Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica.

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pavia)

A Giovanni Sansone nel suo 70^{mo} compleanno.

Sunto. - Mediante la semicontinuità l'A. perviene a teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per problemi variazionali relativi a integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine non superiore al terzo. I risultati raggiunti provano l'efficacia dell'impostazione che l'A. ha dato a tali problemi in una Memoria recentemente pubblicata nei Rend. del Circolo Matematico di Palermo, e al tempo stesso pongono in luce sia differenze tra il problema del terzo ordine e quello del secondo ordine, sia, per questo ultimo problema, diversità tra gli integrali curvilinei dello spazio e quelli del piano, di cui l'A. si era occupato alcuni anni fa.

La presente Memoria fa seguito a un nostro recentissimo lavoro ⁽¹⁾, nel quale abbiamo stabilito i fondamenti della teoria dei problemi variazionali relativi a integrali curvilinei dello spazio in forma parametrica dipendenti da elementi differenziali di ordine superiore, in modo che l'integrale

$$\int_C \Phi(x, y, z; x', y', z'; \dots; x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) dt$$

esteso alla curva

$$C: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

risulti indipendente dal parametro t . Vale a dire, siccome nella Geometria differenziale delle curve dello spazio intervengono le derivate di ordine non superiore al terzo, abbiamo rivolto la nostra attenzione ai casi $n = 2$, $n = 3$, scegliendo (dopo un esame particolarmente profondo del caso $n = 3$) la seguente impostazione: La funzione integranda per $n = 2$ deve dipendere dalle coordinate del punto, dalle loro derivate del primo ordine x' , y' , z' e dalle espressioni $\frac{\lambda}{R}$, $\frac{\mu}{R}$, $\frac{\nu}{R}$ (ove λ , μ , ν sono i coseni direttori della binormale e $\frac{1}{R}$ è la flessione), mentre nel caso $n = 3$ essa deve dipendere anche dalle derivate (rispetto all'arco rettificato) $\frac{d}{ds} \frac{\lambda}{R}$, $\frac{d}{ds} \frac{\mu}{R}$, $\frac{d}{ds} \frac{\nu}{R}$; inoltre in entrambi i casi si richiede per la funzione integranda la ben nota ipotesi che essa sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x' , y' , z' .

⁽¹⁾ S. CINQUINI, *Sopra i fondamenti di una classe di problemi variazionali dello spazio*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », S. II, T. VI (1957), pp. 271-88.

In definitiva, scelto come parametro l'arco rettificato s , e ferma restando per quanto concerne x', y', z' l'ipotesi ora ricordata, gli integrali curvilinei in questione hanno assunto la seguente forma più semplice

$$\mathcal{J}^{(2)} = \int_C F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) ds,$$

con

$$u_2 = x'y'' - x''y', \quad v_2 = y'z'' - y''z', \quad w_2 = z'x'' - z''x',$$

e

$$\mathcal{J}^{(3)} = \int_C F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) ds$$

con

$$u_3 = x'y''' - x'''y', \quad v_3 = y'z''' - y'''z', \quad w_3 = z'x''' - z'''x',$$

ove si intende che tutte le derivate sono calcolate rispetto a s .

Le presenti pagine si propongono di mostrare che tale nostra impostazione permette, mediante il noto metodo diretto di L. TONELLI basato sul concetto di semicontinuità, di pervenire a teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali in questione. A tal uopo noi consideriamo la classe delle curve

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

per le quali le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ sono assolutamente continue assieme alle loro derivate dei primi $n-1$ ordini ed esiste finito l'integrale (di LEBESGUE) $\mathcal{J}^{(n)}$.

La natura del problema e i risultati raggiunti nei casi $n=2$, $n=3$ presentano alcune proprie rispettive caratteristiche e pertanto, per desiderio di chiarezza, abbiamo preferito svolgere separatamente le due trattazioni, facendole precedere dalle rispettive generalità, le quali, come è ben noto, sono indispensabili in ogni questione esistenziale. In tal modo emergono sia le differenze tra i casi $n=3$ e $n=2$, sia per $n=2$ qualche diversità tra gli integrali curvilinei dello spazio e quelli del piano, dei quali ci eravamo occupati alcuni anni fa e sui quali siamo ritornati anche recentemente ⁽²⁾.

