Un théorème limite sur la dérivée tangentielle du potentiel généralisé de simple couche relatif au système parabolique.

par W. ŻAKOWSKI (a Varsovie, Pologne)

Résumé. - L'auteur a démontré l'existence de la limite de la dérivée tangentielle $D_{s_P}[D_X^{M-2}V_\alpha(X, t)]$, ($\alpha = 1, \dots, N$), du potentiel généralisé de simple couche (7) relatif au système parabolique (1), si $X \rightarrow P \in S$.

1. Introduction et les formules fondamentales. - Soit le système parabolique de $N \geq 1$ équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geq 2$ de la forme

$$(1) \quad \widehat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \dots, u_N) \equiv \sum_{1 \leq j \leq N}^{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq M} A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

aux fonctions inconnues $u_1(X, t), \dots, u_N(X, t)$. Les coefficients $A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t)$ sont des fonctions complexes, définies, continues et bornées dans la région

$$(2) \quad X(x_1, \dots, x_n) \in E^n; \quad 0 \leq t \leq T.$$

E^n désigne un espace euclidien à n dimensions, $n \geq 2$.
Nous admettons les hypothèses suivantes.

I. Conformément à la définition du système parabolique, donnée par I. PETROVSKY [1], nous admettons que l'équation

$$(3) \quad \det \left| \sum_{k_1 + \dots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t) (is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} - \delta_{\alpha}^j \lambda \right| = 0$$

admet les racines en λ , dont toutes les parties réelles sont inférieures ou égales à un nombre négatif fixé $-\delta$

$$(4) \quad \operatorname{Re}(\lambda) < -\delta < 0$$

pour toutes les valeurs des variables réelles $s_1, \dots, s_n$ vérifiant l'égalité $s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1$ et pour tout point de la région (2).

II. Les coefficients $A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(X, t)$ sont hölderiens par rapport à la variable spatiale X à l'exposant h , uniformément continus par rapport à la

variable t et en outre les coefficients des dérivées de l'ordre le plus élevé M sont hölderiens par rapport à la variable t , à l'exposant h' .

Dans le travail [2] W. POGORZELSKI a construit pour le système (1) une matrice de solutions, $\{\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$, nommée par lui « matrice des solutions fondamentales » en admettant que les coefficients $A_{\alpha_j}^{k_1 \dots k_n}(X, t)$ vérifient les hypothèses I et II. Les éléments $\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)$ de cette matrice sont donnés par la formule

$$(5) \quad \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) + \bar{W}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)$$

où $X(x_1, \dots, x_n)$ et $Y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont les deux points différents, arbitraires, de l'espace E^n , $\tau < t$ deux valeurs arbitraires dans l'intervalle $(0, T)$, $W_{\alpha\beta}^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau)$ sont les éléments de la matrice des quasi-solutions du système (1), et

$$(6) \quad \bar{W}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \int_{\tau}^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\gamma=1}^N W_{\alpha\gamma}^{\Pi, \zeta}(X, t; \Pi, \zeta) \Phi_{\alpha\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau) d\Pi d\zeta$$

où les fonctions $\Phi_{1\beta}, \dots, \Phi_{N\beta}$ des couples Π, ζ et Y, τ forment pour chaque β fixé une solution du système d'équations intégrales de VOLTERRA [2]; Y, τ jouent un rôle des paramètres fixés.

Soit l'intégrale de surface

$$(7) \quad V(X, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau) \varphi_{\beta}(Q, \tau) dQ d\tau, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

dite potentiel généralisé de simple couche, relatif au système parabolique (I). Nous admettons encore les deux hypothèses suivantes.

III. La surface S à $n - 1$ dimensions (qui en général n'est pas fermée) vérifie les conditions connues de LIAPOUNOFF dont l'une, concernant l'angle $\Delta(P, Q)$ entre les normales aux points P et Q de la surface S , a la forme

$$(8) \quad \Delta(P, Q) < \text{const} |PQ|^{h_L}, \quad (0 < h_L \leq 1).$$

IV. Les N fonctions de la suite $\{\varphi_{\beta}(Q, t)\}$, dite densité de la simple couche, sont définies dans la région $Q \in S$, $0 \leq t \leq T$, continues par rapport à la variable t pour $0 \leq t \leq T$ et vérifient la condition de HÖLDER relativement aux points Q de la surface S , à l'exposant h_{φ}

$$(9) \quad |\varphi_{\beta}(Q, \tau) - \varphi_{\beta}(Q_1, \tau)| < \text{const} |QQ_1|^{h_{\varphi}} \quad (\beta = 1, 2, \dots, N).$$

Les fonctions (7) ont les dérivées spatiales d'ordre $m = 1, 2, \dots, M$ déterminées par les intégrales régulières

$$(10) \quad D_X^m [V_\alpha(X, t)] = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_X^m [\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

en tout point $X \in E^n - S$ pour $0 < t < T$.

