

Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations.

N. BOGOLIOUBOFF (à Kieff (Ukraine)).

L'objet du présent travail, inspiré par les profondes recherches de M. L. TONELLI, consiste dans l'étude des problèmes de minima relatifs à des intégrales curvilignes dépendant des coordonnées du point courant de la courbe ainsi que de leurs dérivées jusqu'au 2^{me} ordre inclusivement.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants:

I. (§ 2) — *Le problème de minimum absolu de l'intégrale curviligne*

$$I(C) = \int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds$$

(où x, y, θ, s sont respectivement les coordonnées, l'angle de direction et l'arc du point courant de la courbe C , L_C la longueur de C et où $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction continue, périodique avec la période 2π par rapport à θ);

dans le champ \mathfrak{N} des courbes C (vérifiant certaines conditions frontières) telles que leurs angles de direction $\theta(s)$ sont à variation bornée;

n'admet en général aucune solution.

II. (§ 3) — *Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie l'inégalité*

$$|f(x, y, \theta, z)| \leq A |z|^\delta + B$$

(où A, B sont bornés pour x, y bornés, δ un nombre positif fixe, inférieur à l'unité);

alors le problème de minimum absolu de l'intégrale curviligne $I(C)$ dans le champ D des courbes (vérifiant les mêmes conditions frontières que les courbes du champ \mathfrak{N}) telles que leurs angles de direction $\theta(s)$ sont absolument continus;

n'admet en général aucune solution.

III. (§ 8) — *Si $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction deux fois dérivable, vérifiant l'inégalité*

$$A(x, y) |z|^{1+\delta} + B(x, y) \geq f(x, y, \theta, z) \geq k |z|^{1+\delta}$$

(où k, δ sont des nombres positifs fixes, $A(x, y), B(x, y)$ sont bornés pour les valeurs bornées des arguments);

alors la limite (pour $\varepsilon \rightarrow 0$) de la borne inférieure de l'intégrale curviligne

$$I(C) = \int_0^{Lc} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

dans le champ $D_\varepsilon(C)$ des courbes L de la classe \mathcal{K} admettant avec C le voisinage (ε) d'ordre (1);

est égale à l'intégrale curviligne

$$J(C) = \int_0^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds.$$

IV. (§ 9) — Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie certaines conditions explicitées au début de § 9, alors afin qu'il existe la courbe réalisant le minimum absolu de $I(C)$ dans D , il faut et il suffit que parmi les courbes (toujours existant) qui réalisent le minimum absolu de $J(C)$ dans D , il existe la courbe n'ayant aucun arc commun avec des « courbes singulières » relatives au problème de minimum posé.

V. (§ 10) — Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions du § 9, alors dans le champ D il existe toujours au moins une solution de l'équation d'Euler (relative à $I(C)$) composée d'un nombre fini des extremales.

De plus, quel que soit le nombre positif ε , on peut toujours lui faire correspondre dans le champ D au moins une solution de l'équation d'Euler (relative à $I(C)$) qui donne à $I(C)$ la valeur différant au plus par ε de la borne inférieure i_D .

§ 1. Dans ce travail nous allons étudier les problèmes de minima de l'intégrale curviligne

$$(1) \quad I(C) = \int_{(C)} F(x, y, x', y', x'', y'') dt$$

où $F(x, y, x', y', x'', y'')$ est une fonction continue pour $x'^2 + y'^2 \neq 0$, à l'aide d'une méthode directe qui présente au fond le développement approprié de la méthode avec laquelle M. L. TONELLI a traité (au point de vue de l'existence de minimum) le cas incomplètement régulier de l'intégrale curviligne

$$\int F(x, y, x', y') dt.$$

Remarquons tout d'abord que $I(C)$ peut toujours se mettre sous la forme

$$(2) \quad \int_0^{L_C} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

où $f(x, y, \theta, \theta')$ est une fonction continue admettant la période 2π par rapport à θ ; x, y, θ sont respectivement les coordonnées et l'angle de direction du point courant de la courbe C exprimés en fonctions de l'arc s et où L_C est la longueur de C .

D'autre part, chaque intégrale du type (2) peut être présentée sous la forme (1) de sorte que les expressions (1), (2) sont absolument équivalentes et il existe la correspondance biunivoque suivante

$$f(x, y, \theta, \theta') = F(x, y, \cos \theta, \sin \theta, -z \sin \theta, z \cos \theta)$$

$$F(x, y, x', y', x'', y'') = f\left(x, y, \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}\right) (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est à l'aide de la forme (2) que nous étudierons les propriétés minimales de $I(C)$.

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques définitions fondamentales qui interviennent à chaque instant dans le cours de cet exposé. Soient C, C_0 les deux courbes. On dit qu'elles ont entre elles le voisinage (ε) d'ordre (p) si l'on peut trouver une correspondance biunivoque entre les points de C et de C_0 telle que

$$D_{M_{C_0}M_C} \leq \varepsilon, \quad |\theta_{M_{C_0}} - \theta_{M_C}| \leq \varepsilon \dots |\theta_{M_{C_0}}^{(p-1)} - \theta_{M_C}^{(p-1)}| \leq \varepsilon$$

où M_{C_0}, M_C — deux points correspondants de C_0, C ; $D_{M_{C_0}M_C}$ — la distance entre eux; $\theta_{M_{C_0}}, \theta_{M_C}$ sont respectivement les angles de direction de C_0 en M_{C_0} et de C en M_C .

Si, quel que soit le nombre positif ε , la courbe C_∞ a le voisinage (ε) d'ordre (p) avec une infinité de courbes appartenant à une suite $C_n (n \rightarrow \infty)$ alors C_∞ est dite la courbe d'accumulation d'ordre (p) de la suite C_n . Si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un tel nombre n_ε que toutes les courbes C_n pour $n \geq n_\varepsilon$ aient avec C_∞ le voisinage (ε) d'ordre (p), alors C_∞ est la courbe limite d'ordre (p) de la suite C_n .

Envisageons à présent une fonction de ligne $I(C)$ définie dans une certaine classe \mathfrak{K} de courbes C .

On dit que $I(C)$ est semi-continue inférieurement d'ordre (p) au voisinage d'une courbe C_0 de la classe \mathfrak{K} si pour toute une suite C_n de courbes de la

classe \mathfrak{K} , admettant C_0 comme la courbe limite d'ordre (p) , on a

$$(3) \quad I(C_n) \geq I(C_0) - \varepsilon_n, \quad \text{où } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quand il s'agit de voisinage (ε) d'ordre (1) ..., semi-continuité inférieure d'ordre (1) , on dit tout simplement voisinage (ε) ..., semi-continuité inférieure.

§ 2. Considérons à présent un champ D de courbes C possédant les propriétés suivantes:

1°) Les coordonnées x, y des courbes C admettent la représentation analytique en fonction de l'arc

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

2°) Sur chacune des courbes C existe partout l'angle de direction $\theta(s)$

$$x'(s) = \cos \theta(s), \quad y'(s) = \sin \theta(s).$$

3°) $\theta(s)$ est fonction absolument continue.

Supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ ne soit pas négative pour toutes les valeurs des arguments, de sorte que $I(C)$ a une valeur bien déterminée (finie ou infinie) pour toute courbe C du champ considéré: la borne inférieure i_D étant finie ($i_D \geq 0$), posons le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans le champ D .

Dans tout ce qui sera écrit ci-dessous, nous considérons seulement le cas où le champ D est le champ de toutes les courbes passant par les points donnés A, B avec les angles de direction donnés θ_A, θ_B et possédant les propriétés (1), (2), (3).

Avant d'aborder ce problème, on peut demander si l'on ne peut pas poser le problème de minimum absolu dans le champ \mathfrak{N} des courbes C vérifiant les mêmes conditions frontières que les courbes du champ D et possédant les propriétés (1) et (2).

Sur chacune des courbes C existe l'angle de direction $\theta(s)$ à variation bornée pouvant présenter des discontinuités.

En effet pour toute courbe du champ \mathfrak{N} , $\theta(s)$ admet presque partout la dérivée intégrable de sorte que $I(C)$ a une valeur bien déterminée (finie ou infinie) pour toute courbe de ce champ.

Démontrons que la réponse sur cette question est en générale négative.

Considérons en effet le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$(4) \quad I(C, u) = \int_0^{L_C} f(x, y, \theta, u) ds$$

pris suivant la longueur de la courbe C , où $u(s)$ est une fonction arbitraire, dans le champ \mathfrak{C} des courbes C du champ \mathfrak{N} et des fonctions arbitraires $u(s)$.

Soit $C_n(x = x_n(s), y = y_n(s))$, $u_n(s)$ la suite minimisante de $I(C, u)$ dans \mathfrak{C} .

Fixant arbitrairement le nombre positif ε , prenons le nombre n de façon que

$$(5) \quad |I(C_n, u_n) - j| \leq \varepsilon$$

où j est la borne inférieure de $I(C, u)$ dans \mathfrak{C} . Envisageons la fonction

$$\rho_n(s) = \theta_n(s) - \int_0^s u_n(s) ds, \quad 0 \leq s \leq L_{C_n}$$

et approximations-la par la série des fonctions $[\rho_n(s)]_m$ composées, « des droites parallèles à l'axe de s ». Posons

$$\psi_{n,m}(s) = [\rho_n(s)]_m + \int_0^s u_n(s) ds$$

$$\theta_{n,m}(s) = \psi_{n,m}(s) - [\psi_{n,m}(0) - \theta_A] - \left[\frac{\psi_{n,m}(L_{C_n}) - \psi_{n,m}(0) + \theta_A - \theta_B}{L_{C_n}} \right] s$$

on voit aisément que

$$(6) \quad \begin{aligned} \theta_{n,m}(s) &\rightarrow \theta_n(s); & \theta_{n,m}(0) &= \theta_A \\ \theta'_{n,m}(s) &\rightarrow u_n(s); & \theta_{n,m}(L_{C_n}) &= \theta_B. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut supposer toujours sans restreindre la généralité que $\theta_n(s)$ n'est pas constante. Considerons alors les fonctions

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \cos(\theta_n + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) ds, \quad \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \sin(\theta_n + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) ds$$

où l'on a posé

$$\varphi_1 = s(L_{C_n} - s) \cos \theta_n, \quad \varphi_2 = s(L_{C_n} - s) \sin \theta_n.$$

On a évidemment

$$(7) \quad \begin{aligned} F(0, 0) &= x_B - x_A; & \left| \frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right|_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0} &= \\ \Phi(0, 0) &= y_B - y_A; & & \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s) \cos^2 \theta_n ds \int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s) \sin^2 \theta_n ds - \left(\int_0^{L_{C_n}} s(L_{C_n} - s) \cos \theta_n \sin \theta_n ds \right)^2 \right| = \alpha_n > 0.$$

Envisageons les fonctions

$$F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \cos(\theta_{n,m} + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) ds, \quad \Phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_0^{L_{C_n}} \sin(\theta_{n,m} + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) ds.$$

On a d'après (6), (7)

$$(8) \quad \begin{aligned} |F'_m(0, 0) - (x_B - x_A)| &\leq \eta_m, & \left| \frac{\partial(F'_m, \Phi_m)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \Big|_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0} - \alpha_n \right| &\leq \eta_m \\ |\Phi_m(0, 0) - (y_B - y_A)| &\leq \eta_m, & \text{où } \eta_m &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Remarquons d'autre part que $F'_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\Phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ainsi que leurs dérivées partielles sont uniformément continues par rapport à m .

Il existe donc un nombre δ indépendant de m tel que si

$$|\varepsilon_1| \leq \delta, \quad |\varepsilon_2| \leq \delta$$

alors au moins pour $m \geq m_\delta$, où m_δ est un nombre positif suffisamment grand, on a

$$\left| \frac{\partial(F'_m, \Phi_m)}{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \right| \geq \frac{\alpha_n}{2}.$$

Prenons un nombre M indépendant de m de façon qu'on ait

$$\left| \frac{\partial F'_m}{\partial \varepsilon_1} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial F'_m}{\partial \varepsilon_2} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varepsilon_1} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial \Phi_m}{\partial \varepsilon_2} \right| \leq M, \quad (|\varepsilon_1| \leq \delta, |\varepsilon_2| \leq \delta).$$

Alors le théorème bien connu sur les fonctions implicites montre que si

$$\frac{4M\eta_m}{\alpha_n} \leq \delta$$

alors les équations

$$F'_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = x_B - x_A, \quad \Phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_B - y_A$$

ont toujours une et une seule solution $\varepsilon_1^{(m)}$, $\varepsilon_2^{(m)}$ dans le domaine

$$-\delta \leq \varepsilon_1 \leq +\delta, \quad -\delta \leq \varepsilon_2 \leq +\delta$$

telle que

$$(9) \quad |\varepsilon_1^{(m)}| \leq \frac{4M\eta_m}{\alpha_n}, \quad |\varepsilon_2^{(m)}| \leq \frac{4M\eta_m}{\alpha_n}.$$

Construisons à présent la courbe C_m de longueur L_{C_m}

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \overline{x_m(s)} = x_A + \int_0^s \cos(\theta_{n,m} + \varepsilon_1^{(m)}\varphi_1 + \varepsilon_2^{(m)}\varphi_2) ds; \\ y &= \overline{y_m(s)} = y_A + \int_0^s \sin(\theta_{n,m} + \varepsilon_1^{(m)}\varphi_1 + \varepsilon_2^{(m)}\varphi_2) ds; \end{aligned} \quad 0 \leq s \leq L_{C_m}$$

appartenant évidemment au champ \mathfrak{N} . On a en effet

$$\begin{aligned}\overline{x_m(0)} &= x_A, \quad \overline{x_m(L_{C_n})} = x_B; & \overline{\theta_m(0)} &= \theta_A \\ \overline{y_m(0)} &= y_A, \quad \overline{y_m(L_{C_n})} = y_B; & \overline{\theta_m(L_{C_n})} &= \theta_B.\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que

$$(11) \quad \begin{aligned}\overline{x_m(s)} &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_n(s), & \overline{y_m(s)} &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_n(s), \\ \overline{\theta_m(s)} &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \theta_n(s), & \overline{\theta'_m(s)} &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_n(s)\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$I(\overline{C}_m) = \int_0^{L_{C_n}} f(\overline{x}_m, \overline{y}_m, \overline{\theta}_m, \overline{\theta}'_m) ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^{L_{C_n}} f(x_n, y_n, \theta_n, u_n) ds = I(C_n, u_n).$$

Cela étant, prenons un nombre m tel que

$$|I(\overline{C}_m) - I(C_n, u_n)| \leq \varepsilon$$

d'où l'on déduit, en vertu de (5)

$$|I(\overline{C}_m) - j| \leq 2\varepsilon, \quad \text{c.-à.-d.} \quad I(\overline{C}_m) \leq j + 2\varepsilon.$$

Or \overline{C}_m appartenant au champ \mathfrak{N} , on a

$$I(\overline{C}_m) \geq i_{\mathfrak{N}}$$

où $i_{\mathfrak{N}}$ est la borne inférieure de $I(C)$ dans \mathfrak{N} . Par conséquent on obtient (ε étant arbitraire positif)

$$i_{\mathfrak{N}} \leq j.$$

D'autre part, chaque valeur de $I(C)$, où C est une courbe quelconque de \mathfrak{N} est atteinte dans \mathfrak{C} par $C, \theta'(s)$ c.-à.-d.:

$$I(C) = I(C, \theta'(s))$$

de sorte que

$$j \leq i_{\mathfrak{N}}.$$

Ainsi on s'assure que

$$j = i_{\mathfrak{N}}.$$

On voit donc que si une courbe $C_0(x = x_0(s), y = y_0(s), \theta = \theta_0(s))$ donne le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ \mathfrak{N} , alors $C_0, \theta'_0(s)$ donnent le minimum absolu à $I(C, u)$ dans le champ \mathfrak{C} .

