

Studio sulle varietà a due dimensioni appartenenti a un S_4 euclideo.

Memoria di PIETRO BURGATTI (a Bologna).

Sunto. - *Si studiano le varietà a due dimensioni immerse in un S_4 euclideo. Definite certe due normali principali, si esaminano le proprietà delle superficie nell'intorno di un punto, le curvature, e le sue linee più caratteristiche. Infine si dà sotto forma esplicita ed espressiva un gruppo di formule fondamentali relative all'impiego delle tre forme differenziali quadratiche atte a definire la varietà considerata.*

Lo studio delle varietà a due dimensioni immerse in un S_4 euclideo, che potremo senz'altro chiamare superficie, non è nuovo; n'è comparso uno di recente del prof. TONOLO nei « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo »⁽¹⁾.

Poichè l'argomento non è privo d'interesse, ed io mi trovavo quest'anno in quest'ordine di idee per lavori in campi affini, ho voluto proseguirne l'indagine in una direzione diversa da quella tenuta finora, per cercare non solo le analogie con le proprietà delle ordinarie superficie di un S_3 , ma piuttosto le differenze sostanziali, che sono veramente le cose di maggior interesse.

E non principalmente delle questioni di carattere analitico mi sono occupato, si bene di quelle che rivestono una forma geometrica più prossima alla nostra intuizione nello spazio ordinario; in particolare del comportamento della superficie nell'intorno d'un suo punto, delle curvature e delle linee più caratteristiche che possono esistere su quelle. Son riuscito così a mettere in chiaro i caratteri essenziali di coteste superficie e quasi a vederli, benchè ci manchi l'intuizione dello spazio a quattro dimensioni.

Per non dilungarmi troppo non riassumerò qui i risultati contenuti in questo lavoro; il lettore potrà vederli sfogliando queste pagine.

Solo mi piace dichiarare che l'analisi vettoriale è strumento eccellente in queste ricerche, giacchè permette d'andar diritti allo scopo senza perdersi in questioni analitiche superflue o complesse e in formule poco o nulla espressive.

(1) T. LIII, 1929.

Se di questo resterà persuaso il lettore, riterrò per ciò solo non del tutto inutile questo lavoro.

Avverto infine che ho voluto premettere alla ricerca in discorso alcune considerazioni sulle curve in un S_4 , non già per dir cose nuove, chè poco di nuovo c'è da dire in questo campo, ma per dirle in modo nuovo, quale preparazione allo studio delle superficie nell'indirizzo che qui mi son proposto.

§ 1. Curve.

1. Una curva (c) in un piano ha una sola curvatura comunque la si deformati nel piano stesso. Per farla uscire dal piano e farla diventare una curva dello spazio euclideo S_3 , occorre darle una seconda curvatura, o come suol dirsi, una torsione.

Allora un arco finito non è più piano; ma resta piano, a meno d'infinitesimi del terzo ordine, ogni elemento ds dell'arco. Il piano che contiene ds in P è il *piano osculatore* in P . La sua normale \mathbf{b} (versore) è la *binormale*, $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ (\mathbf{t} versore della tangente) è il versore della *normale principale*.

Comunque si deformati la (c) nel S_3 restano sempre due e due sole curvature. Per farla uscire da S_3 ed entrare, per così dire, in S_4 , occorre darle una terza curvatura, ossia una seconda torsione. Allora un arco finito non è più contenuto in un S_3 , ma rimane in un S_3 ogni elemento ds , a meno d'infinitesimi del quart'ordine.

Sia $S_4(P)$ uno spazio euclideo a quattro dimensioni e $S_3(Q)$ uno spazio euclideo a tre dimensioni appartenente a S_4 .

Per un punto Q_0 di S_3 passa una sola normale \mathbf{b} ad S_3 (vettore in S_4) che definisce l'orientazione di S_3 in S_4 . L'equazione di S_3 (in S_4) è manifestamente

$$(1) \quad (Q - Q_0) \times \mathbf{b} = 0.$$

Se $Q_1 Q_2 Q_3$ sono tre punti di questo S_3 , si ha

$$(Q_1 - Q_0) \times \mathbf{b} = 0, \quad (Q_2 - Q_0) \times \mathbf{b} = 0, \quad (Q_3 - Q_0) \times \mathbf{b} = 0;$$

dalle quali (supposte indipendenti) si trae

$$\mathbf{b} = mE(Q_1 - Q_0, Q_2 - Q_0, Q_3 - Q_0),$$

essendo m un fattore di proporzionalità ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Dati tre vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, in S_4 , il vettore $E(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)$ è quella *funzione lineare e alternata* di $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3$ tale che soddisfa alla proprietà

$$\mathbf{u} \times E(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) = \Delta m(\mathbf{u} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3)$$

Ora sia P un punto del S_4 esterno al S_3 considerato. La proiezione di $P - Q$ sulla normale a S_3 è

$$d = (P - Q) \times \mathbf{b} = (P - Q_0) \times \mathbf{b} - (Q - Q_0) \times \mathbf{b},$$

ossia per la (1)

$$(2) \quad d = (P - Q) \times \mathbf{b} = (P - Q_0) \times \mathbf{b}.$$

Questa grandezza è dunque la stessa qualunque sia il punto Q di S_3 ; si chiamerà perciò *la distanza di P dallo spazio S_3* .

Consideriamo adesso la curva (c) luogo dei $P(s)$ del S_4 . Indicheremo con \mathbf{t} il versore della tangente, e posto

$$(3) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}_1}{\rho}, \quad (s \text{ è l'arco})$$

\mathbf{n}_1 , che è perpendicolare a \mathbf{t} , sarà detto il versore della *prima normale principale* (o senz'altro la prima normale principale).

Sia ora P_1 un punto della tangente $(P\mathbf{t})$, P_2 un punto della normale $(P\mathbf{n}_1)$ e P_3 un altro punto di (c) , tutti molto vicini a P . Lo spazio S_3 definito da questi quattro punti è rappresentato da

$$(Q - P) \times E(P_1 - P, P_2 - P, P_3 - P) = 0.$$

Ma $P_1 - P = \varepsilon_1 \mathbf{t}$, $P_2 - P = \varepsilon_2 \mathbf{n}_1$, e quindi per la linearità di E viene

$$(Q - P) \times E(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, P_3 - P) = 0.$$

D'altra parte

$$P_3 = P(s + h) = P(s) + hP'(s) + \frac{h^2}{2} P''(s) + \frac{h^3}{3!} P'''(s) + \dots$$

ossia

$$P_3 - P = h\mathbf{t} + \frac{h^2}{2\rho} \mathbf{n}_1 + \frac{h^3}{3!} P'''(s) + \dots;$$

perciò a meno d'infinitesimi del quart'ordine risulta

$$(4) \quad (Q - P) \times E(\mathbf{t}, \mathbf{n}, P''') = 0.$$

qualunque sia il vettore \mathbf{u} , ove il secondo membro indica il volume del parallelepipedo tetradimensionale i cui spigoli sono definiti in grandezza e direzione da $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ (a meno del segno che cambia secondo l'ordine dei vettori). Si ha

$$\mathbf{u}_1 \times E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0, \quad \mathbf{u}_2 \times E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0, \quad \mathbf{u}_3 \times E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0$$

epperò $E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ è perpendicolare ai tre vettori da cui dipende. Risulta inoltre che è zero quando due dei vettori sono uguali o proporzionali. Nel S_3 , $E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ coincide con $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

È l'equazione del S_3 che diremo *osculatore alla curva in P*. Se \mathbf{b} è il versore di E , \mathbf{b} sarà detta la *binormale*.