Per $n=2$ nel più elementare teorema di continuità (Cap. I, n. 8) spicca l'ipotesi (11), vale a dire si considera una classe di curve per le quali l'integrale della flessione è inferiore a un numero fisso, ma il semplicissimo

⁽²⁾ Ci limitiamo a citare la seguente Memoria, cui nel seguito faremo riferimento: S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. XIII (1944) [1947], pp. 19-49.

Altri lavori sono apparsi nei citati Annali: vol. XIV (1945) [1948] e S. III vol. XI (1957) e nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, vol. I (1946) pag. 500 e pag. 586 e vol. XXIII (1957), pag. 22 e pag. 116.

esempio del n. 9 mette in luce che, se manca tale condizione, il teorema non è più valido. Emerge, così, una netta differenza nel caso $n=2$ tra gli integrali curvilinei dello spazio e quelli del piano ⁽³⁾, e naturalmente tutta la teoria della semicontinuità risente di tale fatto. D'altra parte, per $n=3$, nell'enunciato dell'analogo teorema di continuità (n. 27) non figura alcuna ipotesi restrittiva: in pratica ciò dipende dal fatto che ciascuna delle espressioni u_s , v_s , w_s è una derivata esatta. Soggiungiamo che nel seguito la teoria della semicontinuità degli integrali in questione potrà essere approfondita in modo da raffinare i risultati ora rilevati, i quali sono sufficienti ai fini del presente lavoro.

Nella ricerca dell'estremo assoluto di $\mathcal{J}^{(n)}$ noi consideriamo classi di curve contenute in un campo limitato dello spazio (x, y, z) ⁽⁴⁾. Ma subito emerge una notevole diversità tra i casi $n=2$ e $n=3$: infatti per $n=2$ risulta limitato lo spazio in cui variano i punti (x, y, z, x', y', z') , mentre, d'altra parte, per $n=3$ le derivate del secondo ordine possono assumere valori comunque grandi ⁽⁵⁾. Inoltre mentre l'espressione

$$\sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

dipende soltanto dalle derivate del secondo ordine e ha un ben noto elementare significato geometrico, nell'espressione

$$\sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} = \sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2)^2}$$

figurano anche le derivate seconde e il suo significato geometrico

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2},$$

ove $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{T}$ rappresentano la flessione e la torsione, non è altrettanto semplice.

Ciò spiega chiaramente la necessità di svolgere separatamente la trattazione nei casi $n=2$ e $n=3$.

Per $n=2$, nonostante la diversità sopra rilevata, a proposito della continuità, tra gli integrali curvilinei del piano e quelli dello spazio, e per quanto, almeno a prima vista, il problema appaia più complicato, si raggiungono

⁽³⁾ Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 11, pag. 30. Come si è visto nel luogo ora ricordato, nel caso delle curve piane l'espressione $x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$ è una derivata esatta.

⁽⁴⁾ Cfr. le successive note a piè pagina ⁽¹¹⁾ e ⁽²⁶⁾.

⁽⁵⁾ In altre parole per $n=3$ nella presente Memoria la dizione « campo limitato » ha un significato più ampio di quello dei nostri lavori di parecchi anni fa dedicati ai problemi variazionali di ordine n in forma ordinaria, ove si intendeva che fosse limitato il campo in cui potevano variare i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Cfr. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. V (1936), n. 3, pag. 175.

risultati analoghi a quelli che avevamo stabilito nel caso piano nella nostra Memoria citata in ⁽²⁾. Naturalmente, talvolta, è necessario adattare l'indagine scientifica alle presenti esigenze: essa utilizza in modo specifico il lemma di Geometria infinitesimale, che viene rilevato al n. 17 e che può riuscire utile anche in questioni diverse dal Calcolo delle variazioni.

