1 f_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$.

c) Si $\widehat{G}_{f_k} \in \widehat{\mathcal{G}}_b$ para $k = 1, 2, \dots$ ($f_k \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$), el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} \widehat{G}_{f_k}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{G}}_b$. En efecto, si

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f_k(x)|}{|f_k(x)| + 1}$$

resulta $\bigcup_{k=1}^{\infty} \widehat{G}_{f_k} = \widehat{G}_f$ con $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{R})$.

De la definición de $\widehat{\mathbf{X}}$ se deduce:

TEOREMA 23. - 1. $\widehat{X} = X$ si y solo si X es completamente regular.

2. $\mathcal{C}(\widehat{X}, R) = \mathcal{C}(X, R)$ y $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{C}(\widehat{X}, \widehat{Y})$.

3. Si $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2$ y $X_k = (X, \mathcal{Q}_k)$ es $\mathcal{C}(X_1, R) = \mathcal{C}(X_2, R)$, si y solo si $\mathcal{Q}_2 \supset \widehat{\mathcal{Q}}_1$.

COROLARIO 9. - Si $X^* = (X, \mathcal{Q}^*)$ y $X^{(\varphi)} = (X, \mathcal{Q}^{(\varphi)})$ son los espacios topológicos asociados a X según el teorema 11 y observación 8, resulta

$$\mathcal{Q}^* \supset \mathcal{Q}^{(\varphi)} \supset \widehat{\mathcal{Q}}.$$

OBSERVACIÓN 15. - En el corolario 9 no se puede sustituir $\mathcal{Q}^{(\varphi)} \supset \widehat{\mathcal{Q}}$ por $\mathcal{Q}^{(\varphi)} = \widehat{\mathcal{Q}}$. Para probar esto basta recordar que existen espacios regulares $X = (X, \mathcal{Q})$ con $\mathcal{Q} \neq \{\emptyset, X\}$ sobre los que cada función real continua es una constante ⁽¹⁶⁾. Efectivamente, como entonces según el teorema 12 se tiene $\mathcal{Q}^{(\varphi)} = \mathcal{Q}^* = \widehat{\mathcal{Q}}$, es evidente que $\widehat{\mathcal{Q}} = \{\emptyset, X\} \neq \mathcal{Q}^{(\varphi)}$.

TEOREMA 24. - Dado un espacio topológico X no vacío, toda función $f \in \mathcal{C}(X, R)$ tiene máximo y mínimo si y solo si $\widehat{X}$ es casi numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN. - Resulta de los teoremas 23, 18 y 22.

OBSERVACIÓN 16. - En el teorema 24 no se puede suprimir la palabra «casi». Para demostrar esta afirmación basta probar que para el espacio topológico X del ejemplo 3 se tiene $\widehat{X} = X$, ya que como sabemos dicho espacio X no es numerablemente compacto y sin embargo toda función $f \in \mathcal{C}(X, R)$ tiene máximo y mínimo por ser X casi numerablemente compacto. En efecto, cualquiera que sea el conjunto E_t^I de $\mathcal{G}$ existe una función $f \in \mathcal{C}(X, R)$ tal que

$$E_t^I = \{x \mid f(x) \neq 0\}.$$

Por ejemplo, si $\rho(y, B)$ es la distancia de y y $B = R - I$, basta tomar

$$f(x) = \rho(x(t), B).$$

Por tanto, $\widehat{\mathcal{Q}} \supset \mathcal{Q}$ y, como evidentemente $\widehat{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}$, tendremos $\widehat{X} = X$.

OBSERVACIÓN 17. - Si toda función $f \in \mathcal{C}(X, R)$ tiene máximo o mínimo y $\widehat{\mathcal{Q}} = \widehat{\mathcal{Q}}_b$, $\widehat{X}$ es numerablemente compacto. Resulta del teorema 24 teniendo presente el teorema 9 o bien procediendo de manera directa como en la observación 14.

