Sopra alcune limitazioni per la sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del De Saint Venant.

Memoria di Giulio Supino (a Bologna).

Sunto. - *L'A, studia in questa Memoria la distribuzione delle tensioni interne in un solido elastico convesso quando gli spostamenti, dati in superficie, sono diversi da zero solo in una piccola zona. Nei campi a due dimensioni il risultato è esteso al caso in cui sul contorno siano date le forze; si giunge così ad una dimostrazione del principio del De Saint Venant.*

INTRODUZIONE

1. Si consideri un solido elastico convesso, deformato sotto l'azione di sole forze superficiali. Allora:

« Se le componenti di spostamento, che si suppongono assegnate sulla superficie del solido, sono diverse da zero soltanto in una piccola zona superficiale σ_1, la sollecitazione elastica diminuisce quando ci si allontani da quella zona, e, in un punto fissato (che non si trovi su σ_1), tende a zero quando la zona deformata tende a zero insieme con la massima lunghezza in essa contenuta; tende invece ad un limite determinato e finito (generalmente diverso da zero) quando l'area σ_1 tende a zero ma la massima lunghezza in essa contenuta resta diversa da zero. In ogni caso se il punto considerato si trova in σ_1 la sollecitazione tende all'infinito quando σ_1 tende a zero ».

In un sistema elastico piano, anch'esso non soggetto a forze di massa e convesso, vale una analoga proposizione concernente gli sforzi (principio del De Saint-Venant), cioè:

« Se in un campo elastico in due dimensioni le forze sono applicate soltanto nella zona σ_1 del suo contorno, allora le caratteristiche della sollecitazione diminuiscono di intensità all'allontanarsi da σ_1 e in un punto fissato (esterno a σ_1) tendono a zero insieme con σ_1 stessa ».

La dimostrazione di questi teoremi forma l'oggetto del presente lavoro. Per ottenerla mi servo di limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate, che ho dedotto in alcuni recenti lavori [1] e di una dimostrazione dovuta al LICHTENSTEIN, sulla esistenza della soluzione elastica per dati spostamenti in superficie. Il procedimento di LICHTENSTEIN (che sarà brevemente esposto al § 1) viene qui esteso, nei campi piani, anche nel caso in cui sul contorno siano date le forze (§ 4); in questo modo si ottiene contemporaneamente un metodo generale per la soluzione della equazione biarmonica. Nel problema che ci occupa il vantaggio di questi procedimenti sta nel fatto che, applicando ad essi le limitazioni ottenute per le funzioni armoniche e le loro derivate, si giunge ad una equazione integrale del tipo di FREDHOLM col termine noto già effettivamente calcolato in modo maggiorante; l'unica difficoltà che ancora rimane consiste allora nella ricerca di una soluzione maggiorante per questa equazione. Ora tale ricerca può essere compiuta in molti casi con un procedimento assai simile a quello di NEUMANN per la risoluzione del problema di DIRICHLET; con questo il problema è dunque risolto. Un esempio semplice, relativo al caso del cerchio, mostra l'efficacia delle limitazioni ottenute.

§ 1. **Una dimostrazione d'esistenza per la soluzione elastica relativa a spostamenti dati in superficie (Lichtenstein)** [2].

2. Consideriamo le equazioni indefinite dell'equilibrio di un solido elastico isotropo. In assenza di forze di massa potremo scrivere (seguendo un'idea di TEDONE):

$$\Delta_2\left(u + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta\right) = 0 \quad \Delta_2\left(w + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta\right) = 0$$
$$\Delta_2\left(v + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta\right) = 0 \quad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Qui u, v, w indicano le componenti di spostamento secondo gli assi x, y, z; ed è $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Se $P(\xi, \eta, \zeta)$ è un punto generico della superficie limite S e $Q(x, y, z)$ un punto generico interno ad S si deduce

(1) Cfr. « Atti della R. Accademia Naz. dei Lincei ». Due note nel 2° sem. 1928. « Bollettino della Unione Mat. Italiana », Dic. 1929. « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », 1931.

(2) LICHTENSTEIN, *Ueber die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.* « Math. Zeitschrift », 1924.

dalle equazioni precedenti

$$u(Q)+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta(Q)=\frac{1}{4\mu}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}u(P)dS+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\xi\Theta(P)dS$$

dove G_P^Q indica la funzione di Green relativa al contorno dato e all'operazione Δ_2.

Poichè $\Delta_2\Theta=0$ si può scrivere

$$\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta(Q)=\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}x\Theta(P)dS$$

onde segue l'equazione

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}u(P)dS+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}(\xi-x)\Theta(P)dS \tag{1}$$

mentre analoghe espressioni si ricavano per $v(Q)$, $w(Q)$.

Ma si osserva subito che

$$F_1(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}u(P)dS$$

è nota in tutto il solido quando siano assegnati gli spostamenti in superficie. In questa ipotesi si conoscono anche le funzioni:

$$F_2(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}v(P)dS,\qquad F_3(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}w(P)dS;$$

ricordando la espressione di Θ, si ricava allora dalla (1) e dalle formule analoghe per $v(Q)$, $w(Q)$ la equazione:

$$\begin{aligned}\Theta(Q)=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\xi-x)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\eta-y)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\zeta-z)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}\right]\Theta(P)dS.\end{aligned} \tag{2}$$

Poniamo ora

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=\Lambda(Q) \tag{3}$$

ed osserviamo che se r indica il vettore $\overline{QP}$ (diretto da Q verso P), è

$$(\xi-x)\frac{\partial}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial}{\partial y}+(\zeta-z)\frac{\partial}{\partial z}=r\cdot\frac{\partial}{\partial r};$$

la (2) si trasforma così nell'equazione

$$\Theta(Q)=\frac{2\mu}{3\lambda+5\mu}\Lambda(Q)+\frac{\lambda+\mu}{4\pi(3\lambda+5\mu)}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r\partial n_P}\Theta(P)dS. \tag{4}$$

Ma, come si deduce da un lavoro di P. LÉVY [1], è

$$r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r\partial n_P}=4\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+h(P,\ Q)$$

dove h è limitata $\left(\text{od infinita come } \frac{1}{r}\right)$; e se ricordiamo che quando in un punto interno ad S è

$$f(x,\ y,\ z)=\int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Theta(P)dS$$

su S stesso si ha

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=2\pi\Theta(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Theta(P)dS$$

possiamo scrivere la (4) facendo tendere Q ad un punto P' del contorno; si ha allora

$$\Theta(P')=\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\Lambda(P')+\frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+3\mu)}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\Theta(P)dS \tag{5}$$

essendo $r=\overline{P'P}$.

3. Le formule (1) e (5) servono a determinare le componenti di spostamento in tutto il solido quando siano noti i loro valori in superficie. Si osserva facilmente che alla (5) si può applicare la teoria di FREDHOLM e che il numero $-\frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+3\mu)}$ non é certo un autovalore di essa perchè se l'equazione

$$\Theta(P')-\frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+3\mu)}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\Theta(P)dS=0$$

(cioè l'equazione che si deduce dalla (5) per $\Lambda(P')=0$) ammettesse una soluzione $\Theta(P')$ (certamente armonica) diversa da zero, questa sostituita nella (1) darebbe luogo a componenti di spostamento nulle in superficie, diverse da zero nell'interno del solido; ciò che non è possibile per la unicità della so-

[1] Cfr. « Acta Mathematica », Vol. 42.

luzione elastica. Per fissare l'andamento delle funzioni u, v, w, in tutto il solido basta dunque studiare il comportamento di F_1, F_2, F_3, e delle loro derivate e risolvere in modo approssimato la (5).