Par conséquent, afin qu'il existe la courbe C_0 minimante pour $I(C)$ dans \mathfrak{N} , il faut et il suffit qu'il existe telles $C(x = x(s), y = y(s), \theta = \theta(s))$, $u(s)$ minimantes $I(C, u)$ dans D qu'on ait $u(s) = \theta'(s)$.

Or l'inspection même des conditions de minimum montre que cela est en général impossible.

§ 3. Démontrons enfin le théorème si

$$|f(x, y, \theta, z)| \leq A |z|^\delta + B$$

où A, B sont bornées pour x, y bornées, δ un nombre positif fixe inférieur à l'unité. Alors le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans la champ D n'admet en générale aucune solution.

Considérons en effet de nouveau le champ \mathfrak{N} et soit $C_n(x = x_n(s), y = y_n(s))$ la suite minimisante pour $I(C)$ dans ce champ. Fixant à l'arbitraire le nombre positif ε prenons n de façon que

$$(12) \quad |I(C_n) - i_{\mathfrak{N}}| \leq \varepsilon.$$

Or, $\theta_n(s)$ étant une fonction à variation bornée, à chaque nombre positif η on peut faire correspondre un nombre positif H_η et un ensemble E_η de mesure $\leq \eta$, formé d'une suite énumérable d'intervalles (a_i, b_i) ne s'empiétant pas l'un sur l'autre, telles que dans CE_η le complémentaire de E_η jusqu'à $(0, L_{C_n})$, existe finie et continue la dérivée $\theta'_n(s)$, inférieure en valeur absolue à H_η .

Considérons à présent la fonction $\theta_\eta(s)$ définie à l'aide des conditions suivantes:

a) Dans CE_η on a $\theta_\eta(s) = \theta_n(s)$;

b) Dans (a_i, b_i) on a $\theta_\eta(s) = \theta_n(a_i) + \frac{\theta_n(b_i) - \theta_n(a_i)}{b_i - a_i}(s - a_i)$.

Il est aisé de voir que les fonctions, $\theta_\eta(s)$ sont absolument continues et que

$$(13) \quad \int_0^{L_{C_n}} |\theta'_\eta(s)| ds = \int_{CE_\eta} |\theta'_n(s)| ds + \sum_i |\theta_n(b_i) - \theta_n(a_i)| \leq \int_0^{L_{C_n}} |d\theta_n(s)|.$$

En remarquant qu'on a

$$(14) \quad \theta_\eta(0) = \theta_n(0) = \theta_A, \quad \theta_\eta(L_{C_n}) = \theta_n(L_{C_n}) = \theta_B$$

et que presque partout dans l'intervalle $(0, L_{C_n})$:

$$(15) \quad \theta_\eta(s) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \theta_n(s), \quad \theta'_\eta(s) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \theta'_n(s)$$

on construit à l'aide du raisonnement des pages (196, 197) les fonction, $\rho_\eta(s)$ telles que

$$(16) \quad \begin{aligned} & |\rho_\eta(s)| \leq \zeta_\eta, \quad |\rho'_\eta(s)| \leq \zeta_\eta, \quad \rho_\eta(0) = \rho_\eta(LC_n) = 0; \\ & \int_0^{LC_n} \cos(\theta_\eta + \rho_\eta) ds = x_B - x_A, \quad \int_0^{LC_n} \sin(\theta_\eta + \rho_\eta) ds = y_B - y_A, \quad \zeta_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Envisageons les courbes \bar{C}_η données par les équations:

$$(17) \quad \begin{aligned} x = \bar{x}_\eta(s) = x_A + \int_0^s \cos(\theta_\eta + \rho_\eta) ds, \quad y = \bar{y}_\eta(s) = y_A + \int_0^s \sin(\theta_\eta + \rho_\eta) ds \\ 0 \leq s \leq LC_n. \end{aligned}$$

On vérifie aisément à l'aide des (14), (16) que les courbes appartiennent au champ.

Remarquons d'autre part que d'après (a), (b), (16), (17), on voit qu'à chaque nombre η_0 on peut faire correspondre un tel nombre η_ε que dans CE_{η_0} on ait

$$|f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) - f(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n)| \leq \frac{\varepsilon}{LC_n}.$$

On tire d'ici

$$(18) \quad \begin{aligned} I(\bar{C}_{\eta_\varepsilon}) &= \int_{CE_{\eta_0}} f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) ds + \\ &+ \int_{E_{\eta_0}} f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) ds \leq \int_{CE_{\eta_0}} f(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n) ds + \varepsilon + \\ &+ \int_{E_{\eta_0}} f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) ds \leq I(C_n) + \varepsilon + \int_{E_{\eta_0}} f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) ds. \end{aligned}$$

Or $\bar{x}_\eta, \bar{y}_\eta, \bar{\theta}_\eta$ étant bornées uniformément de η , on a

$$\begin{aligned} \int_{E_{\eta_0}} f(\bar{x}_{\eta_\varepsilon}, \bar{y}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}_{\eta_\varepsilon}, \bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}) ds &\leq A \int_{E_{\eta_0}} |\bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}|^\delta ds + B\eta_0 \leq A \left(\int_{E_{\eta_0}} |\bar{\theta}'_{\eta_\varepsilon}| ds \right)^\delta \eta_0^{1-\delta} + B\eta_0 \leq \\ &\leq A \left(\zeta_{\eta_\varepsilon} LC_n + \int_0^{LC_n} |\theta'_\eta(s)| ds \right) \eta_0^{1-\delta} + B\eta_0 \leq K\eta_0^{1-\delta} \end{aligned}$$

où $K = \text{const.}$ (ne dépendant pas de η_0, ε).

Prenons $\eta_0 \leq \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}$, alors de (18) on déduit

$$I(\bar{C}_{\eta_\varepsilon}) \leq I(C_n) + 2\varepsilon$$

d'où l'on obtient, en tenant compte de (12),

$$I(\bar{C}_\eta) \leq i_{\mathfrak{N}} + 3\varepsilon.$$

Or \bar{C}_η étant une courbe du champ D , on a

$$I(\bar{C}_{\eta_\varepsilon}) \geq i_D$$

de sorte que

$$i_D \leq i_{\mathfrak{N}} + 3\varepsilon.$$

D'ici on tire, vu que ε était fixé arbitrairement (> 0):

$$i_D \leq i_{\mathfrak{N}}.$$

D'autre part le champ \mathfrak{N} comprend le champ D à son intérieur; donc on doit avoir

$$i_D \geq i_{\mathfrak{N}}.$$

On a par conséquent

$$i_D = i_{\mathfrak{N}}.$$

Cette égalité nous montre que toute une courbe C_0 donnant le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ D donne aussi le minimum absolu à $I(C)$ dans le champ \mathfrak{N} .

Or, nous avons déjà démontré qu'en général dans le champ \mathfrak{N} il n'existe pas pour $I(C)$ aucune courbe réalisant le minimum absolu.

Par conséquent le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans D aussi n'a pas en général de solution.

§ 4. Reprenons à présent le problème de minimum absolu posé dans le § 2.

Nous supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ admet toutes les dérivées partielles jusque' au 2-de ordre inclusivement et vérifie la relation

$$(19) \quad f(x, y, \theta, z) \geq K |z|^{1-\delta}$$

où K, δ sont deux nombres positifs fixes.

Soit $C_1, C_2 \dots C_n \dots$ une suite minimisante de $I(C)$ dans le champ D .

En vertu de l'inégalité (19) on s'assure aisément que la suite considérée admet au mois une courbe d'accumulation C_∞ appartenant au champ D .

Si la fonction de ligne $I(C)$ est semi-continue pour toutes les courbes du champ D , alors on montre aisément que C_∞ réalise le minimum.

Or la question se complique si $I(C)$ n'est pas semi-continue pour toutes les courbes du champ D .

Dans ce travail nous définirons pour toute une courbe C_0 la fonction de ligne $H(C_0)$ de façon que

$$H(C_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{borne inférieure de } I(C) \text{ dans le champ } D_\epsilon(C_0) \\ \text{des courbes, possédant les propriétés (1°), (2°), (3°)} \\ \text{de § 2 admettant avec } C_0 \text{ le voisinage } (\epsilon) \end{array} \right\}$$

et nous montrons que

$$H(C) = J(C)$$

où $J(C)$ est une intégrale curviligne convenablement formée de la forme (1).

Il est aisé de voir que si C_0 réalise le minimum absolu de $I(C)$, alors $I(C_0) = H(C_0) = J(C_0)$, or $H(C)$ (et par conséquent $J(C)$) a dans le champ D la même borne inférieure i_D que $I(C)$; par suite toute courbe minimante pour $I(C)$ est aussi minimante pour $J(C)$. Inversement, si C_0 est une courbe minimante pour $J(C)$ telle que

$$J(C_0) = H(C_0) = I(C_0)$$

alors C_0 est aussi minimante pour $I(C)$.

Ainsi afin que le problème de minimum de l'intégrale $I(C)$ dans le champ D admette au moins une solution, il faut et il suffit qu'il existe parmi les solutions du problème de minimum posé pour $J(C)$ dans D , ($J(C)$ étant une fonction de ligne semi-continue partout, vérifiant la condition

$$J(C) \geq K \int_0^{Lc} |\theta'|^{1+\delta} ds$$

il existe toujours au moins une solution du problème de minimum posé pour $J(C)$ dans D , une telle solution C_0 que

$$(20) \quad J(C_0) = I(C_0).$$

Or $J(C)$ étant une intégrale curviligne de la forme (1), nous pouvons écrire les équations d'EULER pour les courbes minimant cette intégrale et par conséquent nous pouvons dans une certaine mesure expliciter la condition (20).

Il est à remarquer que les intégrales analogues à $J(C)$ dans le cas du

problème de minimum des intégrales curvilignes de la forme

$$\int_{(C)} F(x, y, x', y') dt$$

furent considérées par M. TONELLI, qui a montré leur rôle important dans l'étude des problèmes de minimum des fonctions de lignes non semi-continues partout.

§ 5. Lemmes préliminaires. Soit donnée une fonction positive $f(x, \alpha)$ continue et dérivable pour $A \leq x \leq B$, $a \leq \alpha \leq b$; où A, B, a, b ont des valeurs finies.

Soit E un ensemble fermé de x appartenant à l'intervalle (A, B) et soit $\Phi(\alpha)$ la borne inférieure de $f(x, \alpha)$ pour x dans E (α est considérée comme un paramètre).

Remarquons d'abord que d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS le problème de minimum absolu de la fonction $f(x, \alpha)$ dans E admet toujours au moins une solution, de sorte qu'à tout α dans (a, b) on peut faire correspondre un ensemble $\chi(\alpha)$ appartenant à E des valeurs de x telles que

$$f(x, \alpha) = \Phi(\alpha).$$

On a évidemment

$$(21) \quad \begin{aligned} f(x_{\alpha_2}, \alpha_1) &\geq f(x_{\alpha_1}, \alpha_1) \\ f(x_{\alpha_2}, \alpha_2) &\leq f(x_{\alpha_1}, \alpha_2) \end{aligned}$$

où α_1, α_2 sont deux points quelconques de l'intervalle (a, b) ; $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}$ sont les nombres quelconques appartenant respectivement aux $\chi(\alpha_1), \chi(\alpha_2)$, d'ici on tire

$$(22) \quad f(x_{\alpha_1}, \alpha_1) - f(x_{\alpha_1}, \alpha_2) \leq \Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2) \leq f(x_{\alpha_2}, \alpha_1) - f(x_{\alpha_2}, \alpha_2).$$

Envisageons le nombre λ tel que

$$(22_1) \quad |f'_\alpha(x, \alpha)| \leq \lambda; \quad A \leq x \leq B, \quad a \leq \alpha \leq b;$$

on voit d'après (22) que

$$(23) \quad |\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| \leq \lambda |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Ainsi la fonction $\Phi(\alpha)$ est une fonction continue et vérifiant la condition de LIPSCHITZ-CAUCHY; par conséquent presque partout dans l'intervalle (a, b) il existe la dérivée $\Phi'(\alpha)$.

Démontrons à présent l'existence de la dérivée droite $\Phi^+(\alpha)$ en chaque point α intérieur à (a, b) .