Sia poi \mathbf{n}_2 (in S_4) perpendicolare a \mathbf{t} , \mathbf{n}_1 e \mathbf{b} , in guisa che si abbia

$$Am(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{b}) = +1;$$

sarà detta la *seconda normale principale*. Ne segue

$$(4') \quad E(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \mathbf{b}.$$

Dalla (3) si deduce

$$P''' = \left(\frac{1}{\rho}\right)' \mathbf{n}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{n}_1}{ds};$$

perciò segue

$$E(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, P''') = \frac{1}{\rho} E\left(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \frac{d\mathbf{n}_1}{ds}\right);$$

e siccome questo E deve avere per versore \mathbf{b} (4'), dovrà essere necessariamente

$$(3') \quad \frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{t} + \frac{1}{\tau_1} \mathbf{n}_2.$$

Il primo coefficiente risulta dal fatto che è

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{ds} \times \mathbf{t} = -\mathbf{n}_1 \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{\rho}.$$

Il vettore $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è perpendicolare a \mathbf{b} , \mathbf{t} e \mathbf{n}_1 , perchè

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{b} = 0, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} = -\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{b} = 0, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = 0$$

per conseguenza sarà

$$(3'') \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau_2} \mathbf{n}_2.$$

Infine dalle (4'), per la linearità di E , si deduce

$$E\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\right) + E\left(\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}_1}{ds}, \mathbf{n}_2\right) + E\left(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \frac{d\mathbf{n}_2}{ds}\right) = \frac{d\mathbf{b}}{ds};$$

ossia per le formule precedenti

$$E\left(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \frac{d\mathbf{n}_2}{ds}\right) = \frac{1}{\tau_2} \mathbf{n}_2.$$

Ma essendo

$$\frac{d\mathbf{n}_2}{ds} \times \mathbf{n}_3 = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}_2}{ds} \times \mathbf{t} = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}_2}{ds} \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \times \frac{d\mathbf{n}_1}{ds} = -\frac{1}{\tau_1},$$

ne risulta necessariamente

$$(3''') \quad \frac{d\mathbf{n}_2}{ds} = -\frac{1}{\tau_1} \mathbf{n}_1 - \frac{1}{\tau_2} \mathbf{b};$$

giacchè deve essere $E(\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}) = \mathbf{n}_2$.

Le (3), (3'), (3''), (3''') sono le note *formule di Frenet*, dedotte qui con considerazioni di carattere geometrico.

L'interpretazione dei coefficienti $1/\rho$, $1/\tau_1$, $1/\tau_2$ quali curvatures si fa al modo solito. Indicando con θ , γ , α , β rispettivamente gli angoli che fanno le due tangenti infinitamente vicine in P e $P + dP$, le due binormali, le due prime normali principali e le seconde normali, si trova

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\tau_2}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau_1^2}}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2}}.$$

Infine con l'uso delle formule precedenti si trova facilmente

$$P''' = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{t} + \left(\frac{1}{\rho}\right)' \mathbf{n}_1 + \frac{1}{\rho\tau_1} \mathbf{n}_2;$$

epperò, se P_1 è un punto di (c) vicinissimo a P , si deduce

$$(P_1 - P) \times \mathbf{n}_1 = \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$(P_1 - P) \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\rho\tau_1} \frac{h^3}{3!} + \dots$$

le quali mostrano che le distanze di P_1 dagli spazi S_3' e S_3'' normali a \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 sono infinitesimi del terzo ordine (mentre, come abbiamo visto, la distanza dello spazio osculatore S_3 è del quarto ordine).

I ragionamenti si potrebbero seguire passando da S_4 a un S_5 ; ma qui non ci occorrono.

Ciò che risulta dall'esame fatto si è che una curva piana (c) in uno spazio S_n si può far passare con successive deformazioni, come se fosse un filo *sui generis* flessibile e inestendibile, nello spazio S_3 , poi nel S_4 e così via, aggiungendo ogni volta una nuova curvatura. Questo non è più vero per le superficie, come si vedrà nel paragrafo seguente.

§ 2. Superficie.

2. Passiamo ora alle superficie. E dapprima sia (Σ) una superficie luogo dei punti P immersa in un S_3 euclideo. Su di essa sia tracciata una doppia famiglia di linee ortogonali.

In una certa regione di (Σ) , alla quale si riferiscono i nostri ragionamenti, riterremo che s_1 e s_2 siano gli archi di coteste curve, epperò s_1 e s_2 saranno le coordinate curvilinee di P (ossia $P(s_1, s_2)$). Porremo per comodo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial s_1} = P_1' = a_1, \quad \frac{\partial P}{\partial s_2} = P_2' = a_2 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial s_1^2} = P_{11}'', \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_1 \partial s_2} = P_{12}'', \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s_2^2} = P_{22}'' . \end{aligned}$$

I vettori a_1 e a_2 sono unitari. Lo spostamento dP sulla superficie, che fa passare dal punto P al punto $P + dP$, è dato da

$$dP = \frac{\partial P}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial P}{\partial s_2} ds_2 = a_1 ds_1 + a_2 ds_2 .$$

Ammettiamo che in ogni punto della regione considerata ci sia una normale unica e determinata $n = a_1 \wedge a_2$. La curvatura della (Σ) in P è definita dai due raggi di curvatura r_1 e r_2 , coi quali si esprimono la curvatura media e la curvatura gaussiana.

Sia Q un punto di (Σ) vicino a P ; la grandezza $(Q - P) \times n$ misura la distanza di Q dal piano tangente in P . Posto $Q = P(s_1 + h_1, s_2 + h_2)$, si ha

$$(5) \quad Q = P(s_1, s_2) + P_1' h_1 + P_2' h_2 + \frac{1}{2} (h_1^2 P_{11}'' + 2h_1 h_2 P_{12}'' + h_2^2 P_{22}'') + \dots,$$

da cui risulta che la distanza sudetta è infinitesima del second'ordine rispetto a h_1 e h_2 .

Se il sistema ortogonale sopra considerato è quello delle linee di curvatura, sussistono le seguenti formule che fanno riscontro a quelle di FRENET per le curve:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{da_1}{dP} a_1 = \frac{\partial a_1}{\partial s_1} = \frac{1}{g_1} a_2 - \frac{1}{r_1} n, \quad \frac{da_1}{dP} a_2 = \frac{\partial a_1}{\partial s_2} = \frac{1}{g_2} a_2 \\ \frac{da_2}{dP} a_1 = \frac{\partial a_2}{\partial s_1} = -\frac{1}{g_1} a_1, \quad \frac{da_2}{dP} a_2 = \frac{\partial a_2}{\partial s_2} = -\frac{1}{g_2} a_1 - \frac{1}{r_2} n \\ \frac{dn}{dP} a_1 = \frac{\partial n}{\partial s_1} = \frac{a_1}{r_1}, \quad \frac{dn}{dP} a_2 = \frac{\partial n}{\partial s_2} = \frac{a_2}{r_2}. \end{aligned}$$

Le quantità r_1, r_2, g_1, g_2 (raggi di curvatura tangenziale) soddisfano ad equazioni che, sotto altra forma dell'ordinaria, sono quelle di CODAZZI e di GAUSS ⁽¹⁾.