Questo argomento sarà studiato nel paragrafo che segue.

§ 2. **Una limitazione per le soluzioni della equazione integrale (5).**

4. Ci proponiamo di indicare in questo paragrafo una soluzione maggiorante per la funzione $\Theta(P)$, determinata dalla (5), quando si supponga nota $\Lambda(P)$. È necessario perciò conoscere alcune proprietà del nucleo: $r\dfrac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}$.

Osserveremo duuque:

a) che

$$\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\,dS_P = 4\pi \tag{6}$$

quando P, P' sono punti del contorno.

Infatti si assumano come componenti di spostamento le funzioni

$$u=\frac{a}{3}\,x,\qquad v=\frac{a}{3}\,y,\qquad w=\frac{a}{3}\,z;$$

queste componenti soddisfano alle equazioni dell'equilibrio elastico e danno luogo ad una dilatazione cubica eguale ad a. Dalla (3) si ricava che anche $\Lambda(P)=\text{cost.}=a$.

Introdotti questi valori nella (5) si ha

$$a-\frac{(\lambda+\mu)a}{4\pi(\lambda+3\mu)}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}\,dS_P=\frac{2\mu a}{\lambda+3\mu}=a-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,a.$$

Di qui segue subito la (6) qualunque sia la forma del solido.

b) che $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\partial n_P}$ *è sempre positiva sul contorno di un corpo convesso.*

Indichiamo infatti con U la funzione armonica che assume il valore M in un intorno δ di P e il valore zero sulla rimanente parte del contorno; la derivata di U secondo la normale interna in un punto P' esterno a δ soddisfa alla relazione

$$0 < \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{P'} = \frac{M}{4\pi}\int_{\delta} \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P} dS.$$

Ma

$$\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \frac{\partial^3 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P} \frac{\partial n_{P'}}{\partial r}$$

perchè $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial S_{P'} \partial n_P} = 0$; d'altra parte è $\frac{\partial n_{P'}}{\partial r} = \cos(n_{P'}, r)$ e questo è certamente positivo (o nullo) se il campo é convesso perchè r è diretto da P' verso P (cioè verso l'interno del campo come $n_{P'}$). Ne segue che $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}$ è positiva (o nulla). c. d. d.

c) poichè $\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial x_{P'} \partial n_P}$ è massima quando la direzione x coincide con la direzione $n_{P'}$ e d'altra parte ho dimostrato in un altro lavoro ([1]) che

$$\left| \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P} \right| \leq \frac{\pi^2}{r^3}$$

così si deduce la limitazione

$$0 \leq r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \leq \frac{\pi^2 \cos(n_{P'}, r)}{r^2} \qquad r = \overline{P'P}. \tag{7}$$

5. Premesse queste osservazioni, riprendiamo in esame la (5) sostituendo ai coefficienti λ e μ i coefficienti E (modulo di elasticità) ed m (inverso del coefficiente di contrazione). Si ha

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} = \frac{m}{3m - 4} \qquad \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu} = \frac{2(m-2)}{3m-2}$$

sicchè la (5) assume la forma

$$\Theta(P') - \frac{m}{4\pi(3m-4)} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \Theta(P) dS_P = \frac{2(m-2)}{3m-4} \Lambda(P'). \tag{5'}$$

([1]) Si veda: *Sopra alcune limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate.* « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 1931.

Poniamo ora

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Theta_0(P') = \frac{2(m-2)}{3m-4}\,\Lambda(P')\\
&\Theta_1(P') = \frac{m}{4\pi(3m-4)}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\,\partial n_P}\,\Theta_0(P)dS_P\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Theta_n(P') = \frac{m}{4\pi(3m-4)}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r\,\partial n_P}\,\Theta_{n-1}(P)dS_P\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

la serie

$$
(9)\qquad \Theta_0 + \Theta_1 + \dots \Theta_n + \dots
$$

converge sicuramente, perchè indicando con $\overline{\Theta}_0$, $\overline{\Theta}_1 \dots$ i massimi di Θ_0, $\Theta_1 \dots$, si ha (v. n.° 4, *b*)

$$
|\overline{\Theta}_1| \leq \frac{m}{3m-4}|\overline{\Theta}_0|, \quad |\overline{\Theta}_2| \leq \frac{m}{3m-4}|\overline{\Theta}_1| \leq \left(\frac{m}{3m-4}\right)^2 |\overline{\Theta}_0|,
$$

$$
|\overline{\Theta}_n| \leq \left(\frac{m}{3m-4}\right)^n |\overline{\Theta}_0|
$$

ed è $\dfrac{m}{3m-4} < 1$ (perchè quando valgono le condizioni di unicità è $m > 2$). La somma della (9) dà la funzione $\Theta(P')$ cercata. Se $\Lambda(P')$ è sempre uguale o minore (in valore assoluto) a una costante positiva K, allora dalle limitazioni precedenti segue:

$$
(10)\qquad |\Theta| \leq \frac{|\overline{\Theta}_0|}{1 - \dfrac{m}{3m-4}} = \frac{2(m-2)}{3m-4-m}K = K.
$$

6. Quando la funzione $\Lambda(P')$ assuma valori assai grandi soltanto in una piccola zona del contorno, si può ottenere una limitazione più favorevole procedendo nel modo che segue. Supponiamo per fissare le idee che $\Lambda(P')$ sia uguale a K in una piccola zona σ_1 nulla nella rimanente zona di contorno (che indicheremo con σ_2: $\sigma_1 + \sigma_2 = S$). Si ha allora dalla prima delle (8):

$$
\Theta_0 = \begin{cases} \dfrac{2(m-2)}{3m-4}K & \text{in } \sigma_1 \\ 0 & \text{in } \sigma_2 \end{cases}
$$

e dalla seconda delle (8) tenendo presente la (7)

$$\Theta_1(P') = \frac{m(m-2)}{3m-4}\frac{\pi K}{2}\int_{\sigma_1}\frac{\cos(n_{P'}, r)}{r^2}\, d\sigma_P; \quad r = \overline{P'P}.$$

Poniamo ora

$$H(P') = K\int_{\sigma_1}\frac{\cos(n_{P'}, r)}{r^2}\, d\sigma_P$$

e consideriamo il massimo di $H(P')$ quando P' si muove sul contorno; indicando questo con $\overline{H}$ si può seguire il procedimento di approssimazioni successive iniziato con i valori trovati di Θ_0 e Θ_1; segue così

$$(11) \qquad \begin{cases} |\,\Theta\,|_{\sigma_1} \leq \dfrac{2(m-2)}{3m-4}K + \dfrac{m}{3m-4}\cdot\dfrac{\pi}{4}\overline{H} \\[2mm] |\,\Theta\,|_{\sigma_2} \leq \dfrac{m}{3m-4}\cdot\dfrac{\pi}{4}\overline{H}. \end{cases}$$

Questa limitazione è più favorevole perchè quando la zona σ_1 sia piccola in confronto ad S allora H risulta assai più piccolo di K; per esempio sulla sfera, se σ_1 vale 1/20 di S allora

$$\overline{H} = \frac{\pi}{10}K$$

e quindi se si suppone (come valore più frequente) $m = 4$ segue

$$|\,\Theta\,|_{\sigma_1} \leq \frac{K}{2} + \frac{\pi^2}{80}K < \frac{5K}{8}$$

$$|\,\Theta\,|_{\sigma_2} < \frac{K}{8}.$$

§ 3. **Alcune espressioni maggioranti per la sollecitazione elastica corrispondente a dati spostamenti in superficie.**

7. Siamo ora in grado di ottenere alcune limitazioni per la sollecitazione elastica corrispondente a dati spostamenti in superficie. Supponiamo perciò che la superficie limite del solido (convesso) sia divisa in due zone complementari σ_1 e σ_2 e che lo spostamento S assegnato per ogni punto della superficie stessa sia eguale a zero in σ_2 minore od eguale (in modulo) ad un numero fisso M in σ_1. In questa ipotesi cerchiamo una limitazione per $\Lambda(P')$. Tenendo presenti le diseguaglianze per le derivate di una funzione armonica che ho stabilito in precedenti lavori [1] si ricava dalla (3) che in ogni punto di σ_2 é

$$\Lambda(P') \leq \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1}{r_1^3} \quad (12)$$ [2]

ove si indichi con r_1 la minima distanza di P' da σ_1.

