Completamenti di spazi uniformi.

Nota di GIOVANNI AQUARO (a Bari)

Sunto. - *È contenuto nell'introduzione.*

INTRODUZIONE. - In una Memoria di recente apparsa in questi ANNALI (cfr. [1] (*) § 3, def. 4.), lo scrivente ha introdotto il concetto di α -struttura uniforme, denotata con $\mathcal{A}_\alpha(E)$, sopra uno spazio topologico E , per ogni numero cardinale infinito α .

Nella presente Nota, supposto che E sia uniformizzabile, si analizzano alcune proprietà di E quando $\mathcal{A}_\alpha(E)$ sia una struttura uniforme di spazio completo ed, in tal caso, E viene denominato «spazio $\mathcal{A}_\alpha$ -completo», mentre, nel caso in cui $\mathcal{A}_\alpha(E)$ non sia una struttura uniforme di spazio completo, si stabiliscano alcune proprietà del completamento $v_\alpha(E)$ di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$.

Si riconosce che, nel primo caso, sussistono proprietà già note per i cosiddetti « Q -spazii» secondo E. HEWITT (cfr. [8] e nel secondo caso, proprietà già note per l'estensione di uno spazio completamente regolare (di HAUSDORFF) come sottospazio ovunque denso in un Q -spazio, nota come «estensione» di HEWITT.

In particolare, se si suppone $\alpha = \text{card}(N)$, con N l'insieme dei numeri interi non negativi, gli spazi $\mathcal{A}_\alpha$ -completi sono tutti e soli i Q -spazii e i completamenti $v_\alpha(E)$ sono le estensioni di HEWITT.

Non è noto allo scrivente se la generalizzazione dei Q -spazii qui conseguita esclusivamente attraverso proprietà «interne» degli spazi in oggetto, possa porsi in relazione con una generalizzazione dei Q -spazii, detta E -compattezza, di recente introdotta da R. ENGELKING e S. MRÓWKA in [5] attraverso proprietà «esterne» di tali spazi.

Per quanto concerne terminologia e notazioni qui adoperati, si può far riferimento alla Memoria [1] sopra citata oppure a [3], [4]; [11]; [12].

(*) I numeri in [] si riferiscono alla Bibliografia alla fine della presente Nota.

§ 1. - Famiglie uniformemente localmente finite.

La seguente definizione avrà ruolo rilevante nel presente paragrafo.

DEF. 1. - Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile e che $\mathcal{A}$ sia una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E . Allora, una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di parti di E si dice $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita se esiste una adiacenza V di E per $\mathcal{A}$ tale che, per ogni $x \in E$, sia finita la stella di $V(x)$ in I per $(X_i)_{i \in I}$ (cfr. [1] § 1, def. 3).

OSSERVAZIONE 1. - Questa definizione, anche se in qualche caso è equivalente, non deve essere confusa con quella adoperata da M. KATETOV in [10].

OSSERVAZIONE 2. - Ogni famiglia $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita è anche localmente finita.

OSSERVAZIONE 3. - Se E è regolare e paracompatto e se $\mathcal{A}$ è la struttura uniforme universale di E , ogni famiglia localmente finita di parti di E è $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita (cfr. [1] § 5, prop. 11 a) equivale b)).

Alcune proprietà delle famiglie uniformemente localmente finite vengono indicate ora, in vista di successive utilizzazioni.

LEMMA 1. - Se E è uno spazio uniformizzabile e se $\mathcal{A}$ è una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E , supposto che $(X_i)_{i \in I}$ sia una famiglia $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita (def. 1) di parti di E , esiste un'adiacenza aperta simmetrica W di E per $\mathcal{A}$ tale che la famiglia $(W(X_i))_{i \in I}$ sia $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita.

DIM. - Per la def. 1 esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}$ tale che, per ogni $x \in E$, sia finita la stella $I_{V(x)}^*$ di $V(x)$ in I per $(X_i)_{i \in I}$. Sia W un'adiacenza aperta simmetrica di E per $\mathcal{A}$ tale che $W \circ W \subset V$ e, per ogni $x \in E$, sia $I_{W(x)}^*$ la stella di $W(x)$ in I per $(W(X_i))_{i \in I}$. Evidentemente, se è $\iota \in I_{W(x)}^*$ si ha $W(x) \cap W(X_i) \neq \emptyset$.

Esiste un $y \in E$ tale che $y \in W(x) \cap W(X_i)$; quindi esiste $z \in X_i$ tale che $(y, z) \in W$. Conseguentemente $(x, z) \in W \circ W \subset V$ e da ciò $z \in V(x) \cap X_i$ e quindi $\iota \in I_{V(x)}^*$. Dunque è $I_{W(x)}^* \subset I_{V(x)}^*$, il che, $I_{V(x)}^*$ essendo finita, dimostra la tesi.

Si noterà che questo lemma, associato all'osservazione 3 alla def. 1, consente di dimostrare una ben nota proposizione di J. L. KELLEY ([11] cap. 5, lemma 3.1) o, più generalmente la prop. 13, § 5 di [1] (cfr. ibidem. § 5, lemma 10).

Una proprietà particolarmente notevole delle famiglie uniformemente localmente finite, in generale non necessariamente vera per le famiglie localmente finite, è espressa dal lemma:

LEMMA 2. - Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile, che $\mathcal{A}$ sia una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E , che A sia una parte di E e che $\mathcal{A}_A$ sia la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}$ su A . Allora, se $(X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di parti del sottospazio A , $\mathcal{A}_A$ -uniformemente localmente finita in A (def. 1), tale $(X_i)_{i \in I}$ è anche $\mathcal{A}$ -uniformemente localmente finita in E .

