Problemi matematici dell'Aerodinamica transonica.

Memoria di FRANCESCO G. TRICOMI (a Torino)

A Giovanni Sansone nel suo 70° compleanno.

Sunto. - *Rapporto sui problemi indicati nel titolo (concernenti equazioni alle derivate parziali di tipo misto) che, in parte, non sono ancora soddisfacentemente risolti. In particolare si discorre della cosiddetta transonic controversy, cioè dell'esistenza o meno, in generale, di un flusso transonico regolare intorno ad un dato profilo.*

1. In questo scritto — che trova la sua origine nella mia collaborazione col Prof. CARLO FERRARI nella compilazione di una Monografia sull'Aerodinamica transonica, cioè sullo studio dei moti di fluidi comprimibili in cui si raggiunge e sorpassa la velocità del suono — mi propongo di dare un'idea di alcuni problemi matematici recentemente sorti in tale disciplina e che, in gran parte, non sono ancora soddisfacentemente risolti.

Al riguardo si può però osservare che, mentre in altri rami della Fisica matematica, p. es. nell'Elasticità, nell'Elettrologia e finanche in Idrodinamica, il ruolo della Matematica è stato prevalentemente quello delle truppe di retrovia, che sistemano e rendono sicuri territori già conquistati ⁽¹⁾; in Aerodinamica invece la nostra scienza è venuta a trovarsi in prima linea. Non deve quindi sorprendere se i risultati finora raggiunti non sono sempre del tutto soddisfacenti e se, in particolare, è tuttora aperta la cosiddetta *transonic controversy*, cioè l'incertezza sull'esistenza o meno di un flusso transonico regolare intorno ad un dato profilo.

2. Nel caso relativamente semplice del moto irrotazionale di un fluido perfetto, isoentropico e isoenergetico, in assenza di discontinuità (cioè di *onde d'urto* e simili) si ha il grande vantaggio che tutto si riduce alla determinazione di uno scalare φ , funzione delle coordinate spaziali x, y, z e del tempo t : il cosiddetto *potenziale cinetico*, le cui derivate $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ rispetto a x, y, z forniscono le componenti della velocità $\mathbf{v}$ della particella occupante il punto (x, y, z) al tempo t , cioè che è tale che $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Il guaio è però che

⁽¹⁾ Questo rende conto di alcuni giudizi scettici su tale ruolo, p. es. di alcune parole recentemente pronunciate da v. KÁRMÁN: « *I have had the experience that the mathematician may exactly prove existence and uniqueness of solutions in cases in which the answer is evident to the physicist or engineer for physical reasons* ». (*Solved and unsolved problems of high speed Aerodynamics*. — Polyt. Institute of Brooklyn, 1955; pp. 11 - 40).

l'equazione indefinita cui soddisfa questo potenziale cinetico è assai complicata e precisamente:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{xx}(\varphi_x^2 - a^2) + \varphi_{yy}(\varphi_y^2 - a^2) + \varphi_{zz}(\varphi_z^2 - a^2) + \varphi_{tt} + \\ + 2(\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_{yz}\varphi_y\varphi_z + \varphi_{zx}\varphi_z\varphi_x + \varphi_{xt}\varphi_x + \varphi_{yt}\varphi_y + \varphi_{zt}\varphi_z) = 0. \end{array} \right.$$

Per di più la quantità a che figura in quest'equazione alle derivate parziali di 2° ordine, non è una costante, bensì la velocità (locale) del suono nel fluido che si considera; velocità il cui quadrato coincide con la derivata della pressione p rispetto alla densità ρ , tratta dell'*equazione di stato* $p = f(\rho)$ del fluido stesso, che, nelle condizioni in cui ci siamo posti, può scriversi

$$(2) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

essendo p_0 e ρ_0 la pressione e la densità di *riposo* (cioè corrispondenti a $v = 0$) e γ il rapporto fra i due calori specifici del fluido (che, nel caso dell'aria, vale circa 1,41).