D'altra parte è noto che se u, v, w sono continue e derivabili in $\sigma_1 + \sigma_2$ allora $\Lambda(P')$ esiste limitata in ogni punto del contorno [3]. Poichè la diseguaglianza (12) può servire soltanto nei punti di σ_2 non vicinissimi a σ_1 includiamo in σ_1 anche i punti di σ_2 la cui distanza r_1 da σ_1 soddisfi alla diseguaglianza

$$r_1 \leq \sqrt[3]{\sigma_1}$$

ed indichiamo con σ_1' la zona σ_1 così ampliata, con N un valore maggiorante a $\Lambda(P')$ in σ_1'. Tenendo conto della (12) si viene così ad assegnare in ogni punto di $S = \sigma_1 + \sigma_2$ un valore maggiorante (limitato) per $\Lambda(P')$; questo valore è uguale ad N in σ_1', minore di M in $\sigma - \sigma_1'$; si può dunque maggiorare $\Lambda(P')$ sommando due funzioni; l'una eguale ad M in tutto S, l'altra eguale ad $N - M$ in σ_1, nulla sulla rimanente parte di S. Si trova allora in base ai risultati dei n.i 5 e 6 che

$$\Theta_{\sigma_1'} \leq \frac{2(m-2)}{3m-4}(N-M) + \frac{m}{3m-4}\bar{H}_1 + M$$

$$\Theta_{\sigma-\sigma_1'} \leq \frac{m}{3m-4}\frac{\pi}{4}\bar{H}_1 + M$$

---

(1) Si veda: Supino, *Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica*, « Rendiconti della R. Accad dei Lincei », 2° sem. 1928, pag. 658; e *Sopra alcune limitazioni per le funzioni armoniche e le loro derivate*, « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 1931. La diseguaglianza ottenuta nello spazio è data dalla formula

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_A \leq \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r_1^3}$$

dove F è una funzione armonica minore od eguale ad M in σ_1 nulla in σ_2; A è un punto interno al campo o su σ_2, r_1 è la distanza (minima) di A da σ_1.

(2) Si osservi che $\Lambda(P')$ ha il significato di una dilatazione cubica e quindi è indipendente dalla scelta degli assi. Se in un punto P' del contorno ci si riferisce a due direzioni ortogonali (x, y) giacenti nel piano tangente e alla normale (z) a σ_2 in P', si osserva subito che

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \Lambda(P') = \frac{\partial F_3}{\partial z} < \frac{\pi}{4}\frac{M\sigma_1}{r_1^3} \qquad \text{c. d. d.}$$

(3) Cfr. nella « Encyclopädie der Math. Wissenschaften », l'articolo di L. Lichtenstein, *Neuere Entwicklungen der Potentialtheorie-Konforme Abbildung.*

essendo

$$\overline{H}_1 = | H_1(P') |_{\max}, \quad H_1(P') = \int_{\sigma_1'} \frac{(N-M)\cos(n_{P'}, r)}{r^2} d\sigma_P, \quad r = \overline{P'P}.$$

Ne segue

$$\Theta(Q) < \frac{(m-2)(N-M)}{(3m-4)2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} d\sigma_1 + N_1$$

dove si é posto per brevità

$$N_1 = \frac{m}{3m-4} \frac{\pi}{4} \overline{H}_1 + M.$$

La espressione di Θ può essere ulteriormente esplicitata ricordando un'altra diseguaglianza che ho stabilito in un campo convesso:

$$\left| \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} \right| \leq -\frac{2\cos(r, n_P)}{r^2} \text{ (1)};$$

segue allora

(13) $$\Theta(Q) < -\frac{m-2}{3m-4} \frac{N-M}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\cos(r, n_P)}{r^2} d\sigma_1 + N_1.$$

La (13) mostra che Θ è formata di due parti; una che qui compare come costante (rappresentata da N_1) e che rappresenta la sollecitazione diffusa in tutto il campo per effetto dello spostamento locale; si tratta di una parte non grande quando σ_1 sia sufficientemente piccola, come si può vedere da un breve computo in casi particolari [2] e come risulterà dalle considerazioni del numero che segue che confrontano N_1 col primo termine del secondo membro. L'altra parte, formata da questo primo termine diminuisce sensibilmente allontanandosi da σ_1'.

Servendosi della (1) si può determinare $u(Q)$. Tenendo conto ehe

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{m}{m-2}, \quad (\xi - x) = r\cos(x, r)$$

segue

(14) $$u(Q) < \frac{M}{2\pi} \left| \int_{\sigma_1} \frac{\cos(r, n_P)}{r^2} d\sigma_1 \right| + \frac{m(N-M)}{(3m-4)2\pi} \int_{\sigma_1} \left| \frac{\cos(r, n_P)\cos(x, r)}{r} \right| d\sigma_1 + \\ + \frac{mN_1}{(m-2)4\pi} \int_S \left| \frac{\cos(r, n_P)\cos(x, r)}{r} \right| dS.$$

---

(1) Cfr. il lavoro già citato del Circolo Mat. di Palermo; od anche « Bollettino della Un. Mat. Ital. », Dicembre 1929; si è posto qui il segno — perchè r è diretto da Q a P.

(2) Considerando il caso della sfera e ponendo $m = 4$ si ha $N_1 = \frac{N\pi}{8}\omega + M\left(1 - \frac{\pi\omega}{8}\right)$ essendo ω l'angolo visuale secondo cui da un punto qualunque di σ_1 si vede σ_1'.

Derivando poi la (1) stessa e tenendo conto delle solite limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica si trovano facilmente le limitazioni per le componenti di deformazione.

8. Le limitazioni date devono essere brevemente discusse perchè occorre conoscere in modo meno indeterminato il valore N se si vuole stabilire il comportamento della dilatazione cubica e delle componenti di deformazione quando ci si allontana da σ_1 e quando σ_1 tende a zero. Ora secondo la convenzione del numero precedente N rappresenta il massimo (assoluto) di $\Lambda(P')$ in σ_1'; ricordando che è

$$\Lambda(P')=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ci proponiamo di mostrare che *se* σ_1 *tende a zero ma* u, v, w (*e quindi* F_1, F_2, F_3) *conservano su* S *sempre lo stesso massimo* M, *allora* N *tende all'infinito ma il prodotto* $N\sigma_1$ *tende ad un limite finito (che può essere anche lo zero).*

Consideriamo dapprima il caso dello spazio limitato soltanto da un piano. Allora una riduzione dell'ampiezza di σ_1 che lasci l'area della stessa forma si può interpretare come un aumento dell'unità di misura dello spazio; se supponiamo che l'area sia ridotta nella proporzione da 1 a λ l'unità di misura aumenta nella proporzione di 1 a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ e quindi $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}$, $\frac{\partial F_3}{\partial z}$ crescono anche esse nella stessa proporzione. Ne segue che la limitazione per N deve essere aumentata nel rapporto 1 a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; mentre $N\sigma_1$ *diminuisce* nel rapporto da 1 a $\sqrt{\lambda}$. Questa deduzione implica, come si è già osservato, che σ_1 conservi la stessa forma; se σ_1 tende a zero ma una delle dimensioni resta *finita* allora N tende all'infinito ed $N\sigma_1$ tende ad un limite determinato e finito diverso da zero ([1]).

