Criteri di semifattorialità e di fattorialità per gli anelli locali con applicazioni geometriche.

L. BĂDESCU (Bucarest) - M. FIORENTINI (Ferrara) (*)

A BENIAMINO SEGRE per il suo 70° compleanno

Summary. – *We give two criteria of almost factoriality and factoriality for local rings. Two geometrical applications follow.*

Introduzione.

In questa Nota si danno due criteri di semifattorialità (fattorialità) per gli anelli locali (il Teorema A con i Corollari 1, 2 e 3 e il Teorema B).

Il Teorema A si ispira allo studio delle contrazioni razionali (cfr. [1]) ed ha come applicazione geometrica la semifattorialità (fattorialità) degli anelli locali che compaiono in una contrazione razionale (Teorema A bis).

Il Teorema B invece si ricollega alle contrazioni ad un punto di una varietà intersezione completa (cfr. [2]) ed ha come applicazione geometrica la semifattorialità (fattorialità) dell'anello locale di un tale punto (Teorema B bis).

Notazioni e terminologia sono desunti da [4] e [5]; più precisamente, si è impiegato il linguaggio degli schemi, in ipotesi che consentono l'identificazione al caso della Geometria algebrica classica: infatti i K -schemi separati, integri e di tipo finito sopra un campo algebricamente chiuso K , hanno come corrispondenti le varietà algebriche irriducibili.

1. – Definizioni e richiami.

DEFINIZIONE 1. – Si dice che un morfismo di schemi $f: Y \rightarrow X$ è una *immersione chiusa* se esso si può fattorizzare mediante il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \nearrow \scriptstyle g & & \searrow \scriptstyle h \\ Y & \xrightarrow{\scriptstyle f} & X \end{array}$$

(*) Entrata in Redazione il 12 gennaio 1974.

dove g è un isomorfismo, Z è un sottoschema chiuso di X e j è il morfismo d'iniezione canonica.

Sia ora $j: Y' \rightarrow Y$ una immersione chiusa di schemi integri localmente noetheriani di ideale J nel fascio strutturale O_Y , $f: X \rightarrow Y$ la dilatazione di Y di centro Y' , $X' = f^{-1}(Y')$, $i: X' \rightarrow X$ l'immersione corrispondente d'ideale $I = O_X(1)$. Sia Y normale in ogni punto di Y' .

DEFINIZIONE 2. — Nelle ipotesi precedenti, la immersione chiusa $j: Y' \rightarrow Y$ dicesi *immersione razionale*, se una delle condizioni equivalenti è soddisfatta:

(i) se

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

è il diagramma cartesiano della dilatazione di Y di centro Y' , allora esiste un fascio localmente libero E di rango $r \geq 2$ su Y' tale che $X' = P(E)$ (il fibrato proiettivo associato al fascio E) e $i^*I = O_{P(E)}(s)$, $s > 0$;

(ii) esiste un fascio E localmente libero di rango $r \geq 2$ su Y' tale che, se $S(E)$ è l'algebra simmetrica di E , vi è un isomorfismo di algebre graduate

$$\alpha: \bigoplus_{n \geq 0} J^n/J^{n+1} \rightarrow S(E)^{(s)}$$

con $s > 0$, dove si è denotata con $S(E)^{(s)}$, vedi [4], ch. II, § 2, la sottoalgebra di $S(E)$ tale che $(S(E)^{(s)})_n = S(E)_{ns} = S^{ns}(E)$.

La implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue dal coroll. 1 del teor. 1 di [1]. La implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) segue da [4], ch. II.

OSSERVAZIONE 1. — Se $j: Y' \rightarrow Y$ è una immersione razionale, dalla (ii) della def. 2 segue che J/J^2 è localmente libero di rango $\binom{r+s-1}{r-1}$, dove s è l'intero sopra considerato e $r = \text{codim}_Y(Y')$.

OSSERVAZIONE 2. — Una immersione $j: Y' \rightarrow Y$ è localmente intersezione completa (cioè $j(Y')$ è localmente intersezione completa in Y) se e soltanto se l'immersione j è razionale e $i^*I = O_{E(P)}(1)$.

ESEMPIO 1. — Ogni dilatazione di uno schema Y di centro un sottoschema chiuso Y' localmente intersezione completa in Y è razionale; infatti in tali ipotesi è ben noto che il fascio E è il fascio conormale di Y' in Y e si ha $i^*I = O_{P(E)}(1)$. In particolare ogni dilatazione di uno schema liscio di centro un sottoschema liscio è una immersione razionale.