DIM. - Sia V un'adiacenza di A per $\mathcal{A}_A$ tale che, per ogni $x \in A$, sia finita la stella $I_{V(x)}^*$ di $V(x)$ in I per $(X_i)_{i \in I}$: per definizione di $\mathcal{A}_A$, esiste un'adiacenza V' di E per $\mathcal{A}$ tale che $V = V' \cap (A \times A)$. Sia W un'adiacenza simmetrica di E per W tale che $W \circ W \subset V'$: sia $x \in E$ e sia $I_{W(x)}^*$ la stella di W in I per $(X_i)_{i \in I}$. Se è $W(x) \cap A \neq \emptyset$, assumiamo $y \in W(x) \cap A$: per ogni altro $z \in W(x) \cap A$, essendo $W = \overline{W}^1$, si ha $(y, x) \in W$, $(x, z) \in W$, $(y, z) \in A \times A$ donde $(y, z) \in (W \circ W) \cap (A \times A) \subset V' \cap (A \times A) = V$. Dunque è $z \in V(y)$ e da ciò $W(x) \cap A \subset V(y)$. Ciò osservato, se è $\iota \in I_{W(x)}^*$ si ha $\emptyset \neq W(x) \cap X_\iota = (W(x) \cap A) \cap X_\iota \subset V(y) \cap X_\iota$ e da ciò $\iota \in I_{V(y)}^*$ e quindi $I_{W(x)}^* \subset I_{V(y)}^*$: dunque, al pari di $I_{V(y)}^*$, $I_{W(x)}^*$ risulta finito.

Un esempio di famiglia uniformemente localmente finita viene indicata dalla seguente:

PROP. 1. - Sia α un numero cardinale infinito, sia E uno spazio topologico, sia $\mathcal{A}_\alpha(E)$ la α -struttura uniforme su E ([1] § 3, def. 4). Allora detta $\mathcal{T}_\alpha(E)$ la topologia ⁽¹⁾ su E dedotta da $\mathcal{A}_\alpha(E)$, detta $\mathcal{T}$ la topologia inizialmente data su E , se $(G_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile dello spazio E per $\mathcal{T}$ tale che $\text{card}(I) \leq \alpha$, ogni $\mathcal{U}$ -riduzione $(F_i)_{i \in I}$ di $(G_i)_{i \in I}$ (def. 5 e 6 § 3 di [1]) è $\mathcal{A}_\alpha(E)$ -uniformemente localmente finita quando E sia munito di $\mathcal{T}_\alpha(E)$ (def 1).

DIM. - L'asserto viene provato sulla scorta dell'argomentazione che stabilisce il lemma 8, § 2 di [1]. Invero, sia A una qualunque parte di I e sia:

$$(1) \quad U_A = \left(\bigcap_{i \in A} G_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \notin A} F_i \right).$$

Sia $\mathfrak{A}$ l'insieme delle parti A di I tali che $U_A \neq \emptyset$. Le attuali ipotesi, in forza di detto lemma 8, § 2 di [1] (del quale qui sono riprodotte le notazioni), consentono di affermare^c che $(U_A)_{A \in \mathfrak{A}}$ è un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile di E e che ogni $A \in \mathfrak{A}$ è finito. Pertanto,

⁽¹⁾ Naturalmente, $\mathcal{T}_\alpha(E)$ è meno fine della topologia $\mathcal{T}$ inizialmente data su E ma non è necessariamente identica a $\mathcal{T}$: in altre parole, $\mathcal{A}_\alpha(E)$ non è necessariamente compatibile con $\mathcal{T}$. Tale compatibilità, invero, si ottiene se e solo se E è uniformizzabile, come risulta dalla prop. 3, § 3 di [1].

se per un qualunque $A \in \mathfrak{A}$ denotiamo con $I_{U_A}^*$ la stella di U_A in I per $(F_i)_{i \in I}$ ([1] § 1, def. 3), da $\iota \in I_{U_A}^*$ consegue $U_A \cap F_i \neq \emptyset$ e quindi $\iota \in A$, altrimenti, se fosse $\iota \in \mathbf{C} A$, si avrebbe $\emptyset \neq U_A \cap F_i \subset (\mathbf{C} F_i) \cap F_i$ in forza di (1): ciò che è impossibile. In forza delle deff. 3 e 4 del § 3 e del teor. 1 (proprietà d) del § 2 di [1], essendo $\text{card } (\mathfrak{A}) = \text{card } (I) \leq \alpha$, esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ tale $(V(x))_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(U_A)_{A \in \mathfrak{A}}$.

Se è $x \in E$ e se $I_{V(x)}^*$ è la stella di $V(x)$ in I per $(F_i)_{i \in I}$, supposto che A sia un elemento di $\mathfrak{A}$ tale che $V(x) \subset U_A$, da $\iota \in I_{V(x)}^*$ consegue $\emptyset \neq F_i \cap V(x) \subset F_i \cap U_A$ e quindi $\iota \in I_{U_A}^*$ donde $I_{V(x)}^* \subset I_{U_A}^*$ e da ciò, al pari di $I_{U_A}^*$ che è contenuto in A , $I_{V(x)}^*$ risulta finito. Dunque, per la def. 1, la tesi.

§ 2. - Spazii $\mathcal{A}_\alpha$ -completi.