La complicazione della (1) ha fatto sì che gli studi teorici di Aerodinamica, specie transonica, si sono finora limitati essenzialmente al caso di moti *stazionari piani* o dotati di *simmetria assiale*, in cui ci si può ridurre a considerare due variabili indipendenti soltanto. Per esempio nel caso di *moti stazionari piani*, il potenziale cinetico φ può considerarsi dipendente da x e y soltanto e la (1) assume la più semplice forma:

$$(3) \quad (\varphi_x^2 - a^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (\varphi_y^2 - a^2)\varphi_{yy} = 0.$$

Quanto alla velocità del suono a essa dipende dalla velocità scalare

$$q^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$$

mediante la ben semplice equazione

$$(4) \quad a^2 = a_0^2 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)q^2$$

ove a_0 è una costante (velocità del suono nel fluido in riposo).

Per quanto la (3) sia molto meno repellente della (1) essa costituisce sempre un problema molto serio, soprattutto per due ragioni:

a) L'equazione non è lineare ma solo *semilineare* (lineare nelle derivate d'ordine più alto).

b) L'equazione è *di tipo misto*, cioè è di tipo ellittico in una parte del campo del moto e di tipo iperbolico in un'altra.

Invero, il discriminante D dal cui segno dipende il tipo, è dato dalla formula

$$D = (\varphi_x \varphi_y)^2 - (\varphi_x^2 - a^2)(\varphi_y^2 - a^2) = a^2(q^2 - a^2) = \frac{1}{2}(\gamma + 1)a^2\left(q^2 - \frac{2}{\gamma + 1}a_0^2\right)$$

che mostra come risulti $D < 0$ nel campo *subsonico*, cioè quando è $q < a$ ovvero (ciò che torna ad essere lo stesso) quando q è minore della *velocità critica*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} a_0;$$

mentre è invece $D > 0$ nel campo *supersonico*, cioè per $q > a$, ossia per $q > q^*$.

3. La prima delle due difficoltà suaccennate: la non-linearità dell'equazione (3), può venire eliminata, senza bisogno d'introdurre dubbie ipotesi semplificatrici, col passare dal « piano fisico » (x, y) al cosiddetto *piano odografico*, in cui le coordinate cartesiane sono le componenti $\varphi_x = \xi$ e $\varphi_y = \eta$ della velocità $\mathbf{v}$, e le coordinate polari sono la velocità scalare q e l'angolo θ che il vettore $\mathbf{v}$ forma con una direzione fissa, p. es. con quella dell'asse x .

Come presto vedremo, questo vuol dire pagare un « prezzo » assai alto per la linearizzazione, ma la trasformazione è formalmente semplice e si può anche compiere in due modi diversi: o servendosi della classica *trasformazione di LEGENDRE* — che consiste nell'assumere come variabili indipendenti ξ ed η e come funzione incognita $x\xi + y\eta - \varphi(x, y)$ — oppure, come generalmente si preferisce, operando la cosiddetta *trasformazione di MOLENBROCK-CHAPLIGYN* in cui la funzione incognita è invece la *funzione di corrente* $\psi(x, y)$ legata al potenziale cinetico dalle equazioni

$$(5) \quad \frac{\rho_0}{\rho} \psi_y = \varphi_x = q \cos \theta, \quad -\frac{\rho_0}{\rho} \psi_x = \varphi_y = q \sin \theta.$$

Scegliendo questa seconda via, con calcoli elementari se pur non semplicissimi ⁽²⁾, si giunge alla fondamentale equazione di CHAPLIGYN:

$$(6) \quad \boxed{K(\sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0},$$

dove σ è una variabile che rimpiazza q , a cui risulta legata dall'equazione

$$(7) \quad \sigma = - \int_{q^*}^q \frac{\rho}{\rho_0} \frac{dq}{q} = - \int_{q^*}^q \left(1 - \frac{q^2}{q_1^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{dq}{q}$$

⁽²⁾ All' uopo può vedersi: TRICOMI, *Equazioni a Derivate Parziali* (Roma, Cremonese, 1957) § 4.12.

