Piani grafici a caratteristica 3.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze)

A Giovanni Sansone nel suo 70° compleanno.

Sunto. - *Si dimostra che un piano grafico finito di caratteristica 3 sopra un quasicorpo associativo d'ordine q^2 il cui centro sia un campo d'ordine $\geq q$ è necessariamente pascaliano, e che non esistono piani di* HUGHES *di caratteristica 3.*

Summary. - *It is proved: a) Any graphic finite plane of characteristic 3 on an associative near-field of order q^2 whose center is a field having order $\geq q$, is necessarily pascalian; b) There is no* HUGHES *plane of characteristic 3.*

Negli ultimi tempi, nella teoria dei piani grafici si è manifestato un certo interesse intorno ai cosidetti «piani a caratteristica». Ricordiamo (cfr. ad es. LOMBARDO-RADICE [5], pag. 55) che un piano grafico si dice *a caratteristica* quando esiste un intero positivo n tale che, nei sistemi di coordinate appartenenti a corpi ternari che si possono stabilire nel piano rispetto a tutti i possibili sistemi di riferimento, valga universalmente la relazione $na = 0$ (ove a è un qualunque elemento del corpo ternario, e con na si intende la somma di n addendi uguali ad a). Il più piccolo intero positivo n per cui valga la suddetta relazione dicesi *caratteristica* del piano.

Il caso di gran lunga più studiato è quello relativo alla caratteristica 2. I piani a caratteristica 2, come è noto, sono tutti e soli i piani in cui è universale *la configurazione di Fano*, in cui cioè ogni quadrangolo piano completo ha i punti diagonali allineati. Il più importante risultato sui piani a caratteristica 2 è dato dal bellissimo teorema di GLEASON [2] in base al quale ogni piano finito a caratteristica 2 è pascaliano.

Ancora poco si sa invece circa i piani a caratteristica > 2. Vanno segnalati, a tal fine, una nota di LOMBARDO-RADICE [4] ed una di DEMARIA [1]. Il LOMBARDO-RADICE ha provato che i piani a caratteristica 3 sono tutti e soli i piani in cui ogni quadrangolo genera un sottopiano isomorfo ad un piano (necessariamente desarguesiano) d'ordine 3 e ha stabilito alcune condizioni aritmetiche cui è sottoposto l'ordine di un piano finito a caratteristica 3. Il DEMARIA ha esteso il risultato di LOMBARDO-RADICE al caso di caratteristica qualunque, sotto l'ipotesi che nel piano sia verificata la cosidetta condizione dell'esagono, e ha dimostrato che l'ordine di un piano finito a caratteristica p è divisibile per p.

È probabile che, analogamente a ciò che succede nel caso della caratteristica 2, ogni piano finito di caratteristica 3 sia pascaliano. Conviene quindi indagare anzitutto se le categorie note di piani finiti non desarguesiani possano avere caratteristica 3. Il presente lavoro costituisce appunto un primo contributo a tale indagine. Si prendono in esame due categorie di piani finiti: i piani su quasicorpi associativi e i piani di Hughes. Ho provato che un piano finito di caratteristica 3 su un quasicorpo associativo d'ordine q^2 il cui centro sia un campo di ordine $\geq q$ è desarguesiano, quindi pascaliano, e che non esistono piani di Hughes di caratteristica 3. Le prove si basano sul fatto che in ambedue i casi, nel quasicorpo associativo cui appartengono le coordinate dei punti, sussiste la relazione $(1+t)\,t = t(1+t)$. Sarebbe interessante vedere se, come è probabile, dalla validità di questa relazione discenda sempre che il quasicorpo associativo è un campo: se così fosse, ogni piano di caratteristica 3 su un quasicorpo associativo risulterebbe pascaliano. Ma a tal fine sarebbe necessario approfondire la struttura dei quasicorpi associativi.

Notiamo infine che neppure i piani su quasicorpi di Hall possono avere caratteristica 3, perchè in essi (H. Neumann [6]) esistono quadrangoli coi punti diagonali allineati, cioè generanti un piano su $GF(2)$, anzichè su $GF(3)$.