ESEMPIO 2. — Sia Y' uno schema liscio arbitrario, E un fascio localmente libero su Y' di rango $r \geq 2$ e $s > 0$ un intero; si pone $Y = \text{Spec}(S(E)^{(s)})$, e $j: Y' \rightarrow Y$ sia l'immersione chiusa associata all'omomorfismo canonico suriettivo

$$S(E)^{(s)} \rightarrow (S(E)^{(s)})_0 = \mathcal{O}_{Y'}.$$

In queste ipotesi è ben noto che nel diagramma (*) si ha $X' = P(E)$ e $i^*I = \mathcal{O}_{P(E)}(s)$, vedi [4], ch. II, quindi j è razionale (e questo è il più semplice esempio di immersione razionale).

In particolare, se si prende $Y' = \text{Spec}(K)$, con K un corpo algebricamente chiuso, allora $E = K^r$ è uno spazio vettoriale di dimensione $r \geq 2$ e si ha

$$Y = \text{Spec } K[T_1, \dots, T_r]^{(s)} = \text{Spec } K[\dots, T_{i_1, \dots, i_r}, \dots]/\mathfrak{m}$$

dove $T_{i_1, \dots, i_r}$ sono indeterminate tali che $i_k \geq 0$, $i_1 + \dots + i_r = s$ ed $\mathfrak{m}$ è l'ideale omogeneo generato dalle forme quadratiche

$$T_{i_1, \dots, i_r} T_{j_1, \dots, j_r} - T_{h_1, \dots, h_r} T_{t_1, \dots, t_r}$$

con $i_k + j_k = h_k + t_k$, $1 \leq k \leq r$, che definiscono il cono affine, con una sola singolarità nell'origine, della varietà di Veronese $V_{r-1}^s \subseteq P^N(K)$, con $N+1 = \binom{r+s-1}{r-1}$.

OSSERVAZIONE 3. — La condizione (ii) della def. 1 si può localizzare. Sia infatti $j: Y' \rightarrow Y$ una immersione razionale; se $y \in Y'$, allora indicando con J_y l'ideale di Y' nell'anello locale $\mathcal{O}_{Y',y}$, esiste un isomorfismo di algebre graduate

$$\alpha_y: \bigoplus_{n \geq 0} J_y^n / J_y^{n+1} \rightarrow (\mathcal{O}_{Y',y}[T_1, \dots, T_r])^{(s)}$$

dove r è l'altezza di J_y .

DEFINIZIONE 3. — Una coppia $(A, \mathfrak{m})$ formata da un anello locale noetheriano e normale A ed un ideale primo $\mathfrak{m}$ tale che l'altezza di $\mathfrak{m}$ ($\text{ht}(\mathfrak{m})$) è maggiore o uguale a 2, è una *coppia razionale* se l'immersione chiusa $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ è razionale.

OSSERVAZIONE 4. — Poichè $A/\mathfrak{m}$ è un anello locale, $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è uno schema locale. Quindi ogni fascio E localmente libero su $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$ è libero. Ne segue che $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia razionale se e soltanto se vi è un isomorfismo di algebre graduate

$$\alpha: \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow (A/\mathfrak{m}[T_1, \dots, T_r])^{(s)}$$

con $r = \text{ht}(\mathfrak{m}) \geq 2$ e $s > 0$ (cioè se vale la (ii) della def. 2).

2. — I teoremi A e B.

TEOREMA A. — *Siano $(A, \mathfrak{m})$ una coppia razionale e $f: X \rightarrow Y = \text{Spec}(A)$ la dilatazione di Y di centro $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$. Allora il gruppo $\text{Pic}(X)$ è ciclico infinito, e, nel caso in cui $i^*I = O_{X'}(1)$, $\text{Pic}(X)$ è generato dalla classe di $O_X(1) = I$.*

DIMOSTRAZIONE. — Si procederà con due diverse argomentazioni: la prima con metodi elementari; la seconda, più breve, richiede metodi potenti, ricavati, dal l'exposé XI di [5].

1) Consideriamo il diagramma di dilatazione:

$$\begin{array}{ccc} Pr^{-1}(A/\mathfrak{m}) = X' & \xrightarrow{i} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ V(\mathfrak{m}) = Y' & \xrightarrow{j} & Y = \text{Spec}(A) \end{array}$$

Poichè $A/\mathfrak{m}$ è locale, $\text{Pic}(X') = \mathbb{Z}$ (perchè $\text{Pic}(X')$ è generato da $O_{X'}(1)$). Sarà sufficiente allora dimostrare che l'omomorfismo $i^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ è iniettivo. Infatti, $\text{im}(i^*) \neq 0$, perchè $i^*I = O_{X'}(s)$. Ora, poichè, se J è l'ideale definito da $\mathfrak{m}$, si ha $X = \text{Proj}(O_X \oplus J \oplus J^2 \oplus \dots)$ ed f è la proiezione $X \rightarrow Y$, si ha per ogni fascio coerente L sopra X (cfr. [4], ch. III):

$$H^1(X, L \otimes I^n) = 0 \quad \text{per } n \gg 0.$$

Si prende a tal fine per L un fascio invertibile su X tale che $i^*L = O_{X'}$; si deve dimostrare che $L \cong O_X$. Si considera la successione esatta

$$0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow i^*O_{X'}(ns) \rightarrow 0$$