Ora pensiamo che l' S_3 appartenga a un S_4 . Si può deformare la (Σ) dandole nuove curvatures, in guisa da farla passare in S_4 , come s'è già fatto per le curve?

Due elementi contigui $d\Sigma$ e $d_1\Sigma$ della superficie, i quali appartengono allo stesso S_3 , dovrebbero dopo cotesta deformazione appartenere a due S_3 diversamente orientati, ma di pochissimo, a meno d'infinitesimi del terzo ordine almeno. Orbene, supponiamo che la (Σ) appartenga effettivamente al S_4 , e il dP abbia ancora l'espressione sopra scritta. Siano poi, in S_4 , \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 due versori normali fra di loro e ad \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 ; cioè normali al piano tangente. I vettori $P_{11}'', P_{12}'', P_{22}''$ si esprimono linearmente mediante la quaterna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$; ed essendo

$$P_{ij}'' \times \mathbf{a}_i = 0, \quad P_{ij}'' \times \mathbf{a}_2 = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

come risulta derivando le relazioni $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2 = 1, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0$, si ha precisamente

$$P_{11}'' = l\mathbf{n}_1 + m\mathbf{n}_2, \quad P_{12}'' = p\mathbf{n}_1 + q\mathbf{n}_2, \quad P_{22}'' = f\mathbf{n}_1 + g\mathbf{n}_2.$$

Ora consideriamo lo spazio S_3 definito dal piano tangente in P e da un punto Q di (Σ) vicinissimo a P . Sia \mathbf{n} il vettore normale a S_3 , che definisce perciò l'orientazione di S_3 in S_4 . La distanza di Q da S_3 è $(Q - P) \times \mathbf{n}$, ossia, per i precedenti sviluppi,

$$\frac{1}{2} (h_1^2 P_{11}'' + 2h_1 h_2 P_{12}'' + h_2^2 P_{22}'') \times \mathbf{n} + \dots$$

che è della forma

$$h(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) + k(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}) + \dots$$

ove h e k sono del secondo ordine rispetto a h_1 e h_2 . Affinchè questa distanza fosse del terzo ordine per ogni Q vicinissimo a P , occorrerebbe che risultasse

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n} = 0$$

insieme a $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{n} = 0, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n} = 0$; cosa assurda. *Non esiste dunque un S_3 osculatore in P a (Σ) .* La distanza dei punti Q da P non può essere del secondo ordine; e questo compete a tutti gli S_3 che contengono il piano

⁽¹⁾ P. BURGATTI, *Analisi vettoriale generale*, Vol. II; *Geometria differenziale*, Parte I, pag. 51.

tangente. Esisterebbe nel caso che i vettori P_{11}'' , P_{12}'' , P_{22}'' fossero paralleli. Noi tralasciamo questo caso.

Queste conclusioni rispondono negativamente alla domanda posta in principio, quando si rimanga nel caso generale.

3. Ora considerando una superficie generica nel S_4 , che indicheremo con $(\Sigma_{2,4})$, passiamo ad esaminare le sue curvatures. Sia $\mathbf{n}_1(P)$ un versore normale al piano tangente in P e variabile con continuità da punto a punto della superficie. Il vettore $d\mathbf{n}_1$, che definisce a meno d'infinitesimi del secondo ordine l'incremento di \mathbf{n}_1 nel passaggio da P a $P + dP$, non sarà in massima diretto parallelamente al piano tangente. Invece il vettore

$$(d\mathbf{n}_1 \times \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + (d\mathbf{n}_1 \times \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2$$

è tangenziale. Si chiama il *differenziale superficiale di \mathbf{n}_1* , giacchè gode di proprietà analoghe a quelle dell'ordinario differenziale (1). Lo indicheremo con $d_s\mathbf{n}_1$. Essendo $\mathbf{n}_1^2 = 1$, viene appunto $\mathbf{n}_1 \times d_s\mathbf{n}_1 = 0$. L'omografia

$$\sigma_1 = \frac{d_s\mathbf{n}_1}{dP}$$

tale che sia

$$\sigma_1(dP) = \frac{d_s\mathbf{n}_1}{dP} dP = d_s\mathbf{n}_1$$

si chiama la *derivata superficiale di \mathbf{n}_1* . Si ha manifestamente $\sigma_1\mathbf{n}_1 = 0$. Dippiù, da $\mathbf{n}_1^2 = 1$ si trae anche

$$\text{grad}_s(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_1) = 0,$$

ossia sviluppando (2)

$$\mathbb{K} \frac{d_s\mathbf{n}_1}{dP} \mathbf{n}_1 = \mathbb{K}\sigma_1\mathbf{n}_1 = 0.$$

Si noti inoltre che $\sigma_1\mathbf{a}_1$ e $\sigma_1\mathbf{a}_2$ sono vettori tangenziali; perchè posto

$$\mathbf{a}_1 = h dP, \quad \mathbf{a}_2 = k \delta P,$$

si ha

$$\sigma_1\mathbf{a}_1 = h\sigma_1 dP = h d_s\mathbf{n}, \quad \sigma_1\mathbf{a}_2 = k\delta_s\mathbf{n}.$$

Considerando poi un *secondo versore normale \mathbf{n}_2* e perpendicolare a \mathbf{n}_1 ,

(1) BOGGIO, *Geometria differenziale*, Parte II.

(2) Per il *gradiente superficiale* vale la formula analoga a quella del gradiente ordinario:

$$\text{grad}_s(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbb{K} \frac{d_s\mathbf{u}}{dP} \mathbf{u} + \mathbb{K} \frac{d_s\mathbf{u}}{dP} \mathbf{u}.$$

introdurremo anche l'omografia

$$\sigma_2 = \frac{d_s \mathbf{n}_2}{dP}.$$

Avremo come sopra

$$\sigma_2 \mathbf{n}_2 = 0, \quad K\sigma_2 \mathbf{n}_2 = 0,$$

e $\sigma_2 \mathbf{a}_1, \sigma_2 \mathbf{a}_2$ son vettori tangenziali.

Dalla relazione $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0$ si deduce

$$\text{grad}_\sigma(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = K\sigma_1 \mathbf{n}_2 + K\sigma_2 \mathbf{n}_1 = 0;$$

e da questa, moltiplicando scalarmente per \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 , si ottiene

$$\mathbf{n}_1 \times \sigma_2 \mathbf{n}_1 = 0, \quad \mathbf{n}_2 \times \sigma_1 \mathbf{n}_2 = 0.$$

Ne consegue che tanto $\sigma_1 \mathbf{n}_2$ e $\sigma_2 \mathbf{n}_1$, quanto $K\sigma_1 \mathbf{n}_2$ e $K\sigma_2 \mathbf{n}_1$, se non sono nulli, sono *vettori tangenziali*. Ma vedremo presto che son nulli.