DEF. - Se α è un numero cardinale infinito, uno spazio uniformizzabile E si dice $\mathcal{A}_\alpha$ -completo se la sua α -struttura uniforme ⁽²⁾ $\mathcal{A}_\alpha(E)$ ([1] § 3, def. 4) è una struttura uniforme di spazio completo.

Il senso e la portata di questa definizione saranno chiariti successivamente; per ora ci soffermiamo sull'esempio fornito dalla seguente:

PROP. 2 - Supposto $\omega = \text{card } (\mathbf{N})$, uno spazio uniformizzabile separato (di HAUSDORFF) E è $\mathcal{A}_\omega$ -completo (def. 2) se e solo se è un Q -spazio secondo E. HEWITT ([8]; «real compact» nella terminologia di [6]).

DIM. - Sia $\mathcal{A}_\omega(E)$ la ω -struttura uniforme su E . Sia $\mathcal{B}$ la struttura uniforme ottenuta col seguente procedimento dovuto a T. SHIROTA (cfr. [15]). Sia $\mathfrak{B}$ l'insieme delle parti B di $E \times E$ della forma $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (U_n \times U_n)$ dove $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è un ricoprimento aperto numerabile di E , normale secondo J. W. TUKEY, (cfr. [16] oppure [1] § 3, def. 8). Tale $\mathfrak{B}$ è un sistema fondamentale di adiacenze per $\mathcal{B}$.

In forza della prop. 5, § 3, e del lemma 13, § 2, di [1] si riconosce che è $\mathcal{A}_\omega(E) = \mathcal{B}$ e poichè E è un Q -spazio se e solo se $\mathcal{B}$ è una struttura uniforme di spazio completo (cfr. [15] teor. 2), la tesi è dimostrata.

OSSERVAZIONE. - In realtà si è dimostrato che, più in generale, $\mathcal{A}_\omega(E)$ e $\mathcal{B}$ sono identiche per ogni spazio uniformizzabile separato.

Si passano in rassegna, ora, alcune proprietà degli spazii $\mathcal{A}_\alpha$ -completi, già note per i Q -spazii, cioè per gli spazii $\mathcal{A}_\omega$ -completi.

⁽²⁾ Che è compatibile con la topologia di E (cfr.⁽¹⁾).

PROP. 3 - Se α è un numero cardinale infinito, se E è uno spazio uniformizzabile $\mathcal{A}_\alpha$ -completo (def. 2), ogni insieme chiuso A di E è un sottospazio (uniformizzabile) $\mathcal{A}_\alpha$ -completo.

DIM. - Sia $\mathcal{A}_\alpha(E)$ la α -struttura uniforme su E e sia $\mathcal{A}_\alpha(E)_A$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\alpha(E)$ su A . Poichè (def. 2) $\mathcal{A}_\alpha(E)$ è una struttura uniforme di spazio completo e A è chiuso in E , $\mathcal{A}_\alpha(E)_A$ è una struttura uniforme di spazio completo sul sottospazio uniformizzabile A . Poichè $\mathcal{A}_\alpha(E)_A$ è meno fine della α -struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(A)$ sul sottospazio A , la tesi è ovviamente dimostrata.

Se è $\alpha = \text{card}(N)$, in forza della prop. 2, la proposizione dimostrata risulta già nota (cfr. p. es. [9] prop. 4).

L'ulteriore prop. 4, che viene stabilita ora, richiede che si tenga presente una definizione introdotta dallo scrivente in [2]:

DEF. 3. - Se α è un numero cardinale infinito e se E è uno spazio topologico si dice che E è α -collettivamente normale se per ogni famiglia discreta (cfr. p. es. [4] § 4, exerc. 18) $(F_i)_{i \in I}$ di insiemi chiusi di E tale che $\text{card}(I) \leq \alpha$, esiste una famiglia $(G_i)_{i \in I}$ di insiemi aperti a due a due disgiunti di E tale che, per ogni $i \in I$, sia $F_i \subset G_i$.

Ciò premesso, si può stabilire la

PROP. 4. - Se α è un numero cardinale infinito e se E è uno spazio uniformizzabile α -collettivamente normale (def. 3) tale che esista un ricoprimento chiuso $(F_i)_{i \in I}$ di esso per cui sia $\text{card}(I) \leq \alpha$ e tale che, se $(G_i)_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi aperti di E per cui da $i \in I$ segua $F_i \subset G_i$, allora esiste un'adiacenza V di E per la α -struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(E)$ ([1] § 3, def. 4) per cui $(V(x))_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(G_i)_{i \in I}$.

In tali condizioni, se ogni F_i è un sottospazio $\mathcal{A}_\alpha$ -completo (def. 2) anche E è $\mathcal{A}_\alpha$ -completo.

DIM. - Sia $\mathcal{G}$ un filtro di CAUCHY su E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ e denotiamo con $\mathfrak{F}$ la base di filtro di CAUCHY su E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ formata dalle aderenze degli insiemi di $\mathcal{G}$. Riconosciamo che:

α) - esiste un $i \in I$ tale che da $F \in \mathfrak{F}$ consegna $F \cap F_i \neq \emptyset$.

Per assurdo, supponiamo che, al contrario, per ogni $i \in I$ esista un $F'_i \in \mathfrak{F}$ tale che $F_i \cap F'_i = \emptyset$. Posto $G_i = \mathbf{C} F'_i$ per ogni $i \in I$, si ha $F_i \subset G_i$ e quindi, per ipotesi, esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ tale che $(V(x))_{x \in E}$ sia più fine di $(G_i)_{i \in I}$. Poichè $\mathfrak{F}$ è base di filtro di CAUCHY per $\mathcal{A}_\alpha(E)$, esiste un $F \in \mathfrak{F}$ tale che $F \times F \subset V$. Sia $x \in F$: risulta $F \subset V(x)$ ed esiste $i \in I$ tale che $V(x) \subset G_i$. Conseguenza $F \cap F'_i = \emptyset$ contro un assioma di filtro: da ciò la α).