À cet effet, remarquons que toute valeur d'accumulation de la suite x_{α_n} (où x_{α_n} sont des nombres appartenant respectivement aux $\chi(\alpha_n)$, α_n et par suite α sont des points de (a, b)) appartenant à $\chi(\alpha)$.

En effet, on a évidemment en vertu de (22₁) et de (23)

$$\begin{aligned} |f(x_{\alpha_n}, \alpha) - f(x_\alpha, \alpha)| &\leq |f(x_{\alpha_n}, \alpha_n) - f(x_\alpha, \alpha)| + |f(x_{\alpha_n}, \alpha_n) - f(x_{\alpha_n}, \alpha)| \leq \\ &\leq |\Phi(\alpha_n) - \Phi(\alpha)| + \lambda |\alpha_n - \alpha| \leq 2\lambda |\alpha_n - \alpha|. \end{aligned}$$

Cela étant, observons qu'on a

$$(24) \quad \frac{f(x_\alpha, \alpha + \Delta) - f(x_\alpha, \alpha)}{\Delta} \geq \frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geq \frac{f(x_{\alpha+\Delta}, \alpha + \Delta) - f(x_{\alpha+\Delta}, \alpha)}{\Delta}$$

où Δ est un nombre positif suffisamment petit, α — un point intérieur à (a, b) ; $x_{\alpha+\Delta}$, x_α — les nombres quelconques appartenant respectivement aux $\chi(\alpha + \Delta)$, $\chi(\alpha)$. De (24) on obtient

$$(24_1) \quad f'_\alpha(x_\alpha, \alpha) + \varepsilon_\Delta \geq \frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geq f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta}, \alpha) - \varepsilon_\Delta$$

où

$$\varepsilon_\Delta \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0$$

Considérons à présent une suite quelconque de nombres positifs Δ_n tels que

$$\Delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Soit x_α^+ une valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta_n}$ où $x_{\alpha+\Delta_n}$ sont des nombres appartenant respectivement aux $\chi(\alpha + \Delta_n)$.

Montrons que

$$f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta_n}, \alpha) \rightarrow f_\alpha^+(x_\alpha, \alpha).$$

En effet, supposons le contraire: alors il existe une autre valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta_n} - x_\alpha^{(1)}$ telle que

$$f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha) \neq f_\alpha^+(x_\alpha, \alpha).$$

Supposons pour fixer les idées que

$$(25) \quad f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha) > f_\alpha^+(x_\alpha, \alpha).$$

Soit $x_{\alpha+\Delta_\nu}$ la suite, convenablement extraite de la suite $x_{\alpha+\Delta_n}$ telle que

$$x_{\alpha+\Delta_\nu} \rightarrow x_\alpha^{(1)}.$$

Or x_α^+ appartenant évidemment à $\chi(\alpha)$, on a

$$f'_\alpha(x_\alpha, \alpha) + \varepsilon_{\Delta\nu} \geq f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha) - \varepsilon_{\Delta\nu},$$

d'où, en passant à la limite,

$$f'_\alpha(x_\alpha^+, \alpha) \geq f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha)$$

ce qui contrarie (25).

Le même raisonnement (il suffit d'échanger le rôle de $x_\alpha, x_\alpha^{(1)}$) si

$$f'_\alpha(x_\alpha, \alpha) > f'_\alpha(x_\alpha^{(1)}, \alpha).$$

Ainsi on a

$$f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta}, \alpha) \xrightarrow[\Delta > 0, \Delta \rightarrow 0]{+} f'_\alpha(x_\alpha, \alpha)$$

où $x_{\alpha+\Delta}$ sont les nombres quelconques de $\chi(\alpha + \Delta)$, x_α une des valeurs d'accumulation de la suite $x_{\alpha+\Delta}$.

En remarquant que x_α^+ appartient à l'ensemble $\chi(\alpha)$, on tire de (24₁)

$$f'_\alpha(x_\alpha, \alpha) + \varepsilon_\Delta \geq \frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \geq f'_\alpha(x_{\alpha+\Delta}, \alpha) + \varepsilon_\Delta.$$

Donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{\Phi(\alpha + \Delta) - \Phi(\alpha)}{\Delta} \xrightarrow{+} \bar{\Phi}'_\alpha(\alpha) = f'_\alpha(x_\alpha, \alpha)$$

où $\Delta > 0, \Delta \rightarrow 0$.

À l'aide du même raisonnement, on s'assure qu'en chaque point de (a, b) il existe la dérivée $\bar{\Phi}'(\alpha)$ égale à $f'_\alpha(\bar{x}_\alpha, \alpha)$, où \bar{x}_α est une valeur d'accumulation de la suite $x_{\alpha-\Delta}$ (où $x_{\alpha-\Delta}$ sont des nombres quelconques appartenant respectivement aux $\chi(\alpha - \Delta)$).

Il est aisé de voir que

$$\bar{\Phi}'^+(\alpha) \leq \bar{\Phi}'(\alpha).$$

Les propositions que nous venons de démontrer se généralisent aisément au cas de plusieurs variables. Ainsi :

Si $f(x_1, x_2, \dots, x_r, \alpha_1, \dots, \alpha_e)$ est une fonction continue et avec les dérivées partielles continues pour le point $\chi(x_1, \dots, x_r)$ situé à l'intérieur d'une hypersphère P de rayon fini R_P et pour le point $A(\alpha_1, \dots, \alpha_e)$ situé à l'intérieur d'une hypersphère de rayon fini.

Si Δ est un domaine fermé de points χ appartenant à l'hypersphère P .

Si enfin $\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_e)$ est la borne inférieure de $f(x_1, x_2 \dots x_r, \alpha_1 \dots \alpha_e)$ pour le point χ compris dans le domaine Δ (le point A est considéré comme un paramètre ne variant pas pendant la minimisation).

Alors $\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_e)$ est une fonction continue vérifiant la condition de LIPSCHITZ; de plus en chaque point A à l'intérieur de l'hypersphère il existe

les dérivées Φ'_{α_i} , $\bar{\Phi}'_{\alpha_i}$ égales respectivement aux

$$f'_{\alpha_i}(\mathcal{X}_{1\alpha_i} \dots \mathcal{X}_{r\alpha_i}, \alpha_1 \dots \alpha_e), \quad \bar{f}'_{\alpha_i}(\bar{\mathcal{X}}_{1\alpha_i} \dots \bar{\mathcal{X}}_{r\alpha_i}, \alpha_1 \dots \alpha_e)$$

où les points

$$\chi_{\alpha_i}(\mathcal{X}_{1\alpha_i} \dots \mathcal{X}_{r\alpha_i}), \quad \bar{\chi}_{\alpha_i}(\bar{\mathcal{X}}_{1\alpha_i} \dots \bar{\mathcal{X}}_{r\alpha_i})$$

sont respectivement les points quelconques d'accumulations des suites

$$\mathcal{X}_{\alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha_e}, \quad \bar{\mathcal{X}}_{\alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha_e}, \quad \text{où } \chi_{\alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha_e}, \quad \bar{\chi}_{\alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha_e}$$

sont respectivement les solutions des problèmes de minimum de

$$f(x_1 \dots x_r, \alpha_1 \dots \alpha_i + \Delta \dots \alpha_e) \quad \text{dans } \Delta$$

$$f(x_1 \dots x_r, \alpha_1 \dots \alpha_i - \Delta \dots \alpha_e) \quad \text{dans } \Delta.$$

Remarquons enfin que toutes les propositions ci dessus démontrées restent vraies si le domaine Δ étant infini, il existe un tel nombre H que pour tout point A dans Q il existe au moins une solution χ du problème de minimum absolu de f dans Δ qui est compris à l'intérieur de l'hypersphère P de rayon égal à H .

§ 6. Considérons à présent le problème de minimum absolu relatif à l'intégrale

$$(26) \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(a, b, c, \theta(s)) ds$$

daus le champ $D_{\alpha, \alpha+\varepsilon}^{\beta, \beta+\lambda\varepsilon}$ des fonctions absolument continues $\theta(s)$ vérifiant les conditions frontières

$$(27) \quad \theta(\alpha) = \beta, \quad \theta(\alpha + \varepsilon) = \beta + \lambda\varepsilon$$

où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont les nombres arbitraires, ε un nombre positif quelconque. Avant d'aller plus loin, rappelons quelques définitions préliminaires, fondamentales pour la suite.

On dit qu'un nombre z est fort relativement à (a, b, c) si pour tout n différent de z on a

$$f(a, b, c, n) - f(a, b, c, z) - (n - z)f'_z(a, b, c, z) > 0.$$

Si pour chaque valeur de n on a

$$f(a, b, c, n) - f(a, b, c, z) - (n - z)f'_z(a, b, c, z) \geq 0$$

alors on dit que z est semi-fort relativement à (a, b, c) .

Dans la suite, quand il n'y aura aucune ambiguïté à craindre, nous dirons simplement: z est fort, z est semi-fort, et nous écrirons $f(z)$ au lieu de $f(a, b, c, z)$.

Cela étant, considérons une z_0 non forte mais semi-forte et soient P, Q les racines — respectivement le plus petit et le plus grand — de l'équation

$$(28) \quad f(n) - f(z_0) - (n - z_0)f'(z_0) = 0.$$

Envisageons la fonction

$$F(t) = f(P + t) - f(z_0) - (P + t - z_0)f'(z_0)$$

et remarquons qu'on a pour toute une valeur de t

$$F(t) \geq 0.$$

Or on a $F(0) = 0$: par suite $F'(0) = 0$, c.-a.-d. $f'(P) = f'(z_0)$: à l'aide du même raisonnement on prouve que $f'(Q) = f'(z_0)$.

Par conséquent on obtient

$$(29) \quad \begin{aligned} f(P) - f(Q) - (P - Q)f'(Q) &= 0 \\ f(Q) - f(P) - (Q - P)f'(P) &= 0 \end{aligned}$$

et pour chaque valeur de n

$$\begin{aligned} f(n) - f(P) - (n - P)f'(P) &= f(n) - f(Q) - (n - Q)f'(Q) = \\ &= f(n) - f(z_0) - (n - z_0)f'(z_0) \geq 0 \end{aligned}$$

de sorte qu'on voit que P, Q sont semi-fortes (mais non fortes).

Soit à présent z un nombre semi-fort appartenant à l'intervalle fermé (P, Q) . On aura alors

$$(29_1) \quad \begin{aligned} f(z) - f(P) - (z - P)f'(P) &\geq 0; & f(z) - f(Q) - (z - Q)f'(Q) &\geq 0 \\ f(P) - f(z) - (P - z)f'(z) &\geq 0; & f(Q) - f(z) - (Q - z)f'(z) &\geq 0 \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$(P - z)[f'(P) - f'(z)] \geq 0, \quad (Q - z)[f'(P) - f'(z)] = (Q - z)[f'(Q) - f'(z)] \geq 0.$$

Par conséquent, vu que $P \leq z \leq Q$, on reçoit

$$f'(P) = f'(Q) = f'(z).$$

Donc en tenant compte des inégalités (29) on obtient

$$\begin{aligned} f(z) - f(P) - (z - P)f'(P) &= 0; & f(z) - f(Q) - (z - Q)f'(Q) &= 0 \\ f(P) - f(z) - (P - z)f'(z) &= 0; & f(Q) - f(z) - (Q - z)f'(z) &= 0 \end{aligned}$$

et d'ici on voit que (P, z) , (z, Q) vérifient le système

$$(30) \quad \begin{aligned} f(p) - f(q) - (p - q)f'(q) &= 0 \\ f(q) - f(p) - (q - p)f'(p) &= 0. \end{aligned}$$

Cela démontre que tout nombre z appartenant à l'intervalle fermé (P, Q) n'est pas fort.

Construisons toutes les (P, Q) possibles; on obtient ainsi une suite énumérable d'intervalles (P_i, Q_i) n'empiétant l'un sur l'autre.

Envisageons à présent un z à l'extérieur de toute (P_i, Q_i) . Il est évident d'abord que telle z ne peut pas être à la fois semi-forte et non forte car tout z semi-forte, non forte appartient nécessairement à un quelconque des intervalles (P_i, Q_i) .

D'autre part la z considérée ne peut pas être non semi-forte, car dans le cas contraire il existe de telles solutions semi-fortes p, q du système (30) que

$$p < z < q$$

de sorte qu'il existe un tel indice i que

$$P_i \leq p < z < q \leq Q_i.$$

Par conséquent, chaque z à l'extérieur de toutes (P_i, Q_i) est forte.

Ainsi l'ensemble $T(a, b, c)$ des tous les nombres non forts relativement à (a, b, c) est composé pour chaque (a, b, c) d'une suite énumérable d'intervalles fermés (P_i, Q_i) n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Cela étant, construisons les fonctions $p(a, b, c, z)$, $q(a, b, c, z)$ de façon que

$$(31) \quad \begin{aligned} p(a, b, c, z) &= q(a, b, c, z) = z, & \text{si } z \text{ n'appartienne pas à } T(a, b, c) \\ p(a, b, c, z) &= P_i, & q(a, b, c, z) &= Q_i, & \text{si } z \text{ appartienne à } (P_i, Q_i). \end{aligned}$$

Envisageons d'autre part la fonction $\psi(a, b, c, z, p, q)$ continue et dérivable, définie au moyen des relations

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(p) = f(q);$$

si $p = q$

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(a, b, c, p) \frac{q-z}{q-p} + f(a, b, c, q) \frac{z-p}{q-p}$$

si $p \neq q$.

