Sur la dimension des espaces topologiques.

Memoria di R. G. Lintz (a Salvador, Brasil)

Résumè. - *On donne ici une methode nouvelle d'introduire des invariants topologiques appellés* dimensions. *On demontre plusieurs proprietés de ces invariants que justifient qu'on les appelle* dimensions.

§ 1. **Introduction.**

1. Le problème de la dimension des ensembles a été étudié par des nombreux auteurs, parmis lesquels nous rappelons H. Poincaré, M. Fréchet, L. E. Brouwer, H. Lebesgue, K. Menger, P. Urysohn, P. S. Alexandroff, qui ont abordé la question par des voies diverses. À ce propos la memoire de P. S. Alexandroff [1] en fournit un excellente vision panoramique.

Ces définitions sont très générales, mais on trouvre des complications serieuses lorsqu'on sorte des espace métriques séparables (¹) [2, p. 153]. Ainsi nous irons cousiderer une autre voie pour étudier le problème, en partant de la notion d'irredutibilité entre deux points (§ 2-2). Ensuite nous definissons, par induction, une famille des classes d'espaces topologiques D_n qui seront utilisés comme des « étalons » pour la dimension d'un espace topologique E qui sera definie par la possibilité de plonger un certain ensemble classe D_n dans E.

Pour éclaircir la question donnons maintenant les idées intuitives qui de nous ont guidées.

Déjà Poincaré dans ces « Derniers Pensées » a analysé le concept de dimension. Du point de vue philosophique ce concept est étroitement lié à la notion d'espace, extension, etc. Avec Kant nous pouvons dire que le travail du mathématicien ici est celui de voire jusqu'à quel point un jugement, en apparence, synthétique « a priori », peut être réduit à un jugement analytique. Ainsi, le point de départ d'une théorie mathématique est une certaine donné primitive, ou comme on dit une connaissance immédiate.

Dans le cas de la théorie de Menger-Urysohn, par ex., on parte de l'idée intuitive d'isoler un point de l'espace par une surface sphérique.

(¹) Quoique récemment une bonne partie de la théorie de Menger fut étendue aux espaces métriques non séparables (voir, par ex., Nagata, « Fund. Math. » XLV. 2 (1958), pp. 143-181).

Analoguement un point du plan peut être isolé par une ligne, etc.

Nous avons choisi pour point de départ une autre idée intuitive: la possibilité d'un observateur se mcuvoir dans une ou plusieurs directions. Ainsi, d'un point de l'espace ont peut cheminer avec plus de liberté que dans un plan ou dans une droite.

Un espace où l'on ne peut pas cheminer nous semble impregné d'un caractère très marquant de dimension zero. De cette manière, un point, un ensemble de points isolés, l'ensemble K_3 de Knaster [3, p. 275], enfin tous les ensembles qui ne contiennent pas aucune *courbe ouverte* (définie dans le § 2) seront considerés comme zero dimensionels. Par contre, « la grille » definie par toutes les droites paralléles aux axes coordonnés d'un plan en les coupant dan les points rationnels sera considerée comme bi-dimensionnelle. parce qu'un observateur dans cet espace peut se mouvoir avec une liberté « presque éguale » à celle du plan.

Soit maintenant, E l'ensemble des segments du plan:

$$\begin{cases} x = 1/n \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

plus l'origine. Or, un observateur dans l'origine ne peut pas cheminer et alors nous atribouns la dimension zero à ce point dans E, contrairement à la dimension de Menger-Urysohn qui donne dimension 1 à l'origine dans E. Cependant du point de vue intuitif je ne pense pas que ma définition soit inferieur à celle de Menger-Urysohn.

Nous avons appliqué notre théorie dans une nouvelle théorie des variétés topologiques en élaboration ([2]) et les résultats nous semblent bien plus intéressants que ceux obtenus par la théorie de Menger-Urysohn (voir pour quelques notices le § 8-3 de ce travail).

2. Le travail est divisé en deux parties: la premiére comprenant les paragraphes 2, 3 et 4 contient tous les définitions et la demontration des propriétés essentielles à une dimension quelconque, c'est à dire:

1°) La dimension est invariant topologique.

2°) La dimension est une function monotonique d'ensemble.

3°) Les espaces euclidiens E_n ont dimension n.

La deuxième partie comprenant les paragraphes, 5, 6, 7, 8 contient la discussion et les applications de diverses proprietés de la dimension.

3. L'élaborotion de ce travail doit beaucoup au professeur J. P. Cecconi qui, avec un soin réellemen paternel, m'a guidé les pas pans la direction des

([2]) Qui sera publié sous le titre: « Generalized Manifolds ».

raisonnements sûrs de la science dès le début de ma humble carrière scientifique. Il a été aussi d'une grande utilité le contact avec mon cher ami G. F. LOIBEL dont l'esprit critique a montré les nombreuses fautes qui surgissaient pendant l'élaboration de ce travail. Aussi mes remerciements à mes amis R. PICCININI et U. D'AMBROSIO par leurs nombrêuses critiques et suggestions.

Je doit aussi remercie à M. C. KURATOWSKI qui a bien voulu m'adressé à M. R. ENGELKING qui m'a attirée l'atention, par des utiles et interessantes lettres, sur les fautes des mes définitions primitives.

§ 2. Définitions et concepts fondamentaux.

1. **Généralités** - Une théorie de dimension consiste, en derniére analyse, dans l'association de nombres entiers à des espaces topologiques. Pour que cette fonction d'ensemble «mérite» le nom de dimension elle doit satisfaire aux conditions citées dans le § 1. On n'étudiera pas les dimensions non entières comme le fait HAUSDORFF [4].

La caractérisation axiomatique de la dimension proposée par MENGER [5] est la suivante:

Soit dim une fonction d'ensembles à valeurs entiers satisfaisant aux conditions:

A) dim est invariant topologique.

B) dim est une fonction monotonique.

C) Si E_n est l'espace euclidien n-dimensionnel, on a dim $E_n = n$.

D) Si X est réunion dénombrable d'ensembles fermés X_i et si dim $X_i \leq n$, alors dim $X \leq n$.

E) Si dim $X = n$ on peut trouver un espace compact Y contenant une partie X' homeomorphe à X, avec dim $X' = \dim Y =$ n.

Lorsqu'on considèse la classe de tous les sous ensembles du plan, fut demonstré par MENGER [5] qui seulement sa dimension satisfait à A), B), C), D), E). Cependant comme on verra plus tard on peut construire une classe $\mathfrak{X}$ d'espaces qui peuvent être plongés dans l'espace euclidien E_n et tels que $\dim X$, avec $X \in \mathfrak{X}$, satisfait aux cinq conditions de MENGER, citées plus haut, et cependent il y a des $X \in \mathfrak{X}$ avec

$$\dim X \neq \dim^{+} X,$$

où $\dim^{+}$ est la dimension de MERGER. Cette question sera éclaircie plus tard.

2. Maintenant nous donnerons un résumé de la nomenclature pour aider le lecteur.

Espace topologique est un ensemble E où est défini une classe d'ensembles, appelés *ouverts* satisfaisan aux axiomes:

I) La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts est ouvert.

II) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est ouvert.

En particulier l'espace vide et l'espace entier sont ouverts.