(dedotta da $i^*I = O_{X'}(s)$, $s > 0$) e mediante tensorizzazione per L (tenendo conto del fatto che $i^*I = O_{X'}(s)$), si ottiene, per ogni $n \geq 0$, la successione esatta

$$(1_n) \quad 0 \rightarrow L \otimes I^{n+1} \rightarrow L \otimes I^n \rightarrow i^*O_{X'}(ns) \rightarrow 0.$$

Ma, poichè $X' = Pr^{-1}(A/\mathfrak{m})$, si ha $H^1(X', O_{X'}(ns)) = 0$, per $n \gg 0$ (vedi [4], ch. III), da cui si deduce, per induzione decrescente, dalla successione esatta di coomologia

$$H^1(X, L \otimes I^{n+1}) \rightarrow H^1(X, L \otimes I^n) \rightarrow 0$$

che $H^1(X, L \otimes I^n) = 0$ per ogni $n \geq 0$.

D'altra parte, scrivendo la successione esatta di coomologia associata a (1₀)

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(X', O_{X'}) \rightarrow H^1(X, L \otimes I) = 0,$$

si ottiene una sezione $\sigma \in H^0(X, L)$ tale che $\sigma|_{X'} = 1$, quindi $\sigma(x) \neq 0$ se $x \in X'$. Ma l'insieme $X_\sigma = \{x \in X | \sigma(x) \neq 0\}$ è un aperto contenente X' , da cui segue $X_\sigma = X$ poichè A è locale e per finire $L \cong O_X$.

Se $i^*I = O_{X'}(1)$ allora i^* è suriettivo perchè la classe di $O_{X'}(1)$ genera $\text{Pic}(X')$. Quindi $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(X')$, e questo implica che $\text{Pic}(X)$ è generato dalla classe di I .

2) Si può supporre A completo per la topologia $\mathfrak{m}$ -adica e in questo caso si può dimostrare che l'omomorfismo $i^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ è biiettivo; per questo è sufficiente vedere che le due condizioni seguenti (vedi [5], exposé XI, prop. 3.12), sono verificate:

(a) La coppia (X, X') verifichi la « condizione di Lefschetz effettiva », cioè il funtore $F \mapsto \hat{F}$ definito sulla categoria dei fasci coerenti localmente liberi su X a valori nella categoria dei fasci coerenti localmente liberi sul completato formale $\hat{X}$ di X lungo X' è una equivalenza di categorie (si tiene conto della circostanza che il solo aperto di X contenente X' è lo stesso X).

(b) $H^q(X', I^n/I^{n+1}) = 0$, per ogni $n \geq 0$ e $q = 1, 2$.

La prima condizione è conseguenza dei « teoremi di confronto » in Geometria algebrica. Più precisamente, il funtore considerato $F \mapsto \hat{F}$ è pienamente fedele, poichè, in base al 1° teorema di confronto (vedi [4], ch. III, (4.1.5)), l'omomorfismo canonico $H^0(X, F) \rightarrow H^0(\hat{X}, \hat{F})$ è un isomorfismo, tenuto conto del fatto che $H^0(X, F)$ è un A -modulo di tipo finito (infatti f è un morfismo proprio), quindi completo per la topologia $\mathfrak{m}$ -adica (essendo A completo). Inoltre per ogni fascio coerente G localmente libero su $\hat{X}$ esiste un fascio coerente F su X tale che $\hat{F} = G$ (in virtù del teorema di esistenza di [4], ch. III, (5.1.4)), il fascio F risulta subito localmente libero su X . Nel caso in cui $i^*I = O_{X'}(1)$ e A non è completo, la classe di I genera $\text{Pic}(X)$ giacchè la stessa proprietà è valevole per la classe di $O_{X'}(1)$ in $\text{Pic}(X')$.

Per finire basta sapere che il solo aperto di X che contiene X' è lo stesso X . Infatti sia $V = X - F$ un tale aperto, con F chiuso e $F \cap X' = \emptyset$; poichè f è proprio $f(X)$ è chiuso in Y e $f(F) \cap Y' = \emptyset$. Ne segue che $f(F) = \emptyset$, quindi $F = \emptyset$, cioè $V = X$ poichè A è un anello locale.