On a évidemment, si $p < z < q$,

$$\begin{aligned} \psi(a, b, c, z, p, q) &\geq [f(P_i) + (p - P_i)f'(P_i)] \frac{q-z}{q-p} + \\ &+ [f(P_i) + (q - P_i)f'(P_i)] \frac{z-p}{q-p} = f(P_i) + (z - P_i)f'(P_i) = \psi(a, b, c, z, P_i, Q_i). \end{aligned}$$

D'autre part, si $p = z$ ou $q = z$,

$$\psi(a, b, c, z, p, q) = f(z) \geq f(P_i) + (z - P_i)f'(P_i) = \psi(a, b, c, z, P_i, Q_i).$$

Ainsi on a pour $p \leq z \leq q$

$$(32) \quad \psi(a, b, c, z, p, q) \geq \psi(a, b, c, P_i, Q_i).$$

De même façon on peut démontrer que si z est forte, alors si $p \leq z \leq q$ on doit avoir

$$(33) \quad \psi(a, b, c, z, p, q) \geq \psi(a, b, c, z, z).$$

En observant à présent que $p(a, b, c, z) \leq z \leq q(a, b, c, z)$, on voit en vertu de (31), (32), (33) que $p = p(a, b, c, z)$, $q = q(a, b, c, z)$ réalisent le minimum absolu de la fonction $\psi(a, b, c, z, p, q)$ dans le domaine Δ_z des p, q telles que $p \leq z \leq q$.

Par conséquent (vu qu'en vertu de la condition (19) on a $\psi > k$) $\left\{ |p|^{1+\delta} \frac{q-z}{q-p} + |q|^{1+\delta} \frac{z-p}{q-p} \right\}$ pour $p < z < q$) on s'assure qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un tel nombre H_M que si

$$(34) \quad |a| \leq M, |b| \leq M, |c| \leq M, |z| \leq M$$

alors

$$(35) \quad |p(a, b, c, z)| \leq H_M, \quad |q(a, b, c, z)| \leq H_M.$$

Cela étant, posons

$$p_1 = p_1(a, b, c, z) = p(a, b, c, z) - z; \quad q_1 = q_1(a, b, c, z) = q(a, b, c, z) - z.$$

On voit aisément que

$$p = p_1, \quad q = q_1$$

donnent le minimum absolu à la fonction

$$\psi(a, b, c, z, p+z, q+z)$$

dans le domaine Δ des p, q telles que

$$p > 0, \quad q > 0.$$

Or les inégalités (35) nous montrent qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre $H_M^{(1)} (= H_M + M)$ tel que si

$$|a| \leq M, \quad |b| \leq M, \quad |c| \leq M, \quad |z| \leq M$$

alors

$$|p_1(a, b, c, z)| \leq H_M^{(1)}, \quad |q_1(a, b, c, z)| \leq H_M^{(1)}.$$

Nous sommes donc justement dans le cas de la remarque faite à la fin du § 5.

Par conséquent, la fonction $\Phi(a, b, c, z)$ définie à l'aide des relations

$$(36) \quad \begin{aligned} \Phi(a, b, c, z) &= f(a, b, c, z) \text{ pour chaque } z \text{ n'appartenant pas à } T(a, b, c) \\ \Phi(a, b, c, z) &= f(P_i) \frac{Q_i - z}{Q_i - P_i} + f(Q_i) \frac{z - P_i}{Q_i - P_i} \text{ pour } P_i \leq z \leq Q_i \end{aligned}$$

égale à

$$\psi(a, b, c, z), \quad p(a, b, c, z), \quad q(a, b, c, z),$$

ou ce qui est la même chose, à

$$\psi(a, b, c, z, p_1 + z, q_1 + z),$$

est une fonction continue vérifiant la condition de CAUCHY-LIPSCHITZ, admettant partout par rapport à chaque argument les dérivées à droite et à gauche.

On voit de plus que

$$\overset{+}{\Phi}'_a(a, b, c, z) = \psi'_a(a, b, c, z, p_{a+0}, q_{a+0}) \dots \bar{\Phi}'_x(a, b, c, z) = \psi'_x(a, b, c, z, p_{z-0}, q_{z-0})$$

où $(p_{a+0}, q_{a+0}) \dots (p_{z-0}, q_{z-0})$ sont respectivement les points d'accumulation des suites

$$\{p(a + \Delta \dots z), q(a + \Delta \dots z)\} \dots \{p(a \dots z - \Delta), q(a \dots z - \Delta)\} \\ \Delta > 0, \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Il est aisé de voir donc que

$$(p_{a+0}, q_{a+0}) \dots (p_{z-0}, q_{z-0})$$

sont respectivement les solutions semi-fortes du système (30) telles que

$$p_{a+0} \leq z \leq q_{a+0} \dots p_{z-0} \leq z \leq q_{z-0}.$$

Par conséquent

$$f'_z(a, b, c, p_{z+0}) = f'_z(a, b, c, p_{z-0}) = f'_z(a, b, c, p(a, b, c, z))$$

d'ici on s'assure que $\Phi(a, b, c, z)$ admet partout la dérivée continue $\Phi'_z(a, b, c, z)$ égale à

$$f'_z(a, b, c, z, p(a, b, c, z))$$

Il est évident à présent aussi que si z est à l'extérieur de $T(a, b, c)$, alors $p_{a+\varepsilon} = \dots = q_{z-\varepsilon}$, de sorte que $\Phi(a, b, c, z)$ admet les dérivées $\Phi'_a, \Phi'_b, \Phi'_c$ égales à

$$(37) \quad f'_a(a, b, c, z), f'_b(a, b, c, z), f'_c(a, b, c, z).$$

Considérons maintenant le cas simple où l'ensemble T se réduit à un seul intervalle fini $P(a, b, c), Q(a, b, c)$ et où pour tout nombre Z semi-fort relativement à (a, b, c) on a

$$(38) \quad f''_{z^2}(a, b, c, z) > 0.$$

On s'assure aisément que dans ce cas $P(a, b, c), Q(a, b, c)$ sont des fonctions continues et dérivables de a, b, c .

En calculant immédiatement les dérivées partielles de P et Q à l'aide du système (29) et en remarquant que

$$(39) \quad \begin{aligned} \Phi(a, b, c, z) &= f(a, b, c, z) \text{ si } z \geq Q(a, b, c) \text{ ou si } z \leq P(a, b, c) \\ \Phi(a, b, c, z) &= f(a, b, c, P(a, b, c)) + (z - P(a, b, c))f'_z(a, b, c, P(a, b, c)) \\ &\quad \text{si } P(a, b, c) \leq z \leq Q(a, b, c) \end{aligned}$$

on démontre que $\Phi(a, b, c, z)$ admet les dérivées partielles continues égales respectivement aux

$$(40) \quad \begin{array}{l} f'_a(a, b, c, z) \text{ si } z \geq Q(a, b, c) \\ \vdots \\ \text{ou} \\ \text{si} \\ f'_z(a, b, c, z) \text{ si } z \leq P(a, b, c) \end{array} \left| \begin{array}{l} f'_a(a, b, c, P(a, b, c)) \frac{Q(a, b, c) - z}{Q(a, b, c) - P(a, b, c)} + \\ \vdots \\ + f'_a(a, b, c, Q(a, b, c)) \frac{z - P(a, b, c)}{Q(a, b, c) - P(a, b, c)} \\ f'_z(a, b, c, P(a, b, c)) \text{ si } P(a, b, c) \leq z \leq Q(a, b, c). \end{array} \right.$$

Revenons à présent au problème de minimum absolu posé au début de ce §. Construisons la ligne polygonale

$$y = \theta_\varepsilon(s)$$

appartenant à $D_{\alpha, \alpha + \varepsilon}^{\beta, \beta + \lambda \varepsilon}$ formée des deux segments rectilignes avec les coefficients angulaires égaux respectivement à

$$p(a, b, c, \lambda), \quad q(a, b, c, \lambda).$$

On a évidemment

$$f'_{\theta_\varepsilon}(a, b, c, \theta_\varepsilon(s)) = \text{Const. } \alpha \leq s \leq \alpha + \varepsilon$$

et pour tout n

$$f(n) - f(\theta'_0(s)) - (n - \theta'_0(s))f'_{\theta'_0}(\theta'_0(s)) \geq 0, \quad \alpha \leq s \leq \alpha + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\theta') ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} f(\theta'_0) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} [f(\theta') - f(\theta'_0) - (\theta' - \theta'_0)f'(\theta'_0)] ds > 0$$

où $\theta(s)$ est une fonction arbitraire du champ $D_{\alpha, \alpha+\varepsilon}^{\beta, \beta+\lambda\varepsilon}$.

Ainsi on voit que la fonction $\theta(s)$ donne le minimum absolu à l'intégrale (26) dans le champ $D_{\alpha, \alpha+\varepsilon}^{\beta, \beta+\lambda\varepsilon}$.

De plus la valeur minimum de cette intégrale (la borne inférieure) est égale à

$$\Phi(a, b, c, \lambda).$$

§ 7. Considérons à présent la classe K des courbes possédant les propriétés (1°), (2°), (3°) du § 2 et soit C_0 une courbe de cette classe. Fixant à l'arbitraire le nombre positif ε , envisageons le champ $D_{\varepsilon}(C_0)$ des courbes C de la classe K admittant avec C_0 le voisinage (ε).

Soit i_{ε} la borne inférieure de $I(C)$ dans le champ $D_{\varepsilon}(C_0)$; quand ε décroît jusqu'à zéro, i_{ε} augmente et tend par suite vers une certaine limite (finie ou infinie) que nous désignons par $H(C_0)$.

Il est évident que

$$(41) \quad H(C_0) \leq I(C_0).$$

Soit à présent R la classe des courbes de K pour lesquelles $H(C)$ a une valeur finie et soit C_0 une courbe de la classe R . Montrons qu'il existe toujours une suite C_n de courbes appartenant respectivement aux champs $D_n(C_0)$ (ou $\varepsilon_n \rightarrow 0$) telles que

$$(42) \quad I(C_n) \rightarrow H(C_0), \quad n \rightarrow \infty$$

A cet effet prenons arbitrairement un nombre positif n et faisons-lui correspondre un tel nombre positif ε_n que

$$(43) \quad |i_{\varepsilon_n} - H(C_0)| \leq \frac{1}{2n}.$$

Or il est évident que dans le champ $D_{\varepsilon_n}(C_0)$ il existe une telle courbe C_n que

$$(44) \quad |I(C_n) - i_{\varepsilon_n}| \leq \frac{1}{2n};$$

d'ici on tire en vertu de (43)

$$|I(C_n) - H(C_0)| \leq \frac{1}{2n}.$$

La suite C_n est donc la suite cherchée.

Démontrons enfin que $H(C)$ est une fonction semi-continue inférieurement de ligne C dans la classe R .

Fixons, en effet, à l'arbitraire le nombre positif ε et soit L une courbe de la classe R admettant avec C le voisinage (ε) (et appartenant par suite au champ $D_\varepsilon(C)$).

On a évidemment

$$i_\varepsilon \leq H(L), \quad i_\varepsilon \leq H(C), \quad |i_\varepsilon - H(C)| \leq \eta_\varepsilon, \quad \text{où } \begin{matrix} \eta_\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0 \end{matrix}$$

d'où l'on tire

$$H(L) \geq H(C) - \eta_\varepsilon \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 8. Dans ce § nous allons expliciter l'expression de la $H(C)$. À cet effet envisageons l'intégrale curviligne

$$(45) \quad J(C) = \int_0^{ic} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds$$

et remarquons que d'après (19) et de (36), on a

$$(46) \quad \Phi(x, y, \theta, z) \geq K |z|^{1+\delta}.$$

Soit S la classe de courbes appartenant à \mathcal{K} pour lesquelles la fonction de ligne $J(C)$ a une valeur finie.

Montrons d'abord que $J(C)$ est semi-continue inférieurement pour toutes les courbes C de la classe S .

Envisageons en effet la suite $C_n(x = x_n(s), y = y_n(s))$ des courbes de S convergeant vers une courbe $C_0(x = x_0(s), y = y_0(s))$ appartenant aussi à S . Soit $(0, L_n)$ le plus grand intervalle commun à des intervalles $(0, L_{c_0}), (0, L_{c_n})$. En fixant à l'arbitraire le nombre positif M , considérons un ensemble $E_{n, M}$ des valeurs de s appartenant à $(0, L_n)$ telles que

$$|\theta'_0(s)| \leq M.$$

On a évidemment

$$(47) \quad I(C_n) \geq \int_{E_{n, M}} \Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_n) ds \geq \int_{E_{n, M}} \{ \Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) + (\theta'_n - \theta'_0) \Phi'_{\theta'}(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) \} ds$$

car on a toujours

$$(48) \quad \Phi(a, b, c, p) - \Phi(a, b, c, z) - (p - z)\Phi'_z(a, b, c, z) \geq 0.$$

Remarquons d'autre part que

$$(49) \quad |x_n(s) - x_0(s)| \leq \varepsilon_n, |y_n(s) - y_0(s)| \leq \varepsilon_n, |\theta_n(s) - \theta_0(s)| \leq \varepsilon_n; 0 \leq s \leq L_n, \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Par conséquent

$$(50) \quad \begin{aligned} |\Phi(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) - \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)| &\leq \varepsilon_n^{(M)} \\ |\Phi'_{\theta'}(x_n, y_n, \theta_n, \theta'_0) - \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)| &\leq \varepsilon_n^{(M)} \end{aligned} \quad \text{où } s \text{ appartient à } E_{n, M}$$

où $\varepsilon_n^{(M)} \rightarrow 0$ pour toute valeur fixée de M .

On a donc

$$(51) \quad I(C_n) \geq \int_{E_{n, M}} \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0) ds + \int_{E_{n, M}} \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)(\theta'_n - \theta'_0) ds - \varepsilon_n^{(M)} L_{C_0} - \varepsilon_n^{(M)} \int_0^{L_n} |\theta'_n - \theta'_0| ds.$$

Or il est aisé de voir d'après (49) que

$$\left| \int_{E_{n, M}} \Phi'_{\theta'}(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0)(\theta'_n - \theta'_0) ds \right| \leq \varepsilon_n^{(1)} M \int_0^{L_n} |\theta'_n| ds + \varepsilon_n^{(2)} M$$

où

$$\varepsilon_n^{(1)} M \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n^{(2)} M \rightarrow 0.$$

Par conséquent en vertu de (51) et de (46) on a

$$(52) \quad I(C_n) \geq \int_{E_{n, M}} \Phi(x_0, y_0, \theta_0, \theta'_0) ds - \eta_{n, M} - \zeta_{n, M} |J(C_n)|^{\frac{1}{1+\delta}}$$

où

$$\eta_{n, M} \rightarrow 0, \quad \zeta_{n, M} \rightarrow 0.$$

Cela étant, prenons $M = M_n$ de façon que $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, $\eta_{n, M_n} \rightarrow 0$, $\zeta_{n, M_n} \rightarrow 0$ alors on a

$$m(E_{n, M_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L_{C_0}.$$

Par conséquent, de (52) on tire finalement

$$I(C_n) \geq I(C_0) - \varepsilon_n, \quad \text{où } \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Envisageons à présent une courbe C_0 appartenant à la fois à la classe R et à la classe S .