La traccia $\mathfrak{F}_{F_i}$ di $\mathfrak{F}$ su F_i (previsto da α) è, dunque, base di filtro di CAUCHY su F_i per la struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(E)_{F_i}$, indotta da $\mathcal{A}_\alpha(E)$ su F_i .

Detta $\mathcal{A}_\alpha(F_i)$ la α -struttura uniforme su F_i , poichè F_i è un sottospazio $\mathcal{A}_\alpha$ -completo, $\mathcal{A}_\alpha(F_i)$ è completa; inoltre, per la prop. 5 di [2], risulta $\mathcal{A}_\alpha(E)_{F_i} = \mathcal{A}_\alpha(F_i)$ e quindi $\mathfrak{F}_{F_i}$ converge sul sottospazio F_i . Conseguo che $\mathfrak{F}$ ha punti aderenti in E e quindi converge: dunque anche $\mathfrak{G}$ converge ed E è completo per $\mathcal{A}_\alpha(E)$.

OSSERVAZIONE 1. - Supponiamo che E sia uno spazio regolare normale e sia $\omega = \text{card}(\mathbf{N})$. La $\mathcal{A}_\omega(E)$ è compatibile con la topologia di E ([1] § 3, prop. 3).

Come conseguenza della prop. 7 § 3 di [1] e della prop. 5 di [2], E è ω -collettivamente normale. Sia $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un qualunque ricoprimento chiuso di E e sia $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una qualunque famiglia di insieme aperti di E tale che da $n \in \mathbf{N}$ consegua $F_n \subset G_n$. In forza della def. 4 § 3, del lemma 10 e del teor. 1 c) del § 2 di [1], esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$ tale che $(V(x))_{x \in E}$ sia più fine di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Se ogni F_n è $\mathcal{A}_\omega$ -completo (cioè Q -spazio secondo E. HEWITT) in forza della prop. 4 sopra dimostrata, l'intero E è $\mathcal{A}_\omega$ -completo (cioè Q -spazio). Si ritrova così, per altra via, un risultato di S. MRÓWKA ([13] teor. 1).

PROP. 5. - Se α è un numero cardinale infinito e se $(E_i)_{i \in I}$ è una famiglia di spazi uniformizzabili $\mathcal{A}_\alpha$ -completi (def. 2) anche il prodotto $E = \prod_{i \in I} E_i$ di $(E_i)_{i \in I}$ è $\mathcal{A}_\alpha$ -completo.

DIM. - Sia $\mathcal{A}_\alpha(E)$ la α -struttura uniforme su E ([1] § 3, def. 4) e, per ogni $i \in I$, sia $\mathcal{A}_\alpha(E_i)$ la α -struttura uniforme su E_i . Per ipotesi (def. 2) ogni $\mathcal{A}_\alpha(E_i)$ è una struttura uniforme di spazio completo e quindi anche la struttura uniforme $\mathcal{W}$ su E prodotto delle $\mathcal{A}_\alpha(E_i)$ ([3] cap. II, § 5, def. 1) è una struttura uniforme di spazio completo ([12] cap. 6, § 35, n. 10). La $\mathcal{W}$, come riconosciamo, oltre ad essere compatibile con la topologia di spazio prodotto di E , è meno fine di $\mathcal{A}_\alpha(E)$.

Sia $i \in I$ e sia pr_i l'applicazione proiezione di E in E_i . Se V è un'adiacenza di E_i per $\mathcal{A}_\alpha(E_i)$ esiste ([1] § 3, def. 4 e § 2, teor. 1, a)) un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ di E_i tale che $\text{card}(L) \leq \alpha$ e $\bigcup_{\lambda \in L} (U_\lambda \times U_\lambda) \subset V$. Ovviamente, $(\overline{pr_i}(U_\lambda))_{\lambda \in L}$ è un ricoprimento aperto localmente

finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile di E e, risultando $\bigcup_{\lambda \in L} (\overline{pr_i}(U_\lambda) \times \overline{pr_i}(U_\lambda)) \subset \overline{pr_i \times pr_i}(V)$,

detta $\overline{pr_i \times pr_i}(V)$ è una adiacenza di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$. La struttura uniforme $\mathcal{W}$ ha come sistema fondamentale di adiacenze l'insieme delle intersezioni di famiglie finite di parti di $E \times E$ della forma $\overline{pr_i \times pr_i}(V)$ per un certo $i \in I$ e con V adiacenza di E_i per $\mathcal{A}_\alpha(E_i)$. Dunque $\mathcal{W}$ è meno fine di $\mathcal{A}_\alpha(E)$ e,

conseguentemente, $\mathcal{A}_\alpha(E)$, al pari di $\mathcal{W}$, è una struttura uniforme di spazio completo. Da ciò, per la def. 2, risulta la tesi.

OSSERVAZIONE. - Se è $\alpha = \text{card}(\mathbf{N})$ la proposizione dimostrata stabilisce che il prodotto di una qualunque famiglia di Q -spazi (prop. 2) è un Q -spazio. Tale fatto fu enunciato ma non correttamente dimostrato da E. HEWITT in [8] e una dimostrazione corretta è dovuta a T. SHIROTA [15] (cfr. [7] nota ⁽¹⁰⁾ pag. 351).