Siano ora dP e δP due spostamenti. Da

$$\mathbf{n}_1 \times dP = 0, \quad \mathbf{n}_1 \times \delta P = 0$$

si deduce con manifesto significato dei simboli

$$\delta_s \mathbf{n}_1 \times dP + \mathbf{n}_1 \times \delta_s dP = 0, \quad d_s \mathbf{n}_1 \times \delta P + \mathbf{n}_1 \times d_s \delta P = 0,$$

e quindi per sottrazione

$$\delta_s \mathbf{n}_1 \times dP = 0, \quad d_s \mathbf{n}_1 \times \delta P = 0, \quad (d_s \delta P = \delta_s dP)$$

ossia

$$\sigma_1(\delta P) \times dP - \sigma_1(dP) \times \delta P = 0,$$

od anche

$$(K\sigma_1 - \sigma_1)dP \times \delta P = 0$$

per qualunque coppia $dP, \delta P$. Ma per le cose dette essendo $(K\sigma_1 - \sigma_1)dP$ tangenziale, ne viene di necessità $K\sigma_1 = \sigma_1$. Con ragionamento analogo si deduce $K\sigma_2 = \sigma_2$. In conclusione: *le omografie σ_1 e σ_2 sono dilatazioni*.

Ne segue dalle cose dette che ogni vettore si trasforma per mezzo delle σ_1 e σ_2 in vettore tangenziale. Infatti posto

$$\mathbf{n} = l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + p\mathbf{n}_1 + q\mathbf{n}_2$$

viene

$$\begin{aligned} \sigma_1 \mathbf{n} &= l\sigma_1 \mathbf{a}_1 + m\sigma_1 \mathbf{a}_2 + q\sigma_1 \mathbf{n}_2 \\ \sigma_2 \mathbf{n} &= l\sigma_2 \mathbf{a}_1 + m\sigma_2 \mathbf{a}_2 + p\sigma_2 \mathbf{n}_1, \end{aligned}$$

che sono somme di vettori tangenziali. Si deduce ancora

$$\begin{aligned} \sigma_1 \mathbf{n}_2 \times \mathbf{a}_1 &= \sigma_1 \mathbf{a}_1 \times \mathbf{n}_2 = 0 \\ \sigma_1 \mathbf{n}_2 \times \mathbf{a}_2 &= \sigma_1 \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n}_2 = 0, \end{aligned}$$

perciò $\sigma_1 \mathbf{n}_2 = 0$. Analogamente $\sigma_2 \mathbf{n}_1 = 0$.

Possiamo dunque considerare σ_1 e σ_2 come omografie piane operanti sui vettori nel piano tangente in P .

4. Siano e_{11} , e_{12} le direzioni unite di σ_1 , e e_{21} , e_{22} quelle di σ_2 . Si avrà per definizione

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_1 e_{11} &= \frac{e_{11}}{r_{11}}, & \sigma_2 e_{21} &= \frac{e_{21}}{r_{12}} \\ \sigma_1 e_{12} &= \frac{e_{12}}{r_{12}}, & \sigma_2 e_{22} &= \frac{e_{22}}{r_{22}}. \end{aligned}$$

Consideriamo le due normali n_1 e $n_1 + dn_1$ in P e $P + dP$. Se s'incontrano in un punto Q dev'essere

$$Q = P - r n_1 = (P + dP) - r(n_1 + dn_1),$$

ossia

$$dP = r dn_1.$$

Ma dn_1 non è tangenziale come dP . Affinchè questa uguaglianza potesse stare, bisognerebbe sostituire $d_s n_1$ a dn_1 , ossia $n_1 + d_s n_1$ alla normale $n_1 + dn_1$. Ciò facendo si verrebbe a commettere un errore d'infinitesimi del secondo ordine. Infatti si ha

$$(n_1 + d_s n_1) \times (n_1 + dn_1) = 1 + d_s n_1 \times dn_1,$$

essendo $n_1 \times d_s n_1 = 0$, $n_1 \times dn_1 = 0$. Si può dunque concludere che a meno d'infinitesimi del secondo ordine si ha la relazione

$$dP = r d_s n_1$$

e quindi

$$\sigma_1(dP) = \frac{1}{r} dP;$$

la quale dà il significato di r_{11} e r_{12} , che si possono chiamare i *raggi di curvatura di (Σ) relativi alla normale n_1* . Così dicasi relativamente alla n_2 .

Riguardo agli invarianti di σ_1 e σ_2 si ha per cose note

$$(8) \quad I_1 \sigma_1 = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} = M_1, \quad I_1 \sigma_2 = \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} = M_2$$

che si possono chiamare rispettivamente le *curvature medie relative alle direzioni normali n_1 e n_2* ; e inoltre

$$(8') \quad I_2 \sigma_1 = \frac{1}{r_{11} r_{12}} = K_1, \quad I_2 \sigma_2 = \frac{1}{r_{21} r_{22}} = K_2$$

che si possono chiamare le *curvature totali relative alle normali n_1 e n_2* .

5. Consideriamo adesso altre due direzioni normali e perpendicolari fra loro:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i &= \mathbf{n}_1 \cos \theta + \mathbf{n}_2 \sin \theta \\ \mathbf{n}_i' &= -\mathbf{n}_1 \sin \theta + \mathbf{n}_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Posto $\frac{d_s \mathbf{n}_i}{dP} = \sigma_i$, $\frac{d_s \mathbf{n}_i'}{dP} = \sigma_i'$, risulta manifestamente (4)

$$\sigma_i = \cos \theta \cdot \sigma_1 + \sin \theta \cdot \sigma_2, \quad \sigma_i' = -\sin \theta \cdot \sigma_1 + \cos \theta \cdot \sigma_2,$$

e quindi, per quanto riguarda le curvatures medie,

$$M_i = \cos \theta \cdot M_1 + \sin \theta \cdot M_2, \quad M_i' = -\sin \theta \cdot M_1 + \cos \theta \cdot M_2.$$

Si deduce subito

$$(9) \quad M_i^2 + M_i'^2 = M_1^2 + M_2^2;$$

il che vuol dire che $M_1^2 + M_2^2$ è indipendente dalla coppia ortogonale \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 di normali che si scelgono.

Dalle stesse relazioni si deduce

$$\sigma_i^2 = \sigma_i'^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2;$$

e per conseguenza anche

$$I_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \quad \text{ossia} \quad I_1\sigma_1^2 + I_1\sigma_2^2,$$

è indipendente dalla coppia di normali. Ora σ_1^2 e σ_2^2 hanno le stesse direzioni unite di σ_1 e σ_2 , e risulta precisamente

$$\sigma_1^2 \mathbf{e}_{11} = \frac{1}{r_{11}^2} \mathbf{e}_{11}, \quad \sigma_1^2 \mathbf{e}_{12} = \frac{1}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} \dots \text{ecc.} \dots;$$

per conseguenza si ha

$$\begin{aligned} I_1\sigma_1^2 &= \frac{1}{r_{11}^2} + \frac{1}{r_{12}^2} = M_1^2 + 2K_1 \\ I_1\sigma_2^2 &= \frac{1}{r_{21}^2} + \frac{1}{r_{22}^2} = M_2^2 + 2K_2. \end{aligned}$$

Dunque la quantità

$$(10) \quad M_1^2 + M_2^2 + 2(K_1 + K_2)$$

(4) Qui si deriva come se θ fosse costante, il che si può fare. Invero sussiste la formula generale

$$\frac{d_s(mv)}{dP} = m \frac{d_s v}{dP} + H(\text{grad}_s m, v),$$

ove v_s indica la componente tangenziale di v . Nel caso presente v andrebbe sostituito con \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 le cui componenti tangenziali son nulle.