COROLLARIO 1. - *Nelle ipotesi del teorema A, si suppone inoltre che l'omomorfismo $h^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U)$ è suriettivo, dove si è posto $U = X - X'$ e $h: U \rightarrow X$ è l'immersione aperta corrispondente. Allora $\text{Pic}(U)$ è un gruppo ciclico finito. Se $i^*I = O_{X'}(1)$, segue che $\text{Pic}(U) = 0$ ed A è parafattoriale. Inoltre, se l'anello locale $A/\mathfrak{m}$ è regolare, allora h^* è suriettivo quando $\text{Reg}(X)$ è un aperto di X , oppure quando $U = Y - Y$ è fattoriale (nel senso che ogni anello locale $O_{U,y}$ con $y \in U$, è fattoriale).*

DIMOSTRAZIONE. — Poichè $\text{Pic}(X)$ è ciclico infinito, è sufficiente verificare che $\text{Ker}(h^*) \neq 0$. Ma, evidentemente, $h^*(I) = I|_U = O_U$, quindi la classe di $h^*(I)$ è O , e, d'altra parte, $I \cong O_X$ giacchè altrimenti risulterebbe $i^*I = O_{X'}$, ciò che sarebbe in contraddizione con l'uguaglianza $i^*I = O_{X'}(s)$, per $s > 0$, quindi la classe di I è differente da O . Quando $i^*I = O_{X'}(1)$, abbiamo dunque che l'omomorfismo h^* è suriettivo e coincide con l'omomorfismo O , quindi $\text{Pic}(U) = 0$ e A è parafattoriale, l'altezza di α essendo maggiore o uguale a 2.

Se $A/\mathfrak{m}$ è regolare, allora X' è uno schema non singolare e, poichè I è invertibile, X è anch'esso non singolare nei punti di X' . Ne segue che $X' \subseteq \text{Reg}(X)$ e quindi $\text{Reg}(X) = X$, perchè $\text{Reg}(X)$ è aperto. Se $\text{Reg}(X)$ non è aperto, ma U è uno schema fattoriale, ci viene dimostrato che X è uno schema fattoriale. In ogni caso, la suriettività di h^* risulta subito, tenendo conto del fatto che il gruppo $\text{Pic}(X)$, rispettivamente il gruppo $\text{Pic}(U)$, s'identifica con il gruppo delle classi dei divisori di Weil su X , rispettivamente su U .

COROLLARIO 2. — *Nelle ipotesi del corollario 1, sia A un anello noetheriano e normale e $\mathfrak{m} \subseteq A$ un ideale primo di altezza ≥ 2 tale che $A/\mathfrak{m}$ sia regolare. La coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifichi le condizioni del teorema A e supponiamo inoltre che $U = Y - Y'$ sia fattoriale. Allora il gruppo $\text{Pic}(D(\mathfrak{m}))$ è finito da cui discende che A è semifattoriale (cioè il gruppo delle classi dei divisori di A è di torsione, cfr. [9]). Infine, se $i^*I = O_{X'}(1)$, allora A è fattoriale, oppure se $i^*I = O_{X'}(s)$ con $s > 0$, ma A è completo nella topologia $\mathfrak{m}$ -adica, allora il gruppo delle classi dei divisori di A è isomorfo con il gruppo ciclico finito di ordine s , $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. — Osserviamo che $D(\mathfrak{m}) = Y - Y' = X - X' = U$ e, applicando il corollario 1, si ha che $\text{Pic}(D(\mathfrak{m}))$ è finito. Poichè $ht(\mathfrak{m}) \geq 2$, ne segue che l'applicazione $\text{Pic}(U) \rightarrow \text{Cl}(A)$ è biiettiva (qui $\text{Cl}(A)$ indica il gruppo delle classi dei divisori di A), quindi A è semifattoriale (nel caso generale dove $i^*I = O_{X'}(s)$ $s > 0$) e fattoriale se $s = 1$.

Infine supponiamo A completo per la topologia $\mathfrak{m}$ -adica. Allora la seconda dimostrazione del teorema A implica che $\text{Pic}(X) \cong \text{Pic}(X')$. Per concludere basta sapere che $\text{Ker}(h^*)$ è il sottogruppo di $\text{Pic}(X)$ generato dalla classe di I (che corrisponde alla classe di $O_{X'}(s)$ in $\text{Pic}(X')$). X essendo uno schema fattoriale (anche regolare nei punti di X' poichè l'anello $A/\mathfrak{m}$ è regolare), ne segue che il gruppo $\text{Pic}(X)$ (risp. il gruppo $\text{Pic}(U)$) coincide con il gruppo delle classi dei divisori di Weil su X (risp. su U).