On sait que les dérivées d'ordre $m = 1, 2, \dots, M-2$ des éléments de la matrice des solutions vérifient l'inégalité

$$(11) \quad |D_X^m [\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)]| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\mu} \cdot \frac{1}{|XQ|^{n+m-M\mu}}$$

qui contient les fonctions aux singularités faibles si nous choisissons la constante μ dans l'intervalle

$$\frac{m+1}{M} < \mu < \min\left(1, \frac{m+n}{M}\right)$$

puisque on a $n+m-M\mu < n-1$, si $m = 0, 1, 2, \dots, M-2$. Nous en concluons l'existence des valeurs limites

$$(12) \quad \lim_{X \rightarrow P \in S} D_X^m [V_\alpha(X, t)] = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_X^m [\Gamma_{\alpha\beta}(P, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

pour $m = 0, 1, \dots, M-2$, les fonctions $\varphi_\beta(Q, \tau)$ n'étant qu'intégrables. Ce raisonnement ne concerne pas les dérivées d'ordre $m = M-1$.

Dans ce travail nous démontrerons sous l'hypothèses I-IV l'existence de la limite de la dérivée de l'intégrale

$$(13) \quad D_X^{M-2} [V_\alpha(X, t)] = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_X^{M-2} [\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

dans la direction d'une tangente au point arbitraire $P \in S$ (non situé sur le bord de cette surface), si $X \rightarrow P$, par une méthode analogue que dans le travail [3].

2. Existence de la limite de la dérivée tangentielle. - D'après la formule (5), nous pouvons écrire l'intégrale (7) sous la forme d'une somme des

intégrales

$$(14) \quad V_{\alpha}(X, t) = U_{\alpha}(X, t) + \bar{U}_{\alpha}(X, t)$$

où

$$(15) \quad U_{\alpha}(X, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau) \varphi_{\beta}(Q, \tau) dQ d\tau$$

et

$$(16) \quad \bar{U}_{\alpha}(X, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N \bar{W}_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau) \varphi_{\beta}(Q, \tau) dQ d\tau$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N).$$

D'après le travail [2], les dérivées spatiales d'ordre $M - 1$ des fonctions (6) admettent les limitations aux singularités séparées suivantes

$$(17) \quad |D_X^{M-1}[\bar{W}_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)]| < \frac{1}{(t - \tau)^{\mu_0}} \cdot \frac{\text{const}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu_0)-h_1}}$$

où $h_1 = \min(h, 2h)$, μ_0 est un nombre positif arbitraire dans l'intervalle ouvert $\left(1 - \frac{1+h_1}{M}, 1\right)$; par conséquent nous aurons

$$(18) \quad n - 1 + M(1 - \mu_0) - h_1 < n - 1$$

si μ_0 est choisi dans l'intervalle ouvert $\left(1 - \frac{h_1}{M}, 1\right)$ nous pouvons donc affirmer que la dérivée

$$(19) \quad D_X^{M-1} \bar{U}_{\alpha}(X, t) = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_X^{M-1}[\bar{W}_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)] \varphi_{\beta}(Q, \tau) dQ d\tau$$

tend uniformément vers la limite déterminée par l'intégrale absolument convergent

$$(20) \quad \lim_{X \rightarrow P} D_X^{M-1}[\bar{U}_{\alpha}(X, t)] = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_X^{M-1}[\bar{W}_{\alpha\beta}(P, t; Q, \tau)] \varphi_{\beta}(Q, \tau) dQ d\tau$$

si le point $X \in E^n - S$ tend d'une façon arbitraire vers le point arbitraire $P \in S$ (non situé sur le bord de cette surface).