Passiamo ora ad un caso più generale e supponiamo che la superficie S limite del campo contenga una zona piana S_1 ma del resto abbia forma qualunque. Se σ_1 si trova su S_1 allora la funzione armonica F_1 nulla in $S-\sigma_1$ si può pensare come somma di due; una F_1' data nel semispazio limitato

---

([1]) Se si considera il problema elastico in due dimensioni, quest'ultimo caso è quello che sempre si verifica; cioè $N\sigma_1$ tende ad un limite finito diverso da zero. Il ragionamento è uguale a quello svolto più sopra per il primo caso; basta osservare che allora σ_1 ha una sola dimensione.

dal piano α che contiene S_1 ed eguale ad F_1 su S_1 nulla nella rimanente parte di α l'altra F_1'' uguale a $-F_1'$ in $S-S_1$ nulla in S_1.

Ne segue

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=\frac{\partial F_1'}{\partial x}+\frac{\partial F_1''}{\partial x}$$

e mentre, per quanto riguarda $\frac{\partial F_1'}{\partial x}$ si può ripetere il ragionamento svolto più sopra, invece $\frac{\partial F_1''}{\partial x}$ si conserva limitata (¹); il valore di essa non ha dunque influenza sul limite di N quando σ_1 tende a zero.

Resta da considerare soltanto il caso generale in cui σ_1 non è piana. Facciamo tendere a zero σ_1 considerando successivamente tante zone decrescenti $\sigma_1', \sigma_1'' \ldots. \sigma_1^{(n)} \ldots.$ (l'una interna alla precedente); associamo quindi ad ogni zona $\sigma_1^{(n)}$ un solido $\overline{S}_n$ ottenuto per similitudine dal corpo dato in modo che l'area $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ su $\overline{S}_n$ sia equivalente a σ_1; la successione $\overline{S}_1 \ldots. \overline{S}_n \ldots.$ é una successione di solidi convessi, regolari; su ciascuno di questi la F_1, nulla fuori di $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ e regolare in $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ ammette derivata $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *limitata*, e questa al limite (per $n\to\infty$) tende a quella che si ha, per la stessa F_1, nel semispazio: infatti la curvatura in ogni punto della superficie limite di $\overline{S}_n$ tende a zero quando n tende all' ∞. Ma ora si può tornare da $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ a $\sigma_1^{(n)}$ data su S riducendo $\overline{S}_n$ nel rapporto $\sigma_1^{(n)}:\overline{\sigma}_1^{(n)}=\lambda$; e su questa riduzione si può svolgere lo stesso ragionamento precedentemente fatto per il semispazio; se dunque $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ tende ad una linea $N\sigma_1$ tende ad un limite diverso da zero; se $\overline{\sigma}_1^{(n)}$ tende ad un area con due dimensioni limitate allora $N\sigma_1$ tende a zero.

Riprendiamo ora in esame la (13): da essa si rileva che quando σ_1 tende a zero, tutti i termini del secondo membro tendono a zero se la lunghezza massima contenuta in σ_1 tende anch'essa a zero; in caso contrario essi restano limitati ma diversi da zero. In σ_2 il primo e il secondo termine del secondo membro della (13) sono dello stesso ordine di grandezza ma N_1 è costante mentre il primo termine diviene più grande nell'interno del campo e tende all'infinito quando Q tende ad un punto di σ_1 e σ_1 tende a zero. Resta così dimostrato il primo teorema, enunciato al n.° 1, almeno per quanto riguarda

(¹) Infatti, quando σ_1 tende a zero, F_1'' diminuisce in valore assoluto (o almeno non aumenta) in $S-S_1$ e resta sempre nulla in S_1; quindi $\frac{\partial F_1''}{\partial x}$ resta limitata in S_1.

la dilatazione cubica: ma allo stesso risultato si giunge facilmente quando si consideri una delle componenti di deformazione.

§ 4. **Estensione della soluzione di Lichtenstein al caso delle forze esterne date (problema piano).**

9. Cerchiamo ora di estendere il procedimento del n.° 2 al caso in cui, in un campo piano, siano date le forze sul contorno. Ricordiamo perciò che la sollecitazione elastica in un campo a due dimensioni si può esprimere, servendosi di una funzione biarmonica F; le componenti di tensione sono legate ad essa dalle relazioni

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{15}$$

valide in coordinate cartesiane; le condizioni ai limiti sono allora:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_S = -P_x \qquad \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_S = P_y$$

essendo P_x, P_y le componenti secondo gli assi delle forze esterne date.

Le relazioni precedenti possono essere scritte nella forma

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_S = -\int P_x dS \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S = \int P_y dS \tag{16}$$

dove le funzioni $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_S$, $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_S$ sono determinate in modo unico perché per l'equilibrio deve essere

$$\int_S P_x dS = 0, \qquad \int_S P_y dS = 0.$$

Seguendo il LAURICELLA [1] poniamo ora

$$U = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad V = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad \Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$
$$\Delta_2 \Theta = \Delta_2 \Delta_2 F = 0;$$

il problema dato si riconduce così alla ricerca delle funzioni U e V assegnate

[1] Cfr. G. LAURICELLA, *Sulla integrazione della equazione* $\Delta^4 V = 0$. « Atti della R. Accademia Naz. dei Lincei », 2° sem. 1907, fasc. 6°, pp. 373-383.

sul contorno e legate nel campo delle equazioni

$$\Delta_2 U - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta_2 V - \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta_2 \Theta = 0 \tag{17}$$

le quali coincidono con le equazioni dell'equilibrio elastico per componenti di spostamento U e V, essendo cambiato solo il parametro dell'elasticità che in luogo di $\frac{\lambda + \mu}{\mu}$ è eguale a -1. La condizione $\Delta_2 \Theta = 0$ non è più conseguenza delle prime due equazioni e deve essere posta esplicitamente.

L'integrazione delle (17) può essere eseguita col procedimento indicato dal LICHTENSTEIN e riportato al n.° 2.

Dalla prima e dalla terza delle (17) si deduce infatti

$$\Delta_2 \left(U - \frac{x\Theta}{2} \right) = 0$$

e quindi, indicando con $P(\xi, \eta)$ un punto di S con $Q(x, y)$ un punto interno, si ha

$$U(Q) - \frac{x}{2}\,\Theta(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P)dS - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, \xi\Theta(P)dS.$$

Poichè $\Delta_2 \Theta = 0$ si può scrivere

$$\frac{x}{2}\,\Theta(Q) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, x\Theta(P)dS.$$

Sommando queste due equazioni si trova

$$U(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P)dS - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, (\xi - x)\Theta(P)dS. \tag{18}$$

Ma

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, U(P)dS$$

è nota in tutto il campo perchè U è dato sul contorno; indicando con $F_2(x, y)$ l'espressione che si ottiene considerando la funzione V:

$$F_2(x, y) = \int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, V(P)dS$$

e ricordando che $\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$, si ricava dalla (18) e dalla analoga espressione in V:

$$\Theta(Q) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\xi - x)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\} + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(\eta - y)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\right\}\right]\Theta(P)dS.$$