§ 3. - Completamento rispetto a $\mathcal{A}_\alpha(E)$.

Alcune proprietà del completamento di uno spazio uniformizzabile E rispetto alla α -struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(E)$ traggono origine dalla seguente:

PROP. 6. - *Supponiamo che E^* sia uno spazio uniforme separato e completo con la struttura uniforme $\mathcal{U}^*$, che E sia una parte ovunque densa di E^* tale che esista un numero cardinale infinito α per cui la struttura uniforme $\mathcal{U}_E^*$, indotta da $\mathcal{U}^*$ su E , sia identica alla α -struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(E)$ di E ([1] § 3, def. 4). Allora, detta $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ la α -struttura uniforme di E^* , risulta $\mathcal{U}^* = \mathcal{A}_\alpha(E^*)$.*

DIM. - Indicata con $\mathcal{A}_\alpha(E^*)_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ su E , dimostreremo che:

$$(1) \quad \mathcal{A}_\alpha(E^*)_E = \mathcal{A}_\alpha(E).$$

$$(2) \quad \mathcal{U}^* \text{ è meno fine di } \mathcal{A}_\alpha(E^*).$$

Si osservi che $\mathcal{A}_\alpha(E^*)_E$ essendo, ovviamente, meno fine di $\mathcal{A}_\alpha(E)$, la (1) sarà dimostrata appena si sarà stabilito che:

$$(3) \quad \mathcal{A}_\alpha(E) \text{ è meno fine di } \mathcal{A}_\alpha(E^*)_E.$$

Si premette una osservazione ausiliaria:

α) - *Supponiamo che V^* sia un'adiacenza di E^* per $\mathcal{U}^*$ e sia $V_E^* = V \cap (E \times E)$: allora, esiste un'adiacenza W di E^* per $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ tale che:*
 1) - *risulta $W \cap (E \times E) \subset V_E^*$; 2) - $W \subset V^* \circ V^* \circ V^*$.*

A tal fine, poichè V_E^* è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ ($= \mathcal{U}_E^*$ per ipotesi), esiste un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(G_i)_{i \in I}$ del sottospazio E tale che $\text{card}(I) \leq \alpha$ e tale che sia (cfr. [1] § 3, def. 4):

$$(4) \quad \bigcup_{i \in I} (G_i \times G_i) \subset V_E^*.$$

Supponiamo che $(F_i)_{i \in I}$ sia una $\mathcal{U}$ -riduzione di $(G_i)_{i \in I}$ (cfr. [1] § 3, def. 5). In forza della prop. 1, la $(F_i)_{i \in I}$ è $\mathcal{A}_a(E)$ -uniformemente localmente finita in E (def. 1). Essendo $\mathcal{A}_a(E) = \mathcal{U}_E^*$, in forza del lemma 2, $(F_i)_{i \in I}$ è $\mathcal{U}^*$ -uniformemente localmente finita in E^* e quindi, in forza del lemma 1, esiste un'adiacenza W_1^* di E^* per $\mathcal{U}^*$ tale che $(W_1^*(F_i))_{i \in I}$ sia $\mathcal{U}^*$ -uniformemente localmente finito in E^* .

D'altra parte, per la definizione di $\mathcal{A}_a(E)$ e per un teorema stabilito dallo scrivente ([1] § 2, teor. 1), esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_a(E)$ tale che per ogni $i \in I$, sia $V(F_i) \subset G_i$: poichè è $\mathcal{U}_E^* = \mathcal{A}_a(E)$ esiste un'adiacenza W_2^* di E^* per $\mathcal{U}^*$ tale che $W_2^* \cap (E \times E) = V$.

Ovviamente, $V^* \cap W_1^* \cap W_2^*$ è un'adiacenza di E^* per $\mathcal{U}^*$.

Sia W^* un'adiacenza *aperta e simmetrica* di E^* per $\mathcal{U}^*$ tale che $W^* \subset V^* \circ W_1^* \circ W_2^*$.

Riconosciamo che $(W^*(F_i))_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto $\mathcal{U}^*$ -uniformemente localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile di E^* e che, inoltre, se per ogni parte X di E^* $\overline{X}^{(*)}$ è l'aderenza di X in $(E^*, \mathcal{U}^*)$, $(\overline{F_i}^{(*)})_{i \in I}$ è una $\mathcal{U}$ -riduzione di $(W^*(F_i))_{i \in I}$ (in E^*).

In primo luogo, se W_3^* è un'adiacenza di E^* per $\mathcal{U}^*$, simmetrica e tale che $W_3^* \circ W_3^* \subset W^*$, si ha $W_3^*(\overline{F_i}^{(*)}) \subset W^*(F_i)$ per ogni $i \in I$. Sia, infatti, $x \in W_3^*(\overline{F_i}^{(*)})$: esiste $y \in \overline{F_i}^{(*)}$ tale che $(y, x) \in W_3^*$; inoltre è $W_3^*(y) \cap F_i \neq \emptyset$ e, quindi, esiste $z \in F_i$ tale che $z \in W_3^*(y) \cap F_i$ e, per ciò, è $(y, z) \in W_3^*$ con $z \in F_i$. Conseguentemente $(z, x) \in W_3^* \circ W_3^*$: essendo $z \in F_i$ e $W_3^* \circ W_3^* \subset W^*$, consegue $x \in W^*(F_i)$ e da ciò $W_3^*(\overline{F_i}^{(*)}) \subset W^*(F_i)$. Con questo, ricordato il lemma 1, § 3 di [1], risulta che $\overline{F_i}^{(*)}$ è $\mathcal{U}$ -contenuto in $W^*(F_i)$ per ogni $i \in I$. In particolare, è $\overline{F_i}^{(*)} \subset W^*(F_i)$.