Les dérivées spatiales d'ordre $M - 1$ de quasi-solutions admettent les limitations aux singularités séparées suivantes :

$$(21) \quad | D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau) | < \frac{1}{(t - \tau)^\mu} \cdot \frac{\text{const}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}}$$

où μ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité ; par conséquent

$$(22) \quad n - 1 + M(1 - \mu) > n - 1$$

quelque soit le choix de la constante μ dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$ et étude de l'existence de la limite de la dérivée de l'intégrale (10) dans la direction d'une tangente à la surface S exige des considérations plus délicates.

Nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉOREME. — Si les hypothèses I, II, III et IV (voir introduction) sont satisfaites, alors la dérivée de l'intégrale (10) au point $X \in E^n - S$ dans la direction d'une tangente arbitraire s_P à la surface S au point arbitraire $P \in S$ (non situé sur le bord de cette surface) tend vers une limite déterminée par l'intégrale singulière itérée

$$(23) \quad D_{s_P}[D_X^{M-2} V_\alpha(X, t)] \xrightarrow[X \rightarrow P]{} \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_{s_P}[D_X^{M-2} \Gamma_{\alpha\beta}(P, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

(qui en général n'est pas absolument convergente) si le point X tend vers le point $P \in S$ le long de la normale en P .

DÉMONSTRATION. — Supposons que le point $X \in E^n - S$ tend vers le point intérieur $P \in S$ le long de la normale en P et considérons un système d'axes rectangulaires $(Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ où l'axe Px_n est normal à la surface S , donc les axes $Px_1, Px_2, \dots, Px_{n-1}$ sont situés dans le plan tangent en P à la surface S , nous admettons que l'axe Px_1 coïncide avec la direction s_P .

D'après l'existence de la limite (20) il suffit d'étudier la dérivée

$$(24) \quad D_{x_1}[D_X^{M-2} U_\alpha(X, t)] = \int_0^t \iint_{S(Q)} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N),$$

si $X \rightarrow P$.

Soit un cylindre W , ayant pour l'axe Px_n , de rayon δ_0 qui découpe de la surface S au voisinage du point P une portion S_W et du plan tangent en P une hypersphère S'_W à $n - 2$ dimensions-projection de la portion S_W .

D'après les conditions de LIAPOUNOFF, (hypothèse III), nous pouvons toujours fixer le rayon δ_0 suffisamment petit, pour que les points de la projection S'_W correspondaient d'une façon biunivoque aux points de la portion S_W .

Nous décomposons l'intégrale (24) en deux parties

$$(25) \quad D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(X, t)] = D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(X, t)]_{S_W} + D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(X, t)]_{S-S_W}$$

étendues à la portion S_W et à la surface extérieure $S - S_W$. Le second terme de la somme (25) est évidemment continu au point P et nous aurons

$$(26) \quad \lim_{X \rightarrow P} D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(X, t)]_{S-S_W} = D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(P, t)]_{S-S_W} =$$

$$= \int_0^t \iint_{S-S_W} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2}W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(P, t; Q, \tau)] \cdot \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau.$$

Pour étudier la première des intégrales (25) nous l'écrivons de la façon suivante

$$(27) \quad D_{x_1}[D_X^{M-2}U_\alpha(X, t)]_{S_W} = \int_0^t \iint_{S_W} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2}W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau)] [\varphi_\beta(Q, \tau) - \varphi_\beta(P, \tau)] dQ d\tau +$$

$$+ \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_\beta(P, \tau) \iint_{S_W} D_{x_1}[D_X^{M-2}W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau)] dQ d\tau = I_1^{(\alpha)}(X, t) + I_2^{(\alpha)}(X, t).$$

D'après l'inégalité de HÖLDER pour les fonctions $\varphi_\beta(Q, \tau)$, $\beta = 1, 2, \dots, N$, (hypothèse IV) et l'inégalité (21), les fonctions sous le signe de la première intégrale (27), vérifient l'inégalité

$$(28) \quad \left| \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2}W_{\alpha\beta}^{Q,\tau}(X, t; Q, \tau)] [\varphi_\beta(Q, \tau) - \varphi_\beta(P, \tau)] \right| < \frac{\text{const}}{(t - \tau)^\mu} \cdot \frac{|PQ|^{h_\varphi}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}}$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

Donc, en fixant l'exposant μ à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{h_\varphi}{M}, 1\right)$

nous pouvons affirmer, que $I_1^{(\alpha)}(X, t)$ tend vers une limite

$$(29) \quad \lim_{X \rightarrow P} I_1^{(\alpha)}(X, t) = I_1^{(\alpha)}(P, t) =$$

$$= \int_0^t \iint_{S_W} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1} [D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau) [\varphi_\beta(Q, \tau) - \varphi_\beta(P, \tau)] dQ d\tau$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N).$$

L'intégrale (29) est absolument convergente, puisque l'intégrale de surface, vérifie, (voir (28)), l'inégalité à faible singularité.