Voisinage d'un point $P \in E$ est un ouvert de E qui contient P.

On di qu'une proprieté A est valable pour des *voisinages arbitrairement petites*, et l'on indique avec v. a. p., si donné un voisinage $V(P)$ quelconque de P, il y a un autre voisinage $W(P)$ de P avec $W(P) \subset V(P)$ et A est valable en $W(P)$.

Pour les termes, *fermeture, dense, fermé frontière, interieur, exterieur, connexe, localement connexe, composant, compact,* voir [6] et [7].

Un espace E est *totalement desconnexe* lorsque chaque point est un composant de l'espace.

Un espace E est *séparable* s'il y a un ensemble $A \subset E$ denombrable avec $\bar{A} = E$.

Un espace E possède *base dénombrable* s'il y a un système S dénombrable d'ouverts de E tel que chaque ouvert de E contient un ouver de S.

Un *continu* est un espace connèxe et compact.

Un espace E est *localement compact* si chaque point $P \in E$ possède un voisinage $V(P)$ de fermeture compacte.

Un espace E est *bicompact* si donné une couverture $\mathfrak{Y}$ quelconque de E par des ensembles ouverts, ou peut extraire de $\mathfrak{Y}$ une famile finie dont la réunion contient E.

Un espace E est l. p. c. (locally peripherally countable compact) si chaque $P \in E$ possède des v. a. p. avec frontière compacte [8; p. 29].

Un *espace de Baire* est un espace qui n'est pas réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés avec interieur vide.

Un *espace de Hausdorff* ou espace T_2 est un espace où donnés deux points differents il y a des voisinages de ces points disjointes.

Un espace T_2 bicompact est un espace de Baire

Un ensemble connèxe π est *irredutible* par rapport à la connexion entre deux points different P_1 et P_2 de π si un ensemble connèxe quelconque $A \subset \pi$ contenant P_1 et P_2 coincide avec π. Nous dirons seulement dans la suite ensemble irredutible.

Pseudo courbe ouverte (p. c. o.) est un ensemble connèxe tel que:

1°) π est irredutible entre deux points ses *extremités* appartenants à π.

2°) π est localement connèxe.

Un espace E est *connèxe par p. c. o.* si donnés deux points P_1 et P_2 de E il y a dans E une p. c. o. d'extremités P_1 et P_2.

Un espace E est *localement connèxe par p. c. o.* si chaque point P possède v. a. p. connèxes par p. c. o.

3. Dans nos travaux [9] et [10] nous avons donné la définition de courbe ouverte (c. o.) et dans [9] la définition des espaces de classe J. Nous montrerons ensuite que les concepts de c. o. et p. c. o. coincident dans les espaces de classe J.

PROPOSITION I. - Si $P \in \pi$, où π est une p. c. o., pour $V(P)$ quelconque il y a dans $V(P)$ une p. c. o. σ contenant P *non comme extremité,* si P n'est pas extremité de π. Si P est déjà extremité de π, alors il en sera aussi de σ.

DEMONSTRATION. - D'abord admetons l'axiome: tout point est fermé.

Soit P_1 et P_2 les extremités de π. Voyons que si $P \in \pi$ est different de P_1 et P_2, alors

$$\pi - P = \pi_1 \cup \pi_2$$

où π_1 et π_3 sont deux p. c. o. d'extremités (P_1, P) et (P_2, P) et aussi $\pi_1 \cap \pi_2 = P$.

En effet, d'après [8 ; p, 23] π_1 et π_2 sont deux ensembles irredutibles entre (P_1, P) et (P^2, P). Il suffit de voire que π_1 et π_2 sont localement connèxes.

Soit $Q \in \pi_1$ different de P. Comme π_2 est fermé dans π [8; p. 28; th. 11.7], il y a $V(Q)$ avec $V(Q) \cap \pi_2 = O$ et $V(Q)$ contient $W(Q) \subset \pi_1$ connèxe.

Analoguement on fera pour π_2. Regardons le point P. Comme π est connèxe, un $V(P)$ connexe quelconque rencontre soit π_1 que π_2 en des points differents de P. Nous pouvons supposer que $V(P) \cap \pi_1$ ne soit pas connèxe. Il existent alors deux ouverts dans π_1, A et B avec:

$$A \cup B = V(P) \cap \pi_1$$

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = 0 \quad \text{(fermeture dans } V(P) \cap \pi_1).$$

Soit A l'ouvert qui ne contient pas P. Comme $A \subset \pi_1 - P$, A est ouvert dans π et $\mathfrak{F}(A)$ dans la topologie de $V(P)$ est vide, puisque

$$V(P) = V(P) \cap \pi_2 \cup A \cup B.$$

Alors $V(P)$ n'est par connèxe, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $V(P) \cap \pi_1$ est connèxe et alors la connexion locale de π_1 existe aussi em P. Alors π_1 est une p. c. o. et analoguement pour π_2.

Soit maintenant $P \in \pi$ different des extremités P_1 et P_2. Comme π est localement connèxe il existent des voisinages $V(P)$ arbitrairement petites, connèxes. Soit $Q \in V(P)$ different de P. Comme P divise π en deux p. c. o.

π_1 et π_2, d'extremités respectivement (P_1, P) et (P_2, P), c'est à dire:

$$\pi_1 \cup \pi_2 = \pi$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = P,$$

alors ou $Q \in \pi_1$ ou $Q \in \pi_2$. Supposons $Q \in \pi_1$. Si Q é different de P_1 il y a une p. c. o. $\sigma_1 \subset \pi_1$ d'extremités Q et P. Il y a deux hypothèses, [8; p. 27; th. 11.3]:

1°) $\sigma_1 \subset V(P) \cap \pi_1$

2°) $\sigma_2 \supset V(P) \cap \pi_1$.

Comme $V(P) \cap \pi_1$ est connèxe et contient P et Q dans l'hypothèse 2°), ou doit avoir $\sigma_1 = V(P) \cap \pi_1$, impossible parce que σ_1 est fermé dans π_1 et $V(P) \cap \pi_1$ est ouvert sens être fermé. Alors la 1°) hypothèse est vraie. Ainsi il y a dans $V(P) \cap \pi_1$ une p. c. o. σ_1 et analoguement σ_2 pour π_2. Pourtant $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une p. c. o. contenant P *non comme extremité.* Naturellement si P est extremité de π il y a dans $V(P)$ une p. c. o. σ contenant P comme extremité.

La proposition est démontrée.

PROPOSITION II. - Dans un espace de classe J les concepts de p. c. o. et c. o. coincident.

En effet, d'après [8; p.29-34] une p. c. o. quelconque das un espace T_2 est un ensemble bicompact et ainsi si σ est p. c. o. dans $X \in I$, σ est bicompact.

D'autre côté, d'après [11; p. 91] σ est fermé dans X. Pour demontrer que σ est ensemble frontière il suffit d'observer que d'après l'axione III [10; p. 360] si $I(\sigma) \neq 0$ il y a dans $I(\sigma)$ des c. o. que seront des ensembles frontières dans σ, ce qui est impossible [8; p. 28; th. 11.7]. Pourtant σ satisfait aux conditions qui definissent une c. o. dans X. Comme une c. o. dans X en est aussi une p. c. o. la proposition est demontrée.