è indipendente dalla coppia di normali. Perciò valendo tale indipendenza per $M_1^2 + M_2^2$, vale anche per $K_1 + K_2$. Si conclude pertanto: *le grandezze $M_1^2 + M_2^2$ e $K_1 + K_2$ non dipendono dalla coppia (ortogonale) di normali alla superficie*. Perciò a queste grandezze daremo il nome di *curvature proprie*, la prima (oppure $\pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$) può dirsi *media*, la seconda *gaussiana*.

6. Cerchiamo la direzione normale \mathbf{n}_i per la quale

$$M_i = \cos \theta \cdot M_1 + \sin \theta \cdot M_2$$

è massima o minima. Dovrà soddisfare alla condizione

$$-\sin \theta \cdot M_1 + \cos \theta \cdot M_2 = 0;$$

perciò è definita da

$$\sin \theta = \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}, \quad \cos \theta = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}.$$

Ad essa corrisponde la curvatura media

$$M_i = \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Alla direzione ortogonale \mathbf{n}'_i corrisponde la curvatura media nulla. Si conclude pertanto:

Esiste una normale \mathbf{n} a cui corrisponde la curvatura media propria; alla normale \mathbf{n}' ortogonale ad \mathbf{n} corrisponde la curvatura media nulla.

Queste due normali \mathbf{n} e \mathbf{n}' sono perciò privilegiate, e converrà in massima nello studio della superficie riferirsi a queste. Sarà detta *la coppia delle normali principali*.

Indicheremo con σ e σ' le omografie corrispondenti; con \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}'_1 e \mathbf{e}'_2 rispettivamente le loro direzioni unite; R_1 e R_2 , R'_1 e R'_2 i raggi di curvatura. Si avrà

$$(11) \quad \begin{aligned} \sigma \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{R_1}, & \sigma' \mathbf{e}'_1 &= \frac{\mathbf{e}'_1}{R'_1} \\ \sigma \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{R_2}, & \sigma' \mathbf{e}'_2 &= \frac{\mathbf{e}'_2}{R'_2}. \end{aligned}$$

Allora

$$(12) \quad M = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

è la *curvatura media propria*, e dovrà risultare

$$\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} = 0.$$

Se fosse $\frac{1}{R_1'} = 0, \frac{1}{R_2'} = 0$, la σ' sarebbe nulla, perchè applicata a qualunque vettore tangenziale o non tangenziale darebbe zero. Dobbiamo dunque ammettere che sia

$$\frac{1}{R_1'} = -\frac{1}{R_2'} \neq 0.$$

Posto $R_1' = -R_2' = R'$, la curvatura propria gaussiana acquista la forma

$$(13) \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R'}\right)^2.$$

In base a ciò dobbiamo scrivere

$$(14) \quad \sigma' \mathbf{c}_1' = \frac{\mathbf{c}_1'}{R'}, \quad \sigma' \mathbf{c}_2' = \frac{\mathbf{c}_2'}{R'}.$$

Poniamo

$$\mathbf{c}_1' = \cos \gamma \cdot \mathbf{c}_1 + \sin \gamma \cdot \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{c}_2' = -\sin \gamma \cdot \mathbf{c}_1 + \cos \gamma \cdot \mathbf{c}_2;$$

risulta sostituendo

$$\begin{aligned} \cos \gamma \cdot \sigma' \mathbf{c}_1 + \sin \gamma \cdot \sigma' \mathbf{c}_2 &= \frac{\cos \gamma}{R'} \mathbf{c}_1 + \frac{\sin \gamma}{R'} \mathbf{c}_2 \\ -\sin \gamma \cdot \sigma' \mathbf{c}_1 + \cos \gamma \cdot \sigma' \mathbf{c}_2 &= \frac{\sin \gamma}{R'} \mathbf{c}_1 - \frac{\cos \gamma}{R'} \mathbf{c}_2, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma' \mathbf{c}_1 &= \frac{1}{R'} (\cos 2\gamma \cdot \mathbf{c}_1 + \sin 2\gamma \cdot \mathbf{c}_2) \\ \sigma' \mathbf{c}_2 &= \frac{1}{R'} (\sin 2\gamma \cdot \mathbf{c}_1 - \cos 2\gamma \cdot \mathbf{c}_2). \end{aligned}$$

Ne segue

$$\sigma' \mathbf{c}_1 \times \sigma' \mathbf{c}_2 = 0, \quad (\sigma' \mathbf{c}_1)^2 = (\sigma' \mathbf{c}_2)^2 = \frac{1}{R'^2}.$$

Si vede allora che la σ' trasforma ogni coppia di vettori tangenziali ortogonali in un'altra coppia di vettori tangenziali ortogonali. Infatti, presi i due vettori

$$\mathbf{a} = \cos \alpha \cdot \mathbf{c}_1 + \sin \alpha \cdot \mathbf{c}_2, \quad \mathbf{b} = -\sin \alpha \cdot \mathbf{c}_1 + \cos \alpha \cdot \mathbf{c}_2,$$

e fatta la moltiplicazione scalare dei due vettori

$$\sigma' \mathbf{a} = \cos \alpha \cdot \sigma' \mathbf{c}_1 + \sin \alpha \cdot \sigma' \mathbf{c}_2, \quad \sigma' \mathbf{b} = -\sin \alpha \cdot \sigma' \mathbf{c}_1 + \cos \alpha \cdot \sigma' \mathbf{c}_2,$$

si trova in virtù delle precedenti

$$\sigma' \mathbf{a} \times \sigma' \mathbf{b} = 0.$$

Si deduce inoltre

$$(\sigma'a)^2 = \frac{1}{R'^2}, \quad (\sigma'b)^2 = \frac{1}{R'^2};$$

perciò la σ' trasforma tutti i versori in vettori di modulo uguale al valore assoluto di $1/R'$.

7. Posto $dP = Q - P$, consideriamo nel piano tangente le coniche

$$\begin{aligned} \sigma(Q - P) \times (Q - P) &= 1 \\ \sigma'(Q - P) \times (Q - P) &= 1, \end{aligned}$$

che sono le *coniche indicatrici di σ e σ'* . I loro assi sono rispettivamente lungo le direzioni unite di σ e σ' . Riferendosi a questi poniamo

$$Q - P = xc_1 + yc_2, \quad Q' - P = x'c'_1 + y'c'_2.$$

Coteste equazioni diventano

$$(16) \quad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 1, \quad x'^2 - y'^2 = R'.$$

La *prima indicatrice* può essere una ellisse o una iperbole: la *seconda indicatrice* è una iperbole equilatera. Per esprimere questo fatto diremo che *i punti di una generica superficie in S_4 sono equiperbolici*. Ma si distinguono in due categorie: superficie, o regioni di superficie, a *punti equiperbolici-iperbolici*, e superficie a *punti equiperbolici-ellittici*.