Pour étudier $I_2^{(\alpha)}(X, t)$, considérons l'intégrale auxiliaire

$$(30) \quad I_0^{(\alpha)}(X, t) = \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_\beta(P, \tau) \iint_{S'_W} D_{x_1} [D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] dQ' d\tau$$

étendue à la projection S'_W de la portion S_W sur le plan tangent en P , Q' -projection du point Q sur ce plan. Les éléments de la matrice des quasi-solutions sont donnés par les intégrales de FOURIER

$$(31) \quad W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta(t, \tau; P, \tau; S) \exp \left[i \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - \xi_\nu) s_\nu \right] dS,$$

($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$) étendues à tout l'espace euclidien E^n des variables réelles $S(s_1, s_2, \dots, s_n)$; $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, ($\xi_n = 0$), étant les coordonnées du point Q' et $x_1, x_2, \dots, x_n$ - du point X , ($x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$). Les fonctions $v_1^\beta, v_2^\beta, \dots, v_N^\beta$, ($\beta = 1, 2, \dots, N$) pour β fixé forment une solution du système d'équations différentielles ordinaires, [2], où P, τ et S jouent un rôle des paramètres fixés.

D'après (31), nous aurons l'égalité des dérivées

$$(32) \quad D_{x_\nu} [D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] = -D_{\xi_\nu} [D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)]$$

pour $\nu = 1, 2, \dots, n$.

En appliquant la théorème de GREEN, nous pouvons donc écrire l'intégrale (30) sous la forme d'une intégrale

$$(33) \quad I_0^{(\alpha)}(X, t) = - \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_\beta(P, \tau) \left\{ \int_{C_W} D_X^{M-2} [W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] \cos \nu dl_{Q'} \right\} d\tau$$

étendue à la frontière C_W à $n-2$ dimensions du domaine S'_W ; ν désigne l'angle que fait la normale extérieure à la surface C_W au point Q' avec l'axe P_{α_1} et $dl_{Q'}$ - l'élément d'aire de la surface C_W au point Q' .

Par conséquent, il est évident que la fonction (33) tend vers une limite déterminée

$$(34) \quad \lim_{X \rightarrow P} I_0^{(\alpha)}(X, t) = - \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \left\{ \int_{C_W} D_X^{M-2} [W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] \cos \nu dl_{Q'} \right\} d\tau$$

si X tend vers P .

D'après (21), nous aurons

$$(35) \quad D_X^{M-2} [W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] = \frac{(i)^{M-2}}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; P, \tau; S) (s_1)^{p_1} \dots (s_n)^{p_n} \cdot \exp \left[-i \sum_{\nu=1}^{n-1} s_{\nu} \xi_{\nu} \right] dS$$

où $p_1, \dots, p_n$ sont les nombres entiers non-négatifs et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = M-2$.

Les fonctions $v_1^{\beta}, v_2^{\beta}, \dots, v_N^{\beta}$, ($\beta = 1, 2, \dots, N$) pour β fixé forment une solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$(36) \quad \frac{dv_{\alpha}^{\beta}}{dt} = \sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1 + \dots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(Z, \zeta) (is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} v_j^{\beta}(t, \tau; Z, \xi; S)$$

où Z, ζ, S, τ jouent un rôle des paramètres fixés; ensuite, l'hypothèse I exige d'admettre que le degré M des équations (1) est pair, donc

$$(37) \quad v_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; P, \tau; S) = v_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; P, \tau; -S)$$

où $-S$ désigne la point $(-s_1, -s_2, \dots, -s_n)$. Par conséquent, il est évident que l'intégrale

$$(38) \quad \int_{C_W} D_X^{M-2} [W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] \cos \nu dl_{Q'}$$

est nulle d'après la symétrie centrale de la fonction

$$(39) \quad D_X^{M-2} [W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)]$$