essendo

$$q_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} q^* = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} a_0$$

la cosiddetta *velocità limite* del moto considerato (che non è mai oltrepassata da q), e dove $K(\sigma)$ è una ben determinata funzione (annullantesi semplicemente per $\sigma = 0$, cioè per $q = q^*$) la cui espressione per mezzo di q è la seguente

$$(8) \quad K(\sigma) = \left(1 - \frac{q^2}{q^{*2}}\right) \left(1 - \frac{q^2}{q_1^2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

L'espressione esplicita di $K(\sigma)$ per mezzo di σ è invece meno semplice (richiede l'intervento di funzioni ipergeometriche) ma si vede facilmente che, denotando con dei puntini dei termini almeno dell'ordine di σ^2 per $\sigma \rightarrow 0$, può porsi

$$(9) \quad K(\sigma) = c^3 \sigma + \dots \quad \text{con} \quad c^3 = 2 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma-1}}.$$

4. Da quanto sopra risulta che *nel campo transonico*, cioè per valori di q poco diversi dalla velocità critica q^* , ossia per piccoli valori di $|\sigma|$, trascurando i termini indicati con dei puntini nella (8) e ponendo altresì $c\sigma = \sigma_1$, l'equazione fondamentale dell'Aerodinamica assume la ben semplice forma

$$(10) \quad \sigma_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma_1^2} = 0.$$

Questo fatto è assai importante perchè la (10) è una delle pochissime equazioni di tipo misto che siano state finora approfonditamente studiate, e precisamente da chi scrive (dove il nome di «*equazione di TRICOMI*», con cui oggi viene generalmente designata) che ne iniziò lo studio fin dall'ormai lontano 1920, quale prototipo delle equazioni a derivate parziali di tipo misto, prima d'allora mai prese in considerazione.

Il principale contributo da me allora apportato, fu la dimostrazione che quello che ormai tutti chiamano «*problema di TRICOMI*» ha, in generale, una ed una sola soluzione.

Per comprendere di che si tratta giova anzitutto osservare che l'equazione (10), che, con notazioni più abituali in Analisi, può scriversi

$$(T) \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

è di tipo ellittico nel semipiano $y > 0$ e di tipo iperbolico nel semipiano $y < 0$, ove le sue *caratteristiche* sono le cubiche cuspidate:

$$(x - x_0)^2 + \frac{4}{9} y^3 = 0,$$

aventi l'andamento indicato nella fig. 1, in cui le caratteristiche di uno dei due sistemi sono punteggiate.

Fig. 1

Ciò premesso sia C un qualsiasi punto del *semipiano iperbolico* ($y < 0$) ed A e B i due punti in cui le due caratteristiche γ' e γ'' uscenti da C vanno

Fig. 2

a finire sull'asse x . D'altro lato sia γ una curva « qualsiasi » collegante fra loro A e B dalla parte del *semipiano ellittico* ($y > 0$).

Il *problema di TRICOMI* consiste nel determinare una soluzione dell'equazione T , « regolare » nel dominio D delimitato dalle curve γ , γ' e γ'' , assumente assegnati valori su γ e su *uno* dei due archi di caratteristica γ' e γ'' p. es. su γ' .

Naturalmente, non è qui possibile esporre le dimostrazioni dei relativi teoremi di unicità e di esistenza — che sono lunghe e difficili — ma è possibile ed opportuno indicare il concetto informativo della dimostrazione esistenziale, anche perchè esso suggerisce in modo spontaneo alcune possibili generalizzazioni del problema al contorno considerato, che hanno assunto molta importanza nella moderna Aerodinamica.

Tale concetto informativo consiste nell'osservazione che se, in un modo qualunque, si fosse venuti a conoscenza dei valori sull'asse x della soluzione $z(x, y)$ da determinarsi, cioè della funzione