1. In questo n. determiniamo alcune proprietà, utili per il seguito, dei quasicorpi associativi in cui valga universalmente la relazione:

$$(t+1)t = t(t+1). \tag{1}$$

Si ha anzitutto:

1.1. *Se ogni elemento t di un quasicorpo associativo Q verifica la* (1), *e a, b, c sono elementi di Q tali che $a+b+c=0$, $ab=ba$, $ac=ca$, si ha anche $bc=cb$.*

Se è $a=0$, la cosa è ovvia; se poi è $a\neq 0$, si ha, in base alla (1):

$$cb = (-a-b)b = -(a+b)b = -a(1+a^{-1}b)b = -a(1+a^{-1}b)a^{-1}ba =$$

$$= -a(a^{-1}b)(1+a^{-1}b)a = -b(1+a^{-1}b)a = -ba^{-1}a(1+a^{-1}b)a =$$

$$= -ba^{-1}(a+b)a = ba^{-1}(-a-b)a = ba^{-1}ca = ba^{-1}ac = bc.$$

Si ha ancora che:

1.2. *Se Q è un quasicorpo associativo in cui ogni elemento t verifica la* (1), *ed inoltre u è un elemento di Q e a, b sono elementi del centro di Q, si ha*

$$(a+bu)u = u(a+bu).$$

Se è $a=0$ o $b=0$, la cosa è ovvia; se poi è $a\neq 0$, $b\neq 0$, si ha, posto $t=a^{-1}\,bu$, tenuto conto della (1):

$$(a+bu)u=a(1+a^{-1}bu)u=a(1+a^{-1}bu)a^{-1}bub^{-1}a=$$
$$=a(1+t)tb^{-1}a=at(1+t)b^{-1}a=aa^{-1}bu(1+a^{-1}bu)b^{-1}a=$$
$$=aa^{-1}bb^{-1}au(1+a^{-1}bu)=au(1+a^{-1}bu)=u(a+bu).$$

Abbiamo ora che:

1.3. *Se ogni elemento t di un quasicorpo associativo Q verifica la* (1) *e se esiste in Q un elemento fisso u tale che ogni elemento di Q possa esprimersi nella forma $a+bu$, con a e b nel centro di Q, si ha che Q è un campo.*

Poichè in un quasicorpo associativo sussistono tutte le proprietà formali dei campi ad eccezione, al più, della proprietà distributiva sinistra e della proprietà commutativa del prodotto, per provare che Q è un campo basterà far vedere che in Q vale la proprietà commutativa del prodotto: infatti da quest'ultima e dalla proprietà distributiva destra discende la proprietà distributiva sinistra.

Se x e y son due elementi qualunque di Q, si avrà, per ipotesi $x=a_1+b_1u$, $y=a_2+b_2u$, con a_1, b_1, a_2, b_2 convenienti elementi del centro di Q.

Si avrà allora, tenuto conto di 1.2:

$$xy=(a_1+b_1u)(a_2+b_2u)=(a_1+b_1u)a_2+(a_1+b_1u)b_2u=a_2(a_1+b_1u)+$$
$$+b_2u(a_1+b_1u)=a_1a_2+a_2b_1u+b_2a_1u+b_1b_2u^2=a_1(a_2+b_2u)+b_1u(a_2+b_2u)=$$
$$=(a_2+b_2u)a_1+(a_2+b_2u)b_1u=(a_2+b_2u)(a_1+b_1u)=yx.$$

Pertanto in Q vale la proprietà commutativa del prodotto, onde Q è un campo.

In particolare si ha:

1.4. *Se nel quasicorpo associativo finito Q d'ordine q^2 ogni elemento verifica la* (1), *e se il centro C di Q è un campo d'ordine $\geq q$, Q è un campo.*

Si proceda per assurdo, supponendo che Q non sia un campo. Esisterà allora un elemento u di Q non contenuto in C. Notiamo anzitutto che può aversi $a_1+b_1u=a_2+b_2\,u$, con a_1, b_1, a_2, b_2 in C, se e solo se $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Infatti, da $a_1+b_1u=a_2+b_2u$, segue $a_1-a_2=b_2u-b_1u=ub_2-ub_1=$ $=u(b_2-b_1)$. Se fosse $b_2\neq b_1$ sarebbe $u=(a_1-a_2)(b_2-b_1)^{-1}$, onde essendo C per ipotesi un campo, anche u sarebbe in C al pari di a_1-a_2 e b_2-b_1, il che è contro l'ipotesi su u. Ne segue che è $b_1=b_2$, e di conseguenza $a_1=a_2$. Pertanto, essendo l'ordine di $C\geq q$, il numero degli elementi distinti di Q che si possono esprimere nella forma $a+bu$, con a e b in C, è $\geq q^2$. Poichè l'ordine di Q vale q^2, si ha che ogni elemento di Q può esprimersi nella forma $a + bu$, con a e b in C. In base ad 1.3 si ha allora che, poichè ogni elemento t di Q verifica la (1), Q è un campo.