§ 3. Les classes D_n et la dimension n.

1. Soit D_n $(n = 0, 1, 2, ..)$ une famille de classes d'espaces topologiques et Φ_P une fonction qui associe à chaque point P de l'espace topologique X un nombre entier de la manière suivante:

DEFINITION I. - $\Phi_P(X) = n$ dans $P \in X$, si:

1°) Il y a un ensemble $A \in D_n$ contenant P et $A \subset X$.

2°) Il n'y a pas aucun ensemble $A \subset X$, contenant P, avec $A \in D_p$ et $p > n$.

Si pour $P \in X$ quelconque $\max\limits_{P} \Phi_P(X)$ est n on definira $\Phi(X) = n$.

Si pour n quelconque il y a un point $P \in X$ et un ensemble $A \in D_n$ $(p > n)$ avec $P \in A \subset X$ ont dit que $\Phi(X) = \infty$.

Si $X = 0$ alors et seulement dans ce cas $\Phi(0) = -1$.

2. Une famille D_n est appelé, *famille détalons* pour une théorie de dimension, et Φ sera une *dimension* si :

1°) $\Phi(X)$ est invariant topologique.

2°) Si $A \subset B$ alors $\Phi(A) \leq \Phi(B)$.

3°) Si E_n est l'espace euclidien de dimension n on a $\Phi(E_n) = n$.

Dans ce cas nons indiquerons Φ_P e Φ respectivement par $\dim_P$ et dim.

THÉORÈME 1. - Un espace topologique quelconque a une dimension finie ou infinie quelqu'ils soient les classes d'étalons D_n.

En effet, si X n'est pas vide, X possède au moins un point P et pourtant chaque point est contenu dans un ensemble de classe D_0 et s'il n'y a pas aucun ensemble $A \in D_p$ avec $p > 0$ dans X, alors X a dimension zero.

Supposons alors qu'il y a un n tel que pour $P \in X$ quelconque il n'y a pas $P \in A \in D_p$ avec $p > n$, alors dim $X = n$, s,il y a dans X un ensemble $A \in D_n$.

Si pour n quelconque il y a $A \in D_p$ contenu dans X avec $p > n$ alors dim $X = \infty$. Le théorème est démontré.

On peut observer que d'après la définition I, la 2°) condition au dessus est independante du choix classes D_n.

3. Cette idée de classes d'étalons suggère beaucoup de problèmes ; voyons quelconques d'entre eux.

1°) Soit T une théorie de dimension déjà connue, par ex., celle de MENGER-URYSOHN. Sera-t-il possible *étolonner* la théorie T? Une théorie est *étalonnable* si l'on peut définir une famille de classes d'étalons D_n de sorte que si l'on défine la dimension d'un espace X d'après I, on a

$$\dim X = \dim^T X$$

pour X quelconque dimensionable suivant T, en soiant $\dim^T X$ la dimension de X dans la théorie T. Evidemment une théorie T quelconque possède un étalonnage trivial, c'est à dire, les ensembles de classe D_n sont les ensembles avec $\dim^T X = n$.

Ainsi si une théorie admise plusieurs étolonnages $\mathfrak{T}(D_n)$, $\mathfrak{T}^*(D_n^*)$ etc, on sera interessé dans un étolonnage minimal s'elle existe. Pour éclaircir la question posons

$$\mathfrak{T} < \mathfrak{T}^*$$

et l'on dit que l'étolonnage $\mathcal{T}$ est mineur que l'étolonnage $\mathcal{T}^*$ ($\mathcal{T} > \mathcal{T}^*$ est défini analoguement) si pour n quelconque

$$D_n \subset D_n^*$$

Célà fait on voit immédiatement que si $\mathcal{T} < \mathcal{T}^*$ alors pour un espace X quelconque,

$$\dim^T X \leq \dim^{T^*} X$$

où T et T^* sont les théories définies par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$. Naturellement si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ sont des étalonnages d'une même théorie on a

$$\dim^T X = \dim^{T^*} X.$$

Mais d'après la définition d'étalonnage rien n'exige que pour $P \in X$ *quelconque,* on ait:

$$\dim_P^T X = \dim_P^{T^*} X.$$

Cependent si $\mathcal{T} > \mathcal{T}^*$

$$\dim_P^T X \geq \dim_P^{T^*} X,$$

ce qui montre que les dimension locales *n'aument pas* et de célà il vient l'intérêt des étalonnages minimaux, dont la tendance est celle d'aumenter le nombre de points où la dimension est finie.

De célà on pose:

Une théorie T coincide *globalement* avec une autre théorie T^* si pour X quelconque,

$$\dim^T X = \dim^{T^*} X$$

e nous écrivons $T = T^*$.

Une théorie T coincide *localement* avec une autre théorie T^* si pour X quelconque et $P \in X$ quelconque,

$$\dim_P^T X = \dim_P^{T^*} X$$

et nous écrivons $T \equiv T^*$.

Les notations se justifient parce que si $T \equiv T^*$ alors $T = T^*$ mais non le contraire, comme on verra plus tard.

Alors *étalonner globalement* une théorie T c'est définir un étalonnage $\mathcal{T}^*(D_n^*)$, telle que $T = T^*$. Analoguement pour un *étalonnage locale* on exige que $T \equiv T^*$.

PROBLÈME I. - Possède-t-il la théorie de MENGER-URYSOHN un étalonnage global (local) minimal ?

2°) Soient $D_n^{(0)}$ les classes d'étalons d'une théorie T_0. Nous construiront les classes $D_n^{(1)}$ ainsi :

$X \in D_n^{(1)}$ seulement si, ou $X \in D_n^{(0)}$ ou $\dim^{T_0} X = n$.

Avec ces nouvelles classes on peut définir une nouvelle théorie T_1. Ainsi si l'on a définir les classes $D_n^{(i)}$ on fera $X \in D_n^{(i+1)}$ seulement si, ou $X \in D_n^{(i)}$, ou $\dim^{Ti} X = n$.

THÉORÈME 2. - Les théories T_i coincident globalement.

En effet, soit E un espace topologique avec

$$\dim_P^{Ti} E = n.$$

Alors :

1°) Il existe un espace $X \in D_n^{(1)}$ avec $P \in X \subset E$.

2°) $P \in Y \in D_p^{(1)}$ avec $p > n$ est faux si $Y \subset X$.

Comme la classe $D_n^{(1)} \supset D_n^{(0)}$,

$$\dim_P^{T_0} E \leq \dim_P^{T_1} E$$

et par induction

$$\dim_P^{Ti} E \leq \dim_P^{Ti+1} E;$$

et aussi

$$\mathrm{dum}^{Ti} E \leq \dim^{Ti+1} E.$$

D'autre côté si

$$\dim^{Ti+1} E = n$$

il y a dans E un espace $X \in D_n^{(i+i)}$ et

1°) $X \in D_n^{(i)}$ alors $\dim^{Ti} E \geq n$.