Inoltre, essendo $W^* \subset W_1^*$, la famiglia $(W^*(F_i))_{i \in I}$, al pari della $(W_1^*(F_i))_{i \in I}$, è $\mathcal{U}^*$ -uniformemente localmente finita in E^* .

Dunque, essendo $F_i \subset W^*(F_i)_{i \in I}$ per ogni $i \in I$, anche $(F_i)_{i \in I}$ è $\mathcal{U}^*$ -uniformemente localmente finita in E^* e quindi (osservaz. 2 alla def. 1) si ha

$$\bigcup_{i \in I} \overline{F_i}^{(*)} = \bigcup_{i \in I} \overline{F_i}^{(*)} = \overline{E}^{(*)} = E^*.$$

In conclusione, $(W^*(F_i))_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile di E^* e $(\overline{F_i}^{(*)})_{i \in I}$ è una sua $\mathcal{U}$ -riduzione.

Poniamo:

$$(5) \quad W = \bigcup_{i \in I} (W^*(F_i) \times W^*(F_i))$$

Ovviamente, poichè è $\text{card}(I) \leq \alpha$, W è un'adiacenza di E^* per $\mathcal{A}_a(E^*)$.

Dimostriamo che questa W è quella prevista in α) e che, quindi, verifica 1) e 2). A tal fine, in primo luogo, sia $x \in W^*(F_i) \cap E$ per un certo $i \in I$. Esiste $y \in F_i$ tale che $(y, x) \in W^*$ e quindi è $(y, x) \in W^* \cap (F_i \times E)$: ma è

$W^* \subset W_2^*$ per cui si ha $(y, x) \in W_2^* \cap (E \times E) = V$ donde $x \in V(F_i) \subset G_i$. Dunque è $W^*(F_i) \cap E \subset G_i$ donde consegue, in forza di (4) e (5)

$$W_E = W \cap (E \times E) \subset V_E^*.$$

Così la 1) è stabilita.

Quanto alla 2), supponiamo $(x, y) \in W$. Esiste $i \in I$ tale che $x \in W^*(F_i)$ e $y \in W^*(F_i)$ e quindi esistono x' e y' in F_i tali che $(x', x) \in W^*$ e $(y', y) \in W^*$. Consegue $(x', y') \in F_i \times F_i \subset G_i \times G_i \subset V_E^* \subset V^*$, mentre, essendo $W^* \subset V^*$, si ha anche $(x, x') \in V^*$ e $(y', y) \in V^*$: in conclusione è $(x, y) \in V^* \circ V^* \circ V^*$ e da ciò $W \subset V^* \circ V^* \circ V^*$ e quindi la 2).

Così la dimostrazione di α) è completata.

Ciò premesso, se V è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ esiste un'adiacenza V^* di E^* per $\mathcal{U}^*$ tale che $V_E^* = V^* \cap (E \times E) = V$ e quindi per 1) di α) esiste un'adiacenza W di E^* per $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ la cui traccia W_E su $E \times E$ sia tale che $W_E \subset V_E^* = V$ ciò che, W_E essendo adiacenza di E per $\mathcal{A}_\alpha(E^*)_E$ dimostra (3) e quindi la (1).

Supposto, poi, che V_0^* sia un'adiacenza qualunque di E^* per $\mathcal{U}^*$ e sia V^* un'adiacenza qualunque di E^* per $\mathcal{U}^*$ tale che $V^* \circ V^* \circ V^* \subset V_0^*$. Per 2) di α), esiste un'adiacenza W di E^* per $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ tale che $W \subset V^* \circ V^* \circ V^*$: consegue $W \subset V_0^*$ e quindi V_0^* è un'adiacenza di E^* per $\mathcal{A}_\alpha(E^*)$ e da ciò la (2).

In tal modo (1) e (2) essendo dimostrate, si deduce che $\mathcal{U}_E^* = \mathcal{A}_\alpha(E) = \mathcal{A}_\alpha(E^*)_E$ e che $\mathcal{A}_\alpha(E)$, essendo più fine di $\mathcal{U}^*$ che è una struttura uniforme di spazio completo, deve essere una struttura uniforme di spazio completo. Ciò, richiamato un ben noto teorema ([3] cap. II, § 3, corollario alla prop. 9), dimostra che si ha $\mathcal{U}^* = \mathcal{A}_\alpha(E^*)$.

Così è dimostrata la prop. 6.

Stabiliamo ora una conseguenza della prop. 6 della quale faremo uso per una ulteriore indagine della $\mathcal{A}_\alpha$ -completezza.

PROP. 7. - Supponiamo che α sia un numero cardinale infinito e che E sia uno spazio uniformizzabile separato. Allora esiste uno spazio uniformizzabile separato e $\mathcal{A}_\alpha$ -completo (def. 2) $\nu_\alpha(E)$ ed una ingezione j di E in $\nu_\alpha(E)$ tali che:

a) - $j(E)$ è ovunque denso in $\nu_\alpha(E)$.

b) - detta k la bigezione (ridotta) di E sopra $j(E)$ definita da j , tale k è un isomorfismo di E munito della α -struttura uniforme ([1] § 3, def. 4) sopra $j(E)$ munito della struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(\nu_\alpha(E))_{j(E)}$ indotta su $j(E)$ dalla α -struttura uniforme $\mathcal{A}_\alpha(\nu_\alpha(E))$ di $\nu_\alpha(E)$.