2. Sia π un piano di caratteristica 3 sopra un quasicorpo associativo Q diverso dal campo di GALOIS $GF(3)$. È noto (LOMBARDO-RADICE [4]) che ogni quadrangolo non degenere in π genera un sottopiano isomorfo al piano sopra $GF(3)$. Inoltre, essendo Q a caratteristica 3, comunque si prenda un elemento $a \in Q$, è $3a = 0$, onde $2a = -a$. Poichè Q non coincide con $GF(3)$, in Q c'è un elemento $v \neq 0, 1, -1$.

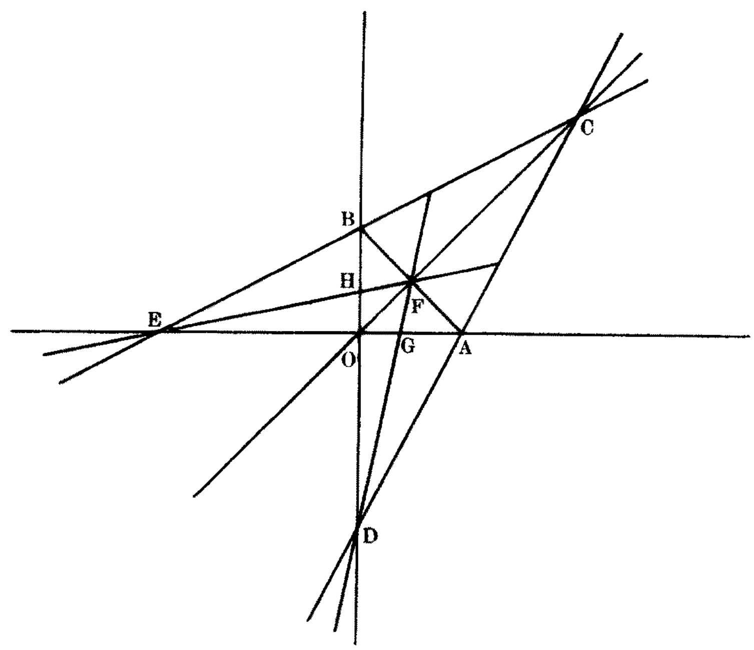

Fig. 1

Si consideri in π (fig. 1) il quadrangolo di vertici $0 \equiv (0, 0)$, $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (0, 1)$, $C \equiv (v, v)$. Le rette AC, BC, AB ed OC hanno pertanto le equazioni seguenti:

$$AC) \quad y = v(v-1)^{-1}x - v(v-1)^{-1}$$

$$BC) \quad y = (v-1)v^{-1}x + 1$$

$$AB) \quad y = -x + 1$$

$$OC) \quad y = x.$$

Di conseguenza, detti: D il punto comune alle rette AC ed OB; E il punto comune alle rette OA e BC; F il punto comune alle rette OC ed AB, si ha

$D \equiv (0, -v(v-1)^{-1})$, $E \equiv (-v(v-1)^{-1}, 0)$, $F \equiv (-1, -1)$. Per le rette DF ed EF si hanno allora le seguenti equazioni:

$$DF) \quad y = [1 - v(v-1)^{-1}]x - v(v-1)^{-1}$$

$$EF) \quad y = [1 - v(v-1)^{-1}]^{-1}x + [(v-1)v^{-1} - 1)]^{-1}.$$

Chiamati rispettivamente: G il punto comune a DF ed OA; H il punto comune a EF ed OB, si ha $G \equiv ([(v-1)v^{-1} - 1]^{-1}, 0)$, $H = (0, [(v-1)v^{-1} - 1]^{-1})$. Di conseguenza l'equazione della retta HG diviene

$$HG) \quad y = -x + [(v-1)v^{-1} - 1]^{-1}.$$

Essendo il sottopiano generato da O, A, B, C isomorfo al piano su $GF(3)$, la retta HG dovrà contenere il punto $C = (v, v)$. Dovrà quindi aversi