Sia allora L un fascio invertibile su X associato al divisore di Weil $D = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i D_i + nX'$ con $D_i \neq X'$, tale che $L|_U = O_U$, cioè tale che $D|_U = \sum_{i=1}^{\alpha} n_i D_i|_U$ è principale. Esiste allora una funzione razionale f (su U) tale che il divisore di f su U , $\text{div}_U(f)$, sia uguale a $D|_U$. Da ciò discende che il divisore di f su X , $\text{div}_X(f)$, è uguale a $\sum_{i=1}^{\alpha} n_i D_i + mX'$ (n_i, n, m sono interi) e finalmente $D \sim (n - m)X'$ (equivalenza lineare), cioè $L = (I^{-1})^{n-m}$ (perchè I^{-1} è il fascio invertibile associato al divisore X'). Quindi $\text{Ker}(h^*)$ è contenuto

nel sottogruppo di $\text{Pic}(X)$ generato dalla classe di I . Poichè l'opposta inclusione è immediata, la dimostrazione è finita.

OSSERVAZIONE 5. — Dal corollario 2 si può dedurre che ogni anello locale noetheriano e normale A , con $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale tale che $U = \text{Spec}(A) - \mathfrak{m}$ è fattoriale, avente la proprietà che esista un isomorfismo di algebre graduate:

$$\alpha: \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow k[T_1, \dots, T_r]^{(s)}$$

(con $k = A/\mathfrak{m}$ il campo residuo, le T_i variabili) è semifattoriale. In particolare si ritrova come applicazione che l'anello locale del vertice del cono affine della varietà di Veronese è semifattoriale, da cui segue, applicando la prop. 7.4 di [7], il coroll. 1 di [3], affermando che la varietà di Veronese, immagine proiettiva del sistema lineare delle ipersuperficie di ordine s di $P^{r-1}(k)$, con k un campo algebricamente chiuso, è aritmeticamente semifattoriale.

Possiamo introdurre a questo punto la seguente:

DEFINIZIONE 4. — Sia A un anello locale di dimensione $r \geq 2$, d'ideale massimale $\mathfrak{m}$ e di campo residuo k . L'anello A dicesi *semiregolare di tipo s* ($s > 0$), se

(i) la coppia $(A, \mathfrak{m})$ è razionale e, più precisamente, abbiamo che il graduato di A rispetto a $\mathfrak{m}$ è isomorfo con $k[T_1, \dots, T_r]^{(s)}$.

(ii) l'insieme $U = \text{Spec}(A) - \mathfrak{m}$ è regolare.

È chiaro che un anello semiregolare di tipo 1 è regolare.

OSSERVAZIONE 6. — Se l'anello A è semiregolare di tipo s e di dimensione r , allora considerando il diagramma di dilatazione di $Y = \text{Spec}(A)$ lungo $Y' = \text{Spec}(k)$ (vedi def. 2), abbiamo che $X' = P^{r-1}(k)$ e $i^*I = \mathcal{O}_{X'}(s)$ ($s > 0$).

Si verifica facilmente che se $r > 1$, la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica le ipotesi del coroll. 2, quindi:

(1) ogni anello semiregolare è semifattoriale;

(2) se A è un anello semiregolare, $\hat{A}$ (il completato di A nella topologia $\mathfrak{m}$ -adica) è fattoriale se e solo se A è regolare.

La (1) è immediata.

La (2) discende dal fatto che $\hat{A}$ è fattoriale se e solo se $s = 1$, poichè $\text{Cl}(\hat{A}) = \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ (coroll. 2).

ESEMPIO 3. — L'anello locale del vertice del cono affine della varietà di Veronese è semiregolare.

Il corollario seguente ha analogia, in caratteristica arbitraria, con un teorema di GRAUERT (Mathm. Annalen-146 (1962), pp. 331-368, § 4 teor. 7) per gli spazi complessi, ma il metodo utilizzato è del tutto differente.

COROLLARIO 3. — *Siano A e A' due anelli locali semiregolari di dimensione $r \geq 2$ e di tipo $s > 0$ aventi lo stesso corpo residuo k tali che A e A' contengano il corpo k . Allora i completati $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ di A e risp. di A' nelle topologie degli ideali massimali sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. — È sufficiente dimostrare che, se A è un anello locale completo semiregolare contenente il suo corpo residuo, allora A è isomorfo al completato dell'anello locale del vertice del cono affine della varietà di Veronese (cfr. esempio 3).

Nel considerare il diagramma della dilatazione di $Y = \text{Spec}(A)$ di centro $Y' = \text{Spec}(k) = \mathfrak{m}$

$$\begin{array}{ccc} X' = Pr^{-1} & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' = \mathfrak{m} & \rightarrow & Y = \text{Spec}(A) \end{array}$$

si è visto nella seconda dimostrazione del teorema A che l'omomorfismo $i^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ è un isomorfismo. Esiste quindi un fascio invertibile L su X tale che $i^*L = \mathcal{O}_{X'}(1)$ e denotiamo con $\mathcal{S}$ l'algebra graduata $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$.