Nous aurons donc

$$(40) \quad \lim_{X \rightarrow P} I_0^{(\alpha)}(X, t) = I_0^{(\alpha)}(P, t) = 0.$$

Il en résulte, d'après (30), (33), (34) et (40),

$$(41) \quad \lim_{X \rightarrow P} I_0^{(\alpha)}(X, t) = \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S'_W} D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, \tau; Q', \tau)] dQ' d\tau = 0.$$

Nous signalons que cette convergence de l'intégrale n'est pas absolue, puisque l'intégrale itérée de la valeur absolue de la fonction $D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}$ n'existe pas en général.

Considérons maintenant la différence entre les intégrales $I_2^{(\alpha)}(X, t)$ et $I_0^{(\alpha)}(X, t)$

$$(42) \quad \begin{aligned} R^{(\alpha)}(X, t) &= I_2^{(\alpha)}(X, t) - I_0^{(\alpha)}(X, t) = \\ &= \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S'_W} \{ D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(X, t; Q, \tau)] - D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] \} \gamma(Q) dQ d\tau \end{aligned}$$

où $\gamma(Q)$ désigne la valeur absolue du cosinus d'angle que fait la normale à la surface S au point Q avec l'axe Px_n .

D'après les condition de LIAPOUNOFF (hypothèse III) nous aurons

$$(43) \quad 1 - \gamma(Q) \leq \text{const} |PQ|^{2h_L}, \quad (0 < h_L \leq 1)$$

où h_L jest l'exposant positif constant caractéristique pour la surface S .

Décomposons maintenant la différence sous le signe de l'intégrale de surface (42) de la façon suivante

$$(44) \quad D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(X, t; Q, \tau)] - D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] \gamma(Q) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

où

$$(45) \quad \begin{cases} \Delta_1 = D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(X, t; Q, \tau)] - D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q, \tau)] \\ \Delta_2 = D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q, \tau)] - D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] \\ \Delta_3 = D_X^{M-1}[W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau)] \cdot [1 - \gamma(Q)]. \end{cases}$$

En appliquant la limitation suivante, [2]

$$(46) \quad \begin{aligned} &| D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(X, t; Q, \tau) - D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q, \tau) | < \\ &< \frac{\text{const}}{(t - \tau)^{\mu}} \cdot \frac{1}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}} \sup | A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(Q, \tau) - A_{\alpha j}^{k_1 \dots k_n}(P, \tau) | \end{aligned}$$

où $0 < \mu < 1$; les coefficients $A_{aj}^{k_1 \dots k_n}$ sont hölderiens par rapport à la variable spatiale à l'exposant h (hypothèse II), par conséquent

$$(47) \quad |\Delta_1| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^\mu} \cdot \frac{|PQ|^n}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}}, \quad (0 < \mu < 1).$$

Étudions d'abord la différence Δ_2

$$(48) \quad \begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta(t, \tau; P, \tau; S)(is_1)^{\gamma_1} \dots (is_n)^{\gamma_n} \left[\exp\left(ix_n s_n - i \sum_{\nu=1}^n s_\nu \xi_\nu\right) - \right. \\ & \left. - \exp\left(ix_n s_n - i \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu \xi_\nu\right) \right] dS = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta(t, \tau; P, \tau; S)(is_1)^{\gamma_1} \dots (is_n)^{\gamma_n} (e^{-is_n \xi_n} - 1) \cdot \\ & \cdot \exp[i(-\xi_1 s_1 - \dots - \xi_{n-1} s_{n-1} + x_n s_n)] dS \end{aligned}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont des nombres entiers non-négatifs, $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = M - 1$.