DIM. - Per un ben noto processo di completamento degli spazi uniformi, esistono uno spazio uniforme separato e completo $\nu_\alpha(E)$, con la struttura

uniforme $\mathcal{U}$, ed una ingezione j di E in $v_{\alpha}(E)$ tali che $j(E)$ sia ovunque denso in $v_{\alpha}(E)$ e che la bigezione k di E sopra $j(E)$ definita da j (ridotta di j) sia un isomorfismo dello spazio E , munito della sua α -struttura uniforme $\mathcal{A}_{\alpha}(E)$, sopra $j(E)$, munito della struttura uniforme $\mathcal{U}_{j(E)}$ indotta da $\mathcal{U}$ su $j(E)$.

Poichè k è un omeomorfismo di E sopra $j(E)$, $\mathcal{U}_{j(E)}$ risulta identica alla α -struttura uniforme di $j(E)$ e quindi, per la prop. 6, $\mathcal{U}$ è identica alla α -struttura uniforme $\mathcal{A}_{\alpha}(v_{\alpha}(E))$ di $v_{\alpha}(E)$ la quale così, al pari di $\mathcal{U}$, è una struttura uniforme di spazio completo. Ciò, a causa def. 2, dimostra che $v_{\alpha}(E)$ è $\mathcal{A}_{\alpha}$ -completo e stabilisce la tesi.

LEMMA 3. - *Supponiamo che α sia un numero cardinale infinito, che E ed E' siano spazi topologici (non necessariamente uniformizzabili) e che $\mathcal{A}_{\alpha}(E)$ e $\mathcal{A}_{\alpha}(E')$ siano le α -strutture uniformi su E e, rispettivamente, su E' . Allora, ogni applicazione continua f di E in E' è uniformemente continua per $\mathcal{A}_{\alpha}(E)$ e $\mathcal{A}_{\alpha}(E')$.*

DIM. - Sia V' un'adiacenza di E' per $\mathcal{A}_{\alpha}(E')$: esiste un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(G'_i)_{i \in I}$ di E' tale che $\text{card}(I) \leq \alpha$ e $\bigcup_{i \in I} (G'_i \times G'_i) \subset V'$. Evidentemente $(\overline{f(G'_i)})_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile di E e risulta $\bigcup_{i \in I} (\overline{f(G'_i)} \times \overline{f(G'_i)}) \subset \overline{f \times f(V')}$ e quindi $\overline{f \times f(V')}$ è una adiacenza di E per $\mathcal{A}_{\alpha}(E)$. Da ciò la tesi.

Dalla prop. 7 e dal lemma 4, scaturisce un risultato, sotto alcuni riguardi, conclusivo:

PROP. 8. - *Se α è un numero cardinale infinito e se E è uno spazio uniformizzabile separato, lo spazio uniformizzabile separato e $\mathcal{A}_{\alpha}$ -completo $v_{\alpha}(E)$ che, con la ingezione j , è previsto dalla prop. 7, risulta uno ed è omeomorfo a ciascuno degli spazi uniformizzabili separati e $\mathcal{A}_{\alpha}$ -completi E^* a ogniuno dei quali si può associare un'ingezione j^* di E in E^* con le seguenti condizioni:*

- a) - $j^*(E)$ è ovunque denso in E^* .
- b) - detta k^* la bigezione (ridotta) di E sopra $j^*(E)$ definita da j^* , tale k^* è un omeomorfismo di E su $j^*(E)$.
- c) - per ogni applicazione continua f di E in uno spazio uniformizzabile separato e $\mathcal{A}_{\alpha}$ -completo E' , esiste una (ed una sola) applicazione continua $\bar{f}$ di E^* in E' tale che $\bar{f} \circ j^* = f$.

DIM. - Che per $v_{\alpha}(E)$ e j si verifichino le condizioni previste da a) e b) per E^* e j^* , consegue da a) e b) della prop. 7.

Quanto alla c), la sua validità si stabilisce come segue.

Sia f una qualunque applicazione continua di E nello spazio uniformizzabile separato e $\mathcal{A}_\alpha$ -completo E' . Se $\mathcal{A}_\alpha(E)$ e $\mathcal{A}_\alpha(E')$ sono le α -strutture uniformi di E e, rispettivamente, di E' , a causa del lemma 4 f risulta uniformemente continua per $\mathcal{A}_\alpha(E)$ e $\mathcal{A}_\alpha(E')$. Si denoti con g l'isomorfismo di $j(E)$ munito di $\mathcal{A}_\alpha(v_\alpha(E))_{j(E)}$ sopra E munito di $\mathcal{A}_\alpha(E)$ inverso dell'isomorfismo k menzionato nella b) della prop. 7. Poichè $f \circ g$ è un'applicazione di $j(E)$ in E' uniformemente continua per $\mathcal{A}_\alpha(v_\alpha(E))_{j(E)}$ e $\mathcal{A}_\alpha(E')$ e poichè $j(E)$ è ovunque denso in $v_\alpha(E)$ ed E' è completo per $\mathcal{A}_\alpha(E')$ (def. 2), esiste ([3] cap. II, § 8, n. 4, teor. 1) un'applicazione $\bar{f}$ di $v_\alpha(E)$ in E' la cui restrizione a $j(E)$ sia $f \circ g$: detta φ l'ingezione canonica di $j(E)$ in $v_\alpha(E)$ si ha, dunque, $\bar{f} \circ \varphi = f \circ g$. Poichè risulta $\varphi \circ k = j$, detta i_E la bigezione canonica (identica) di E , si trova $\bar{f} \circ j = \bar{f} \circ \varphi \circ k = f \circ g \circ k = f \circ i_E = f$. Così la c) è dimostrata.