Soit C_n une suite des courbes (appartenant respectivement aux champs $D_{\frac{1}{n}}(C_0)$) telle que

$$I(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(C_0).$$

On a évidemment

$$I(C_n) \geq J(C_n)$$

d'où l'on tire

$$H(C_0) + \varepsilon_n \geq J(C_n) \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On $J(C)$ étant semi continue dans la classe S on a

$$(53) \quad H(C_0) \geq J(C_0).$$

Démontrons maintenant qu' on a aussi

$$J(C_0) \geq H(C_0).$$

Considérons en effet une courbe C (de la classe \mathfrak{K}) dont l'angle de direction $\theta_c(s)$ est une fonction continue avec sa dérivée première par rapport a s .

Posons pour abréger

$$s_i = \frac{iL_c}{n}, \quad i = 0, 1 \dots n$$

et considérons les triplets

$$x_c(s_i), \quad y_c(s_i), \quad \theta_c(s_i).$$

Envisageons le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_1} f(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \theta'(s)) ds$$

dans le champ $\mathfrak{D} \left\{ \begin{matrix} \theta_c(s_0), & \theta_c(s_1) \\ s_0, & s_1 \end{matrix} \right\}$ et soit $\theta_n^{(0)}(s)$ la fonction minimante.

Construisons la courbe $C_n^{(0)}$ avec la longueur $\frac{L_c}{n}$ issue du point $[x_c(s_0), y_c(s_0)]$ de façon que $\theta_n^{(0)}(s)$ soit son angle de direction.

Soit $x = x_n^{(0)}(s)$, $y = y_n^{(0)}(s)$ les équations définissant $C_n^{(0)}$.

On a évidemment

$$x_n^{(0)}(s) = x_c(s_0) + \int_{s_0}^s \text{Cos } \theta_n^{(0)}(s) ds, \quad y_n^{(0)}(s) = y_c(s_0) + \int_{s_0}^s \text{Sin } \theta_n^{(0)}(s) ds.$$

Envisageons aussi le problème de minimum absolu de l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} f(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \theta'(s)) ds$$

dans le champ $\mathfrak{D} \left\{ \begin{matrix} \theta_c(s_1), & \theta_c(s_2) \\ s_1, & s_2 \end{matrix} \right\}$ et soit $\theta_n^{(1)}(s)$, ($s_1 \leq s \leq s_2$) la fonction minimante.

Soit $C_n^{(1)}$ la courbe (avec la longueur $\frac{L_c}{n}$) issue du point $(x_n^{(0)}(s_1), y_n^{(0)}(s_1))$ telle que $\theta_n^{(1)}(s)$ et son angle de direction, et ainsi de suite.

Construisons à présent la courbe $C_n(x = x_n(s), y = y_n(s))$ appartenant à la classe \mathfrak{K} | de longueur L_c | de façon à confondre pour $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ avec $C_n^{(1)}$.

En observant que $x_c(s_i)$, $y_c(s_i)$, $\theta_c(s_i)$, $\frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s}$ sont bornés indépendamment de n , on voit d'après (35) qu'il existe un nombre M indépendant de n tel que

$$(54) \quad |\theta'_n(s)| \leq M, \quad 0 \leq s \leq L_c.$$

Or on a, d'après la loi même de la construction de la courbe C_n , $\theta_n(s_i) = \theta_c(s_i)$. Par conséquent

$$(55) \quad |\theta_n(s) - \theta_c(s)| \leq 2M \frac{L_c}{n}$$

d'où l'on tire

$$(56) \quad \begin{aligned} |x_n(s) - x_c(s)| &= \left| \int_0^s [\cos \theta_n - \cos \theta_c] ds \right| \leq \frac{N}{n}, \\ |y_n(s) - y_c(s)| &= \left| \int_0^s [\sin \theta_n - \sin \theta_c] ds \right| \leq \frac{N}{n} \end{aligned}$$

où N est une constante indépendante de n .

On a par suite

$$(57) \quad I(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}, \theta_n^{(i)}, \theta_n^{(i)'}) ds = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \theta_n^{(i)'}) ds + \varepsilon_n$$

où

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or on a d'après ce qui précède

$$(58) \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \theta_n^{(i)'}) ds = \Phi \left(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s} \right) \Delta s,$$

Donc de (57) on obtient

$$I(C_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi \left(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \frac{\Delta\theta_c(s_i)}{\Delta s} \right) \Delta s + \varepsilon_n.$$

Remarquons d'autre part qu'en vertu de la continuité de $\theta'_c(s)$, on a

$$J(C) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi \left(x_c(s_i), y_c(s_i), \theta_c(s_i), \frac{\Delta \theta_c(s_i)}{\Delta s} \right) \Delta s + \eta_n$$

où

$$\eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent

$$I(C_n) = J(C) + \varepsilon_n - \eta_n$$

d'où l'on tire

$$H(C_n) \leq J(C) + \varepsilon_n - \eta_n.$$

En passant ici à la limite, on obtient, vu la semi-continuité inférieure de $H(C)$ dans la classe \mathfrak{K}

$$H(C) \leq J(C).$$

Nous avons donc démontré cette inégalité pour toutes les courbes C de la classe \mathfrak{K} pour lesquelles l'angle de direction $\theta(s)$ admet la dérivée continue et bornée.

En tenant compte à présent de l'inégalité (53), on s'assure que pour toutes les courbes C de la classe \mathfrak{K} , pour lesquelles l'angle de direction $\theta(s)$ admet la dérivée continue et bornée, on a

$$H(C) = J(C).$$

Pour démontrer cette égalité dans le cas général, introduisons la condition supplémentaire

$$f(x, y, \theta, z) \leq A(x, y) |z|^{1+\delta} + B(x, y)$$

où $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornés pour les valeurs bornées des arguments.

Alors il serait aisé de voir que toute une courbe arbitraire C_0 de la classe \mathcal{S} peut être approximée par la suite C_n des courbes (de la classe \mathfrak{K}), dont les angles de direction $\theta_n(s)$ admettent les dérivées continues et bornées pour chaque valeur fixée de n , de façon que

$$|J(C_n) - J(C_0)| \leq \eta_n, \quad |x_n - x_0| \leq \varepsilon_n, \quad |y_n - y_0| \leq \varepsilon_n, \quad |\theta_n - \theta_0| \leq \varepsilon_n,$$

$$0 \leq s \leq L_{C_0}$$

où

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

En effet, on voit d'abord que l'intégrale

$$\int_0^{L_{C_0}} \left| \frac{d\theta_0}{ds} \right|^{1+\delta} ds \leq \frac{J(C_0)}{K}$$

admet une valeur finie.

Par conséquent, on peut toujours choisir la suite C_n des courbes (de la classe K) dont les angles de direction $\theta_n(s)$ admettent les dérivées continues et bornées de façon que

$$\int_0^{L_{C_0}} \left| \frac{d(\theta_n - \theta_0)}{ds} \right|^{1+\delta} ds \leq \frac{1}{n}, \quad |x_n - x_0| \leq \varepsilon_n, \quad |y_n - y_0| \leq \varepsilon_n, \quad |\theta_n - \theta_0| \leq \varepsilon_n,$$

$$0 \leq s \leq L_{C_0}, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On voit d'ici que la mesure de l'ensemble $E_{M,n}$ dans lequel on a

$$\left| \frac{d\theta_0}{ds} \right| \leq M, \quad \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right| \leq M$$

est au moins égale à

$$L_{C_0} - \left[\frac{J(C_0)}{K} + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{M^{1+\delta}}.$$

Cela étant, remarquons que

$$\begin{aligned} |J(C_n) - J(C_0)| &\leq \left| \int_{E_{M,n}} \Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) - \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right) \right| ds + \\ &+ \left| \int_{CE_{M,n}} \Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) ds \right| + \left| \int_{CE_{M,n}} \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right) ds \right| \end{aligned}$$

où $CE_{M,n}$ est le complémentaire de $E_{M,n}$ jusqu'à $(0, L_{C_0})$.

Soit à présent $\Psi(M)$ la fonction croissante de M telle que

$$\begin{cases} |\Phi'_x(x, y, \theta, z)| \leq \Psi(M) \\ |\Phi'_y(x, y, \theta, z)| \leq \Psi(M) \\ |\Phi'_\theta(x, y, \theta, z)| \leq \Psi(M) \\ |\Phi'_z(x, y, \theta, z)| \leq \Psi(M) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{si} \\ |x| \leq \text{Max } |x_0(s)| + \varepsilon_n, \quad |y| \leq \text{Max } |y_0(s)| + \varepsilon_n, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad |z| \leq 2M, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{E_{M,n}} \left| \Phi\left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds}\right) - \Phi\left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds}\right) \right| ds &< 3\Psi(M)L_{C_0}\varepsilon_n + \\ + \Psi(M) \int_0^{L_{C_0}} \left| \frac{d\theta_n}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds} \right| ds &\leq 3\Psi(M)L_{C_0}\varepsilon_n + \Psi(M)L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\delta}}. \end{aligned}$$

D'autre part on a aussi

$$\left| \int_{CE_{M,n}} \Phi \left(x_n, y_n, \theta_n, \frac{d\theta_n}{ds} \right) ds \right| \leq \bar{A} \int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right|^{1+\delta} ds + \bar{B} m CE_{M,n}$$

$$\left| \int_{CE_{M,n}} \Phi \left(x_0, y_0, \theta_0, \frac{d\theta_0}{ds} \right) ds \right| \leq \bar{A} \int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_0}{ds} \right|^{1+\delta} ds + \bar{B} m CE_{M,n}$$

où \bar{A}, \bar{B} sont les bornes supérieures de $A(x, y), B(x, y)$ dans le domaine

$$|x| \leq \max |x_0(s)| + \varepsilon_n, \quad |y| \leq \max |y_0(s)| + \varepsilon_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Or

$$\int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right|^{1+\delta} ds \leq 2^{\frac{1+\delta}{2}} \int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_0}{ds} \right|^{1+\delta} ds + 2^{\frac{1+\delta}{2}} \int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d(\theta_n - \theta_0)}{ds} \right|^{1+\delta} ds \leq$$

$$\leq 2^{1+\delta} \int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_0}{ds} \right|^{1+\delta} ds + 2^{\frac{1+\delta}{2}} \frac{1}{n}.$$

En remarquant que

$$m CE_{M,n} \leq \left[\frac{J(C_0)}{K} + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{M^{1+\delta}} < \left(\frac{J(C_0)}{K} + 1 \right) \frac{1}{M^{1+\delta}}$$

on déduit que

$$\int_{CE_{M,n}} \left| \frac{d\theta_0}{ds} \right|^{1+\delta} ds \leq \zeta_n, \quad \text{où} \quad \zeta_n \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent

$$|J(C_n) - J(C_0)| < 3\Psi(M)L_{C_0}\varepsilon_n + \Psi(M)L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} +$$

$$+ 2\bar{B} \left(1 + \frac{J(C_0)}{K} \right) \frac{1}{M^{1+\delta}} + 2^{\frac{1+\delta}{2}} \bar{A} \frac{1}{n} + \left(1 + 2^{\frac{1+\delta}{2}} \right) \bar{A} \zeta_n.$$

Dans cette inégalité le nombre M est arbitraire. Posons

$$M = M_n$$

où

$$\Psi(M_n) \sqrt[1+\delta]{3L_{C_0}\varepsilon_n + L_{C_0}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\delta}{1+\delta}}} = 1$$

de sorte que

$$M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Ainsi on obtient

$$|J(C_n) - J(C_0)| \leq \eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$H(C_n) \leq J(C_n) \leq J(C_0) + \varepsilon_n.$$

Soit i_{ε_n} comme toujours la borne inférieure de $I(C)$ dans le champ $D_{\varepsilon_n}(C_0)$.
On a évidemment

$$i_{\varepsilon_n} \leq H(C_n) \leq J(C_0) + \varepsilon_n.$$

D'ici on tire que pour C_0 il existe la valeur finie $H(C_0)$ vérifiant l'inégalité

$$H(C_0) \leq J(C_0).$$

Cela nous montre, en particulier, que toute une courbe de la classe S appartient aussi à la classe R . Par conséquent, en vertu de (53), on voit que pour toute une courbe C_0 de la classe S on a

$$(59) \quad H(C_0) = J(C_0).$$

Ainsi nous avons démontré le théorème fondamental pour la suite :

Si $f(x, y, \theta, z)$ est une fonction continue, admettant toutes les dérivées partielles jusqu'au 2^{ème} ordre inclusivement, périodique avec la période 2π par rapport à θ et vérifiant l'inégalité

$$f(x, y, \theta, z) \geq K |z|^{1+\delta}$$

où K, δ sont les nombres positifs fixes, alors l'intégrale curviligne

$$J(C) = \int_0^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds$$

(où $\Phi(x, y, \theta, z)$ — définie par les égalités (36) — est une fonction continue, admettant pour toutes les valeurs des arguments les dérivées

$$\Phi_x', \bar{\Phi}_x', \Phi_y', \bar{\Phi}_y', \Phi_\theta', \bar{\Phi}_\theta', \Phi_z'$$

dont Φ_z' est continue, périodique avec la période 2π par rapport à θ , vérifiant les conditions

$$\Phi(x, y, \theta, z) \geq K |z|^{1+\delta};$$

$$\Phi(x, y, \theta, p) - \Phi(x, y, \theta, z) - (p - z)\Phi_z'(x, y, \theta, z) > 0$$

quelque soient (x, y, θ, z, p) , prise suivant la courbe C de la classe K dont l'angle de direction, admet la dérivée continue, est égale à $H(C)$ limite (pour $\varepsilon \rightarrow 0$) de la borne inférieure de l'intégrale curviligne

$$I(C) = \int_0^{Lc} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

dans le champ $D_\varepsilon(C)$ des courbes de la classe K admettant avec C le voisinage (ε) .