Poniamo

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \Lambda(Q) \tag{20}$$

ed osserviamo che se r indica il vettore $\overline{QP}$ (diretto da Q verso P) è

$$(\xi - x)\frac{\partial}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial r}$$

la (19) si trasforma così nell'equazione

$$\Lambda(Q) - \frac{1}{4\pi}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS = 0. \tag{19'}$$

Ma in un campo a due dimensioni è

$$r\frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P} = -2\frac{\partial}{\partial n}\log r + h_P^Q$$

dove h è limitata ed infinita come $\log r$; d'altra parte se nel campo stesso è

$$f(x, y) = -\int_S \frac{\partial}{\partial n}\log r\varphi(P)dS$$

sul contorno si ha

$$f(P') = \pi\varphi(P') - \int_S \frac{\partial}{\partial n}\log r\varphi(P)dS$$

segue così che se Q tende ad un punto P' del contorno la (19') assume la forma

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi}\int_S r\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\Theta(P)dS = 2\Lambda(P'). \tag{21}$$

10. Le formule (18) e (21) risolvono il problema posto. Si osserva facilmente che alla (21) si può applicare la teoria di FREDHOLM e che il numero $\frac{1}{2\pi}$ non è certo un autovalore per essa perchè se la equazione

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi}\int_S r\,\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}\,\Theta(P)dS = 0$$

(cioè l'equazione *omogenea* che si deduce dalla (21)) ammettesse una soluzione $\Theta(P')$ diversa da zero, questa darebbe luogo ad una funzione *armonica*; ponendo i valori $\Theta(P')$ nel secondo termine del secondo membro della (18) avremmo una funzione U (e quindi una funzione V) diversa da zero nell'interno del campo; e ciò non è possibile perchè come ha mostrato LAURICELLA la soluzione delle (17) è certamente unica (quando U e V sono assegnati su S). Il procedimento ora indicato consente di ottenere nel campo la funzione biarmouica F determinata sul contorno per mezzo delle sue derivate prime (o ciò che è lo stesso per mezzo della F stessa e della sua derivata normale). Esso si estende senza alcuna difficoltà al caso delle tre dimensioni (al quale già si riferisce la nota citata del LAURICELLA).

§ 5. Un primo apprezzamento qualitativo della distribuzione delle tensioni elastiche.

11. Dovremmo ora studiare come si distribuisce la sollecitazione elastica in un campo piano quando le forze esterne agiscono soltanto su una piccola zona σ_1 del suo contorno. Questo studio implica la ricerca di un valore maggiorante per la soluzione $\Theta(P')$ della equazione (21) (analogamente a quello che si è fatto al § 3 per la equazione (5)); poichè questa ricerca è ora meno semplice così è bene premettere una determinazione qualitativa.

Osserviamo dunque che se le componenti P_x, P_y sono minori di M in σ_1, nulle in $S - \sigma_1$ si ha in base alle (16):

$$U = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_S \begin{cases} \leq \dfrac{M\sigma_1}{2} & \text{in } \sigma_1 \\ = 0 & \text{in } S - \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

$$V = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_S \begin{cases} \leq \dfrac{M\sigma_1}{2} & \text{in } \sigma_1 \\ = 0 & \text{in } \sigma_2 . \end{cases}$$

Segue così che in σ_2 vale la diseguaglianza

$$\Lambda(P') \leq \frac{\pi}{4} \frac{M\sigma_1^2}{r_1^2} \tag{22}$$

dove si indichi con r_1 la distanza di P' da σ_1 [1].

D'altra parte è noto che se U e V sono continue e derivabili in S (e nel caso presente ciò è certo perchè U e V sono ottenute per integrazione da P_x e P_y) allora $\Lambda(P')$ esiste limitata in ogni punto del contorno. Poichè la diseguaglianza (23) può servire soltanto nei punti di σ_1 non vicinissimi a σ_1 includiamo in questa zona anche i punti di σ_2 la cui distanza r_1 da σ_1 soddisfi alla diseguaglianza

$$r_1 \leq \sqrt[2]{\sigma_1}$$

indichiamo quindi con σ_1' la zona così ampliata e con N un valore maggiorante a $\Lambda(P')$ in σ_1'. In ogni punto di S si conosce allora un valore maggiorante (limitato) per $\Lambda(P')$; questo valore è uguale ad N in σ_1' e minore di $\frac{\pi}{4} M\sigma_1$ in $S - \sigma_1'$.

Riprendiamo ora la equazione integrale

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial z_P} \Theta(P) dS = 2\Lambda(P') \tag{21}$$

$$\Lambda(P') \leq \begin{cases} N & \text{in } \sigma_1' \\ \frac{\pi}{4} M\sigma_1 & \text{in } S - \sigma_1' \end{cases}$$

ed osserviamo che la funzione $\Theta(P')$, soluzione di essa, si può scrivere certamente nella forma

$$\Theta(P') \leq 2N(P') + K(P')$$

dove

$N(P')$ è uguale ad N in σ_1' nullo in $S - \sigma_1'$

$K(P')$ è la soluzione che corrisponde a

$$\Lambda_1(P') \leq \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n} d\sigma_1' + \frac{\pi M \sigma_1}{4}.$$

---

[1] La (22) si ricava dalla (20) tenendo conto delle diseguaglianze che ho dimostrato nei miei lavori precedentemente citati (v. § 3) per le derivate di una funzione armonica in un campo convesso in due dimensioni. Infatti se F_1 è armonica, uguale a u in σ_1 nulla in σ_2 si ha $\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{\sigma_2} \leq \frac{\pi}{4} \frac{u}{r_1^2}$. Poichè la stessa diseguaglianza vale per $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ così è immediata la (22).

Poichè

$$\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P} \leq \frac{2\cos\varphi}{r}; \quad r = \overline{QP}, \quad \varphi = (\overline{PQ}, n_P),$$

segue

$$\Theta(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial n_P}\Theta(P)dS \leq \frac{2N}{\pi}\int_{\sigma_1'} \frac{\cos\varphi}{r}\, d\sigma_1' + \overline{K} \tag{23}$$

dove $\overline{K}$ è un numero maggiorante a $K(P')$ in tutto S.

12. Per valutare il significato di questa diseguaglianza cerchiamo di stabilire l'ordine di grandezza di N e di $\overline{K}$.

In σ_1 è

$$N = |\Lambda(P')|_{\max}; \quad \Lambda(P') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial n}\cos(n,\, x) + \frac{\partial F_2}{\partial n}\cos(n,\, y) + \frac{\partial F_1}{\partial S}\cos(S,\, x) + \frac{\partial F_2}{\partial S}\cos(S,\, y).$$

Ma è

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = P_y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial S} = -P_x$$

$$|P_x| \leq M \qquad |P_y| \leq M \qquad \cos(S,\, x) + \cos(S,\, y) < \sqrt{2}$$

sicchè segue

$$N < \left|\frac{\partial F_1}{\partial n}\right|_{\max} + \left|\frac{\partial F_2}{\partial n}\right|_{\max} + M\sqrt{2}. \tag{24}$$

I valori di $\frac{\partial F_1}{\partial n}$, $\frac{\partial F_2}{\partial n}$ dovranno essere valutati volta per volta; ciò che però si può fare facilmente.