Se due direzioni tangenziali dP e δP soddisfano in P alla condizione

$$(17) \quad \sigma(dP) \times \delta P = 0$$

si diranno *coniugate relativamente ad n* ; se soddisfano all'altra condizione

$$(17') \quad \sigma'(dP) \times \delta P = 0$$

si diranno *coniugate relativamente ad n'* . Considerate come equazioni differenziali, definiscono su (Σ) la doppia famiglia di curve coniugate relativamente ad n o ad n' ⁽¹⁾.

Una direzione dP sarà *autoconiugata relativamente ad n o ad n'* se soddisfa a una delle condizioni

$$(18) \quad \sigma(dP) \times dP = 0, \quad \sigma'(dP) \times dP = 0.$$

⁽¹⁾ Il sistema di curve le cui tangenti in ogni punto sono c_1 e c_2 , oppure c'_1 e c'_2 , sono ad un tempo ortogonali e coniugate relativamente ad n , o ad n' .

Considerate come equazioni differenziali definiscono le curve autoconiugate relativamente a \mathbf{n} o a \mathbf{n}' .

Per le cose dette di sopra si vede che le prime esistono per le sole superficie a punti equiperbolici-iperbolici, le seconde esistono sempre, e formano una doppia famiglia che in ogni punto sono tangenti agli asintoti della iperbole equilatera indicatrice.

8. Quest'ultime curve godono di una proprietà importante e caratteristica.

Osserviamo che $(Q - P) \times \mathbf{n}'$ rappresenta la distanza del punto Q di $(\Sigma_{2,4})$ vicinissimo a P dallo spazio $S_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n})$, la cui orientazione è definita precisamente dalla normale \mathbf{n}' . Si ha per gli sviluppi fatti in principio (n.° 2)

$$(Q - P) \times \mathbf{n}' = \frac{1}{2} (h_1^2 P_{11}'' + 2h_1 h_2 P_{12}'' + h_2^2 P_{22}'') \times \mathbf{n}' + \dots$$

Vediamo se questo trinomio può essere nullo per qualche direzione $\frac{h_2}{h_1} = \tan \alpha$. Porremo dunque

$$(P_{11}'' + 2P_{12}'' \tan \alpha + P_{22}'' \tan^2 \alpha) \times \mathbf{n}' = 0.$$

Supporremo la $(\Sigma_{2,4})$ riferita alle linee che in ogni punto sono tangenti a \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 . Abbiamo

$$P_{11}'' \times \mathbf{n}' = \frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial s_1} \times \mathbf{n}' = \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \times \mathbf{c}_1 \times \mathbf{n}' = -K \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \times \mathbf{n}' \times \mathbf{c}_1;$$

ma essendo

$$\text{grad}_s (\mathbf{n}' \times \mathbf{c}_1) = K \frac{d\mathbf{n}'}{dP} \times \mathbf{c}_1 + K \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \times \mathbf{n}' = 0,$$

risulta

$$K \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \times \mathbf{n}' \times \mathbf{c}_1 = -\sigma \mathbf{c}_1 \times \mathbf{r}_1.$$

Così dicasi per gli altri prodotti scalari; cosicchè tenendo conto delle (15) si deduce

$$P_{11}'' \times \mathbf{n}' = -\frac{\cos 2\gamma}{R'}, \quad P_{12}'' \times \mathbf{n}' = -\frac{\sin 2\gamma}{R'}, \quad P_{22}'' \times \mathbf{n}' = \frac{\cos 2\gamma}{R'}.$$

Sostituendo nella precedente equazione, si trova

$$\cos 2\gamma + 2 \sin 2\gamma \cdot \tan \alpha + \cos 2\gamma \cdot \tan^2 \alpha = 0,$$

ossia

$$\cos^2 \alpha \cos 2\gamma + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin 2\gamma - \sin^2 \alpha \cos 2\gamma = 0,$$

equivalente a

$$\cos (2\alpha - 2\gamma) = 0.$$

Deduciamo dunque

$$\alpha = \gamma + \frac{\pi}{4}.$$

Queste direzioni sono quelle appunto degli asintoti della iperbole equilatera indicatrice. Si conclude pertanto: *lungo le curve autoconiugate relativamente a \mathbf{n}' lo spazio $S_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n})$ è osculatore a meno d'infinitesimi del terzo ordine.* Per questa ragione coteste curve si potranno chiamare le *asintotiche di $(\Sigma_{2,4})$* . Esistono sempre e formano un sistema ortogonale.

Un calcolo identico si può ripetere per determinare quelle direzioni tang α rispetto alle quali è osculatore lo spazio $S_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n})$. Si trova subito

$$\begin{aligned} P_{11}'' \times \mathbf{n} &= -\sigma \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_1 = -\frac{1}{R_1} \\ P_{22}'' \times \mathbf{n} &= -\sigma \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_2 = -\frac{1}{R_2} \\ P_{12}'' \times \mathbf{n} &= 0, \end{aligned}$$

e perciò l'equazione del secondo grado in tang α scritta di sopra (cambiato \mathbf{n}' in \mathbf{n}), diventa

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tan^2 \alpha = 0.$$

Queste direzioni, quando sono reali, sono quelle degli asintoti della iperbole indicatrice, ossia le direzioni autoconiugate relativamente ad \mathbf{n} . Pertanto si conclude: *nelle regioni a punti equiperbolici-iperbolici, lungo le curve autoconiugate relativamente a \mathbf{n} lo spazio $S_3(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n}')$ è osculatore.*

Anche a queste curve compete perciò il nome di *asintotiche*. Ma occorre distinguerle dalle precedenti; epperò le prime si potranno chiamare *asintotiche proprie*, le seconde *asintotiche improprie*, volendo intendere con l'aggettivo *improprie* che possono essere reali o immaginarie.

9. Consideriamo le asintotiche proprie. Dal primo teorema del numero precedente segue che \mathbf{n}' in P è la binormale a coteste asintotiche uscenti da P . perciò in virtù della (3'') si ha

$$\frac{d\mathbf{n}'}{ds} = \frac{\mathbf{n}_2}{\tau_2},$$

essendo τ_2 la seconda torsione e s l'arco. Ponendo $\frac{dP}{ds} = t$, viene

$$\frac{d_s \mathbf{n}'}{dP} t = \frac{\mathbf{n}_2}{\tau_2}, \quad \text{ossia} \quad \sigma' t = \frac{\mathbf{n}_2}{\tau_2}.$$

Poichè l'angolo che t fa con la direzione c_1 è stato trovato al n.º 7 essere $\gamma + \frac{\pi}{4}$, possiamo scrivere

$$t = \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)c_1 + \operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)c_2;$$

da cui ricaviamo, in virtù delle (15),

$$\begin{aligned} \sigma't &= \frac{\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)}{R'} (\cos 2\gamma \cdot c_1 + \operatorname{sen} 2\gamma \cdot c_2) \\ &+ \frac{\operatorname{sen}\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)}{R'} (\operatorname{sen} 2\gamma \cdot c_1 - \cos 2\gamma \cdot c_2) \\ &= \frac{1}{R'} \left[\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)c_1 + \operatorname{sen}\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)c_2 \right]. \end{aligned}$$

Dopo ciò si ottiene

$$\left(\frac{1}{\tau_2}\right)^2 = \sigma't \times \sigma't = \left(\frac{1}{R'}\right)^2.$$

Dunque *il quadrato della seconda torsione delle asintotiche proprie uguaglia la curvatura totale relativa ad n'* . È un teorema simile a quello di ENNEPER per le superficie ordinarie di un S_3 .