Si de plus

$$f(x, y, \theta, z) \leq A(x, y) |z|^{1+\delta} + B(x, y),$$

où $A(x, y)$, $B(x, y)$ sont bornés pour les valeurs bornées des arguments, alors l'égalité

$$H(C) = J(C)$$

a lieu pour toutes les courbes de la classe S .

§ 9. Plaçons-nous à présent dans le cas considéré à la page 204 et supposons que la fonction $f(x, y, \theta, z)$ vérifie aussi les conditions suivantes:

$$f(x, y, \theta, z) \leq A(x, y, \theta) |z|^{1+\delta} + B(x, y, \theta)$$

$$|f_x'| \leq A |z|^{1+\delta} + B, \quad |f_y'| \leq A |z|^{1+\delta} + B, \quad |f_\theta'| \leq A |z|^{1+\delta} + B$$

où $A(x, y, \theta)$, $B(x, y, \theta)$ sont des fonctions bornées pour x, y bornés.

Alors il est aisé de voir que $\Phi(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions

$$(60) \quad \Phi(x, y, \theta, z) \leq A |z|^{1+\delta} + B,$$

$$|\Phi_x'| \leq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1, \quad |\Phi_y'| \leq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1, \quad |\Phi_\theta'| \leq A_1 |z|^{1+\delta} + B_1$$

où $A_1(x, y, \theta)$, $B_1(x, y, \theta)$ sont bornées pour x, y bornés.

En remarquant que $\Phi_z'(x, y, \theta, z)$ ne peut pas décroître quand z croît de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on a

$$\frac{\Phi(z + |z| + 1) - \Phi(z)}{|z| + 1} \geq \Phi'(z) \geq \frac{\Phi(z) - \Phi(z - |z| - 1)}{|z| + 1}.$$

Or, on a d'après (46)

$$\Phi(z + |z| + 1) - \Phi(z) \leq A(2|z| + 1)^{1+\delta} + B$$

$$\Phi(z) - \Phi(z - |z| - 1) \geq -[A(2|z| + 1)^{1+\delta} + B]$$

de sorte que

$$|\Phi_z'(z)| \leq A_2 |z|^{1+\delta} + B_2$$

où $A_2(x, y, \theta)$, $B_2(x, y, \theta)$ sont bornées pour x, y bornées.

Cela étant, remplaçons la variable d'intégration dans l'intégrale

$$\int_0^{Lc} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds$$

(l'arc s) par un paramètre quelconque s ; on reçoit alors

$$J(C) = \int_{s_0}^{s_1} \Phi \left(x, y, \arctg \frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{s_0}^{s_1} \varphi(x, y, x', y', x'', y'') ds.$$

Il est évident que pour $x'^2 + y'^2 \neq 0$, la fonction φ admet les dérivées partielles continues égales respectivement à

$$(61) \quad \begin{aligned} & \Phi_{x'} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi_{\theta} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\Phi_{\theta' x'} \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \Phi_{\theta' y'} \frac{x'x'' + y'y''}{(x'^2 + y'^2)^2} - \Phi_{\theta''} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)}, \\ & \Phi_{y'} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \Phi_{\theta} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\Phi_{\theta' y'} \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} - \Phi_{\theta' x'} \frac{x'x'' + y'y''}{(x'^2 + y'^2)^2} + \Phi_{\theta''} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)}. \end{aligned}$$

On voit d'après (60) qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre deux nombres A_M, B_M tels que si

$$|x| \leq M, \quad |y| \leq M,$$

alors

$$(62) \quad \begin{aligned} & \Phi(x, y, \theta, z) \leq A_M |z|^{1+\delta} + B_M, \\ & |\Phi_{x'}| \leq A_M |z|^{1+\delta} + B_M, \quad |\Phi_{y'}| \leq A_M |z|^{1+\delta} + B_M \\ & (1 + |z|) |\Phi_{z'}(x, y, \theta, z)| \leq A_M |z|^{1+\delta} + B_M, \quad |\Phi_{\theta'}| \leq A_M |z|^{1+\delta} + B_M \end{aligned}$$

d'où l'on tire en vertu de (61)

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varphi'_{x'}| & \leq \left\{ A_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\} \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ |\varphi'_{y'}| & \leq \left\{ A_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M \right\} \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ |\varphi'_{x''}| & \leq \left\{ \tilde{A}_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + \tilde{B}_M \right\} \text{ où } \tilde{A}_M, \tilde{B}_M = \text{Const.}, \\ |\varphi'_{y''}| & \leq \left\{ \tilde{A}_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + \tilde{B}_M \right\}, \\ |\varphi'_{x'''}| & \leq \frac{A_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ |\varphi'_{y'''}| & \leq \frac{A_M \left| \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|^{1+\delta} + B_M}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Soit à présent C une courbe réalisant le minimum absolu de

$$J(C) = \int_0^{L_C} \Phi(x, y, \theta, \theta') ds$$

dans le champ \mathfrak{D} .

Soient

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

les équations exprimant les coordonnées de la courbe C en fonction de l'arc. Soient enfin $\delta x(s)$, $\delta y(s)$ deux fonction arbitraires continues, deux fois dérivables dans $(0, L_C)$, telles que

$$(64) \quad \begin{aligned} &|\delta x| \leq 1, \quad |\delta x'| \leq 1, \quad |\delta y| \leq 1, \quad |\delta y'| \leq 1, \quad |\delta x''| \leq 1, \quad |\delta y''| \leq 1, \\ &\delta x(0) = \delta x(L_C) = \delta y(0) = \delta y(L_C) = \dots = \delta y''(0) = \delta y''(L_C) = 0. \end{aligned}$$

Envisageons la famille $C(\varepsilon)$ des courbes définies à l'aide des équations

$$x = x(s) + \varepsilon \delta x(s), \quad y = y(s) + \varepsilon \delta y(s), \quad 0 \leq s \leq L_C, \quad -\frac{1}{4} \leq \varepsilon \leq +\frac{1}{4}$$

(si $\varepsilon \neq 0$, alors le paramètre s dans ces équations ne coïncide pas en general avec l'arc).

On a évidemment

$$(65) \quad \frac{1}{4} \leq \sqrt{x'^2 + y'^2} \leq \frac{3}{2}.$$

Il est aisé de voir qu'il existe un nombre positif M tel que dans tout intervalle $(0, L_C)$ on a

$$|x(s) + \varepsilon \delta x(s)| \leq M, \quad |y(s) + \varepsilon \delta y(s)| \leq M; \quad -\frac{1}{4} \leq \varepsilon \leq +\frac{1}{4};$$

d'ici on tire, en vertu de (63) et de (65),

$$(66) \quad \begin{aligned} &|\varphi(x + \varepsilon \delta x, \dots, y'' + \varepsilon \delta y'')| \leq \bar{A}_M \Phi(x, y, \theta, \theta') + \bar{B}_M \\ &\left| \frac{\partial \varphi(x + \varepsilon \delta x, \dots, y'' + \varepsilon \delta y'')}{\partial \varepsilon} \right| \leq \bar{A}_M \Phi(x, y, \theta, \theta') + \bar{B}_M \end{aligned}$$

où \bar{A}_M , \bar{B}_M sont les constantes ne dépendant que de M .

Considérons la fonction $f(\varepsilon)$ égale à

$$\int_0^{L_C} \varphi(x + \varepsilon \delta x, \dots, y'' + \varepsilon \delta y'') ds.$$

On voit, d'après (66), que cette fonction admet partout dans la dérivée continue par rapport à ε , égale à

$$\int_0^{L_C} \frac{\partial \varphi(x + \varepsilon \delta x, \dots, y' + \varepsilon \delta y')}{\partial \varepsilon} ds.$$

Or, $f(\varepsilon)$ admettant pour $\varepsilon = 0$ le minimum absolu, on doit avoir $f'(0)$ c. à. d. :

$$\int_0^{L_C} \{ \Phi'_x \delta x(s) + \Phi'_y \delta y(s) + [\Phi \cos \theta - \Phi'_\theta \sin \theta - 2\Phi'_{\theta'} \cos \theta] \delta x'(s) + \\ + [\Phi \sin \theta + \Phi'_\theta \cos \theta - 2\Phi'_{\theta'} \sin \theta] \delta y'(s) - \Phi'_{\theta'} \sin \theta \delta x''(s) + \Phi'_{\theta'} \cos \theta \delta y''(s) \} ds = 0.$$

D'ici on conclut que presque partout dans l'intervalle $(0, L_C)$ on a

$$-\Phi'_{\theta'} \sin \theta - \int_0^s [\Phi \cos \theta - \Phi'_\theta \sin \theta - 2\Phi'_{\theta'} \cos \theta] ds + \int_0^s \int_0^s \Phi'_x ds^2 = A + Bs, \\ (67) \quad A = \text{const.}, B = \text{const.} \\ \Phi'_{\theta'} \cos \theta - \int_0^s [\Phi \sin \theta + \Phi'_\theta \cos \theta - 2\Phi'_{\theta'} \sin \theta] ds + \int_0^s \int_0^s \Phi'_y ds^2 = A_1 + B_1 s, \\ A_1 = \text{const.}, B_1 = \text{const.}, (s - \text{l'arc}).$$

Soit à présent E l'ensemble des valeurs de s de l'intervalle $(0, L_C)$ pour lesquelles :

- 1° il existe la dérivée $\theta'(s)$;
- 2° ont lieu les équations (67).

Soit \bar{s} un point de l'intervalle $(0, L_C)$ n'appartenant pas à E . Or E étant un pseudointervalle de mesure égale à L_C , \bar{s} est nécessairement le point d'accumulation des points s_n de E .

Soit $\bar{\alpha}$ une valeur d'accumulation de la suite $\theta'(s_n)$; posons $\theta'(\bar{s}) = \bar{\alpha}$.

Faisons la même opération avec tous les points s de $(0, L_C)$ n'appartenant pas à E .

Ayant ainsi défini $\theta'(s)$ dans tout intervalle $(0, L_C)$, on voit que les équations (67) ont lieu partout dans $(0, L_C)$.

Par conséquent la fonction $\Phi'_{\theta'}(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s))$ est continue et bornée, admettant presque partout la dérivée intégrable.

On a donc

$$(68) \quad -\frac{d\Phi'_{\theta'}}{ds} \sin \theta + \Phi'_{\theta'} \cos \theta - \Phi \cos \theta + \Phi'_{\theta} \sin \theta + \int_0^s \Phi'_x ds = B$$

$$(69) \quad -\frac{d\Phi'_{\theta'}}{ds} \cos \theta + \Phi'_{\theta'} \sin \theta - \Phi \sin \theta - \Phi'_{\theta} \cos \theta + \int_0^s \Phi'_y ds = B_1$$

d'où en multipliant (68) par $\cos \theta$ et (69) par $\sin \theta$ et en faisant la somme on obtient

$$(\Phi'_{\theta'} - \Phi) + \cos \theta \int_0^s \Phi'_x ds + \sin \theta \int_0^s \Phi'_y ds = (B \cos \theta + B_1 \sin \theta);$$

d'ici on conclut que la fonction $\Phi'_{\theta'} - \Phi$ est aussi une fonction continue et bornée, admettant presque partout dans $(0, L_C)$ la dérivée intégrable.

Remarquons à présent que

$$\Phi(z) - \Phi(0) \leq z\Phi'(z),$$

de sorte que

$$\Phi'(z)z \geq K|z|^{1+\delta} - \Phi(0);$$

d'où l'on obtient

$$(70) \quad |\Phi'_{\theta'}(x, y, \theta, \theta')| \leq K|\theta'|^{\delta} - \frac{\Phi(x, y, \theta, 0)}{|\theta'|}$$

on voit donc que $\theta'(s)$ est bornée dans $(0, L_C)$.

Envisageons maintenant l'ensemble E_1 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\theta'(s) \geq Q(x(s), y(s), \theta(s))$$

et l'ensemble E_2 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\theta'(s) \leq P(x(s), y(s), \theta(s))$$

La continuité de $\Phi'_{\theta'}$, $\Phi - \theta'\Phi'_{\theta'}$ dans $(0, L_C)$ c. à. d. la continuité de $f'_{\theta'}$, $f - \theta'f'_{\theta'}$ dans l'ensemble $E_1 + E_2$ montre que $\theta'(s)$ est continue dans E_1 ainsi que dans E_2 .

Par conséquent l'ensemble $E_1 + E_2$ est fermé, de sorte que l'ensemble H , le complémentaire de l'ensemble $E_1 + E_2$ jusqu'à l'intervalle $(0, L_C)$ est composé d'une suite énumérable d'intervalles ouverts (α_i, β_i) .

Dans chaque (α_i, β_i) on a évidemment

$$P(x(s), y(s), \theta(s)) \leq \theta'(s) \leq Q(x(s), y(s), \theta(s)).$$

Par conséquent en vertu de (40) on reçoit

$$(71) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y, \theta, \theta') &= f(P) + (\theta' - P)f'(P), & \Phi'_{\theta'}(x, y, \theta, \theta') &= f'(P) \\ \Phi'_x(x, y, \theta, \theta') &= f'_x(P) \frac{Q - \theta'}{Q - P} + f'_x(Q) \frac{\theta' - P}{Q - P}, & (\alpha_i \leq s \leq \beta_i). \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (67) et en faisant les calculs, on s'assure que dans l'intervalle (α_i, β_i) , C doit vérifier l'équation différentielle du 2^{ème} ordre de la forme

$$(72) \quad \frac{d\theta}{ds} = \rho(x, y, \theta)$$

où $\rho(x, y, \theta)$ est une fonction continue périodique avec la période 2π par rapport à θ .