Stabilita così l'esistenza di un E^* e di una j^* verificanti a), b) e c), con argomentazione usuale dimostriamo l'unicità di E^* a meno di un omeomorfismo.

A tal fine, supponiamo che E_1^* e E_2^* siano spazi uniformizzabili separati e $\mathcal{A}_\alpha$ -completi e che j_1^* e j_2^* siano ingezioni di E in E_1^* e, rispettivamente, in E_2^* verificanti a), b) e c).

Esistono dunque le applicazioni φ_1 di E_1^* in E_2^* e φ_2 di E_2^* in E_1^* tali che:

$$\varphi_1 \circ j_1^* = j_2^*, \quad \varphi_2 \circ j_2^* = j_1^*.$$

Risulta da queste;

$$(1) \quad (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ j_2^* = \varphi_1 \circ j_1^* = j_2^*, \quad (\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ j_1^* = \varphi_2 \circ j_2^* = j_1^*.$$

Dette $i_{E_1^*}$ e $i_{E_2^*}$ le bigezioni canoniche (identiche) di E_1^* e E_2^* si ha anche:

$$(2) \quad i_{E_2^*} \circ j_2^* = j_2^*, \quad i_{E_1^*} \circ j_1^* = j_1^*.$$

Da (2) e (3) consegue che le restrizioni di $\varphi_1 \circ \varphi_2$ e $i_{E_1^*}$ a $j_2^*(E)$ e, rispettivamente, di $\varphi_2 \circ \varphi_1$ e $i_{E_2^*}$ a $j_1^*(E)$ sono identiche. Da ciò, $j_1^*(E)$ essendo ovunque denso in E_1^* e $j_2^*(E)$ essendo ovunque denso in E_2^* , poichè E_1^* e E_2^* sono separati, risulta $\varphi_1 \circ \varphi_2 = i_{E_2^*}$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1 = i_{E_1^*}$. Dunque, φ_1 è un omeomorfismo di E_1^* sopra E_2^* e φ_2 è il suo omeomorfismo inverso.

Ciò completa la dimostrazione della prop. 8.

OSSERVAZIONE 1. - Posto $\omega = \text{card}(\mathbf{N})$, come si è osservato nella prop. 2, gli spazi $\mathcal{A}_\omega$ -completi sono i Q -spazi secondo E. HEWITT e quindi $v_\omega(E)$ è la ben nota estensione di HEWITT di E come sottospazio ovunque denso in un Q -spazio.

OSSERVAZIONE 2. - Ancora per $\omega = \text{card}(\mathbf{N})$, la prop. 8 contiene un risultato di S. MRÓWKA (cfr. [14]) relativo ai Q -spazi e alle estensioni di HEWITT.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AQUARO G., *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, « Ann. di Mat. pura e applic. », (IV), vol. XLVII (1959), pp. 319-390.
 - [2] AQUARO G., *Spazii collettivamente normali ed estensioni di applicazioni continue*, « Rivista di Mat. Univ. », di Parma (in corso di pubblicazione).
 - [3] BOURBAKI N., *Topologie Générale*, « Actual. Scient. et Ind. », 858-1142, Hermann, Paris (1951),
 - [4] BOURBAKI N., *Topologie Générale*, « Actual. Scient. et Ind. », 1045 (nouv. edit.), Hermann, Paris (1958).
 - [5] ENGELKING, e R. MRÓWKA, S., *On E-compact Spaces*, « Bull. Acad. Polon. Sciences, Serie math. astr. phys. », vol. VI, n. 7 (1958) pp. 429-436.
 - [6] GILLMAN L. e JERISON M., *Rings of continuous functions*, Princeton Van Nostrand, Princeton (N. J.) (1960).
 - [7] GILLMAN L. e HENRIKSEN M., *Concerning rings of continuous functions*, « Trans. Amer. Math. Soc., Soc. », vol. 77 (1954) pp. 340-362.
 - [8] HEWITT E., *Rings of valued continuous functions*, I., « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 64 (1948), pp. 45-99.
 - [9] KATETOV M., *Measures in Fully Normal Spaces*, « Fundam. Math., tom. XXXVIII (1951), pp. 73-84.
 - [10] KATETOV M., *Estensioni di ricovrimenti localmente finiti*, (in russo), « Colloquium Math. », vol. 6 (1958), pp. 145-151.
 - [11] KELLEY J. L., *General Topology*, Van Nostrand, New York (1955).
 - [12] KOWALSKI H. J., *Topologische Räume*, Birkhäuser Ver., Basel Stuttgart (1961).
 - [13] MRÓWKA S., *Some Properties of Q-spaces*, « Bull. Acad. Polon. Sciences, cl. III », vol. V, n. 10 (1957) pp. 947-950.
 - [14] MRÓWKA S., *A Property of HEWITT Extensions νX of Topological Spaces*, « Bull. Acad. Polon. Sciences, Serie math. astr. phys. », vol. VI, n. 2 (1958), pp. 95-96.
 - [15] SHIROTA T., *A Class of Topological Spaces*, « Osaka Math. Jour. », vol. 4, (1952), pp. 22-40.
 - [16] TUKEY, J. W., *Convergence and uniformity in topology*, « Annals of Math. Studies », n. 2 (1940).
-