13. Prima di passare alla ricerca di una limitazione per $\overline{K}$ vogliamo indicare un'altra valutazione approssimata del primo termine di Θ. Si osservi infatti che al posto di N, *valore massimo* di $\Lambda(P')$ in σ_1', si può porre addirittura la funzione $\Lambda(P')$ stessa, allora si ha

$$\Theta(Q) \leq \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1'} \Lambda(P)\frac{\partial G}{\partial n_P}\, d\sigma_1' + \overline{K}. \tag{23'}$$

Ora se Q è assai distante da P e se σ_1' è sufficientemente piccola, si può ritenere che $\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}$ sia costante in σ_1'; allora

$$\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1'} \Lambda(P)\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\, d\sigma_1' < \frac{2\cos\varphi}{\pi r}\int_{\sigma_1'} \Lambda(P)\, d\sigma_1'.$$

Ma è

$$\Lambda(P') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial n}\cos(n,\ x) + \frac{\partial F_1}{\partial n}\cos(n,\ y) +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial S}\cos(S,\ x) + \frac{\partial F_2}{\partial S}\cos(S,\ y)$$

e d'altra parte è

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial S}\, d\sigma_1' = \int P_y d\sigma_1' = 0$$

$$\int \frac{\partial F_2}{\partial S}\, d\sigma_1' = -\int P_x d\sigma_1' = 0$$

sicchè se

$$\cos(s,\ x) = \text{cost.}, \quad \cos(s,\ y) = \text{cost.}$$

resta

$$\int \Lambda(P) d\sigma_1' = \int_{\sigma_1'} \left(\frac{\partial F_1}{\partial n}\cos(n,\ x) + \frac{\partial F_2}{\partial n}\cos(n,\ y) \right) dS.$$

Ma si osserva subito che

$$\left| \int \frac{\partial F_1}{\partial n}\, d\sigma_1' \right| = \left| \int_{S-\sigma_1'} \frac{\partial F_1}{\partial n}\, dS \right| \leq \int_{S-\sigma_1'} \left| \frac{\partial F_1}{\partial n} \right| dS < \int_{S-\sigma_1'} |\Lambda(P)|\, dS < \frac{\pi M \sigma_1 l}{4}$$

dove l indica la lunghezza del contorno.

Essendo $\cos(n,\ x) + \cos(n,\ y) < \sqrt{2}$ segue *in un punto* Q *distante da* σ_1 e tale che si possa ritenere $\frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}$ costante per tutti i P di σ_1:

$$\Theta(Q) < \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}r} M\sigma_1 l + \overline{K} \tag{25}$$

dove, come si è già detto, $\overline{K}$ è la costante che corrisponde al massimo valore assunto dalla soluzione della equazione integrale corrispondente a

$$\overline{\Lambda(P')} \leq \frac{\pi M\sigma_1}{4} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P}\, d\sigma_1'.$$

Per approssimazione si può porre (in condizioni uguali a quelle più sopra specificate: cioè σ_1 molto piccola: $r_{PP'} \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \text{cost}$ quando P' sia fisso e P varii solo in σ_1'):

$$\overline{\Lambda(P')} \leq \frac{\pi M\sigma_1}{4} + \frac{\pi \cos(n_{P'},\ r)}{2r} \int_{\sigma_1'} N(P) d\sigma_1' =$$

$$= \frac{\pi M\sigma_1}{4} + \frac{\pi M\sigma_1 l}{2\sqrt{2}r}\cos(n_{P'},\ r).$$

La limitazione che ne risulta per $\Theta(Q)$ è assai più favorevole di quella precedentemente indicata. In essa l'unica costante da determinare è rappresentata dal valore di K comprendente $\Lambda(P')$ dato.

14. Vogliamo ora indicare, come nelle stesse condizioni ora specificate, si trovi facilmente anche una limitazione per le componenti di tensione. Consideriamo per esempio σ_y.

Si ha

$$\sigma_y\,|_Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_Q = \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_Q = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial^2 G_P^Q}{\partial x_Q \partial n_P}\, U(P)dS -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P}(\xi - x)\Theta(P)dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G_P^Q}{\partial n_P}\Theta(P)dS.$$

Ora in base alle limitazioni ottenute per le derivate di una funzione armonica è

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P}\, U(P)dS < \frac{\pi M \sigma_1^2}{8 r'^2}$$

perchè è $U(P) < \dfrac{M\sigma_1}{2}$ in σ_1, $U(P) = 0$ in σ_2.

Inoltre si ha

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial n}\Theta(P)dS = \frac{\Theta(Q)}{2}$$

sicchè resta da valutare il termine

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x_Q \partial n_P}(\xi - x)\Theta(P)dS.$$

A questo si possono sostituire i due termini

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n} N(P)(\xi - x)dS + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)\bar{K}dS;$$

ed è

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)KdS < \frac{K\pi}{8}\int_S \left|\frac{\cos(x, r)}{r}\right| dS$$

perchè

$$(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n} < \frac{\pi^2}{2}\frac{\cos(x, r)}{r}.$$

Valutiamo ora

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_1} N(P)(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}\, d\sigma_1 .$$

Si ha, supponendo al solito che $(\xi - x)\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial n_P}$ sia costante quando P varia in σ_1' e ricordando che

$$(\xi - x)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n_P} < \frac{\pi^2 \cos(x, r)}{2r}$$

$$\int_{\sigma_1'} N d\sigma_1' < \frac{\pi M \sigma_1 l}{2\sqrt{2}} :$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x) N(P) dS < \frac{\pi^2 M \sigma_1 l \cos(x, r)}{16\sqrt{2} r};$$

segue dunque in definitiva

$$\sigma_y\,|_Q < \frac{\pi M \sigma_1^2}{8 r^2} + \frac{\Theta(Q)}{2} + \frac{K\pi}{8}\int_S \left|\frac{\cos(x, r)}{r}\right| dS + \frac{\pi^2 M \sigma_1 l}{16\sqrt{2} r}\cos(x, r) \tag{26}$$

formula valida quando Q sia distante da σ_1 e σ_1 sia molto piccola. Anche qui l'unica costante che deve essere determinata è $\overline{K}$: una limitazione per essa sarà indicata nel paragrafo che segue.

§ 6. Un metodo per la soluzione approssimata della (21).

15. Si è accennato al numero precedente alla possibilità di assegnare un metodo abbastanza generale per la soluzione approssimata della (21). Il procedimento relativo sarà indicato in questo paragrafo.

Cominciamo col rilevare alcune proprietà di $r_{QP}\dfrac{\partial^2 G_P^Q}{\partial r \partial n_P}$. Ragionando in modo completamente eguale a quello del n.° 4 si ha:

a) che in un campo a due dimensioni

$$\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} dS = 2\pi$$

se S rappresenta una linea chiusa e P, P' sono due punti di essa.

b) che $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P}$ è sempre positiva (o nulla) sul contorno di un campo convesso.

c) che è

$$0 \leq r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{\cos(n_{P'}, r)}{r} \tag{27}$$

perchè $\dfrac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial n_{P'} \partial n_P}$ è massima quando la direzione x coincide con la direzione $n_{P'}$ e d'altra parte come ho dimostrato in altri lavori (v. n.° 4) è

$$0 < \frac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} \leq \frac{\pi^2}{2r^2} \text{ [1]}$$

nei campi convessi a due dimensioni.

16. Riprendiamo ora la equazione integrale

$$\Theta(P') + \frac{1}{2\pi} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} dS_P = 2\Lambda(P') \tag{21}$$

e vediamo di risolverla applicando ad essa il procedimento di NEUMANN per il problema di DIRICHLET.