Parecchi altri teoremi si possono dedurre con facilità dalle formule e considerazioni stabiliti nei numeri precedenti; ma qui non ne diremo altro.

10. Resta a vedere se esistono direzioni coniugate tanto relativamente ad n quanto ad n' . Bisognerà che dP e δP soddisfino alle due condizioni

$$\sigma(dP) \times \delta P = 0, \quad \sigma'(dP) \times \delta P = 0;$$

il che richiede che sia

$$\sigma(dP) = h \cdot \sigma'(dP).$$

Poniamo

$$dP \equiv \cos \varphi \cdot c_1 + \operatorname{sen} \varphi \cdot c_2,$$

ed usiamo le (11) e le (15); otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{\cos \varphi}{R_1} c_1 + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R_2} c_2 = \\ &= h \left[\cos \varphi \left(\frac{\cos 2\gamma}{R'} c_1 + \frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'} c_2 \right) + \operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\operatorname{sen} 2\gamma}{R'} c_1 - \frac{\cos 2\gamma}{R'} c_2 \right) \right]; \end{aligned}$$

perciò la precedente condizione si scinde nelle seguenti:

$$\frac{\cos \varphi}{R_1} = h \frac{\cos (2\gamma - \varphi)}{R'}, \quad \frac{\sin \varphi}{R_2} = h \frac{\sin (2\gamma - \varphi)}{R'}.$$

Eliminando h , risulta

$$\frac{R_1}{R_2} \tan \varphi = \tan (2\gamma - \varphi),$$

che determina φ ; dopo di che si può calcolare h .

Quest'equazione è del secondo grado in $\tan \varphi$. Se R_1 e R_2 sono d'ugual segno, il discriminante è positivo; se sono di segno opposto, per la realtà delle radici si richiede che sia

$$(1 - \rho)^2 \geq 4\rho \tan^2 2\gamma \quad \left(\rho = -\frac{R_1}{R_2}\right).$$

Si conclude pertanto: *nelle regioni a punti equiperbolici-ellittici esiste una doppia famiglia di curve coniugate tanto rispetto a \mathbf{n} quanto a \mathbf{n}' ; può non esistere nei punti equiperbolici-iperbolici. Si diranno le curve biconiugate.*

Per le ordinarie superficie di un S_3 accade che i piani tangenti in P e $P + dP$ s'intersecano lungo una retta, che è la direzione coniugata alla direzione di dP . Questo non accade per le superficie $(\Sigma_{2,4})$ in S_4 , perchè in un S_4 due piani non s'intersecano necessariamente lungo tutta una retta.

Consideriamo il piano tangente in P alla $(\Sigma_{2,4})$, Essa è rappresentato dalle due equazioni

$$(Q - P) \times \mathbf{n} = 0, \quad (Q - P) \times \mathbf{n}' = 0,$$

essendo Q i punti del piano; giacchè esse rappresentano rispettivamente gli spazi S_3 definiti dalle terne (c_1, c_2, \mathbf{n}') e (c_1, c_2, \mathbf{n}) . Analogamente le due equazioni

$$\begin{aligned} (Q - P + dP) \times (\mathbf{n} + \sigma(dP)) &= 0 \\ (Q - P - dP) \times (\mathbf{n}' + \sigma'(dP)) &= 0 \end{aligned}$$

rappresentano il piano tangente in $P + dP$. Combinando queste con le precedenti risulta, a meno d'infinitesimi del secondo ordine,

$$(Q - P) \times \sigma(dP) = 0, \quad (Q - P) \times \sigma'(dP) = 0.$$

Di qui, e dalle considerazioni precedenti, si deduce che *solo nel caso in cui dP sia una delle direzioni biconiugate i due piani s'intersecano lungo una retta, che è l'altra direzione biconiugata a quella.*

Questa è una proprietà caratteristica delle curve biconiugate.

11. Per il lettore che voglia far raffronti con altri lavori, nei quali è usato il metodo classico (dico classico in contrapposto al metodo dell'analisi vettoriale) aggiungeremo che lo sviluppo in coordinate generali di tutta la teoria porta manifestamente a formule contenenti i coefficienti e le loro derivate delle tre espressioni quadratiche differenziali

$$\begin{aligned} ds^2 &= dP \times dP = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ \sigma_1(dP) \times dP &= D_1 du^2 + 2Ddudv + D_2 dv^2 \\ \sigma_2(dP) \times dP &= D'_1 du^2 + 2D'dudv + D'_2 dv^2, \end{aligned}$$

in accordo con quanto ha esposto il prof. TONOLO. Ma il lettore stesso avrà notato dalle cose esposte che l'uso sistematico di quelle non è opportuno.

Se s'immagina la superficie riferita alle linee principali le cui tangenti in ogni punto sono \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 ; posto

$$dP = \sqrt{E} \mathbf{e}_1 du + \sqrt{G} \mathbf{e}_2 dv,$$

viene

$$(20) \quad \sigma(dP) = \frac{\sqrt{E}}{R_1} \mathbf{e}_1 du + \frac{\sqrt{G}}{R_2} \mathbf{e}_2 dv$$

$$\sigma'(dP) = \frac{\sqrt{E}}{R'} (\cos 2\gamma \cdot \mathbf{e}_1 + \sin 2\gamma \cdot \mathbf{e}_2) du + \frac{\sqrt{G}}{R'} (\sin 2\gamma \cdot \mathbf{e}_1 - \cos 2\gamma \cdot \mathbf{e}_2) dv,$$

e quindi

$$(20') \quad \begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + Gdv^2 \\ \sigma(dP) \times dP &= \frac{E}{R_1} du^2 + \frac{G}{R_2} dv^2 \end{aligned}$$

$$\sigma'(dP) \times dP = \frac{1}{R'} (E \cos 2\gamma \cdot du^2 + 2 \sqrt{EG} \sin 2\gamma \cdot dudv - G \cos 2\gamma \cdot dv^2) \quad (1).$$

Vogliamo ora determinare le derivate di \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{n} seconde le direzioni \mathbf{e}_1 o \mathbf{e}_2 (ossia rispetto ad u e v) in forma esplicita ed espressiva. Si ha intanto

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= d_s \mathbf{e}_1 + (d\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n})\mathbf{n} + (d\mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}')\mathbf{n}' \\ &= d_s \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \times d\mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{e}_1 \times d\mathbf{n}')\mathbf{n}', \end{aligned}$$

dalla quale si deduce (2)

$$(21) \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{dP} = \frac{d_s \mathbf{e}_1}{dP} - \mathbf{H} \left(\mathbf{K} \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{e}_1, \mathbf{n} \right) - \mathbf{H} \left(\mathbf{K} \frac{d\mathbf{n}'}{dP} \mathbf{e}_1, \mathbf{n}' \right).$$

(1) Questa ha il discriminante negativo.