Écrivons maintenant cette différence sous la forme

$$(49) \quad \begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{(2\pi)^{-n}}{\left(\sqrt[M]{t-\tau}\right)^{n+M-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta\left(t, \tau; P, \tau; \frac{z_1}{\sqrt[M]{t-\tau}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt[M]{t-\tau}}\right) (iz_1)^{\gamma_1} \dots (iz_n)^{\gamma_n} \cdot \\ & \cdot \left[e^{-i \frac{z_n \xi_n}{\sqrt[M]{t-\tau}}} - 1 \right] \exp\left[\frac{-i}{\sqrt[M]{t-\tau}} (\xi_1 z_1 + \dots + \xi_{n-1} z_{n-1} - x_n z_n)\right] dz_1 \dots dz_n \end{aligned}$$

où $z_k = s_k \sqrt[M]{t-\tau}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Les fonctions

$$(50) \quad \begin{aligned} v_\alpha^\beta\left(t, \tau; P, \tau; \frac{z_1}{\sqrt[M]{t-\tau}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt[M]{t-\tau}}\right) (iz_1)^{\gamma_1} \dots (iz_n)^{\gamma_n} \left[e^{-i \frac{z_n \xi_n}{\sqrt[M]{t-\tau}}} - 1 \right] = \\ = F_\alpha^\beta(t, \tau, P, \xi_n; z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

sont des fonctions entières des arguments $z_1, \dots, z_n$. En appliquant l'inégalité évidente

$$(51) \quad \left| e^{-i \frac{z_n \xi_n}{\sqrt[M]{t-\tau}}} - 1 \right| < \frac{|z_n \xi_n|}{\sqrt[M]{t-\tau}}$$

et l'inégalité de PETROVSKY, [2],

$$(52) \quad |v_\alpha^\beta(t, \tau; P, \tau; S)| < K e^{-\frac{1}{2} \delta s^M(t-\tau)}$$

où désigne une constante positive, indépendante des paramètres P , τ et $s = \sqrt{s_1^2 + \dots + s_n^2}$, (δ est la constante positive, fixée par l'hypothèse I), nous aurons la limitation suivante

$$(53) \quad |F_{\alpha}^{\beta}(t, \tau, P, \xi_n; z_1, \dots, z_n)| < \text{const} \frac{|\xi_n|}{\sqrt[t-\tau]{M}} \exp\left(-\sum_{v=1}^n A_v |z_v|^M\right)$$

où les constantes $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont positives; c. à. d. que les fonctions (50) sont de classe Z_M^M au sens de GUELFAND et CHILOV, [4], par rapport à la variables $z_1, \dots, z_n$. En vertu du théorème de GUELFAND-CHILOV [4], nous en concluons que la différence (49) est de classe Z_q^q par rapport à la variables

$$\frac{-\xi_1}{\sqrt[t-\tau]{M}}, \dots, \frac{-\xi_{n-1}}{\sqrt[t-\tau]{M}}, \frac{x_n}{\sqrt[t-\tau]{M}}, \text{ où } q = M/M - 1, \text{ donc}$$

$$(54) \quad |\Delta_2| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\frac{n+M}{M}}} |\xi_n| \exp\left[-\frac{C |XQ|^q}{\sqrt[t-\tau]{M-1}}\right].$$

En appliquant à la fonction (54) la méthode des séparations des singularités, présentée par W. POGORZELSKI dans le travail [5] et en s'appuyant sur les inégalités

$$(55) \quad |\xi_n| < \text{const} |PQ|^{h_L+1}, \quad \chi \leq \frac{|XQ|}{|XQ'|} \leq \frac{1}{\chi}$$

(ou χ est une constante positive inférieure à l'unité, [6]), nous arrivons à la limitation suivante

$$(56) \quad |\Delta_2| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}} \cdot \frac{|PQ|^{h_L}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}}, \quad (0 < \mu < 1).$$

D'après (21), (43) et (55) nous aurons maintenant

$$(57) \quad |\Delta_3| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}} \cdot \frac{|PQ|^{2h_L}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu)}}, \quad (0 < \mu < 1).$$

Il en résulte, en vertu des inégalités (47), (56) et (57), que la différence (44) vérifie l'inégalité

$$(58) \quad |D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(X, t; Q, \tau) - D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(X, t; Q', \tau) \gamma(Q)| < \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_1}} \cdot \frac{|PQ|^{h'_L}}{|XQ|^{n-1+M(1-\mu_1)}}$$

où

$$(59) \quad h'_L = \min(h, h_L), \quad 1 - \frac{h'_L}{M} < \mu_1 < 1.$$

La différence (58) admet une limitation à faible singularité si $X = P$ et l'intégrale (42) tend vers une limite suivante

$$\begin{aligned}
 \lim_{X \rightarrow P} R^{(\alpha)}(X, t) &= \lim_{X \rightarrow P} I_2^{(\alpha)}(X, t) = \\
 &= \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S_W} \{ D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] - \\
 (60) \quad &- D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] \gamma(Q) \} dQ d\tau = \\
 &= \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S_W} D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] dQ d\tau.
 \end{aligned}$$

La première intégrale est absolument convergente, mais la seconde ne possède pas cette propriété.