Si ha $H^1(X, L \otimes I) = 0$; infatti, così come nella prima dimostrazione del teorema A , si ha che $H^1(X, I \otimes I^n) = 0$ per $n \gg 0$ e dalla successione esatta:

$$0 \rightarrow L \otimes I^{n+1} \rightarrow L \otimes I^n \rightarrow i^* \mathcal{O}_{X'}(ns+1) \rightarrow 0$$

se ne deduce per induzione decrescente che $H^1(X, I \otimes I^n) = 0$ per ogni $n \geq 0$, da cui l'affermazione. La successione esatta di coomologia associata alla successione esatta precedente per $n = 0$

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(1)) \rightarrow H^1(X, L \otimes I) = 0$$

mostra che vi sono $r = \dim(A)$ sezioni $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in H^0(X, L)$ tali che le restrizioni a X' siano le variabili $T_1, \dots, T_r$ (l'algebra graduata $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(n))$ è canonicamente isomorfa all'algebra di polinomi $k[T_1, \dots, T_r]$).

Siano inoltre $a_{i_1, \dots, i_r} \in H^0(X, L^{\otimes s}) = H^0(X, I)$ (infatti, si ha $L^{\otimes s} = I$, giacchè i due fasci hanno la stessa immagine in $\text{Pic}(X')$ e cioè $\mathcal{O}_{X'}(s)$) per $i_k \geq 0$ e $i_1 + \dots + i_r = s$ le sezioni seguenti

$$a_{i_1, \dots, i_r} = \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_r^{i_r}$$

il prodotto degli ε_i essendo preso nell'algebra graduata $\mathcal{S}$. È evidente che $H^0(X, I) = \mathfrak{m}$ (giacchè $\mathfrak{m}$ è massimale, ovvero in virtù del teor. 1 di [1]) e d'altra parte questi ele-

menti di $\mathfrak{m}$ soddisfano chiaramente le equazioni di Veronese:

$$(**) \quad a_{i_1, \dots, i_r} a_{j_1, \dots, j_r} - a_{h_1, \dots, h_r} a_{t_1, \dots, t_r} = 0 (i_k + j = h_k + t_k, i \leq k \leq r).$$

D'altra parte, la successione esatta

$$0 \rightarrow I^2 \rightarrow I \rightarrow i^* O_{X'}(s) \rightarrow 0$$

conduce alla successione esatta di coomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, I^2) = \mathfrak{m}^2 \rightarrow H^0(X, I) = \mathfrak{m} \rightarrow H^0(X', O_{X'}(s)) \rightarrow H^1(X, I^2) = 0$$

e, poichè tutti i monomi di grado s in $T_1, \dots, T_r$ formano una base per il k -spazio vettoriale $H^0(X', O_{X'}(s))$, ne risulta che gli $a_{i_1, \dots, i_r}$ (in numero di $\binom{r+s-1}{r-1}$) generano l'ideale $\mathfrak{m}$ (utilizzando il lemma di Nakayama).

Poichè il corpo k è contenuto in A , si ha un omomorfismo unico di k -algebre:

$$k[\dots T_{i_1, \dots, i_r} \dots] \rightarrow A$$

che manda le variabili $T_{i_1, \dots, i_r}$ nelle $a_{i_1, \dots, i_r}$ e, giacchè le $a_{i_1, \dots, i_r}$ soddisfano le relazioni (**), questo omomorfismo induce un omomorfismo unico

$$B = k[\dots T_{i_1, \dots, i_r} \dots] / \mathfrak{b} \rightarrow A$$

dove $\mathfrak{b}$ è l'ideale omogeneo generato dalle equazioni della varietà di Veronese (analoghe alle (**)), da cui un omomorfismo unico $A' \rightarrow A$ di k -algebre con A' il localizzato di B nell'ideale massimale corrispondente all'origine (vertice del cono di Veronese). Ma essendo A completo per la topologia $\mathfrak{m}$ -adica, si ottiene un omomorfismo unico di k -algebre $\hat{A}' \rightarrow A$ con $\hat{A}'$ il completato di A' per la topologia $\mathfrak{m}'$ -adica ($\mathfrak{m}'$ essendo l'ideale massimale di A' che è generato dalle classi delle $T_{i_1, \dots, i_r}$). Questi due anelli sono interi, hanno la stessa dimensione, r , e $\hat{\mathfrak{m}}' A = \mathfrak{m}$ (per costruzione dell'anello A'). Per il lemma di Nakayama risulta che questo omomorfismo è suriettivo, quindi anche biiettivo a causa delle dimensioni.