⁽¹⁶⁾ Véase HEWITT [5] y NOVAK [10].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALEXANDROFF, A. D., *On the extension of a Hausdorff space to an H-closed space*, C.R. (Doklady) «Acad. Sci. U.R.S.S.», N. S. 37 (1942) 118-121.
- [2] ALEXANDROFF, P. and HOPF, H., *Topologie I*, Berlin, Springer, 1935.
- [3] BOURBAKI, N., *Topologie générale*, Act. Sci. Ind. 858-1142. Paris, Hermann, 1951.
- [4] FRÉCHET, M., *Généralisation d'un théorème de Weierstrass*, C. R. Acad. Sci. 139 (1904) pág. 848. Este trabajo se encuentra reproducido en la Nota A, pág. 275 de «*Les Espaces Abstraites*», Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- [5] HEWITT, E., *On two problems of Urysohn*, «Ann. of Math.» (2) 47 (1946) 503-509.
- [6] — —, *Ring of real-valued continuous functions I*, «Trans. Amer. Math. Soc.» 64 (1948) 45-99.
- [7] KATÉTOV, M., *Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume*, «Časopis Pěst. Mat. Fys.» 69 (1940) 36-49.
- [8] — —, *On H-closed extensions of topological spaces*, Časopis Pěst. Mat. Fys. 72 (1947) 17-32.
- [9] KELLEY, J. L., *General Topology*, New York, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.
- [10] NOVAK, J., *Regular space on which every continuous functions is constant*, Časopis Pěst. Mat. Fys. 73 (1948) 58-68.
- [11] STONE, M. H., *The theory of representations for Boolean algebras*, «Trans. Amer. Math. Soc.» 40 (1936) 37-111.
- [12] TICHONOFF, A., *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, «Math. Ann.», 102 (1929) 544-561.

APÉNDICE

Redactado este trabajo hemos tenido conocimiento de otros estrechamente relacionados con el contenido de éste. Estos trabajos son los siguientes:

- [1]* AQUARO, G., *Funzioni reali continue e spazii topologici pseudocompatti*, Atti del VI Congresso dell'Unione Mat. Italiana. Roma, Ed. Cremonese, 1960.
- [2]* — —, *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, «Annali di Mat. Pura ed Appl.», (IV) Vol. XLII (1959) 319-389.
- [3]* BAGLEY, E.H. CONNELL and J. D. MCKNIGHT JR., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, «Proc. Amer. Soc.» Vol. 9 (1958) 500-506.
- [4]* ISEKI, K. and KASAHARA, S., *On pseudo-compact and countably compact spaces*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 100-102.
- [5]* ISEKI, K., *On weakly compact topological spaces*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 182.
- [6]* — —, *On weakly compact regular spaces I*, Proc. Japan Acad., Vol. 33 (1957) 252-254.
- [7]* — —, *A characterization of pseudo-compact spaces*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 320-322.
- [8]* — —, *On weakly compact and countably compact topological spaces*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 323-324.
- [9]* KASAHARA, S., *Boundedness of semi-continuous finite real functions*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 183-186.
- [10]* — —, *On weakly compact regular spaces II*, «Proc. Japan Acad.», Vol. 33 (1957) 255-259.
- [11]* MARDEŠIĆ, S. et PAPIĆ, P., *Sur les espaces dont toute transformation réelle continue est bornée*, «Glasnik Matematičko-Fizički i Astronomski», (I) Vol. 10 (1955) 225-232.

Debido a ello creemos que debemos comentar los resultados obtenidos en dichos trabajos comparándolos con los de éste.

Un espacio topológico X se dice debilmente compacto, según MARDEŠIĆ y PAPIĆ, si cada familia infinita de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos de X admite al menos un punto de acumulación. En otras palabras, X se dice debilmente compacto si ninguna familia infinita $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos de X es localmente finita.

Este concepto está intimamente relacionado con el de casi compacidad numerable según resulta del teorema 1 y de este otro de MARDEŠIĆ y PAPIĆ:

(TEOREMA 2) Sea X regular, entonces X es debilmente compacto si y solo si para cada familia abierta y numerable $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = X$ existe una subfamilia finita $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ tal que $\bigcup_{k=1}^n \bar{G}_k = X$.