$$\tau(x) = z(x, 0);$$

la determinazione di z — sia nella parte D_1 del dominio D al disopra dell'asse x , sia nella parte D_2 al disotto — potrebbe farsi nell'ambito della consueta teoria delle equazioni di tipo ellittico o rispettivamente iperbolico, salvo la difficoltà che, in entrambi i casi, il contorno del dominio da considerarsi contiene il segmento AB della « *linea parabolica* », cioè dell'asse x . In particolare, potranno così determinarsi i valori sul segmento AB della derivata normale $\partial z / \partial y$ che, per evitare confusioni, sarà bene indicare rispettivamente con $v_1(x)$ oppure con $v_2(x)$ secondochè risultano da calcoli effettuati nel semipiano ellittico o nel semipiano iperbolico. Ed è chiaro inoltre che tali funzioni — che verranno a dipendere, fra l'altro, da $\tau(x)$ — potranno considerarsi come dei *funzionali* (lineari) dipendenti da $\tau(x)$, cioè potrà scriversi, con noti simboli, che

$$v_1(x) = F_1[\tau(x)], \quad v_2(x) = F_2[\tau(x)].$$

Se i valori di $\tau(x)$ da cui siamo partiti fossero, diciamo così, *sbagliati*, non c'è ragione che debba venire $v_1(x) = v_2(x)$; ma se i valori di $\tau(x)$ sono invece i *giusti*, dovrà evidentemente essere $v_1(x) = v_2(x)$. Ne segue che potrà tentarsi di determinare l'incognita funzione $\tau(x)$ risolvendo l'equazione funzionale

$$(11) \quad F_1[\tau(x)] = F_2[\tau(x)].$$

Questa è, nelle sue grandi linee, la via per cui pervenni al teorema di esistenza, dopo aver superate una serie di difficoltà non solo di dettaglio, di cui la principale è che l'equazione funzionale (11) — in cui, veramente, è preferibile far comparire la funzione $v_1(x) = v_2(x) = v(x)$ in luogo della $\tau(x)$ —

risulta un'equazione integrale singolare contenente il valor principale (secondo CAUCHY) di un integrale improprio. Dovetti pertanto costruirmi, per quanto occorreva, una teoria di tali equazioni, indipendentemente da quello che simultaneamente stava facendo T. CARLEMAN, la cui fondamentale Memoria in argomento uscì quasi contemporaneamente (1922) alla mia Memoria lineare sulle equazioni di tipo misto ⁽³⁾.

Oggi vi sono diverse altre vie per giungere sia al teorema di unicità sia a quello di esistenza ⁽⁴⁾, ma quella più sopra accennata presenta, fra l'altro, il vantaggio di suggerire spontaneamente alcune possibili generalizzazioni del problema di TRICOMI.

Invero, mentre dal lato ellittico non c'è molto da generalizzare, è chiaro che, dal lato iperbolico, la condizione che la soluzione z debba assumere dati valori sull'arco di caratteristica γ' , potrà sostituirsi con altre, purchè queste altre condizioni assieme a quella che z assuma dati valori sul segmento AB , siano atte a determinare la soluzione in parola in tutto D_2 . Per esempio, si potranno assegnare i valori di z sui due archi di caratteristica AM e BN (fig. 3) determinati dalle caratteristiche KM e KN uscenti da un arbitrario

Fig. 3

punto K del segmento AB (*problema di GELLERSTEDT*), oppure sui due archi di curve « qualsiasi » $c' \equiv AM'$ e $c'' \equiv BN'$ (*problema di FRANKL*) purchè incontrate in un sol punto dalle caratteristiche di uno dei due sistemi.

⁽³⁾ Per la teoria di CARLEMAN può vedersi il Cap. IV delle mie *Integral Equations* (New York, Interscience, 1957; trad. italiana Torino, Gheroni, 1958).

⁽⁴⁾ Vedasi all'uopo la bella Monografia di L. BERS, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. (New York, Wiley, 1958).

Riguardo al problema di FRANKL, giova notare esplicitamente che, contrariamente a quel che potrebbe a prima vista supporre (pensando di far tendere il punto K ad A o a B), non è possibile chiudere la lacuna $M'N'$. Invero, anche per l'equazione di tipo iperbolico più semplice possibile:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

il problema di GOURSAT, cioè il problema di determinare una soluzione «regolare» dell'equazione assumendo assegnati valori su due curve «qualsiasi» Γ_1 e Γ_2 uscenti da un punto O , non è risolubile quando le due curve vanno a finire in un medesimo punto O' formando così un circuito chiuso.