D'après la limitation (58), l'intégrale de surface vérifie l'inégalité de la forme

$$\begin{aligned}
 &\left| \iint_{S_W} D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] dQ \right| < \\
 (61) \quad &< \iint_{S_W} | D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] - D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] \gamma(Q) | dQ < \\
 &< \frac{\text{const}}{(t - \tau)^{\mu_1}}
 \end{aligned}$$

à faible singularité, si $\tau \rightarrow t$; cette l'inégalité assure l'existence de l'intégrale (60), singulière relativement à la variable τ .

Par conséquent, nous arrivons à la thèse (23) du théorème, c. q. f. d.

La valeur limite (23) de la dérivée tangentielle peut être aussi exprimée par une valeur principale au sens de CAUCHY. Nous avons en effet

$$(62) \quad \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S'_W - S'_\Pi} D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] dQ' d\tau = 0$$

d'après la asymétrie centrale de la fonction

$$(63) \quad D_X^{M-1} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau),$$

où S'_Π désigne l'intersection par le plan tangent $x_n = 0$ d'un cylindre Π ayant pour l'axe Px_n et de rayon r_Π , situé à l'intérieur du cylindre W ; donc

$$(64) \quad \lim_{X \rightarrow P} I_0^{(\alpha)}(X, t) = \lim_{r_\Pi \rightarrow 0} \int_0^t \sum_{\beta=1}^N \varphi_{\beta}(P, \tau) \iint_{S'_W - S'_\Pi} D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] dQ' d\tau = 0.$$

Il en résulte que la valeur limite de la première partie de la dérivée tangentielle (25) peut être exprimée sous la forme d'une intégrale singulière au sens de CAUCHY

$$(65) \quad \lim_{X \rightarrow P} D_{x_1}[D_X^{M-2} U_\alpha(X, t)]_{S_W} =$$

$$= \lim_{r_\Pi \rightarrow 0} \int_0^t \iint_{S_W - S_\Pi} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

qui n'est pas absolument convergente, où bien sous la forme d'une intégrale absolument convergente

$$(66) \quad \lim_{X \rightarrow P} D_{x_1}[D_X^{M-2} U_\alpha(X, t)]_{S_W} =$$

$$= \int_0^t \iint_{S_W} \sum_{\beta=1}^N \{ D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{Q, \tau}(P, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) -$$

$$- D_{x_1}[D_X^{M-2} W_{\alpha\beta}^{P, \tau}(P, t; Q', \tau)] \gamma(Q) \varphi_\beta(P, \tau) \} dQ d\tau.$$

Il en résulte aussi

$$(67) \quad \lim_{X \rightarrow P} D_{x_1}[D_X^{M-2} V_\alpha(X, t)] = \lim_{r_\Pi \rightarrow 0} \int_0^t \iint_{S - S_\Pi} \sum_{\beta=1}^N D_{x_1}[D_X^{M-2} \Gamma_{\alpha\beta}(P, t; Q, \tau)] \varphi_\beta(Q, \tau) dQ d\tau$$

c. à d. l'intégrale au sens de CAUCHY.

Le théorème étudié dans ce travail m'a été suggéré par M. W. POGORZELSKI; je tiens à lui exprimer mes sincères remerciements.

OUVRAGES CITÉS

- [1] I. PETROVSKY, *Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, « Bull. Univ. », Moscou, 7 (1938).
- [2] W. POGORZELSKI, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, « Ricerche di Matem. », 7 (1958).
- [3] W. POGORZELSKI, *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique*, « Ricerche di Mat », 6 (1957).
- [4] GUELFAND et CHILOV, *Transformation de Fourier des fonctions de croissance vite* (en russe), « Ouspiechi Matematicheskich naouk », Moscou (1953).
- [5] W. POGORZELSKI, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, « Ricerche di Matem. », 5 (1956).
- [6] W. POGORZELSKI, *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique*, « Ann. Pol. Math. », t. IV (1957).