(2) Si noti che è

$$\left(\mathbf{e}_1 \times \frac{d\mathbf{n}}{dP} dP \right) \mathbf{n} = \left(\mathbf{K} \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{e}_1 \times dP \right) \mathbf{n} = \mathbf{H} \left(\mathbf{K} \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{e}_1, \mathbf{n} \right) dP, \text{ ecc.}$$

Similmente risulta

$$(21') \quad \begin{aligned} \frac{dc_2}{dP} &= \frac{d_s c_2}{dP} - H \left(K \frac{dn}{dP} c_2, n \right) - H \left(K \frac{dn'}{dP} c_2, n' \right), \\ \frac{dn}{dP} &= \sigma + H \left(K \frac{dn}{dP} n', n' \right). \end{aligned}$$

Applicando quest'ultima ai vettori c_1 e c_2 si ottiene per le (11)

$$(I) \quad \frac{dn}{dP} c_1 = \frac{c_1}{R_1} + pn', \quad \frac{dn}{dP} c_2 = \frac{c_2}{R_2} + qn'.$$

Osserviamo ora che $\frac{d_s c_1}{dP} c_1, \frac{d_s c_2}{dP} c_2 = -\frac{d_s c_2}{dP} c_1, \frac{d_s c_1}{dP} c_2$ sono vettori tangenziali, e che a causa delle relazioni $c_1^2 = c_2^2 = 1, c_1 \times c_2 = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d_s c_1}{dP} c_1 \times c_1 = 0, \quad \frac{d_s c_2}{dP} c_2 \times c_2 = 0, \quad \frac{d_s c_1}{dP} c_1 \times c_2 = -\frac{d_s c_2}{dP} c_1 \times c_1, \\ \frac{d_s c_1}{dP} c_2 \times c_2 = -\frac{d_s c_2}{dP} c_2 \times c_1; \end{aligned}$$

ne consegue

$$\begin{aligned} \frac{d_s c_1}{dP} c_1 = \frac{1}{g_1} c_2, \quad \frac{d_s c_2}{dP} c_1 = -\frac{1}{g_1} c_1, \\ \frac{d_s c_1}{dP} c_1 = \frac{1}{g_2} c_2, \quad \frac{d_s c_2}{dP} c_2 = -\frac{1}{g_2} c_1, \end{aligned}$$

i cui coefficienti g_1 e g_2 hanno le espressioni che vedremo poi.

Dopo ciò dalla prima delle (21) si deduce

$$\frac{dc_1}{dP} c_1 = \frac{1}{g_1} c_2 - (\sigma c_1 \times c_1) n - (\sigma' c_1 \times c_1) n'$$

ossia per le (11) e (13)

$$\frac{dc_1}{dP} c_1 = \frac{1}{g_2} c_2 - \frac{1}{R_1} n - \frac{\cos 2\gamma}{R'} n'.$$

Così proseguendo si ottiene subito il seguente gruppo di formule:

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dP} c_1 = \frac{1}{g_1} c_2 - \frac{1}{R_1} n - \frac{\cos 2\gamma}{R'} n' \\ \frac{dc_1}{dP} c_2 = \frac{1}{g_2} c_2 - \frac{\sin 2\gamma}{R'} n' \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{dc_2}{dP} c_1 = -\frac{1}{g_1} c_1 - \frac{\sin 2\gamma}{R'} n' \\ \frac{dc_2}{dP} c_2 = -\frac{1}{g_2} c_1 - \frac{1}{R_2} n + \frac{\cos 2\gamma}{R'} n'. \end{cases}$$

Le quantità

$$\frac{1}{g_1} = \frac{d_s \mathbf{c}_1}{dP} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$$

$$\frac{1}{g_2} = \frac{d_s \mathbf{c}_2}{dP} \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_1 = \frac{d\mathbf{c}_2}{dP} \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_1,$$

si possono chiamare, per analogia con la teoria delle ordinarie superficie, le *curvature tangenziali* delle linee principali prese qui come linee coordinate. La loro esplicita espressione mediante E e G si calcola subito dalla condizione

$$\frac{\partial P_1'}{\partial v} = \frac{\partial P_2'}{\partial u}, \quad \text{essendo } P_1' = \sqrt{E}c_1, \quad P_2' = \sqrt{G}c_2.$$

Viene

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} c_1 + \sqrt{E} \frac{\partial c_1}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} c_2 + \sqrt{G} \frac{\partial c_2}{\partial u};$$

da cui

$$\sqrt{E} \frac{\partial c_1}{\partial v} \times c_2 = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \sqrt{G} \frac{\partial c_2}{\partial u} \times c_1 = \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

ossia ⁽⁴⁾

$$\frac{1}{g_2} = \frac{d\mathbf{c}_1}{dP} \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{GE}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad -\frac{1}{g_1} = \frac{d\mathbf{c}_2}{dP} \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

Infine alle (I) aggiungiamo le seguenti che si ottengono come quelle:

$$(I) \quad \frac{d\mathbf{n}'}{dP} \mathbf{c}_1 = \sigma' \mathbf{c}_1 - p\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}'}{dP} \mathbf{c}_2 = \sigma' \mathbf{c}_2 - q\mathbf{n},$$

ove $\sigma' \mathbf{c}_1$ e $\sigma' \mathbf{c}_2$ son date dalle (15). Se poi si volessero le derivate delle \mathbf{c}_1' e \mathbf{c}_2' , non c'è che da derivare le relazioni $\mathbf{c}_1' = \cos \gamma \cdot \mathbf{c}_1 + \sin \gamma \cdot \mathbf{c}_2$, ecc. e valersi delle (II) e (III).

12. Naturalmente le (I), (I'), (II) e (II') devono soddisfare alle condizioni d'integrabilità. La condizione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}'}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}'}{\partial v \partial u},$$

⁽⁴⁾ Si noti che per un vettore \mathbf{w} qualunque si ha

$$\frac{d\mathbf{w}}{dP} \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u}, \quad \frac{d\mathbf{w}}{dP} \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial v}.$$

dà le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{p}{R_2} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\cos 2\gamma}{R'} \right) + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sin 2\gamma}{R'} \right) + \frac{2}{R'} \left(\frac{\cos 2\gamma}{g_2} - \frac{\sin 2\gamma}{g_1} \right) \\ \frac{q}{R_1} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sin 2\gamma}{R'} \right) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\cos 2\gamma}{R'} \right) + \frac{2}{R'} \left(\frac{\cos 2\gamma}{g_1} + \frac{\sin 2\gamma}{g_2} \right) \\ \frac{\partial(\sqrt{E}p)}{\partial v} - \frac{\partial(\sqrt{G}q)}{\partial u} &= \frac{\sin 2\gamma}{R'} \sqrt{EG} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).\end{aligned}$$

Le due prime forniscono le funzioni p e q finora incognite; la terza è una equazione del tipo dell'equazioni di CODAZZI.

L'altra condizione d'integrabilità relativa ad u dà le due equazioni

$$\begin{aligned}-p \sin 2\gamma + q \cos 2\gamma &= \frac{R'}{g_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{R'}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{R_1} \right) \\ p \cos 2\gamma + q \sin 2\gamma &= -\frac{R'}{g_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{R'}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{R_2} \right).\end{aligned}$$

che sono pure del tipo CODAZZI. Le rimanenti due condizioni danno in più la sola equazione

$$\frac{1}{R_1 R_2} - \left(\frac{1}{R'} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sqrt{E}}{g_1} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{G}}{g_2} \right) \right],$$

che è l'equazione di Gauss. Tutte queste sono, in forma più esplicita ed espressiva, le stesse equazioni indicate dal prof. TONOLO nella Memoria citata.