$$v = -v + [(v-1)v^{-1} - 1]^{-1}$$

cioè

$$v = [1 - (v-1)v^{-1}]^{-1}$$

$$1 - (v-1)v^{-1} = v^{-1}$$

$$(v-1)v^{-1} = 1 - v^{-1}.$$

Ma è, in base alla proprietà distributiva destra

$$v^{-1}(v-1) = 1 - v^{-1}.$$

Dovrà dunque aversi

$$(v-1)v^{-1} = v^{-1}(v-1)$$

da cui

$$v(v-1) = (v-1)v. \tag{2}$$

Posto $v - 1 = t$, si ottiene

$$(t+1)t = t(t+1). \tag{3}$$

La (2) è stata provata per qualunque $v \neq 0, 1, -1$, onde la (3) sussiste per qualunque $t \neq -1, 0, 1$. Ma essa vale evidentemente anche per $t = 0, 1, -1$. Possiamo quindi concludere affermando che:

2.1. *Se π è un piano a caratteristica 3 sopra un quasicorpo associativo Q, ogni elemento t di Q verifica la* (1).

Un piano finito a caratteristica 3 ha per ordine una potenza di 3. Da 1.4 e 2.1 discende:

2.2. TEOREMA. - *Se π è un piano a caratteristica 3 sopra un quasicorpo associativo finito Q d'ordine q^2 $(q = 3^l)$ il cui centro sia un campo d'ordine $\geq q$, π è pascaliano* (ossia Q è un campo).

L'interesse del teorema consiste nel fatto che (ZASSENHAUS [9]) tutti i quasicorpi associativi finiti d'ordine potenza di 3 sono del tipo indicato da ZASSENHAUS col simbolo $K_{p^l, n}$, con $p = 3$, vale a dire hanno ordine 3^{ln}, e centro costituito da un campo d'ordine 3^l. Il teorema 2.2 dice in sostanza che, almeno per $n = 2$, il piano su di un tale quasicorpo non può essere a caratteristica 3.

3. Vogliamo ora dimostrare che non esistono piani di HUGHES (v. HUGHES [3], ZAPPA [8], ROSATI [7]) di caratteristica 3. A tal fine, giungiamo anzitutto ad una rappresentazione delle rette di un tale piano che differisce lievemente da quella originaria di HUGHES, e si presenta più utile ai nostri scopi.

Ricordiamo che i punti di un piano di HUGHES π son dati dalle terne ordinate (x, y, z) di elementi non tutti nulli di un quasicorpo associativo finito Q d'ordine q^2 $(q = p^t$ con p primo, $t \geq 1)$, il cui centro sia un campo di GALOIS Q_0 d'ordine q, con l'equivalenza $(x, y, z) = (kx, ky, kz)$ per ogni $k \neq 0$ in Q. Ogni retta di π può rappresentarsi (HUGHES [3]) mediante un'equazione della forma

$$a_1x + b_1y + c_1z + (a_2x + b_2y + c_2z)t = 0 \tag{4}$$

con a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 in Q_0 e t in Q. Mostriamo ora che (come del resto è stato visto anche da ROSATI in [7]), ogni equazione della forma (4) che non sia identicamente soddisfatta, rappresenta una retta di π_0. Infatti, se t è in Q_0, la (4) rappresenta una retta del piano π_0 su Q_0 ed è noto (HUGHES [3]) che una tal retta, completata dai punti di π non in π_0 le cui coordinate verificano la sua equazione, dà luogo ad una retta di π. Se poi t non è in Q_0, si distinguono tre casi:

(*a*) $a_1b_2 - a_2b_1 = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$. Si possono trovare allora due elementi non ambedue nulli, λ_1, λ_2 di Q_0 tali che $\lambda_1a_1 = \lambda_2a_2$, $\lambda_1b_1 = \lambda_2b_2$, $\lambda_1c_1 = \lambda_2c_2$. Supposto, per fissare le idee, $\lambda_1 \neq 0$, si ha che la (4) risulta equivalente all'equazione $(\lambda_2 + \lambda_1t)(a_1x + b_1y + c_1z) = 0$, cioè all'equazione $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, la quale, se non è identicamente soddisfatta, rappresenta una retta di π_0, quindi anche di π.

(*b*) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$. Allora la sostituzione

$$\rho x' = x$$

$$\rho y' = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$\rho z' = (a_1 - 1)x + b_1y + c_1z$$

la quale, essendo a determinante $\neq 0$, rappresenta una collineazione di π (ZAPPA [8]), trasforma il luogo dei punti verificanti la (4) in quello dei punti verificanti l'equazione $x' + y't + z' = 0$, la quale (HUGHES [3]) rappresenta una retta. Pertanto anche la (4) rappresenta una retta.