5. Con le ultime considerazioni siamo già entrati nel vivo dei problemi matematici attuali dell'Aerodinamica transonica che, ad esempio, al recente Congresso Internazionale di Edinburgh (1958) si ebbe un'importante comunicazione (in russo) di W. A. BITZADSE sulla inevitabilità della lacuna nelle curve portanti i dati nel semipiano iperbolico.

Altre numerose ricerche riguardano invece varie generalizzazioni del problema di TRICOMI (oltre quella che conduce al problema di FRANKL) sia nel senso che, in luogo di supporre assegnati i valori su certe curve γ , γ' ... della soluzione da determinarsi, si suppongono assegnati ivi i valori di certe combinazioni delle sue derivate parziali prime; sia nel senso che, invece della (10), si considera l'equazione di CHAPLIGYN (9) o equazioni più vicine a questa della (10).

L'abbondanza di ricerche del genere, nonostante la grande difficoltà del soggetto, si spiega col fatto che si è appunto condotti ad un problema al contorno del genere suaccennato allorché, con l'ausilio del passaggio al piano odografico, si cerca di risolvere (se è possibile) il fondamentale problema di determinare un flusso transonico regolare attorno ad un assegnato profilo c del piano fisico, avente inoltre una determinata velocità (traslatoria) «all'infinito», cioè lontano dall'ostacolo.

L'accennata «*transonic controversy*» riguarda precisamente la risolubilità o meno del precedente problema, nel caso di un profilo «qualsiasi».

Alcuni recenti lavori, specialmente di C. MORAWETZ⁽⁵⁾, sembrerebbero dare una risposta negativa a questa controversia, in quanto mostrerebbero che il problema al contorno nel piano odografico non è risolubile se non quando le curve γ , c' , ... portanti i dati, soddisfano a certe condizioni fortemente

⁽⁵⁾ C. MORAWETZ, *On the non existence of continuous transonic flows past profiles*, I, II III. (Commun. Pure & Appl. Math. 9 (1956), 45-68; 10 (1957), 107-131; 11 (1958), 129-144) consultare anche la precitata Monografia di L. BERS che, fra l'altro, contiene una bibliografia di circa 400 numeri.

restrittive, dipendenti anche dalla velocità all'infinito del fluido. Sembra però a chi scrive (e anche a C. FERRARI) che risultati del genere vadano interpretati con molta circospezione.

All'uopo si consideri che le formule di passaggio dal piano fisico al piano odografico non sono note *a priori*, ma vanno determinate *a posteriori*, dopo risolto il problema al contorno nel secondo piano!

Non può pertanto senz'altro escludersi che tali formule — che risultano dipendenti dal profilo c assegnato nel piano fisico — possano cambiare un generico profilo c in speciali curve γ , c' ecc. del piano odografico. Per meglio spiegare questo pensiero con un esempio più semplice: è vero che una generica trasformazione conforme manda un generico dominio C in un generico dominio C' , ma la speciale trasformazione conforme (dipendente da C) la cui esistenza è assicurata dal ben noto teorema di RIEMANN manda sempre C in un *cerchio*!

L'opinione di chi scrive è che la *transonic controversy* potrà difficilmente venir chiusa se non si avrà il coraggio di affrontare direttamente la (3), nonostante il gravissimo ostacolo della sua non linearità, evitando così il passaggio al malfido piano odografico.

6. Le difficoltà suaccennate spiegano abbondantemente il fatto che la maggior parte dei risultati teorici concreti finora raggiunti in Aerodinamica transonica, sono stati raggiunti col cosiddetto *metodo indiretto*, cioè studiando i moti fluidi corrispondenti a determinate soluzioni particolari (o classi di soluzioni particolari) dell'equazione fondamentale, considerata generalmente sotto la forma T («*approssimazione di TRICOMI*»). Sono state così trovate, ad esempio, delle soluzioni fornenti delle soddisfacenti soluzioni di alcuni problemi transonici tecnicamente importanti, quali l'efflusso da un *ugello LAVAL*, il flusso transonico attorno ad un profilo a doppio cuneo, ecc. ⁽⁶⁾.