2°) $\dim^{Ti} X = n$ et aussi $\dim^{Ti} E \geq n$ et pourtaat

$$\dim^{Ti} E = \dim^{Ti+1} E \qquad \text{c. q. d.}$$

Plus tard on verra (§ 8-2) qu'il peut être vraie la relation

$$\dim_P^{Ti} E < \dim_P^{Ti+1} E.$$

4. Maintenant nous irons définir une certaine famille de classe D_n et construire une théorie de dimension qui satisfait à l'intuition par rapport à ce qui a été discuté dans le § 1.

Notre travail dans la suite sera l'étude et les applications de cette théorie.

DÉFINITION II. – Un espace topologique X appartient à la classe D_0 s'il n'y a pas aucune p. c. o. contenue dans X.

DÉFINITION III. – Un espace topologique X appartient à la classe D_1 si X est une p. c. o.

Immédiatement on voit que pour la caractérisation de la même théorie T, globalement et localement, on peut aussi définir la classe D_1 ansi:

« Un espace topologique X appartient à la classe D_1 si pour $P \in X$ quelconque il y a des voisinages de P arbitrairement petites dont les fermetures sont des p. c. c. »

DÉFINITION IV. – Un espace topologique X appartient à la classe D_2 s'il contient des p. c. o. et de p. c. f. (3) satisfaisant aux conditions:

I*) Donnés une p. c. o. π et un point P il y a dans X une p. c. f. σ contenant P et π.

II*) Donnée une p. c. f. π il y a dans X seulement deux ouverts Ω et $X - \bar{\Omega}$, qui ont π comme frontière comune.

III*) X est localement connèxe par p. c. o.

DÉFINITION V. – Un espace topologique X appartient à la classe $D_n (n > 2)$ si:

1°) Pour $P \in X$ quelconque il y a des v. a. p. $V(P)$ avec

$$\mathfrak{F}[V(P)] \in D_{n-1}.$$

2°) $X \in D_p$ avec $p \leq n-1$ est faux.

3°) X est localement connèxe par p. c. o.

4°) Si X est contenu dans un espace euclidien il existent dans $X n+1$ points lineairement indépendants.

---

(3) p. c. f. veut dir pseudo courbe fermeé et è definie de manière analogue à c. f. On voir l'analogie entre les espaces definies dans (7) et les espaces de classe D_2. On demoutre que se $A \in J$ alors $A \in D_2$, mais il y a des espaces $B \in D_2$, $B \notin J$.

THÉORÈME 3. - Si $X \in D_n$ et X' est homeomorphe à X alors $X' \in D_n$.
Immédiat.
Aussi d'après la définition I on voit que dim X est invariant topologique.

5. **Observation.** - La connexion locale par p. c. o. des classes D_n fut introduite pour conserver l'idée primitive par laquelle dans un espace de dimension positive c'est possible le mouvement d'un observateur. Cette 3ª) condition est indépendant des autres trois, comme le montre l'exemple suivant: soit E_3 l'espace ordinnaire du quel on soustrait les surfaces sphériques de centre à l'origine et rayon $1/n$ $(n = 1, 2, ...)$. On voit que dans E_3 sont valables 1º), 2º) et 4º) mais pas 3º).

PROBLÈME II. - Peut-t-il un ensemble *localement connèxe* satisfaire aux conditions 1º), 2º) et 4º) mais pas 3º)?

6. **Monotonie des classes D_n.**

D'après notre définition IV si nous réussions demontrer que les classes D_n sont monotoniques, c'est à dire, se $A \in D_n$ et $B \in D_m$ avec $B \subset A$, alors $m \leq n$, nous pouvons eliminer la condition 4º) puisque alors si $X \in D_n$ on a $\dim X = n$. Cette 4º condition fut introduite pour éviter la difficulté qu'on aurait pour demontrer que $\dim E_n = n$. Nous ne savons pas si cette monotonie existe ou non, ainsi on a.

PROBLÈME III. - Seront-ils les classes D_n monotoniques?
Cependant on a une réponse affirmative pour $n = 0, 1, 2,$ comme le montre les théorèmes qui suivent.
Actuellement nous connaissons des classes D_n qui sont monotoniques pour n quetconque. Elles s'appliquent à une nouvelle théorie des variétés topologiques et la dimension di E_n est obtenue directement sans faire usage de la théorie de MENGER-URYSHON. Tout célà apparaîtra dans notre travail: « Generalized Manifolds ».

THÉORÈME 4. - Si $A \in D_1$ et $B \subset A$ avec $B \in D_p$ alors $p \leq 1$.
En effet, soit $B \in D_p$ avec $p > 1$. Il existent alors, pour $P \in B$ quelconque, des voisinages $V(P)$ a. p. avec

$$\mathfrak{F}[V(P) \in D_{p-1}.$$

Analoguement nous pouvons considerer dans la topologie relative à $\mathfrak{F}[V(P)]$ pour $Q \in \mathfrak{F}[V(P)]$ quelconque, des voisinages $V(Q)$ a. p. avec

$$\mathfrak{F}[V(Q)] \in D_{p-2}$$

tout célà dans la topologie de $\mathfrak{F}[V(P)]$.
Ainsi nous pouvons construire des ensembles frontières et fermés dans A de classe D_1. Il suffit demontrer que cette conclusion est en contradiction avec les hypothèses.

En effet, si $E \in D_1$ est frontière dans A pour $P \in E$ quelconque il existent des voisinages a. p. telles que $\overline{V(P)} \cap E$ est p. c. o. dans E et aussi dans A. Or, comme $A \in D_1$ nous pouvons supposer que aussi $\overline{V(P)}$ est une p. c. o. dans A. Mais alors $\overline{V(P)} \cap E$ ne peut pas être frontière dans A d'après (8; p. 28; th. 11.7).

THÉORÈME 5. - Si $A \in D_2$ et $B \subset A$ avec $B \in D_p$ alors $p \leq 2$ [3].

Supposons qu'il y ait un ensemble $B \subset A$ avec $B \in D_3$. On notera que en étudiant le cas $p = 3$ on ne fait pas aucune restriction réelle à la question.

Pour $P \in B$ quelconque il existent des v. a. p. $V(P)$ avec

$$\mathfrak{F}_B[V(P) \cap B] \in D_2,$$

où $\mathfrak{F}_B$ indique frontière relative à B. Il y a ainsi dans $\mathfrak{F}_B$ une c. f. γ et soit Ω_B un des ouverts de $\mathfrak{F}_B$ don la frontière est γ. Comme γ est aussi c. f. dans A il y a deux ouverts Ω et $A - \overline{\Omega}$ dont la frontière est γ.

Considerons deux cas:

1°) Il y a une c. f. γ telle que

$$\Omega_B = \Omega \cap \mathfrak{F}_B.$$

Comme $\mathfrak{F}$ est frontière et fermé dans A, on a $\overline{\mathfrak{F}}_B \subset \mathfrak{F}$.

L'ensemble $\Omega - \overline{\mathfrak{F}}_B$ est localement connèxe et ouvert, et pourtant se Ω' est une de ses componants, Ω' est ouvert, et anssi localement connèxe et aussi localement par p. c. o.

Comme la frontière de Ω dans A est γ, la frontière da Ω' est formée des points de γ et des points de Ω_B. Mais $\mathfrak{F}[\Omega'] \cap \Omega_B$ contient plus d'un point puisque alors la connexion de Ω serait détruite par la suppression d'un seul point, ce qui est impossible (9: p. 346; th. 5).