Esta equivalencia es también válida para espacios no regulares puesto que:

TEOREMA. - Un espacio topológico X es debilmente compacto si y solo si es casi numerablemente compacto.

En efecto, si X es casi numerablemente compacto y $\{G_k\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos de X , poniendo $G_n^* = \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k$, resulta por el teorema 3 que existe al menos un punto $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n^*$ y, por consiguiente, todo entorno U de x_0 tiene intersección no vacía con infinitos G_k y la familia $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ no es localmente finita. Por tanto, X es debilmente compacto si es casi numerablemente compacto.

Recíprocamente, X es casi numerablemente compacto si es debilmente compacto. Efectivamente, si X no es casi numerablemente compacto por el teorema 3 y ⁽¹⁴⁾ existe una sucesión decreciente $\{G_k\}$ de conjuntos abiertos de X tal que $G_k^* = G_k - \bar{G}_{k+1} \neq \emptyset$ para todo k y $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k = \emptyset$. Por consiguiente, $\{G_k^* \mid k = 1, 2, \dots\}$ es una familia infinita de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos de X localmente finita, y X no es debilmente compacto.

De esta proposiciones resulta la equivalencia del teorema 10 y de otro de MARDEŠIĆ y PAPIĆ en el caso de espacios normales. Ambos teoremas se pueden mejorar introduciendo el axioma de separación (T_c) .

DEFINICIÓN. - Diremos que un espacio topológico X es debilmente normal si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos, A y B , el primero de ellos reunión numerable de clausuras de conjuntos formados por un solo punto, existen dos entornos disjuntos U y V de A y B , respectivamente

DEFINICIÓN. - Diremos que un espacio topológico X verifica el axioma (T_c) o es un espacio (T_c) si para cada punto x_0 de X existe un punto x_1 perteneciente a la clausura $\overline{x_0}$ de $\{x_0\}$ y tal que para todo $x \in \overline{x_1}$ se tiene $\overline{x} = \overline{x_1}$.

Evidentemente, todo espacio topológico (T_1) es un espacio (T_c) y, por el axioma de ZORN, todo espacio compacto es un espacio (T_c) .

TEOREMA 10'. - Si X es un espacio topológico (T_c) , debilmente normal y casi numerablemente compacto, entonces X es numerablemente compacto.

Para la demostración de este teorema se puede seguir el mismo camino que en el teorema 10 utilizando el siguiente:

LEMA. - Si X es un espacio topológico (T_c) no numerablemente compacto, existe un conjunto numerable $X_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ de X tal que $\overline{x} = \overline{x_k}$ para todo $x \in \overline{x_k}$, $x_k \notin \overline{X_{k+1}} = \overline{\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}}$ ($k = 1, 2, \dots$) y $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{X_k} = \emptyset$ ⁽¹⁷⁾.

Una generalización análoga admite el corolario 7:

COROLARIO 7'. - Si X es un espacio topológico (T_c) y normal sobre el que toda función real continua tiene máximo o mínimo, X es numerablemente compacto.

Teniendo presente el teorema 27 de [6] y que existen espacios completamente casi regulares no regulares, se ve que los teoremas 18 y 22 representan una mejora efectiva sobre el teorema 1 de MARDEŠIĆ y PAPIĆ referente a la caracterización de los espacios completamente regulares pseudo-compactos según HEWITT. Con la misma demostración del teorema 22 se obtiene:

TEOREMA 22'. - Si X es un espacio completamente casi regular tal que para cada función $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ existe un punto $x_0 \in X$ con la propiedad de que uno de los extremos de $f(X)$ es idéntico a otro de $f(U)$ para todo entorno U de x_0 , X es casi numerablemente compacto.

De manera análoga resulta:

TEOREMA 21'. - Si X es un espacio topológico tal que para cada función real superiormente (inferiormente) continua f existe un punto x_0 de X con la propiedad de que el extremo superior (inferior) de $f(X)$ es idéntico que el mismo extremo de $f(U)$, cualquiera que sea el entorno U de x_0 , X es numerablemente compacto.