Essendo identicamente

$$\Theta(P') = \frac{1}{2\pi} \int_S r \frac{\partial^2 G_P^{T'}}{\partial r \partial n_P} \Theta(P') dS$$

---

[1] Interessa rilevare che è sempre $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$. Infatti, dato il contorno S si considerino in esso due punti P e P' e sia U una funzione armonica uguale ad M in un intorno δ di P nulla nella rimanente parte di S; si ha allora

$$\frac{\partial U}{\partial n_{P'}} = \frac{M}{2\pi} \int_P \frac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} dS_{P'}$$

ed essendo δ piccolo a piacere $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P}$ continua regolare (P è distinto da P') se è $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}} > 0$ si deduce che anche $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$. Ora U è positiva in tutto il campo; nulla in $s - \delta$; $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}}$ è dunque positiva o nulla perchè P' è in $s - \delta$. Descriviamo un cerchio C interno al campo e tangente ad S in P; si può anche scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial n_{P'}} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial^2 G}{\partial n_P \partial n_Q} U(Q) ds$$

essendo Q i punti di C. Ma $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_Q}$ è nota nel cerchio e vale $\dfrac{2}{r^2}$; $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}}$ non può dunque essere nulla se $U(Q)$ (certo non negativa), non è nulla; e se $U(Q)$ fosse nulla su C (e quindi anche nell'interno) sarebbe nulla in tutto il campo. Dunque $\dfrac{\partial U}{\partial n_{P'}} > 0$ e quindi $\dfrac{\partial^2 G}{\partial n_{P'} \partial n_P} > 0$.

c. d. d.

si può scrivere la (21) nella forma

$$\Theta(P') + \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta(P) - \Theta(P') \} \, dS_P = \Lambda(P'). \tag{28}$$

Poniamo

$$\left\{ \begin{aligned} \Theta_0 &= \Lambda(P) \\ \Theta_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta_0(P') - \Theta_0(P) \} . dS_P \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Theta_n &= \frac{1}{4\pi}\int_S r \frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} \{ \Theta_{n-1}(P') - \Theta_{n-1}(P) \} \, dS_P . \end{aligned} \right. \tag{29}$$

La serie

$$\Theta_0 + \Theta_1 + \dots + \Theta_n + \dots \tag{30}$$

risolve formalmente) il problema posto. Vediamo ora se il procedimento è convergente.

Osserviamo intanto che posto

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(r \cdot \frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} - r \cdot \frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} \right) dS$$

dove C rappresenta una porzione qualunque del contorno risulta $|I| < 1$ qualunque siano i punti Q_1 e Q_2. Ed infatti i due termini sotto il segno sono ambedue *non* negativi in un campo convesso; e se C comprende tutto il contorno sono ambedue uguali a 2π e quindi $I = 0$. Se C comprende *soltanto* un tratto del contorno allora

$$\int_C r \frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r \partial n_P} dS_P$$

sarà *minore* di 2π a meno che la parte esclusa sia un segmento di retta essendo Q_1 su di essa. Ma in questo caso $\int_C r \frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r \partial n_P} dS$ sarebbe diverso da zero, qualunque sia la posizione di Q_2 su C. Resta così dimostrato l'asserto.

Consideriamo ora un campo tale che sia $|I| \leq h$ per ogni C' essendo h un numero inferiore all'unità. Questa ipotesi è necessaria perchè $I < 1$ potrebbe ammettere l'unità come limite superiore; nei campi ordinarii ciò non si verifica. Sia data dunque in un campo siffatto sul contorno S una funzione $f(S)$

positiva o nulla e si consideri l'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S f(S)\left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P}\right] dS.$$

Dividiamo S in due zone S_1 e S_2 tali che fissati i punti Q_1 e Q_2 sia in S_1

$$r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P} \geq r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P}$$

e in S_2

$$r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P} < r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P};$$

siano poi I_1 e I_2 gli integrali del tipo I estesi però ad S_1 o ad S_2.

È $I = I_1 + I_2$; ma I_1 e I_2 sono di segno opposto quindi $|I|$ è minore del più grande dei due numeri $|I_1|$ e $|I_2|$. Se L è il limite superiore di $f(S)$ in S risulta dunque

$$|I| < hL$$

qualunque siano i punti Q_1 e Q_2.

17. Ciò posto siano M ed m il massimo ed il minimo di $\Lambda(P')$ in S; se Q_1 e Q_2 sono due punti del contorno si può scrivere identicamente

$$\Theta_1(Q_1) - \Theta_1(Q_2) = \frac{1}{4\pi}\left[\Theta_0(Q_1)\int\limits_S r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P} dS - \Theta_0(Q_2)\int\limits_S r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P} dS\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \{\Theta_0(P) - m\}\left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P}\right] dS +$$

$$+\frac{m}{2\pi}\int\limits_S \left[r\frac{\partial^2 G_P^{Q_2}}{\partial r\partial n_P} - r\frac{\partial^2 G_P^{Q_1}}{\partial r\partial n_P}\right] dS.$$

In questa espressione l'ultimo termine del secondo membro è nullo e il primo termine vale

$$\frac{\Theta_0(Q_1) - \Theta_0(Q_2)}{2}$$

ed è quindi un valore assoluto minore di $\frac{M-m}{2}$. D'altra parte $\Theta_0(P) - m$ è compreso tra zero ed $M - m$ e quindi il secondo integrale del secondo membro vale al più $\frac{M-m}{2}h$.

Ne segue

$$|\Theta_0(Q_1) - \Theta_1(Q_2)| < (M - m)\left(\frac{1+h}{2}\right).$$

Posto $\rho = \frac{1+h}{2}$ segue $|\Theta_0(Q_1) - \Theta_0(Q_2)| < (M - m)\rho$.

Questa diseguaglianza vale qualunque siano i punti Q_1 e Q_2; perciò indicando con M_1 e m_1 il massimo e il minimo di Θ_1 si ha

$$M_1 - m_1 < (M - m)\rho.$$

Questa limitazione può essere proseguita per Θ_2, $\Theta_3, \ldots,$ $\Theta_n, \ldots$; si deduce

$$M_n - m_m < (M - m)\rho^n$$

e quindi per la (29)

$$\Theta_n(P') < \frac{M-m}{2}\rho^{n-1}$$

la serie (30) è dunque convergente; e la serie

$$\Lambda(P') + \frac{M-m}{2} + \ldots + \frac{M-m}{2}\rho^n + \ldots \tag{31}$$

è ad essa maggiorante; cioè la somma della serie (30) è minore od eguale (in valore assoluto) ad

$$M + \frac{M-m}{2}\frac{1}{1-\rho} \qquad (\text{se } M \geq |m|).$$

Una limitazione per $\Theta(P')$ si può dunque conoscere facilmente appena si conosca ρ (cioè h).

§ 7. Un esempio semplice: il cerchio.

18. Si è visto nei paragrafi precedenti in che modo si possa valutare la distribuzione delle tensioni elastiche; questo apprezzamento sarà ora svolto con un esempio completo nel caso semplice del contorno circolare.

In questo caso è

$$\frac{\partial^2 G_P^{P'}}{\partial r \partial n_P} = \frac{2}{r_{P'P}}$$

(P, P' sono punti del contorno); quindi

$$r_{P'P}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} = \frac{2\cos\varphi}{r} \qquad \varphi = (\widehat{\overline{PP'},n});$$

tenendo presente, che fissato l'arco S_1 è $\int_{S_1} \frac{\cos\varphi}{r} dS_1 = \text{cost}$ qualunque sia la posizione del punto P' si deduce subito (v. § 6) che è $h = 0$, quindi $\rho = \frac{1}{2}$.