Soient P_1 et P_2 des points de $\mathfrak{F}[\Omega'] \cap \Omega_B$. Ils existent des voisinages $V(P_1)$ et $V(P_2)$ connèxes par c. o., telles que:

$$\begin{cases} V(P_1) \cap \mathfrak{F}_B \cap \gamma = V(P_2) \cap \mathfrak{F}_B \cap \gamma = 0 \\ V(P_1) \cap V(P_2) = 0. \end{cases}$$

Considerons dans $V(P_1)$ deux points $Q_1 \in \Omega'$ et $Q_2 \notin \Omega'$. Comme $V(P_1)$ est connèxe par c. o. il y a une c. o. $\pi_1 \subset V(P_1)$ d'extremités Q_1 et Q_2. Comme Ω' est ouvert il y a dans $V(P_1) \cap \pi_1 \cap \Omega'$ une c. o. avec une extremité en Q_1.

---

[3] La demonstration suppose $A \in J$ pour utilisér les resultats de (7) e (16). Mais, en rappellant les propositions I e II du § 2-3, on voir que la même demonstration est valable pour $A \in D_2$ en changeant c. o. e c. f. par p. c. o. e p. c. f..

Introduisons maintenant, d'après (8; p. 28), une relation d'ordre dans π_1, en prenant Q_1 comme minimum de π_1. Soit σ l'ensemble des points de $V(P_1) \cap \pi_1 \cap \Omega'$ défini de la manière suivante: $P \in \sigma$ si la c. o. π_P d'extremités (Q_1, P) est contenue dans $V(P_1) \cap \pi_1 \cap \Omega'$. Soit $\bar{P}$ l'extrême superieur de σ (qui existe evidemment par la relation entre cette ordre et la topologie de π_1). La c. o. $\pi_{\bar{P}}$ d'extremités $(Q_1, \bar{P})$ rencontre $\mathfrak{F}[\Omega']$ seulement en $\bar{P}$ et $\pi_{\bar{P}} - \bar{P}$ est contenue dans Ω'. En effet, si $\bar{P} \in \Omega'$ il y a une voisinage $V(\bar{P}) \subset \Omega'$ et par la définition même de c. o. il y a dans $V(\bar{P}) \cap \pi_1$ des points de σ plus grands que $\bar{P}$ ce qui contredit la définition de $\bar{P}$.

Ainsi on a construire une c. o. $\sigma \subset \bar{\Omega}'$ qui rencontre Ω_B seulement dans un point $\bar{P} \in V(P_1)$. De cette manière on peut construire une c. o. $\nu \subset \bar{\Omega}$ qui rencontre Ω_B seulement en $\bar{Q} \in V(P_2)$.

Comme $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ sont differents on peut construire une c. o. $\pi \subset \Omega_B \cup \gamma$ qui rencontre γ seulement en deux points S et T ses extremités, séparant $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ en Ω_B, c'est à dire,

$$\begin{cases} \Omega_B - \pi = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = 0 \end{cases}$$

avec $\bar{P} \in \Omega_1$ et $Q \in \bar{\Omega}_2$ (9; p. 344).

D'après ce qu'on a fait jusqu'alors, il y a une c. o. $\alpha \subset \Omega'$, avec extremités $(\bar{P}, \bar{Q})$ et $\alpha - \{\bar{P}, \bar{Q}\} \subset \Omega'$.

D'autre côte la c. o. π divise aussi Ω en deux parties Ω'_1 et Ω'_2. Or, comme $\mathfrak{F}[\Omega'_1] \neq \gamma$ et $\mathfrak{F}[\Omega'_2] \neq \gamma$ on peut supposer $\bar{P} \in \Omega'_1$ et $\bar{Q} \in \Omega'_2$ et alors la c. o. α contredit la définition de Ω'_1 et Ω'_2 (9; p. 346).

Passons au 2° cas.

2°) Quelqu'il soit $\gamma \subset \mathfrak{F}_B$ et Ω_B, pour un des ouverts de A définis par γ, par ex. Ω, on a

$$\Omega_B \subsetneqq \Omega \cap \mathfrak{F}_B \qquad (\subsetneqq \text{ eq. } \subset \text{ et } \neq),$$

puisque Ω_B ne peut pas avoir des points dans Ω et $A - \bar{\Omega}$.

Avec les mêmes notations du 1° cas soient M_1 et M_2 deux points avec

$$M_1 \in \Omega'_1 \cap [\mathfrak{F}_B - (\Omega_B \cup \gamma)]$$

$$M_2 \in \Omega'_2 \cap [\mathfrak{F}_B - (\Omega_B \cup \gamma)]$$

puisque $\Omega'_1 \supsetneqq \Omega_1$ et $\Omega'_2 \supsetneqq \Omega_2$.

Il y a alors une c. o.

$$\sigma \subset \mathfrak{F}_B - \Omega_B \cup \gamma$$

liant M_1 et M_2 sens couper $\pi \cup \gamma$. C'est impossible et le théorème est démontré.

On notera que de ce théorème on conclut aussi qu'un espace de classe D_2 ne peut pas contenir aucun ensemble *frontière et fermé* contenant un espace de classe D_2. Nous ne savons pas si célà est vraie pour $n > 2$ et alors on a:

PROBLÈME IV. - Si $X \in D_n$ $(n > 2)$ existent-ils dans X des espaces frontières et fermés contenant des espaces de classe D_n?

C'est immédiat la relation entre les problèmes III et IV.

Des théorèmes 3 et 4 on conclut aussi que si $X \in D_p$ $(p = 1, 2)$ alors

$$\dim X = p.$$

§ 4. - Dimensions des espaces euclidiens.

1. Dans ce paragraphe nous voulons demontrer que si E_n est l'espace euclidien de dimension n on a aussi $\dim E_n = n$. Dans la suite on indiquera la dimension de MENGER-URYSOHN par $\dim^+$. Ainsi on doit demontrer que

$$\dim^+ E_n = \dim E_n = n.$$

2. THÉORÈME 6 - Si $A \in D_1$ est un espace topologique où chaque point est fermé alors $\dim^+ A = 1$.

En effet, comme A contient des ensembles connèxes avec plus d'un point on a $\dim^+ A > 0$. D'autre côté pour $P \in A$ quelconque ils existent de v. a. p. $V(P)$ où $\overline{V(P)}$ est une p. c. o. D'aprés (8; p. 28) on a

$$\dim^+ \mathfrak{F}[V(P)] = 0,$$

et alors $\dim^+ A = 1$.

OBSERVATION. - Ce théorème n'est plus vraie pour les espaces de dimension 1. En effet, comme on vera dans le § 7 - 2 pour l'ensemble $K_0^{\aleph_0} \times R$ on a

$$\dim K_0^{\aleph_0} \times R = 1 \quad \text{et} \quad \dim^+ K_0^{\aleph_0} \times R = \infty.$$

THÉORÈME 7. - Si $A \in D_n$ $(n > 0)$ et A est compact alors $\dim^+ A \leq n$.