Cela étant, envisageons l'ensemble H_1 des valeurs de s pour lesquelles on a

$$\Phi(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)) \neq f(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)).$$

Il est évident d'abord que l'ensemble H_1 appartient à H .

Or (72) nous montre que $\theta'(s)$ et par suite

$$(73) \quad \Phi(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s)), f(x(s), y(s), \theta(s), \theta'(s))$$

sont des fonction continues de s dans H .

Par conséquent H_1 est formé d'une suite énumérable d'intervalles $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ n'empiétant pas l'un sur l'autre.

Il est aisé de voir que dans chaque intervalle $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$, C vérifie l'équation (72).

D'autre part on peut démontrer que l'arc de C dans $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i)$ donne le minimum faible à l'intégrale

$$(74) \quad \int_{\bar{\alpha}_i}^{\bar{\beta}_i} \pi(x, y, \theta) ds$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \pi(x, y, \theta) &= f(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) - P(x, y, \theta) f'_{\theta'}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) - \\ &- \cos \theta \int_0^{\theta} f'_{\theta''}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) d\theta - \sin \theta \int_0^{\theta} f'_{\theta''}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Nous dirons qu'une courbe C est singulière relativement au problème de minimum posé si elle possède les propriétés suivantes:

- 1°) vérifie l'équation (72);
 2°) vérifie l'inégalité $\Phi(x, y, \theta, \theta') < f(x, y, \theta, \theta')$;
 3°) réalise le minimum faible de l'intégrale (74).

Alors, d'après ce qui précède, on s'assure à présent que l'égalité

$$I(C) = J(C)$$

a lieu dans le cas où aucun arc de C ne se confond avec l'arc d'une courbe singulière, et dans ce cas seulement.

Ainsi nous avons démontré le théorème.

Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions explicitées au début de ce §, alors, afin qu'il existe la courbe réalisant le minimum absolu de l'intégrale $I(C)$ dans le champ \mathfrak{D} , il faut et il suffit que parmi les courbes réalisant le minimum absolu de $J(C)$ dans \mathfrak{D} il existe la courbe n'ayant aucun arc commun avec des courbes singulières relatives au problème de minimum posé.

Remarque. — Si la fonction $\rho(x, y, \theta)$ vérifie pour toutes les valeurs de ses argument une des inégalités

$$\rho(x, y, \theta) \geq Q(x, y, \theta), \quad \rho(x, y, \theta) \leq P(x, y, \theta)$$

alors il n'existe aucune courbe singulière, de sorte que dans ce cas il existe toujours le minimum absolu de l'intégrale $I(C)$ dans le champ \mathfrak{D} .

§ 10. Dans ce § nous allons démontrer l'existence des solutions des équations d'EULER relatives à $I(C)$ dans le champ \mathfrak{D} , en supposant vérifiées les conditions du § 9.

Avant d'aller plus loin, observons qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre α_M tel que si

$$(75) \quad |x| \leq M, \quad |y| \leq M$$

alors

$$(76) \quad f''_{\theta^2}(x, y, \theta, P(x, y, \theta)) \geq \alpha_M, \quad f''_{\theta^2}(x, y, \theta, Q(x, y, \theta)) \geq \alpha_M.$$

D'ici on voit, en vertu du théorème classique sur les fonctions implicites, qu'à chaque nombre M on peut faire correspondre un nombre H_M tel que si les (75) ont lieu, alors

$$(77) \quad \begin{aligned} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| &\leq H_M, & \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| &\leq H_M, & \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right| &\leq H_M, \\ \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| &\leq H_M, & \left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| &\leq H_M, & \left| \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right| &\leq H_M. \end{aligned}$$

Il est évident d'autre part qu'à chaque M on peut faire correspondre un nombre ε_M tel que si (75) ont lieu et si

$$|z - P(x, y, \theta)| \leq \varepsilon_M$$

ou si

$$|z - Q(x, y, \theta)| \leq \varepsilon_M$$

alors

$$f''_{\theta^2}(x, y, \theta, z) \geq \frac{\alpha_M}{2}.$$

Cela étant, considérons l'intervalle $(P(x, y, \theta) + \varepsilon_M, Q(x, y, \theta) - \varepsilon_M)$ que nous désignons par $(P_{\varepsilon_M}(x, y, \theta), Q_{\varepsilon_M}(x, y, \theta))$.

Envisageons le champ $D_{n, M}$ des courbes C appartenant au champ \mathfrak{D} , formées au plus de n arcs le long de chacune desquelles on a presque partout

$$\theta'(s) \geq Q_{\varepsilon_M}(x, y, \theta)$$

ou presque partout $|x| \leq M, |y| \leq M$

$$\theta'(s) \leq P_{\varepsilon_M}(x, y, \theta).$$

Montrons qu'il existe deux nombres n_1 et M_1 tels que pour tout $n \geq n_1$ le champ D_{n, M_1} existe, c. à. d. il existe des courbes appartenant à ce champ.

Soit en effet C

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leq s \leq L_C$$

la courbe minimante de $J(C)$ dans le champ \mathfrak{D} .

Faisons avec C avec la même construction qu'avec C dans les page 197, 205 et avec la courbe ainsi obtenue la même construction qu'avec C_0 dans la page 205.

On obtient alors une suite des courbes C_n appartenant au champ \mathfrak{D}

$$x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad 0 \leq s \leq L_C$$

telles que :

$$1^\circ) \quad x_n(s) \rightarrow x(s), \quad y_n(s) \rightarrow y(s), \quad \theta_n(s) \rightarrow \theta(s); \quad n \rightarrow \infty$$

$$2^\circ) \quad I(C_n) \rightarrow J(C_n), \quad n \rightarrow \infty$$

3°) l'intervalle $(0, L_C)$ peut être divisé au plus en $2n$ parties dans chacune desquelles on a partout

$$\theta'_n(s) - P(x_n(s), y_n(s), \theta_n(s)) \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

ou partout

$$\theta'_n(s) - Q(x_n(s), y_n(s), \theta_n(s)) \geq -\varepsilon_n.$$

Or, il existe un nombre M tel que

$$|x(s)| \leq M, \quad |y(s)| \leq M.$$

Par conséquent on s'assure d'après (1) qu'il existe un nombre M_1 indépendant de n , tel que

$$(78) \quad |x_n(s)| \leq M_1, \quad |y_n(s)| \leq M_1.$$

Fixons à présent un nombre n_1 tel que pour tout $n \leq \frac{n_1}{2}$ on ait $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{M_1}$.

On voit donc que le champ $D_{n,M}$ existe pour tout $n \leq n_1$. On voit de plus qu'à chaque nombre $M \geq M_1$ on peut faire correspondre un nombre n_M tel que le champ $D_{n,M}$ existe pour tout $n \geq n_M$.

La relation (21) nous montre que la borne inférieure de $I(C)$ dans $D_{n,M}$ tend vers i_D quand $n \rightarrow \infty$.

En vertu de l'inégalité

$$(79) \quad I(C) = \int_0^{LC} f(x, y, \theta, \theta') ds \geq K \int_0^{LC} |\theta'|^{1+\delta} ds$$

on voit qu'il existe un nombre positif \bar{M} tel que pour toute courbe pour laquelle

$$I(C) \leq i_D + 1,$$

on doit avoir

$$|x(s)| < \bar{M}, \quad |y(s)| < \bar{M}.$$

Par conséquent, d'après (78), on voit que si M_2 est le plus grand des nombres M_1, \bar{M} alors il existe un nombre n_2 tel que si pour une courbe C on a

$$(80) \quad I(C) \leq i_{D_{n_2, M_2}} + \frac{1}{2}$$

alors on doit avoir

$$(81) \quad |x(s)| < M_2, \quad |y(s)| < M_2$$

et cela quelque soit le nombre $n \geq n_2$, où n_2 est un nombre suffisamment grand ($\geq n_{M_2}$).

Cela étant, envisageons le champ $D_{n, M_2} (n \geq n_2)$ et posons le problème de minimum absolu de $I(C)$ dans ce champ.

Soit C_m la suite minimisante. Il est évident en vertu de l'inégalité (79) que la suite C_m a une courbe d'accumulation C appartenant au champ D de sorte que de la suite C_m on peut toujours extraire une suite C_μ telle que la suite C_μ admet C comme courbe limite.

Cela étant, soient $l_i^{(m)}(\alpha_i^{(m)}, \alpha_{i+1}^{(m)})$ les intervalles composants de $(0, L_{C_m})$ tels que dans chacune d'eux on ait presque partout

$$P_{\varepsilon_{M_2}}(x_m, y_m, \theta_m) \geq \theta'_m$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon_{M_2}}(x_m, y_m, \theta_m) \leq \theta'_m.$$

Or le nombre des intervalle $l_i^{(m)}$ étant au plus égal à n , on peut toujours extraire de la suite μ une telle suite ν que

$$\alpha_i^{(\nu)} \rightarrow \alpha_i.$$

Montrons qu'à l'intérieur de $l_i(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ (si bien entendu $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$), on a presque partout

$$P_{\varepsilon_{M_2}}(x, y, \theta) \geq \theta'$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon_{M_2}}(x, y, \theta) \leq \theta'.$$

À cet effet, il suffit de remarquer qu'il existe une suite ε_ν convergente vers zéro, telle que presque partout dans $(0, L_C)$

$$\frac{1}{\varepsilon_\nu} \int_s^{s+\varepsilon_\nu} \theta'_\nu(s) ds \rightarrow \theta'(s).$$

On voit donc que l'intervalle $(0, L_C)$ peut être divisé au plus en n intervalles l_i qu'à l'intérieur de l_i on a presque partout

$$P_{\varepsilon_{M_2}}(x, y, \theta) \geq \theta'$$

ou presque partout

$$Q_{\varepsilon_{M_2}}(x, y, \theta) \leq \theta';$$

on a d'autre part

$$|x| \leq M_2, \quad |y| \leq M_2.$$

Par conséquent la courbe C appartient au champ D_{n, M_2} .

Montrons qu'on a

$$I(C) = i_{D_{n, M_2}}.$$

Cela étant, désignons par $\bar{l}_i^{(\nu)}$ l'intervalle commun à $l_i, l_i^{(\nu)}$ s'il ne se réduit pas à un point.

Soit CE_ν l'ensemble complémentaire à l'ensemble E_ν formé des intervalles $\bar{l}_i^{(\nu)}$, on a évidemment

$$(82) \quad m(E_\nu) = \sum_i m(\bar{l}_i^{(\nu)}) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} L_C, \quad m(CE_\nu) = L_C - m(E_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

on a d'autre part

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_{C_v}} f(x_v, y_v, \theta_v, \theta'_v) ds \geq \int_{E_v} f(x_v, y_v, \theta_v, \theta'_v) ds = \\ & = \int_{E_v} [f(x_v, y_v, \theta_v, \theta') + (\theta'_v - \theta') f'_{\theta'}(x_v, y_v, \theta_v, \theta')] ds + \\ & + \int_{E_v} [f(x_v, y_v, \theta_v, \theta'_v) - f(x_v, y_v, \theta_v, \theta') - (\theta'_v - \theta') f'_{\theta'}(x_v, y_v, \theta_v, \theta')] ds. \end{aligned}$$

Or dans chaque $\bar{I}_i^{(v)}$ on a presque partout

$$\begin{aligned} & f(x_v, y_v, \theta_v, \theta'_v) - f(x_v, y_v, \theta_v, \theta') - (\theta'_v - \theta') f'_{\theta'}(x_v, y_v, \theta_v, \theta') = \\ & = \frac{1}{2} (\theta'_v - \theta')^2 f''_{\theta'^2} \left(x_v, y_v, \theta_v, \frac{\theta'_v + \alpha \theta'}{1 + \alpha} \right) \geq 0. \\ & \quad (0 \leq \alpha \leq +\infty) \end{aligned}$$

D'autre part, de (82) on tire que

$$\int_{E_v} f(x_v, y_v, \theta_v, \theta') ds \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \int_0^{LC} f(x, y, \theta, \theta') ds = I(C), \quad \int_{E_v} (\theta'_v - \theta') f'_{\theta'}(x_v, y_v, \theta_v, \theta') ds \rightarrow 0.$$

Ainsi finalement

$$I(C_v) \geq I(C) - \varepsilon_v, \quad \text{où } \varepsilon_v \rightarrow 0 \text{ pour } v \rightarrow +\infty.$$

D'où, à l'aide de raisonnement habituel, on tire

$$I(C) = i_{D_n, M_2} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Montrons que $\theta'(s)$ est une fonction continue dans (α_i, α_{i+1}) ; à cet effet, supposons le contraire et remarquons que la courbe

$$x = x(s), \quad y = y(s); \quad \alpha_i \leq s \leq \alpha_{i+1}$$

donne à l'intégrale

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

le minimum absolu dans le champ \bar{D} des courbes \bar{C}

$$x = \bar{x}(s), \quad y = \bar{y}(s)$$

de longueur $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ telles que

$$(83) \quad \overline{x(\alpha_i)} - x(\alpha_i) = \overline{y(\alpha_i)} - y(\alpha_i) = \dots = \overline{\theta(\alpha_{i+1})} - \theta(\alpha_{i+1}) = 0$$

$$|\overline{x(s)}| \leq M_2, \quad |\overline{y(s)}| \leq M_2$$

et telles que presque partout en (α_i, α_{i+1})

$$\overline{\theta(s)} \geq Q_{\varepsilon M_2}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}), \quad \text{ou presque partout} \quad \overline{\theta(s)} \leq P_{\varepsilon M_2}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\theta}).$$

Il est aisé donc de s'assurer que

$$\delta I = \int_0^{Lc} [f'_{\theta} \delta\theta + f'_{\theta} \delta\theta + f'_{\alpha} \delta\alpha + f'_{\nu} \delta y] ds \geq 0$$

pour toutes $\delta x, \delta y$ compatibles avec les liaisons (83) imposées aux courbes du champ \overline{D} .