(c) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Allora, facendo ricorso alla sostituzione

$$\rho x' = a_1x + b_1y + (c_1 - 1)z$$

$$\rho y' = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$\rho z' = z$$

che in tal caso è a determinante $\neq 0$, e ragionando come nel caso (b), si dimostra che la (4) rappresenta una retta.

È noto (HUGHES [3]) che ogni retta di π che non sia anche retta di π_0 contiene uno ed un solo punto di π_0. Prese due rette distinte di π_0, passanti per un medesimo punto P, e aventi rispettivamente equazioni $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 in Q_0) la retta r di π di equazione

$$a_1x + b_1y + c_1z + (a_2x + b_2y + c_2z)t = 0$$

descrive, al variare di t in Q, il fascio di rette di π di centro P. Se è $P = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$, si può scrivere l'equazione di r nella forma

$$z_0x - x_0z + (z_0y - y_0z)t = 0;$$

se è $z_0 = 0$ e $x_0 \neq 0$, nella forma

$$x_0y - y_0x + x_0zt = 0;$$

se è $z_0 = x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, nella forma

$$x + zt = 0.$$

4. Per provare che non esistono piani di HUGHES di caratteristica 3, procediamo per assurdo, e supponiamo che esista un piano di tal tipo: sia esso π. I punti di π saranno rappresentati (n. prec.) da terne ordinate di elementi di un quasicorpo associativo Q d'ordine 3^{2s} ($s \geq 1$) contenente un campo di GALOIS Q_0 d'ordine 3^s. Si consideri il sottopiano $\bar{\pi}$ di π generato dai punti $0 = (0, 0, 1)$, $X = (1, 0, 0)$, $Y = (0, 1, 0)$, $P = (1 + t, 1 + t^{-1}, 1)$, ove t indica un qualunque elemento di Q non contenuto in Q_0. Sarà ovviamente $1 + t \neq 0$, $1 + t^{-1} \neq 0$, onde il quadrangolo O, X, Y, P non è degenere, e pertanto $\bar{\pi}$ è anch'esso non degenere. Essendo π di caratteristica 3, $\bar{\pi}$ dovrà

essere isomorfo ad un piano su $GF(3)$. Dette (fig. 2) M l'intersezione di OY e PX, ed N quelle di OX e PY, si ha $M \equiv (0, 1+t^{-1}, 1)$, $N \equiv (1+t, 0, 1)$. Le rette sottoindicate hanno poi le equazioni scritte a fianco:

$$OX) \quad y = 0$$

$$OY) \quad x = 0$$

$$PX) \quad y - z(1+t^{-1}) = 0$$

$$PY) \quad x - z(1+t) = 0$$

$$XY) \quad z = 0$$

$$OP) \quad y - x(1+t)^{-1}(1+t^{-1}) = 0$$

$$MN) \quad x - z + (y-z)t = 0.$$

Siano ora: S il punto comune ad MN e OP; A il punto comune ad SY ed MX; B il punto comune ad SX ed NY; Z il punto comune ad

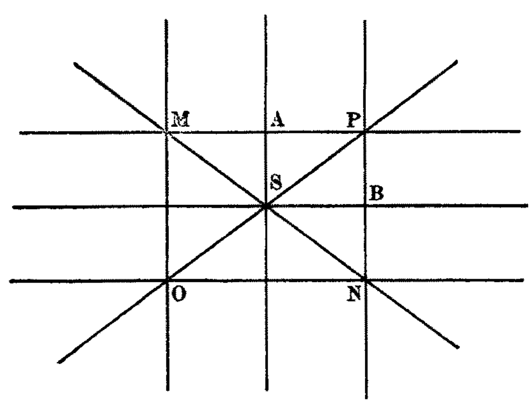

Fig. 2

MN ed XY. Essendo detti punti in $\bar{\pi}$ ed essendo $\bar{\pi}$ isomorfo ad un piano su $GF(3)$, i punti O, Z, A, B dovranno essere allineati. Orbene, si ha $Z \equiv (t, -1, 0)$, onde la retta OZ ha equazione

$$OZ) \quad x + yt = 0.$$

Dovendo A essere comune alle rette OZ e PX, per determinarne le coordinate basterà risolvere il sistema formato dalle equazioni