Il metodo indiretto sembra *a priori* molto semplice ed elementare. Tuttavia — a parte la speciale abilità di molti matematici nel rendere difficili anche le cose più semplici — accade spesso che esso conduca in un ginepraio di formule complicate, a causa principalmente del fatto che le più interessanti soluzioni particolari dell'equazione T si esprimono per mezzo di funzioni ipergeometriche gaussiane, le quali sono notoriamente un vero Proteo. Ciò è connesso essenzialmente con la circostanza che l'integrale generale della corrispondente equazione differenziale:

$$(12) \quad x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - ab y = 0$$

⁽⁶⁾ Il metodo indiretto (nonchè la linearizzazione approssimata dell'equazione fondamentale nel piano fisico) sono particolarmente considerati nella recente Monografia di K. C. GUDERLEY, *Theorie schallnaher Strömungen* (Berlin usw., Springer, 1957).

è suscettibile di svariatissime forme a causa dei famosi (o famigerati) 48 integrali particolari di KUMMER, di cui non è possibile limitarsi a considerare una coppia soltanto.

Invero, se col classico simbolo

$$(13) \quad F(a, b; c; x)$$

s'intende denotare — come generalmente si fa — la somma della serie ipergeometrica:

$$(14) \quad 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots;$$

esso non può legittimamente adoperarsi se non quando è $|x| < 1$, perchè il raggio di convergenza della precedente serie è appunto *uno*. Ne segue che, se la funzione y dovrà considerarsi fuori del cerchio unità, la si dovrà opportunamente *prolungare* per mezzo delle formule di BOLZA o in altro modo. Per esempio, nel cerchio $|x-1| < 1$ potrà adoperarsi la formula

$$y = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-x) + \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-x),$$

e così via.

Tale difficoltà può però eliminarsi se si conviene che il simbolo (13) non denoti la somma della serie (14), bensì l'intera *funzione analitica* (generalmente polidroma) il cui *elemento analitico* relativo all'origine è la serie (14). Cioè la serie (14) e tutte quelle che possono dedursi da essa col classico prolungamento analitico alla maniera di WEIERSTRASS.

Un altro utile accorgimento è d'introdurre accanto ad F un simbolo speciale, p. es.

$$\mathfrak{F}(a, b; c; x)$$

(con $\mathfrak{F}$ *calligrafico*) per denotare l'*integrale generale* della (12), cioè (supposto c non intero) la totalità delle funzioni rappresentate dalla formula

$$AF(a, b; c; x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x)$$

essendo A e B due costanti arbitrarie.

Per esempio, le importanti ma proteiformi *soluzioni di DARBOUX* (le *G-Lösungen* di GUDERLEY) possono così venir tutte contenute nelle 4

formule seguenti:

$$(15) \quad \begin{cases} z_1 = \rho^p \mathcal{F}(-p, p + 1/3; 2/3; (\rho - x)/2\rho) \\ z_2 = \rho^{-(p+1/3)} \mathcal{F}(-p, p + 1/3; 2/3; (\rho - x)/2\rho) \\ z_3 = y\rho^p \mathcal{F}(-p, p + 5/3; 4/3; (\rho - x)/2\rho) \\ z_4 = y\rho^{-(p+5/3)} \mathcal{F}(-p, p + 5/3; 4/3; (\rho - x)/2\rho) \end{cases}$$

dove p denota un numero qualsiasi e si è posto

$$\rho = +\sqrt{(x - x_0)^2 + \frac{4}{9}y^3}.$$

Vi sono però anche altre interessanti soluzioni ipergeometriche dell'equazione T non rientranti nelle (15), p. es. le cosiddette *soluzioni di FALKOWITSCH* che, con una lieve generalizzazione, possono scriversi

$$(16) \quad z = y^{1/4} (Ch\lambda)^{h-1/6} (Sh\lambda)^{1/6} \mathcal{F}\left(\frac{1}{12} - \frac{h}{2}, \frac{7}{12} - \frac{h}{2}; 1 - h; Ch^{-2}\lambda\right) \frac{\sin}{\cos}(h\mu)$$

dove h è una costante qualsiasi, Ch e Sh denotano funzioni iperboliche e λ e μ sono due nuove variabili indipendenti, legate alle precedenti x e y dell'equazione

$$(17) \quad \lambda + i\mu = \log \left[\frac{2}{3} (y^{3/2} + y_0^{3/2}) + ix \right] - \log \left[\frac{2}{3} (y^{3/2} - y_0^{3/2}) + ix \right].$$