D'après les proprietés des espaces de classe J (9), on a pour deux points quelconques de $B \in J$ une c. f. π qui les separe dans B et comme $\dim^+ \pi = 1$

on a (2; p. 36) que $\dim^+ B \leq 2$ et par induction

$$\dim^+ A \leq n, \qquad \text{c. q. d.}$$

OBSERVATIONS - 1°) Si $n = 0$ le théorème 7 est faux comme le montre l'ensemble K_3 de KNASTER (3; p. 275).

2°) Il y a effectivement des cas où $A \in D_n$ et $\dim^+ A < n$ comme le montre l'exemple de la « grille » considerée dans le § 1. Là on a $A \in D_2$ et $\dim^+ A = 1$.

3. THÉORÈME 8. - L'espace euclidien E_n a dimension n.

D'abord nous ferons voire que $E_n \in D_n$. Par induction on verifie immédiatement la 1ª condition de la définition IV, puisque la circonférence appartient à la classe D_1, le point appartient à D_0 et le plan et la surface sphérique, à D_2.

Par rapport à la condition 2ª supposons que $E_n \in D_p$ avec $p < n$. Alors pour $P \in E_n$ quelconque il y a des v. a. p. $V(P)$ avec

$$\mathfrak{F}_{n-1}[V(P)] \in D_{p-1}$$

où $\mathfrak{F}_{p-1}$ indique la frontière de $V(P)$ relativement à E_n. Aussi

$$\dim^+ \mathfrak{F}_{p-1}[V(P)] \leq p-1,$$

comme on a vu et pourtant $\dim^+ E_n < n$, ce qui contredit la théorie de MERGER-URYSOHN, et alors $p = n$.

Les conditions 3e e 4e sont immédiats et ils montrent aussi qu'il n'y a pas dans E_n aucun $A \in D_p$ avec $p > n$.

Pourtant $\dim E_n = n$.

§ 5. - **Théorèmes de la somme.**

1. Nous étudierons maintenant les relations qui existent entre les dimensions des espaces E_i et leur réunion.

Les espaces considérés dans ce numero sont des espaces T_2.

THÉORÈME 9. - Si un espace E est réunion dénombrable d'espaces fermés E_i de dimensions zero, alors $\dim E = 0$.

Soit

$$E = \bigcup_1^{\infty} E_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Si $\dim E \neq 0$ alors E contiendra au moins une p. c. o. π, en soiant par les conditions du problème

$$\pi = \bigcup_1^\infty E_i \cap \pi .$$

Étudions les ensembles $E_i \cap \pi$. Pour célà observons que la topologie induite sur π par E est équivalente à celle qu'on obtient en considérant comme des voisinages de $P \in \pi$ les p. c. o. (extrémités exclues) contenues dans π et contenant P; pour les extremités (P_1, P_2) de π on exclut naturellement seulement l'extremité different de P_1 ou P_2. En résumé, la topologie induite par E est équivalente à la topologie induite par l'ordre de π déjà considerée (8; p. 28).

Soit $P \in E_i \cap \pi$ et $V(P)$ un voisinage quelconque de P dans la topologie de π. Demontrons que la fermeture de $E_i \cap \pi$ dans π, $\overline{E_i \cap \pi}$, ne contient pas aucun point interieur. En effet, soit $W(P) \subset \overline{E_i \cap \pi}$. Comme la topologie induite par l'ordre de π est équivalente à celle induite par E et E_i est fermé dans E, on a

$$\overline{E_i \cap \pi} \subset E_i .$$

Mais alors E_i contenant $W(P)$, contient aussi une p. c. o., ce qui est absurde puisque par hypothèse E_i est zero dimensionnel.

D'autre côté $W(P)$ est par définition l. p. c. (locally peripherally countably compact) et π est compact et aussi bicompact (8; pp. 29-34). Alors π est un espace de Baire et pourtant un au moins des ensembles $\overline{E_i \cap \pi}$ doit contenir un point interieur ce qui est impossible. Le théorème est demontré.

2. De ce théorème on peut en tirer plusieurs conséquences:

1°) Un espace de Hausdorff denombrable a dimension zero. En effet, chaque point est zero dimensionnel et fermé.

Ainsi l'espace defini par Urysohn (12; p. 277) a dimension zero.

Cet exemple est un point critique pour l'extension de la théorie de Menger-Urysohn puisque le théorème de la somme ne peut pas être vraie sur cette espace, c'est à dire, déjà pour un espace T_2 de base dénombrable la théorie de Menger-Urysohn n'a pas le théorème de la somme qui est un de ses plus frappants resultats.

2°) Une p. c. o. dans un espace T_2 a certainement une infinité *non denombrable* de points.

Cet une immédiate conséquence du théorème 9.

3. Pour la dimension zero notre théorie fourni des resultats plus généraux que celle de MENGER-URYSHON. Mais pour les espaces de dimension positive célà n'avient pas. Ainsi la « grille » déjà considerée dans le § 1 à dimension deux et est réunion dénombrable d'espaces fermés de dimension 1.

On a obtenu quelques resultats en considerant une classe d'étalons légèrement different de celle considerée jusqu'alors.

Ainsi si D_n^* est la nouvelle classe on a le théorème:

« Si $X \in D_p^*$ est un espace de BAIRE réunion denombrable d'espaces X_i, fermés et de dimension n, alors $p = n$ ».

On ne sait pas ci ce théorème est vraie pour nos étalons D_n.

§ 6. - **Produits cartesiens.**

1. Nous étudierons maintenant les relations entre les dimensions des espaces E_i et la dimension de leur produit cartesien muni de la topologie produit (6; p. 218).

Nous ferons usage des lemmes suivants:

LEMME I. - L'application continue d'un espace de HAUSDORFF, continu, localement connèxe dans un espace de HAUSDORFF est aussi un continu localement connèxe.

Voir (8; p. 70; th. 1.6).

LEMME II. - Si X est un espace métrique de base denombrable, continu, localement connèxe, deux point quelconques de X peuvent être liés par une p. c. o. contenue dans X.

La demonstration est analogue à celle de (13; p. 36) puisqu'on voit immédiatement qu'une p. c. o. est, dans les hypothèses admises, un arc dans le sens là consideré.

THÉORÈME 10. - Si E_i sont des espaces de HAUSDORFF de base denombrable et de dimension zero, alors, en faisant

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i,$$

on a:

$$\dim E = \dim \prod_{i=1}^{n} E_i = 0 \qquad (n \text{ entier quelconque}).$$

Soit, par impossible, π une p. c. o. contenue dans E. Comme sa projection dans E_i est continue et au moins, pour un $i = i_0$, $\pi' = \mathrm{proj}_{E_{i_0}} \pi$ ne se reduit pas à un seul point, on a que π' est un continu, et appartenant à un espace de HAUSDORFF de base denombrable il est un espace métrique. Ainsi d'après les lemmes I et II on conclut qu'il y a dans E_{i_0} une p. c. o. ce qui est absurde.

THÉORÈME 11. - Si E_i, $i \in I$, (I un ensemble quelconque d'indices) est une famille d'espaces de HAUSDORFF de base denombrable et dimension zero, alors on a:

$$\dim E = \dim \prod_{i \in I} E_i = 0.$$

Par des raisonnements analogues à ceux du théorème anterieur et en appliquant les lemmes I et II on demontre l'existence dans un E_i, d'une p. c. o. ce qui est contraire à l'hypothèse.