$$x + yt = 0$$

$$y = 1 + t^{-1}$$

la seconda delle quali si è ottenuta dall'equazione di PX ponendovi $z = 1$

(come è lecito, perchè evidentemente Z è distinto da X, onde A ha la terza coordinata diversa da zero). Si ottiene $x = -(1+t^{-1})t$, e pertanto $A \equiv (-(1+t^{-1})t,\ 1+t^{-1},\ 1)$. In modo analogo si trova $B \equiv (1+t,\ -(1+t)t^{-1},\ 1)$. Sarà di conseguenza

$$S \equiv (-(1+t^{-1})t,\ -(1+t)t^{-1},\ 1).$$

Dovendo S appartenere ad MN, dovrà aversi

$$-(1+t^{-1})t - 1 + [-(1+t)t^{-1} - 1]t = 0 \tag{5}$$

e dovendo S appartenere anche ad OP, dovrà aversi

$$-(1+t)t^{-1} = -(1+t^{-1})t(1+t)^{-1}(1+t^{-1})$$

vale a dire

$$(1+t^{-1})t(1+t)^{-1}(1+t^{-1})t(1+t)^{-1} = 1$$

$$[(1+t^{-1})t(1+t)^{-1}]^2 = 1\,.$$

Ma ciò comporta che sia

$$(1+t^{-1})t(1+t)^{-1} = \pm 1. \tag{6}$$

Infatti, se in un quasicorpo associativo un elemento h verifica la relazione $h^2 = 1$, si ha $h(1+h) = h + h^2 = h + 1 = 1 + h$, il che, se $1 + h \neq 0$, fornisce $h = 1$, mentre, se $1 + h = 0$, fornisce $h = -1$.

Dalla (6) si ricava

$$(1+t^{-1})t = \pm(1+t)\,. \tag{7}$$

Supponiamo in un primo tempo si abbia

$$(1+t^{-1})t = -(1+t)\,. \tag{8}$$

Sarà allora anche

$$-(1+t)t^{-1} = 1 + t^{-1}. \tag{9}$$

Sostituendo nella (5) al posto di $(1+t^{-1})t$ e di $-(1+t)t^{-1}$ i valori forniti dalle (8) e (9), si ottiene

$$1 + t - 1 - (1 + t^{-1} - 1)t = 0$$

cioè $t + 1 = 0$, il che è assurdo, poichè per ipotesi t non è in Q. Al secondo membro della (7) dovrà allora valere il segno $+$, onde

$$(1+t^{-1})t = 1 + t$$

ossia

$$(1+t)t^{-1} = 1 + t^{-1}.$$

Avendosi d'altra parte

$$t^{-1}(1+t) = 1 + t^{-1}$$

sarà

$$(1+t)t^{-1} = t^{-1}(1+t)$$

cioè

$$t(1+t) = (1+t)t$$

vale a dire, la (1). Essa è stata dimostrata per qualunque t in Q, che non sia in Q_0, ma vale evidentemente anche per ogni t in Q_0.

In base ad (1.4), si ha allora che Q è un campo, mentre, essendo π un piano di HUGHES d'ordine q^2, il centro di Q deve avere ordine q. Si giunge pertanto ad un assurdo, onde risulta falsa l'ipotesi che esistano piani di HUGHES di caratteristica 3. Concludendo:

4.1. TEOREMA. - *Non esistono piani di Hughes di caratteristica 3.*

BIBLIOGRAFIA

[1] D. C. DEMARIA, *Sui piani grafici esagonali a caratteristica p.*, « Rend. Sem. Mat. Torino », 18 (1959).

[2] A. M. GLEASON, *Finite Fano planes*, « Amer. J. of Math. », 78 (1956), 797-807.

[3] D. R. HUGHES, *A class of non-Desarguesian projective planes*, « Canadian J. of Math. », 9 (1957), 378-388.

[4] L. LOMBARDO-RADICE, *Sul rango dei piani grafici a caratteristica* 3, « Boll. U. M. I. », 10 (1955), 172-177.

[5] L. LOMBARDO-RADICE, *Piani grafici finiti non-desarguesiani*, Ed. Denaro, Palermo, 1959.

[6] H. NEUMANN, *On some finite non-desarguesian planes*, « Arch. der Math. », 6 (1954), 5-40.

[7] L. A. ROSATI, *I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, « Boll. U. M. I. », 13 (1958), 505-513.

[8] G. ZAPPA, *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, « Boll. U. M. I. », 12 (1957), 507-516.

[9] H. ZASSENHAUS, *Ueber endliche Fastkörper*, « Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg », 8 (1936), 123-147.