COROLLARIO 4. — *Un anello semiregolare contenente il suo corpo residuo è sempre un anello di Cohen-Macaulay.*

DIMOSTRAZIONE. — Per il corollario 3, è sufficiente (giacchè un anello locale noetheriano è di Cohen-Macaulay se e soltanto se lo è il suo completato) verificare che l'anello locale del vertice del cono affine della varietà di Veronese è un anello di Cohen-Macaulay e questo è un fatto ben noto. D'altra parte ciò si dimostra anche facilmente osservando che i monomi $T_1^s, \dots, T_r^s$ formano una successione regolare nell'anello (di dimensione di Krull r) $k[T_1, \dots, T_r]^{(s)}$.

OSSERVAZIONE 7. — Ci si può chiedere se un anello semiregolare è oppure non è di Gorenstein. Il coroll. 3 riduce il problema (per gli anelli che contengono il loro corpo residuo) al caso del localizzato nell'origine dell'anello $k[T_1, \dots, T_r]^{(s)}$; ora, in questo caso si possono compiere dei calcoli elementari espliciti per vedere ciò. La risposta è la seguente: è un anello di Gorenstein se e soltanto se s divide r . Sotto questa forma questo risultato è stato ottenuto da V. BRÎNZĂNESCU (vedi Studii Cerc. Matematică, Tom. 26, Nr. 5(1974) pp. 625-629), mentre, per $r = 2$, è stato ottenuto da M. FIORENTINI in [3].

TEOREMA B. — *Siano A un anello locale noetheriano di dimensione $r \geq 2$, d'ideale massimale $\mathfrak{m}$ e di campo residuo k , e sia*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A/\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} & \rightarrow & Y = \text{Spec}(A) \end{array}$$

il diagramma cartesiano dello scoppimento di Y di centro $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$; si supponga che X' sia una varietà non singolare ammettente una immersione $h: X' \rightarrow P^n(k)$ tale che, se $O_{X'}(1) = h^*O_{P^n(k)}(1)$, allora il gruppo $\text{Pic}(X')$ sia generato dalla classe di $O_{X'}(1)$ e che X' sia 2-volte di prima specie relativamente ad h (vedi [8], ch. III). In queste condizioni $\text{Pic}(X)$ è un gruppo ciclico infinito. Se $\text{Reg}(X)$ è aperto in X , oppure se $X - X'$ è fattoriale A è semifattoriale. Se, inoltre, $i^*I = O_{X'}(1)$, allora A è fattoriale.

DIMOSTRAZIONE. — Si può osservare che i^*I è ampio su X' , quindi $i^*I = O_{X'}(s)$ con $s > 0$ e $H^1(X', O_{X'}(m)) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$, poichè X' è 2-volte di prima specie relativamente ad h . Inoltre X è non singolare in ogni punto di X' , poichè lo è X' e l'ideale I è invertibile. Si può ora ripetere punto per punto la dimostrazione del teorema A, mostrando che l'omomorfismo $i^*: \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X')$ è iniettivo. Quindi $\text{Pic}(X)$ è ciclico infinito. La semifattorialità di A si dimostra con lo stesso procedimento utilizzato nella dimostrazione del coroll. 1. Se inoltre $i^*I = O_{X'}(1)$, allora i^* è anche biiettivo, giacchè $O_{X'}(1)$ genera $\text{Pic}(X')$, quindi I genera $\text{Pic}(X)$. Se ne deduce che $\text{Pic}(Y - \mathfrak{m}) = 0$, da cui $\text{Cl}(A) = 0$, come nella dimostrazione del coroll. 2, cioè A è fattoriale.

OSSERVAZIONE 8. — Nelle ipotesi del teorema B, se inoltre X' è 3-volte di prima specie si può dimostrare che $\text{Cl}(\hat{A}) = \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, dove $i^*I = O_{X'}(s)$ con $s > 0$.

3. — Applicazioni geometriche dei teoremi A e B.

Come applicazioni geometriche dei teoremi A e B, si ottengono i seguenti teoremi A bis e B bis, che forniscono ulteriori informazioni sulle contrazioni in legame con i risultati stabiliti, rispettivamente, col teorema 2 di [1], nonchè col teorema 1 di [2] per le varietà algebriche irriducibili sopra un campo k algebricamente chiuso.