Queste soluzioni originano dal fatto che il piuttosto complicato cambiamento di variabili (17) muta l'equazione T nella ben semplice equazione

$$(18) \quad Sh^2\lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} \right) + \frac{5}{36} u = 0,$$

ove u è una funzione legata in modo semplice alla precedente z .

Questa così semplice trasformata della T può anche utilizzarsi, come è stato mostrato da GERMAIN e LIGER ⁽⁷⁾ per ridurre (rigorosamente) all'equazione T un'equazione del tipo di CHAPLIGYN, con una funzione $K(\sigma)$ che, pur non essendo quella rigorosa, la approssima meglio (in un certo campo) della funzione lineare $c^3\sigma$.

(7) Vedasi la citata Monografia di BERS.

7. A prescindere dall'ora accennata ricerca di GERMAIN-LIGER, il solo tentativo finora compiuto di applicare il metodo indiretto ad un'equazione fondamentale approssimante meglio della T l'equazione di CHAPLIGYN è stato, a quanto mi consta, quello dei due aerodinamici giapponesi TOMOTIKA e TAMADA, che hanno posto a base di alcune loro ricerche l'equazione

$$(19) \quad (1 - y^2)z_{xx} + y^2z_{yy} + yz_y = 0$$

che è di tipo ellittico nell'interno della striscia $|y| < 1$ e di tipo iperbolico fuori.

L'equazione di TOMOTIKA e TAMADA è stata particolarmente considerata da S. NOCILLA ⁽⁸⁾ che l'ha, fra l'altro, utilizzata per lo studio delle ali « *a delta* ».

Il NOCILLA ha determinate le molto semplici soluzioni particolari della (19) che gli occorreavano con un metodo che — pur rappresentando un passo avanti rispetto a quello usato dai predecessori — era sempre molto faticoso e dava luogo ad alcune restrizioni non necessarie, perchè fondato su degli sviluppi in serie delle soluzioni da determinarsi secondo altre soluzioni particolari (contenenti funzioni di BESSEL) ottenibili applicando alla (19) il classico metodo della separazione delle variabili. Di recente ⁽⁹⁾ mi è stato possibile semplificare grandemente questo procedimento osservando che, col cambiamento di variabili

$$x = \operatorname{arctg} (\eta/\xi) - \eta + \text{cost.}, \quad y = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

(suggerito dalla forma delle soluzioni da determinarsi) l'equazione di TOMOTIKA e TAMADA poteva ridursi alla ben semplice forma

$$(20) \quad (1 - \xi)z_{\xi\xi} - 2\eta z_{\xi\eta} + (1 + \xi)z_{\eta\eta} - 2z_{\xi} = 0.$$

Quest'equazione — che è ellittica nell'interno del cerchio $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ed iperbolica fuori — ammette delle soluzioni della forma $z = f(\xi) + g(\eta)$ che praticamente contengono tutte quelle rivelatesi finora importanti. Precisamente con tale posizione si trovano le soluzioni particolari

$$(21) \quad z = a(\xi^2 + 4\xi + 3\eta^2) + b\eta + \frac{c}{1 - \xi} + d$$

dove a , b , c , e d denotano quattro costanti arbitrarie. Altre soluzioni notevoli si ricavano dalle precedenti con derivazioni e integrazioni.

⁽⁸⁾ Vedi varie sue Note negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino dal vol. 8, (1954-55) in poi.

⁽⁹⁾ TRICOMI, *Sull'equazione di Tomotika e Tamada*. Rend. Lincei (8) 25, 135-139 (1958).