Dalle relazioni del paragrafo precedente segue allora

$$\Theta(P') < 3 \,|\, \Lambda(P') \,|_{\max}$$

è quindi se poniamo

$$\Lambda_1 = \frac{\pi M \sigma_1}{4} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P') r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS$$

si trova

$$K < \frac{3\pi M \sigma_1}{4} + \frac{3}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS .$$

In questa espressione si calcola facilmente anche il secondo termine del secondo membro.

Osserviamo infatti che

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) r \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} dS = \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1'} N(P) \frac{\cos\varphi}{r} dS$$

e questa espressione è *costante* in tutti i punti della circonferenza S ed uguale alla metà del valore assunto dalla stessa espressione nel centro del cerchio. Ponendoci in questo punto si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1'} \frac{\cos\varphi}{r} N(P) dS = \frac{1}{\pi R} \int_{\sigma_1'} N(P') dS_1'$$

e quindi in definitiva si trova [v. formula (23)]:

$$\Theta(Q) < \frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1'} N \frac{\cos\varphi}{r} d\sigma_1' + \frac{3}{\pi R} \int_{\sigma_1'} N(P') d\sigma_1' + \frac{3\pi M \sigma_1}{4}$$

dove

$N(P')$ è uguale a $\Lambda(P')$ in σ_1'; uguale a zero in $S - \sigma_1'$.

Questa limitazione vale qualunque sia la posizione di Q e l'ampiezza di σ_1; in questo caso occorre ancora determinare $N(P)$ ciò chè si può fare senza difficoltà, quando si conoscano P_x e P_y sul contorno, ricordando che

$$N(P') \,|_{\sigma_1} < \left| \frac{\partial F_1}{\partial n} \right| \cos(n, x) + \left| \frac{\partial F_2}{\partial n} \right| \cos(n, y) + \sqrt{2} M$$

essendo

$$F_1 \,|_S = \int P_y dS, \quad F_2 \,|_S = \int P_x dS.$$

19. Giustifichiamo questa asserzione partendo dall'ipotesi che P_x, P_y siano continue e derivabili con derivata a variazione limitata. Calcoliamo allora, per esempio, $\frac{\partial F_1}{\partial n}$ essendo F_1 la funzione armonica che assume sul contorno i valori $U = \int P_y dS$; cioè calcoliamo la derivata normale della funzione armonica la cui derivata tangenziale assume i valori P_y. Se invece della F_1 si considera la funzione armonica ad essa coniugata (che indichiamo con $\bar{F}_1$) il problema viene invertito; noi conosceremo cioè la derivata normale P_y della $\bar{F}_1$ e dovremo invece calcolare la sua derivata tangenziale $\left(\text{uguale a } \frac{\partial F_1}{\partial n}\right)$. Sul cerchio avremo quindi

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \log r\, dS$$

perchè derivando in un punto del contorno si trova

$$\left.\frac{\overline{\partial F_1}}{\partial n}\right|_P = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\cos\psi}{r}\, dS + P_y \qquad \begin{array}{l}\psi = (\widehat{r,\, n_P})\\ r = \overline{PP'}\end{array}$$

e per l'equilibrio è

$$\int_S P_y \frac{\cos\psi}{r}\, dS = 0.$$

Osserviamo ora che si può togliere a $\bar{F}_1$ una costante qualunque e questa si può porre nella forma $\frac{1}{\pi}\int_S \bar{P}_y \log r\, dS$ essendo $\bar{P}_y$ costante; ne segue che se consideriamo la derivata $\frac{\partial F_1}{\partial S}$ nel punto P di S si può sempre supporre che P_y sia nulla in P. Si ha allora

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial S}\right|_P = \frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\partial \log r}{\partial S}\, dS$$

cioè integrando per parti

$$\frac{1}{\pi}\int_S P_y \frac{\partial \log r}{\partial S}\, dS = \frac{1}{\pi}\left[P_y \log r\right]_{S=0}^{2\pi R} - \frac{1}{\pi}\int_S P_y' \log r\, dS$$

e poichè al secondo membro la parte integrata è nulla segue

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = -\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} P_y' \log r\, d\sigma_1$$

poichè P_y' è nulla fuori di σ_1. L'integrale precedente si calcola senza difficoltà quando sia nota P_y'.

20. Risolto così nel cerchio il caso generale (corrispondente a Q in posizione arbitraria, σ_1 di ampiezza qualunque) consideriamo il caso di σ_1 molto piccola, Q sufficientemente distante da σ_1, in modo che fissato Q, si possa ritenere per P variabile in σ_1'

$$\frac{\cos\varphi}{r_{QP}} = \text{cost}, \quad r\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial n_P} = \text{cost}.$$

Si possono allora riprendere le limitazioni dei numeri 13 e 14; essendo

$$\bar{K} \leq \frac{3}{\pi R}\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1' + \frac{3\pi\lambda.\sigma_1}{4}$$

$\left(\text{con } \frac{3}{\pi R}\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1' = K_1 = \text{cost}\right)$ segue dalla (25) e dalla limitazione ottenuta per $\int_{\sigma_1'} N(P)d\sigma_1'$ allo stesso n.° 13:

$$\Theta(Q) < \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}r} M\sigma_1 l + \frac{3\pi M\sigma_1}{4} + \frac{3M\sigma_1 l}{\sqrt{2}R}$$

ed essendo

$$l = 2\pi R$$

resta

$$\Theta(Q) < M\sigma_1 \left\{ \frac{\sqrt{2}\pi R\cos\varphi}{r} + 3\sqrt{2}\pi + \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Si può ora valutare σ_y procedendo come al n.° 14. Perchè K_1 è costante così segue che

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial n}(\xi - x)K_1 dS = \frac{K_1}{2};$$

infatti il primo membro esprime la derivata rispetto ad x della funzione armonica che assume su S (e quindi in tutto il campo) il valore $(\xi - x)\frac{K_1}{2}$. Ne segue

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial G}{\partial x \partial n}(\xi - x)\bar{K}dS = \frac{K_1}{2} + \frac{3\pi^2 M\sigma_1}{32}\int_S \left|\frac{\cos(x, r)}{r}\right| dS$$

$$< \frac{3\pi M\sigma_1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi^2 M\sigma_1}{32}\int_S \left|\frac{\cos x, r}{r}\right| dS$$

e quindi

$$\sigma_y\,|_Q < \frac{\pi M\sigma_1^2}{8r^2} + \frac{\Theta(Q)}{2} + 3\pi M\sigma_1 \left\{ \frac{\pi}{32}\int\limits_S \left| \frac{\cos(x,\, r)}{r} \right| dS + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{\pi^3 M\sigma_1 R \cos(x,\, r)}{8\sqrt{2}\, r}.$$

Analoghe limitazioni si hanno per le altre componenti di tensione.

CONCLUSIONI

21. In conclusione i ragionamenti e le formule esposte nei numeri precedenti dimostrano completamente i teoremi enunciati al n.° 1. A proposito dei quali è opportuno porre in rilievo che le limitazioni date (pur essendo ottenute senza eccessive difficoltà analitiche) hanno carattere *quantitativo* (specialmente semplice se σ_1 è piccola e se il punto considerato dista da σ_1.

A me sembra però che l'interesse del risultato non stia solo nei teoremi dimostrati (che del resto, possono essere estesi anche ad altri campi della meccanica e specialmente della idrodinamica) ma sopra a tutto nel fatto che essi mostrano la possibilità di stabilire alcune proprietà generali in varii campi della fisica matematica, basandosi in diseguaglianze semplici relative alle funzioni armoniche e alle loro derivate. Questa idea (che mi ha spinto alla ricerca di quelle diseguaglianze) può essere applicata (in parte) anche in casi nei quali le equazioni che reggono il fenomeno *non* sono del tipo ellittico.