On voit donc qu'on peut prendre

$$\delta x = - \int_0^s \sin \theta \cdot \delta\theta \cdot ds, \quad \delta y = \int_0^s \cos \theta \cdot \delta\theta \cdot ds$$

où $\delta\theta$ est une telle variation que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sin \theta \delta\theta ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos \theta \delta\theta ds = 0, \quad \delta\theta_{\alpha_i} = \delta\theta_{\alpha_{i+1}} = 0,$$

et que

$$\delta\theta' \geq Q'_{\varepsilon M_2, \alpha} \delta\alpha + Q'_{\varepsilon M_2, \nu} \delta y + Q'_{\varepsilon M_2, \theta} \delta\theta$$

pour presque toutes les s telles que

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(\alpha(s), y(s), \theta(s)) = Q_{\varepsilon M_2}(s)$$

et

$$\delta\theta' \leq P'_{\varepsilon M_2, \alpha} \delta\alpha + P'_{\varepsilon M_2, \nu} \delta y + P'_{\varepsilon M_2, \theta} \delta\theta$$

pour presque toutes les s vérifiant la relation

$$\theta'(s) = P'_{\varepsilon M_2}(\alpha(s), y(s), \theta(s)) = P'_{\varepsilon M_2}(s).$$

Les liaisons $|\overline{x(s)}| \leq M_2, |\overline{y(s)}| \leq M_2$ ne sont pas imposées à l'attention car d'après (80)-(81), $|x(s)| < M_2, |y(s)| < M_2$.

Construisons à présent les variations $\delta\theta$ vérifiant les conditions imposées.

Soient E_1, E_2, E_3 trois ensembles tels que

$$I_i = E_1 + E_2 + E_3$$

et tels que presque partout dans E_1 (s'il existe)

$$\theta'(s) > Q_{\varepsilon M_2}(s) \quad \text{ou} \quad \theta'(s) < P_{\varepsilon M_2}(s)$$

presque partout dans E_2 (s'il existe)

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(s)$$

presque partout dans E_3 (s'il existe)

$$\theta'(s) = P_{\varepsilon M_2}(s),$$

tous les E_1 , E_2 , E_3 étant donc déterminés à une ensemble de mesure nulle près.

Introduisons les fonctions quasi continues et bornées

$$f_1(s), f_2(s), f_3(s)$$

de façon que dans E_1 ces fonction sont nulles; dans E_2 égales respectivement à $Q_{\varepsilon M_2, x}$, $Q_{\varepsilon M_2, y}$, $Q_{\varepsilon M_2, \theta}$, dans E_3 à $P'_{\varepsilon M_2, x}$, $P'_{\varepsilon M_2, y}$, $P'_{\varepsilon M_2, \theta}$.

Soit $F(s)$ une fonction quasi-continue et bornée dans (α_i, α_{i+1}) .

Désignons

$$- \sin \theta(s) \text{ par } \lambda(s), \quad \cos \theta(s) \text{ par } \mu(s).$$

Considerons le système intégro-différentiel suivant:

$$\frac{d\psi}{ds} = f_1(s)\psi + f_2(s) \int_0^s \lambda(s)\psi(s)ds + f_3(s) \int_0^s \mu(s)\psi(s)ds + F(s), \quad \psi(\alpha_i) = 0.$$

Il est évident que

$$\psi(s) = \int_0^s \omega(s, \xi) F(\xi) d\xi$$

où

$$\frac{d\omega(s, z)}{ds} = f_1(s)\omega(s, z) + \int_0^s [f_2(s)\lambda(\xi) + f_3(s)\mu(\xi)]\omega(\xi, z)d\xi, \quad \omega(s, s) = 1.$$

Ce système nous montre que $\omega'_s(s, z)$ est continue et dérivable par rapport à z pour presque toutes les s .

On a

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \lambda(s)\psi(s)ds = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\lambda(s)} F(s)ds, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \mu(s)\psi(s)ds = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\mu(s)} F(s)ds.$$

où

$$\overline{\lambda}(s) = \int_s^{\alpha_{i+1}} \omega(\xi, s) \lambda(\xi) d\xi, \quad \overline{\mu}(s) = \int_s^{\alpha_{i+1}} \omega(\xi, s) \mu(\xi) d\xi.$$

Soit à présent $\delta\varphi(s)$ une variation arbitraire dans E_1 , positive dans E_2 et négative dans E_3 , qui vérifie les relations

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\lambda}(s) \delta\varphi(s) ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \overline{\mu}(s) \delta\varphi(s) ds = 0, \quad \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \omega(\alpha_{i+1}, s) \delta\varphi(s) ds = 0.$$

Posons

$$\delta\theta = \int_{\alpha_i}^s \omega(s, \xi) \delta\varphi(\xi) d\xi.$$

On s'assure aisément que $\delta\theta$ vérifie toutes les conditions imposées par les liaisons (83).

Or on a

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \Omega \delta\theta' ds$$

où l'on a posé

$$\Omega = f'_{\theta'} - \int_{\alpha_i}^s f'_{\theta} ds + \int_{\alpha_i}^s \left[\sin \theta \int_{\alpha_i}^s f'_{xx} ds - \cos \theta \int_{\alpha_i}^s f'_{yy} ds \right] ds.$$

Or, on a presque partout dans (α_i, α_{i+1})

$$\delta\theta' = \delta\varphi + \int_{\alpha_i}^s \omega'_s(s, \xi) \delta\varphi(\xi) ds,$$

de sorte que

$$\delta I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left[\Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, s) d\xi \right] \delta\varphi(s) ds,$$

d'où l'on tire: presque partout dans E_1

$$(84) \quad \Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, s) d\xi = C_1 \overline{\lambda}(s) + C_2 \overline{\mu}(s) + C_3 \omega(\alpha_{i+1}, s),$$

presque partout dans E_2

$$(85) \quad \Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, s) d\xi \geq C_1 \overline{\lambda(s)} + C_2 \overline{\mu(s)} + C_3 \omega(\alpha_{i+1}, s),$$

presque partout dans E_3

$$(86) \quad \Omega(s) + \int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, s) d\xi \leq C_1 \overline{\lambda(s)} + C_2 \overline{\mu(s)} + C_3 \omega(\alpha_{i+1}, s),$$

où $C_1, C_2, C_3 = \text{const.}$

Soit \overline{E}_1 l'ensemble des valeurs de s appartenant à E telles que partout dans \overline{E}_1 existe la dérivée $\theta'(s)$ et a lieu (84).

Soit \bar{s} un point d'accumulation des points de E_1 .

Montrons que quand le point s de \overline{E}_1 tend vers \bar{s} , $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

En effet, supposons que quand s tend vers \bar{s} , il existe au moins deux valeurs d'accumulation de $\theta'(s)$, θ'_1, θ'_2 .

En vertu de la continuité des intégrales

$$\int_s^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, s) d\xi, \quad - \int_{\alpha_i}^s f'_\theta ds + \int_{\alpha_i}^s \left[\sin \theta \int_{\alpha_i}^s f'_x ds - \cos \theta \int_{\alpha_i}^s f'_y ds \right] ds$$

on voit que

$$\begin{aligned} f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_1) &= \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} f'_{\theta'} ds + \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} \left[\sin \theta \int_{\alpha_i}^s f'_x ds - \cos \theta \int_{\alpha_i}^s f'_y ds \right] ds + \\ &+ \int_{\bar{s}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, \bar{s}) d\xi = C_1 \overline{\lambda(\bar{s})} + C_2 \overline{\mu(\bar{s})} + C_3 \omega(\alpha_{i+1}, \bar{s}), \\ f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_2) &= \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} f'_{\theta'} ds + \int_{\alpha_i}^{\bar{s}} \left[\sin \theta \int_{\alpha_i}^s f'_x ds - \cos \theta \int_{\alpha_i}^s f'_y ds \right] ds + \\ &+ \int_{\bar{s}}^{\alpha_{i+1}} \Omega(\xi) \omega'_\xi(\xi, \bar{s}) d\xi = C_1 \overline{\lambda(\bar{s})} + C_2 \overline{\mu(\bar{s})} + C_3 \omega(\alpha_{i+1}, \bar{s}), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_1) = f'_{\theta'}(x_{\bar{s}}, y_{\bar{s}}, \theta_{\bar{s}}, \theta'_2).$$

Or θ'_1, θ'_2 étant les valeurs d'accumulation de $\theta'(s)$, on doit avoir

$$\theta'_1 \geq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \theta'_2 \geq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \quad \text{ou} \quad \theta'_1 \leq P_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \theta'_2 \leq P_{\varepsilon M_2}(\bar{s}).$$

Donc entre θ'_1 et θ'_2

$$f''_{\theta'(s)}(x_s^-, y_s^-, \theta_s^-, z) = 0$$

ce qui est impossible en vertu des suppositions faites.

Ainsi quand le point s de \bar{E}_1 tend d'une façon quelconque vers le point s de E_1 non appartenant à \bar{E}_1 , $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

Considérons à présent E_2 . On voit que presque partout dans cet ensemble (pseudo-intervalle)

$$\theta'(s) = Q_{\varepsilon M_2}(s).$$

Soit \bar{E}_2 l'ensemble des valeurs de s appartenant à E_2 dans le quel il existe la dérivée $\theta'(s)$ et se trouve vérifiée la relation (85). Soit s un point d'accumulation des points de \bar{E}_2 .

On s'assure aisément que quand le point s de \bar{E}_2 tend vers \bar{s} , alors $\theta'(s)$ tend vers une valeur bien déterminée.

Repétons enfin le même raisonnement avec E_3 .

Pour démontrer à présent la continuité de $\theta'(s)$ dans tout intervalle (α_i, α_{i+1}) il suffit de montrer que si \bar{s} est un point d'accumulation à la fois des points de \bar{E}_1 et de \bar{E}_r , ($r = 2, 3$) (\bar{E}_2, \bar{E}_3 ne peuvent pas coexister) alors

$$\alpha_i = \lim_{s(\bar{E}_1) \rightarrow \bar{s}} \theta'(s) = \alpha_r = \lim_{s(\bar{E}_r) \rightarrow \bar{s}} \theta'(s)$$

(les deux limites étant bien déterminées en vertu des raisonnements précédents).

Supposons pour fixer les idées que $r = 2$.

Alors, en vertu de (84) et de (85),

$$f'_{\theta'(s)}(x_s^-, y_s^-, \theta_s^-, \alpha_1) \leq f'_{\theta'(s)}(x_s^-, y_s^-, \theta_s^-, \alpha_2),$$

de sorte que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2.$$

Or

$$\alpha_2 = Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}), \quad \alpha_1 \geq Q_{\varepsilon M_2}(\bar{s}).$$

On a donc

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Le même raisonnement dans l'autre cas $r = 3$.

c. q. f. d.

Ainsi nous avons démontré que $\theta'(s)$ dans (α_i, α_{i+1}) est une fonction continue.

D'une façon analogue on peut montrer que si

$$\theta'(\alpha_i + 0) \neq (\alpha_i - 0)$$

alors

$$\theta'(\alpha_i + 0) = P_{\varepsilon M_2}(\alpha_i) \text{ (ou } = Q_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)), \quad \theta'(\alpha_i - 0) = Q_{\varepsilon M_2}(\alpha_i) \text{ (ou } = P_{\varepsilon M_2}(\alpha_i)).$$

On voit ainsi que $\theta'(s)$ est une fonction continue sauf peut-être au voisinage d'un nombre de points isolés où elle admet des discontinuités de la première espèce.

D'après ce qui précède, on s'assure qu'en ces points de discontinuité — α_i — on a

$$\Delta_n(\alpha_i + 0) = \Delta_n(\alpha_i - 0) = 0.$$

La fonction $\Delta_n(s)$ est donc une fonction continue de s .

Or dans chaque (α_i, α_{i+1}) il existe presque partout la dérivée $\frac{d^2\theta}{ds^2}$ bornée (en valeur absolue) indépendamment de n . Vu que $x(s), y(s), \frac{d\theta}{ds}$ sont aussi bornées (en valeur absolue) indépendamment de n , on s'assure à présent qu'il existe le nombre positif H indépendant de n tel que

$$(87) \quad |\Delta_n(s'') - \Delta_n(s')| \leq H |s'' - s'|; \quad 0 \leq s' \leq L_C, \quad 0 \leq s'' \leq L_C.$$

Or la suite C étant la suite minimisante à la fois pour $I(C)$ et pour $J(C)$ dans le champ D , les bornes inférieures de $I(C)$ et de $J(C)$ dans D étant égales, on a

$$\int_0^{L_C} \Delta_n(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \Delta_n(s) \geq 0.$$

En vertu de (87), on voit donc que

$$\Delta_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de sorte qu'à chaque ε on peut faire correspondre un nombre n_ε tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$

$$|\Delta_n(s)| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq s \leq L_C.$$

Or si pour un point s_0 , $\theta'(s_0) = P_{\varepsilon M_2}(s_0)$, ou si $\theta'(s_0) = Q_{\varepsilon M_2}(s_0)$, alors

$$\Delta_n(s_0) \geq \delta > 0,$$

où δ ne dépend pas de n .

On voit donc que si l'on prend $\varepsilon \leq \delta$, alors pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et pour tout s intérieur à $(0, L_C)$, $\theta'(s)$ sont à l'extérieur de $(P_{\varepsilon M_2}(s), Q_{\varepsilon M_2}(s))$ de sorte que la courbe C devient une courbe *intérieure* au champ D_{n, M_2} .

Par conséquent tout arc (s_1, s_2) de C donne le minimum faible (libre) à l'intégrale

$$\int_{s_1}^{s_2} f(x, y, \theta, \theta') ds$$

les points extrêmes et les valeurs extrêmes des angles de direction des courbes de comparaison coïncidant avec celles de l'arc considéré de C .

On voit maintenant que la courbe C est une extremaloïde relative à $I(C)$ formé d'un nombre (au plus égal à n) des extremales.

Cela démontre le théorème.

Si $f(x, y, \theta, z)$ vérifie les conditions du théorème du § 9, alors dans le champ D il existe toujours au moins une extremaloïde relative à $I(C)$; de plus: quelque petit que soit le nombre ε , on peut trouver dans le champ D une telle extremaloïde relative à $I(C)$ qui donne à l'intégrale $I(C)$ la valeur qui diffère au plus par ε de la borne inférieure i_D .