TEOREMA A bis. — *Sia*

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

un diagramma di contrazione razionale di varietà algebriche sopra k , cioè un diagramma tale che:

1) $X' = P(E)$, con E fascio localmente libero di rango $r \geq 2$ su Y' e $P(E)$ il fibrato proiettivo associato ad E ;

2) $i^*I = O_{P(E)}(s)$ con $s > 0$, dove I è l'ideale di X' in O_X . Inoltre Y è normale in ogni punto di Y' . Si suppone che Y' è non singolare. Si ha che:

(i) per ogni $y \in Y'$, l'anello locale $O_{X',y}$ è semifattoriale;

(ii) se $i^*I = O_{P(E)}(1)$, allora $O_{X,y}$ è regolare.

DIMOSTRAZIONE. — Sia $J \subseteq O_{X'}$ l'ideale di Y' e $y \in Y'$. Sia $\text{Spec}(O_{X',y}) \rightarrow Y'$ il morfismo canonico definito dall'applicazione identica $O_{X',y} \rightarrow O_{X',y}$ (cfr. [4], ch. I). Dal diagramma cartesiano (*) con cambiamento di base, mediante $\text{Spec}(O_{X',y}) \rightarrow Y'$ si ottiene il diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X'_y & \xrightarrow{i_y} & X_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(O_{X',y}) & \rightarrow & \text{Spec}(O_{X,y}) \end{array}$$

dove $X'_y = \text{Proj}(O_{X',y}[T_1, \dots, T_r])$, perchè $X' = P(E)$, con E modulo su $O_{X'}$, localmente libero di rango r ; inoltre $X_y \rightarrow \text{Spec}(O_{X,y})$ è la dilatazione di $\text{Spec}(O_{X,y})$ lungo $\text{Spec}(O_{X',y})$. Si osservi che se $I_y \subseteq O_{X_y}$ è l'ideale di X'_y , dalla condizione $i^*I = O_{X'}(s)$ nel diagramma (*), si ricava $i_y^*I_y = O_{X'}(s)$ con $s > 0$. Quindi se si prende $A = O_{X_y}$ e $\mathfrak{m} = I_y$, la coppia $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia razionale. D'altra parte, Y' regolare implica $O_{X',y}$ regolare e quindi anche X'_y è regolare. Ora X' è regolare perchè I è invertibile. Questo fatto implica X_y regolare in un intorno aperto di X'_y il quale coincide con tutto X_y (si ricordi l'ultima parte della dimostrazione del coroll. 1). Ne segue che le ipotesi del teorema A e dei corollari 1 e 2 sono soddisfatte. Così si è verificato che $O_{X,y}$ è semifattoriale. La (ii) è già stata dimostrata in [1].

TEOREMA B bis. — *Sia*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

il diagramma di dilatazione di Y nel punto chiuso y . Si suppone che $\dim(X') \geq 3$, X' è non singolare ed inoltre esiste una immersione chiusa $X' \rightarrow P^n(k)$ tale che X' diventa una intersezione completa in $P^n(k)$; $O_{X'}(1)$ indica il fascio invertibile definito da $O_{P^n}(1)$ mediante l'immersione $X' \rightarrow P^n(k)$. Sotto queste ipotesi, abbiamo che y è una singolarità isolata di Y e

(j) $O_{X,y}$ è semifattoriale;

(jj) se $i^*I = O_{X'}(1)$, allora $O_{X,y}$ è fattoriale.

DIMOSTRAZIONE. — Con un procedimento analogo a quello seguito nella precedente dimostrazione, si applica il teorema B, tenendo conto dei fatti seguenti: poichè i^*I è ampio ne segue $i^*I = O_{X'}(s)$, $s > 0$, una intersezione completa di dimensione ≥ 3 è sempre 3-volte di prima specie (vedi [8], ch. III) e, per finire, $\text{Pic}(X')$ è il gruppo libero generato dalla classe del fascio $O_{X'}(1)$ (cfr. [5], exposé XII, coroll. 3.7).

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BADESCU, *Contractions rationnelles des variétés algébriques*, Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, Vol. XXVII (1973), pp. 743-767.
- [2] L. BADESCU - M. MOROIANU, *Algebraic contractions and complete intersections*, Rend. Acc. Lincei, vol. LII, fasc. 6 (1972), pp. 884-892.
- [3] M. FIORENTINI, *Esempi di anelli di Cohen-Macaulay semifattoriali che non sono di Gorenstein*, Rend. Acc. Lincei, fasc. 5 (1971).
- [4] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, E.G.A., IHES, ch. I, II, III.
- [5] A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique*, II, 1962.
- [6] A. LASCU, *Sous-variétés régulièrement contractibles d'une variété algébrique*, Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, fasc. 4 (1969).
- [7] P. SAMUEL, *Unique factorisation domains*, Tata Institute, 1964.
- [8] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math., 1955.
- [9] U. STORCH, *Fastfaktorielle Ringe*, Math. Univ. Munster, 1967.