Un resultat analogue pour la théorie de MENGER-URYSOHN n'existe pas. Seulement si I est denombrable.

OBSERVATIONS. - 1°) Notons que pour la demonstration des théorèmes 10 et 11 la topologie de l'espace produit est utilisée seulement par rapport à la continuité des projections; ainsi ces théorèmes seront vraie pour une autre topologie quelconque dont les projections sont continues.

Si X est compact et Y métrique l'espace des applications continues de X dans Y est contenu dans l'espace produit Y^X. Maintenant si $\dim Y = 0$ on a, d'après (7; p. 476) que deux fonctions f et g de X dans Y ne sont pas homotopiques. Par. ex., comme nous verons plus tard l'ensemble K_3 a dimension zero et alors les classes d'homotopie des applications continues d'un espace X dans K_3 se reduissent à des points.

2°) Un espace X est *universel* pour la dimension n dans la classe $\mathcal{X}$, si:

a) $\dim X = n$,

b) Un espace $A \in \mathcal{X}$ quelconque avec $\dim A \leq n$ peut être plongé dans X.

Dans la classe des espaces métriques separables ce sont bien connus des espaces universaux. D'autre côté pour notre théorie on sait que:

$$\dim K_3^{\aleph_0} = 0$$

et il vient la question que nous ne savons pas résoudre:

PROBLÈME V. - Sera-t-il l'ensemble $K_3^{\aleph_0}$ universel pour la dimension zero dans la classe des espaces métriques separables?

2. Voyons maintenant les espaces de dimension positive.

THÉORÈME 12 - Soient E et F deux espaces de HAUSDORFF à base denombrable et $\dim E = 0$, $\dim F = n$. Alors $\dim E \times F = n$.

Soit l'ensemble

$$F_{x_1} = \{ (x, y) x = x_1 \in E;\ y \in F \}.$$

On voit immédiatement que F_{x_1} est fermé dans $E \times F$ homeomorphe à F pour $x_1 \in E$ quelconque.

Comme le cas où E se reduit à un seul point est trivial, soient $P_1 \in F_{x_1}$ et $P_2 \in F_{x_2}$. Il n'y a pas dans $E \times F$ aucune p. c. o. π contenant (x_1, y_1) et (x_2, y_2) quoi qu'ils soient y_1 et y_2 de F, puis dans le cas contraire, d'après les lemmes I et II, il y aurait dans E une p. c. o.

$$\pi' = \mathrm{proj}_E\, \pi$$

contraire à l'hypothèse.

Soit maintenant $P(x, y) \in E \times F$. Comme F_x est homeomorphe à F, on a $\dim F_x = n$.

Supposons il y a un ensemble $B \in D_p$ avec $p > n$ et $B \subset E \times F$. Considerons deux cas:

1°) Pour $P \in B$ quelconque il y a un $V(P)$ a. p. contenu dans un ensemble F_{x_1} pour un certain $x_1 \in E$. Alors

$$\mathfrak{F}[V(P) \subset F_{x_1}$$

et un $Q \in B \cap F_{x_1}$ quelconque possède des voisinages a. p. avec

$$\mathfrak{F}[V(P)] \in D_{p-1}$$

et au moins pour un $\bar{x} \in E$ e $M \in B \cap F_{\bar{x}}$ il n'y a pas

$$V(M) \subset B \cap F_{\bar{x}}$$

avec

$$\mathfrak{F}[V(M)] \in D_q \qquad (q < p - 1).$$

Mais alors $\dim F_{\bar{x}} > n$ contraire à l'hypothèse.

2°) Il y a un $P \in B$ tel qu'aucun voisinage $V(P)$ n'est pas contenu dans F_x pour x quelconque.

Soient $P \in F_{x_1} \cap V(P)$ et $Q \in F_{x_2} \cap V(P)$, avec $x_1 \neq x_2$. Comme $V(P)$ est connèxe par p. c. o. il y a une p. c. o. d'extremités P et Q ce qui est absurde, comme on a déjà vu. Ainsi il n'y a pas aucun $B \in D_p$ avec $p > n$ et $B \subset E \times F$. Pourtant

$$\dim E \times F = n.$$

Ce demontration ne s'applique pas au cas $n = 1$, mais ce cas est immédiat d'après le théorème 4.

OBSERVATIONS. - Notons que si la dimension de MENGER-URYSOHN de E est zero, c'est à dire, $\dim^+ E = 0$, alors pour F avec $\dim F = n$, on a:

$$\dim E \times F = n$$

même si E n'a pas une base denombrable.

Célà peut être appliqué à un resultat de NAGATA (Fund. Math. XLV 2 (1958); p 169). En effet,

$$\dim N(\Omega) \times E_{2n+1} = \dim N(\Omega) + \dim E_{2n+1} = 2n + 1.$$

Pourtant un espace métrique quelconque avec dimension de MENGER-URYSOHN n, peut-être plongé dans un espace à dimension $2n+1$ dans notre sens.

§ 7. - Immersion dans les espaces euclidiens.

C'est un resultat classique de la théorie de MENGER-URYSOHN qu'un espace métrique separable avec dimension n peut-être plongé dans un espace euclidien de dimension $2n+1$. Voyons qu'est-ce qu'il a dans notre dimension.

1. **Dimension zero.** - Determinons d'abord la dimension de l'ensemble K_3:

THÉORÈME 13. - $\dim K_3 = 0$.
Immédiat puisque K_3 ne contient pas aucun p. c. o.

THÉORÈME 14. - $\dim^+ K_3 = 1$.
Immédiat.

Maintenant nous irons construire un ensemble de dimension zero que ne peut pas être immergé dans E_n pour n fini quelconque. Cet ensemble est:

$$K_3^{\aleph_0} = \prod_1^\infty E_i \qquad (E_i = K_3 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots).$$

En effet, comme K_3 est compact et $\dim^+ K_3 = 1$ on a (6; p. 227):

$$\dim^+ K_3 \times K_3 = \dim^+ K_3 + 1 = 2,$$

et par induction

$$\dim^+ K_3^{\aleph_0} = \infty .$$

Mais d'après § 6, th. 11 on a $\dim K_3^{\aleph_0} = 0$ et notre exemple est vrai.

2. **Dimension positive.** – En faisant usage des resultats du § 6 on a

$$\dim K_3^{\aleph_0} \times \Delta_n = n$$

où Δ_n est le cube n-dimensionel.

On voit que les ensembles de dimension n dans notre sens ne peuvent pas en général être étudiés comme des sous ensembles des espaces euclidiens et ainsi on peut classifier un plus grand nombre d'ensembles métriques n-dimensionnel que ce qui permette la théorie d'ALEXANDROFF (13).

§ 8. – Applications et exemples

1. **Le problème de Menger.** – Comme nous avons vu anterieurement si nous considerons la classe de tous les sous ensembles du plan le problème de MENGER a solution positive, c'est à dire, seulement la dimension de MENGER satisfait aux conditions A) jusqu'à E) (§ 2·1).

Le problème général, que je sache, est ouvert, c'est à dire si on considère tous les ensembles de E_n $(n > 2)$ et une dimension satisfaisant aux conditions A), B), C), D), E) on ne peut pas dire s'elle est ou non differente de celle de MENGER.