Ahora vamos hacer un estudio comparado entre el teorema 24 y el corolario 1, § 8, [2]* de AQUARO, más general que el teorema anteriormente

⁽¹⁷⁾ De este lema resulta también: Si X es un espacio (T_0) y (T_c) que posee la propiedad de FRÉCHET, entonces X es numerablemente compacto.

citado de MARDEŠIĆ y PAPIĆ. He aquí los conceptos introducidos por AQUARO:

DEFINICIÓN 1. - Se llama sucesión de URYSHON sobre $\mathbf{X}$ a cada sucesión $\{U_k^{(h)} \mid 0 \leq h \leq 2^k\} \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ de familias finitas de conjuntos abiertos tal que:

- a) $U_k^{(h)} = U_{k+1}^{(2h)}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ y $h = 0, 1, \dots, 2^k$.
- b) $\overline{U_k^{(h)}} \subset U_k^{(h+1)}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ y $h = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ⁽¹⁸⁾.

DEFINICIÓN 2. - Si A y B son conjuntos de $\mathbf{X}$, se dice que A está $\mathcal{U}$ -contenido en B si existe una sucesión de URYSHON $\{U_k^{(h)} \mid 0 \leq h \leq 2^k\} \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ sobre $\mathbf{X}$ tal que $A \subset U_0^{(0)}$ y $U_0^{(1)} \subset B$, es decir, si existe una función real continua que toma el valor cero sobre A y el valor uno sobre el complementario de B .

DEFINICIÓN 3. - Un cubrimiento abierto y numerable $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ se dice $\mathcal{U}$ -reducible si existe un cubrimiento cerrado y numerable $\{F_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ tal que F_k está $\mathcal{U}$ -contenido en G_k para cada k .

Por consiguiente, $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ es un cubrimiento $\mathcal{U}$ -reducible de $\mathbf{X}$ si y solo si existe un cubrimiento numerable $\{\widehat{F}_k^0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\widehat{\mathbf{X}}$, formado, por interiores de cerrados $\widehat{F}_k^0$ en la topología $\widehat{\mathcal{Q}}$ antes definida, tal que cada $\widehat{F}_k^0$ está $\mathcal{U}$ -contenido en G_k .

DEFINICIÓN 4. - Un espacio topológico $\mathbf{X}$, se dice $\mathcal{U}$ -numerablemente compacto si cada cubrimiento abierto numerable $\mathcal{U}$ -reducible $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ posee un subcubrimiento finito.

De manera semejante introducimos los conceptos siguientes:

DEFINICIÓN 5. - Un cubrimiento abierto y numerable $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ diremos que es reducible si existe un cubrimiento numerable $\{\widehat{F}_k^0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$, formado por interiores de conjuntos cerrados en la topología $\widehat{\mathcal{Q}}$, tal que cada $\widehat{F}_k^0 \subset G_k$.

DEFINICIÓN 6. - Un espacio topológico $\mathbf{X}$ diremos que es pseudo-numerablemente compacto si cada cubrimiento abierto, numerable y reducible $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ de $\mathbf{X}$ posee algún subcubrimiento finito.

Así resulta inmediatamente:

TEOREMA 24'. - Si $\mathbf{X} \neq \emptyset$ las cinco propiedades siguientes son equivalentes:

- a) $\widehat{\mathbf{X}}$ es casi numerablemente compacto.
- b) $\mathbf{X}$ es pseudo-numerablemente compacto.

⁽¹⁸⁾ Obsérvese que $\widehat{\mathbf{X}}$ se puede construir mediante las sucesiones de URYSHON sobre $\mathbf{X}$.

- c) X es $\mathfrak{N}$ -numerablemente compacto.
 d) X Toda función real continua sobre X tiene máximo y mínimo.
 e) Para cada función $f \in \mathcal{C}(X, R)$ existe un punto x_0 tal que uno de los extremos de $f(X)$ es idéntico a otro de $f(U)$ cualquiera que sea el entorno U de x_0 .

En efecto, basta probar: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow a)$.

De esta forma ha quedado puesta de manifiesto la equivalencia del corolario 1, § 8 de [2]* y el teorema 24 de esta memoria.