Proposons un problème un peu different, c'est à dire si d est une dimension definie pour tous les espaces topologiques (finie ou infinie) satisfaisant les conditions A), B) et C), exist-il une classe $\mathfrak{X}$ d'ensembles dimensionables suivant d, où sont valables les conditions D) et E) en y soiant d differente de la dimension de MENGER?

Montrons que notre dimension, permette definir une classe $\mathfrak{X}$ dans ces conditions. En effet, soit $\mathfrak{X}$ la classe formée par l'ensemble K_3 et tous ses sous-ensembles. Comme on sait $\dim K_3 = 0$ et aussi pour $A \subset K_3$ quelconque $\dim A = 0$. Dans cette classe sont vraies les conditions D) et E) mais $\dim K_3 \neq \dim^+ K_3$.

2. **Dimension de quelques ensembles.**

a) *Ensemble de Mazurkiewicz* – Nous appelons ainsi les ensembles definis par MAZURKIEWICZ en (14). Ce sont des ensembles totalement descon nèxes avec $\dim^+ > 0$. Or, d'après nos idées la dimension de ces ensembles est zero ce que nous semble plus intuitif que le resultat de la thèorie de MENGER-URYSOHN.

Un cas analogue on a pour l'ensemble défini par KNASTER et KURATOWSKI (15).

b) *Courbe universelle de Sierpinski.* - Cet ensemble a été défini par SIERPINSKI (7; p. 202). Si E est cette courbe nous avons immédiatement $\dim E \leq 2$. D'autre côté d'après (16; p. 106) elle contient la « grille » considerée dans le § 1 et alors $\dim E \geq 2$. Pourtant $\dim E = 2$.

c) Soit $\mathcal{T}^*$ un étolonnage défini par les classes D_n^* :

I) D_0^*, D_1^* sont identiques à D_0 et D_1.

II) Pour $n \geq 2$ posons: $X \in D_n^*$ si pour $P \in X$ quelconque il y a v. a. p. homeomorphes à l'interieur de I^n où I^n est le cube n-dimensionnel.

D'après le § 4 on a $\mathcal{T}^* < \mathcal{T}$ et alors pour X quelconque

$$\dim_P^{T^*} X \leq \dim_P X.$$

Montrons qu'en effet peut être valable le signal $<$. Soit P le côté d'un carré; on a

$$\dim_P^{T^*} X = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim_P X = 2.$$

Célà peut avenir même si les étalonnages sont relationées comme dans le § 3-3-2[a]. Soit alors $\mathcal{T}^*$ l'étalonnage définie ainsi:

$$X \in D_n^* \quad \text{seulement si, ou} \quad X \in D_n \quad \text{ou} \quad \dim X = n.$$

Considerons l'ensemble défini par la courbe

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad\qquad x > 0$$

et le point $P(0, 0)$. On a $\mathcal{T} < \mathcal{T}^*$ et cependant

$$\dim_P X = 0 \qquad \text{et} \qquad \dim_P^{T^*} X = 1.$$

Célà donne la solution de ce qui a été proposé dans (§ 3-3).

3. Variétés bi-dimensionnelles.

Recemment nous avons proposé (9), le concept de variété bi-dimensionnelle ([4]) dans un espace T_2. Maintenant nous justifierons la nomenclature.

THÉORÈME 15. - Une variété Γ bi-dimensionnelle a dimension deux.
En effet, comme chaque point de Γ possède des v. a. p. qui sont des bi-cellules et pourtant des espaces de classe D_2 on a

$$\dim \Gamma \geq 2.$$

([4]) Dans notre travail « Generalized Manifolds », on a modifié légèrement la definition de bi-cellule fermée et aussi celle de variété bi-dimensionnelle.

D'autre côté soit $B \subset \Gamma$ avec $B \in D_3$. Soit $P \in B$ et Ω une bi-cellule de Γ contenant P. Nous pouvons choisir un voisinage $V(P)$ de P telle que

$$\mathfrak{F}_B[V(P) \cap B] \in D_2$$

et aussi $\overline{V(P)} \subset \Omega$, puisque Γ est regulier (9; p. 347). Alors

$$\mathfrak{F}_B \subset \Omega \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{F}_B \in D_2$$

ce qui contrédit le théorème 5.

Pour la dimension de MENGER-URYSOHN ce théorème est faux, puisque la « grille » (§ 1) a dimension de MENGER-URYSOHN 1 et elle est une variété bi-dimensionnelle dans notre sens. Or, comme les variétés dans notre sens contiennent les variétés classiques et dans ce cas $\dim^+ \Gamma = \dim \Gamma = 2$, on voit que notre théorie est plus avantajeuse que celle de MENGER, au moins pour une généralisation des variétés classiques.

4. Espace de classe M_n.

Soit X un espace topologique de $\dim X = n$. Il sera interéssant savoir si pour $P \in X$ quelconque il y a des v. a. p. avec

$$\dim \mathfrak{F}[V(P)] \leq n - 1$$

En général cette affirmation est fausse.

D'autre côté, il y a des espaces où notre affirmation est vraie, par ex. les espaces euclidiens. On ne connait pas une condition suffisante pour que $E \in M_n$.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. S. ALEXANDROFF, *The present status of the theory of dimension*, « Am. Math. Soc. Trans. », série 2, vol I, pp. 1-26 (1955).

[2] W. HUREWICZ and H. WALLMAN, *Dimension Theory*, Princeton (1948.

[3] B. KNASTER, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, « Fund. Math. », vol. III, pp. 247-286.

[4] F. HAUSDORFF, « Math. Ann. 79 », p. 157 (1918).

[5] K. MENGER, *Zur Begründung einen axicmatischen theorie der dimeusion*, « Monat. f. Math. und Ph. 36 » pp. 193-218 (1929).

[6] C. KURATOWSKI, *Topologie I*, Warszawa (1952).

[7] C. KURATOWSKI, *Topologie II*, Warszawa (1952).

[8] R. L. WILDER, *Topology of Manifolds*, « Am. Math. Soc Colloquium Publ. », vol. XXXII (1949).
[9] R. G. LINTZ, *La bi-cellule et les varietés dans un espace abstrait*, « Annali di Mat. Pura ed Appl. » (IV) XLVI, pp. 343-348 (1958).
[10] R. G. LINTZ, *Sur le théorème de Jordan dans un Espace T_1*, « Ann. Mat. Pura ed Appl. » (IV vol. XLIII, pp. 357-370 (1957).
[11] ALEXANDROFF-HOPF, *Topologie*, vol. I, Springer (1935).
[12] P. URYSOHN, *Ueber die Machtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, « Math Ann. » 94 (1925).
[13] P. S. ALEXANDROFF, *Dimensiontheorie. Ein Beiträge zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*, « Math. Ann. » pp. 163-238, 106 B. (1932).
[14] S. MAZURKIEWICZ, *Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn*, « Fund Math. », 10 pp. 311-316 (1927).
[15] B. KNASTER et C. KURATOWSKI, *Sur les ensembles connèxes*, « Fund. Math. », 2, 206-255 (1921).
[16] K. MENGER, *Zur allgemein Kurventheorie*, « Fund. Math. » vol. X, pp. 97-115.