De los teoremas 23 y 24' se obtiene:

TEOREMA. - Sea $X = (X, \mathfrak{Q})$ un espacio topológico y P una propiedad relativa a $\mathcal{C}(X, R)$ e independiente de $\mathfrak{Q}$ tal que, para cada espacio completamente regular X , $\mathcal{C}(X, R)$ posee la propiedad P si y solo si X es casi numerablemente compacto. Entonces, cualquiera que sea X , $\mathcal{C}(X, R)$ posee la propiedad P si y solo si X es pseudo- ($\mathfrak{N}$ -) numerablemente compacto.

Por tanto, partiendo del teorema 1 de MARDEŠIĆ y PAPIĆ se obtiene nuevamente de aquí el de AQUARO. Igualmente, partiendo de un resultado obtenido por I. GLICKSBERG (1952), J. MARIĆ (1957) y K. ISEKI (1957) resulta la generalización de AQUARO del teorema de DINI sobre el límite de sucesiones no decrecientes de funciones reales continuas.

Indicamos también la siguiente generalización del teorema 24':

TEOREMA 24''. - Sea Y un espacio lineal topológico o bien un espacio topológico que contenga un arco de JORDAN. Entonces, para toda aplicación continua f de X en Y , $f(X)$ es pseudo- ($\mathfrak{N}$ -) numerablemente compacto si y solo si X es pseudo- ($\mathfrak{N}$ -) numerablemente compacto.

De una cuestión análoga al teorema 16 se han ocupado R. W. BAGLEY, E. H. CONNELL y J. D. MCKNIGHT JR., los cuales han asegurado en [3]* bajo ciertas condiciones que el producto topológico $X \times Y$ de dos espacios casi numerablemente (o debilmente) compactos es casi numerablemente compacto. La propiedad utilizada por estos autores en el teorema 5 nos sugiere introducir el concepto siguiente:

DEFINICIÓN. - Diremos que un espacio topológico X es casi sucesionalmente compacto si para cada sucesión $\{G_n\}$ de abiertos de X existe un punto x_0 y una sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$ tales que cada entorno U de x_0 tiene intersección no vacía con todos los conjuntos, excepto a la más un número finito, de dicha sucesión parcial.

Lo mismo que para los espacios numerablemente y sucesionalmente compactos resulta:

TEOREMA. - Todo espacio casi sucesionalmente compacto es casi numerablemente compacto. Recíprocamente, cada espacio casi numerablemente com-

pacto que verifique el primer axioma de contabilidad es casi sucesionalmente compacto.

El teorema 5 de [3]* se puede enunciar así:

TEOREMA. - El producto topológico $X \times Y$ de un espacio casi numerablemente compacto X y de un espacio casi sucesionalmente compacto Y es casi numerablemente compacto.

El teorema 16 admite la mejora siguiente:

TEOREMA 16': - Sea A un subespacio del producto topológico $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que la proyección de A en $\prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ coincida con este espacio cualquiera que sea el subconjunto finito o numerable Λ' de Λ . Entonces, A es casi sucesionalmente compacto si y solo si cada espacio X_λ es casi sucesionalmente compacto.

Es importante hacer notar que la casi compacidad sucesional resiste la operación de «agujereamiento» de abiertos realizada en el teorema 14 puesto que:

TEOREMA 14'. - Si X es casi sucesionalmente compacto, el espacio $*X$, construido a partir de X y $\mathcal{K}$ según el teorema 14, es casi sucesionalmente compacto,

Estos mismos autores han demostrado también en [3]*, mediante un ejemplo (pág. 502), que existen espacios pseudocompactos, según HEWITT, que no son casi numerablemente compactos. La demostración se basa en la misma idea utilizada en la observación 15. Un ejemplo, quizás, más simple es éste:

Sea X la reunión de los conjuntos numerables $A = \{a_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ y $B = \{b_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, y $\mathcal{Q}$ la topología engendrada por todos los subconjuntos de A y los conjuntos $A_n \cup B_n$ donde $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Entonces, $X = (X, \mathcal{Q})$ es un espacio topológico (T_0) sobre el que toda función real continua es constante y, por consiguiente, pseudocompacto, y sin embargo no es casi numerablemente compacto.