Più significativa è la trattazione nel caso $n = 3$. Un primo teorema esistenziale (n. 34) è valido per ogni classe di curve aventi lunghezza inferiore a un numero fisso e le cui flessioni sono ugualmente limitate; ma, come mettono in luce due semplici esempi, nè l'una nè l'altra di queste due ipotesi può essere senz'altro soppressa. Però a ciascuna di tali limitazioni si possono sostituire gradatamente altre condizioni, che conducono a teoremi di esistenza di più ampia portata e tra le quali emerge la (γ) , sia nella forma dei nn. 36 e 37, sia in quella più determinata (γ_0) che figura nell'enunciato del n. 38. A tal riguardo vogliamo aggiungere che, pur avendo ulteriormente utilizzato il già citato lemma del n. 17, esso non è adeguato alle esigenze del presente caso $n = 3$, nel quale si rileva veramente indispensabile il complemento che forma oggetto del n. 18 o almeno il suo caso particolare, più semplice e quindi più espressivo, indicato nell'Osservazione che figura alla fine dello stesso n. 18.

Chiudiamo queste righe rilevando che, naturalmente, si potranno stabilire ulteriori risultati, ma che quelli raggiunti nella presente Memoria, mentre conseguono pienamente l'obiettivo che ci siamo proposti, (mostrare l'effettiva efficacia dell'impostazione che noi abbiamo dato nel lavoro cit. in ⁽¹⁾ a questo capitolo del Calcolo delle Variazioni, il quale, a quanto ci consta, finora non aveva formato oggetto di alcuna ricerca), al tempo stesso illuminano la trattazione dei problemi considerati.

CAP. I. - PROBLEMI DEL SECONDO ORDINE.

§ 1. - Generalità.

1. **Il campo A.** - Chiamiamo *campo A* un insieme di punti dello spazio (x, y, z) contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito.

2. **La funzione F.** - *a)* Supponiamo che $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$ sia una funzione: 1°) definita e continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine $F_{u_2}, F_{v_2}, F_{w_2}$ in ogni punto (x, y, z) del campo *A*, per ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$, e per tutti i valori reali di u_2, v_2, w_2 ; 2°) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y', z' , vale a dire tale che, per ogni $k > 0$, valga l'uguaglianza

$$F(x, y, z; kx', ky', kz'; u_2, v_2, w_2) = kF(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2).$$

Inoltre poniamo

$$F(x, y, z; 0, 0, 0; u_2, v_2, w_2) = 0,$$

in modo che F risulta continua anche in ogni punto $(x, y, z; 0, 0, 0; u_2, v_2, w_2)$ con (x, y, z) appartenente al campo A .

Chiamiamo terna normalizzata ogni terna (x', y', z') , per la quale è $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$.

b) Definiamo per ogni (x, y, z) del campo A , per ogni terna di numeri (non tutti nulli) x', y', z' e per tutti i valori reali di $\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; u_2, v_2, w_2$ la funzione $\mathcal{G}$ (di WEIERSTRASS) ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y, z; x', y', z'; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; u_2, v_2, w_2) = \\ = F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) - F(x, y, z; x', y', z'; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) - \\ - (u_2 - \bar{u}_2)F_{u_2}(x, y, z; x', y', z'; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) - (v_2 - \bar{v}_2)F_{v_2}(\dots) - (w_2 - \bar{w}_2)F_{w_2}(\dots). \end{aligned}$$

È evidente che nell'iperspazio (u_2, v_2, w_2, Ω) la funzione $\mathcal{G}$ rappresenta la differenza tra l'ordinata della figurativa (relativa al punto (x, y, z) e alla terna (x', y', z'))

$$\Omega = F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2)$$

e quella dell'iperpiano ad essa tangente nel punto

$$(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, F(x, y, z; x', y', z'; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)).$$

3. Le curve ordinarie $C^{(2)}$ e l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$. Chiamiamo *curva ordinaria* $C^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$C^{(2)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

ove s è la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale le funzioni $x(s), y(s), z(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s), y'(s), z'(s)$, ogni punto $(x(s), y(s), z(s))$ appartiene al campo A ed esiste finito l'integrale ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾

$$\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); u_2, v_2, w_2) ds$$

ove, per ragioni di brevità, si intende che sia

$$(1) \quad u_2 = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s), \quad v_2 = y'(s)z''(s) - y''(s)z'(s), \quad w_2 = z'(s)x''(s) - z''(s)x'(s),$$

od anche (essendo $\frac{1}{R}$ la flessione e λ, μ, ν i coseni direttori della binormale)

$$(1') \quad u_2 = \frac{\nu}{R}, \quad v_2 = \frac{\lambda}{R}, \quad w_2 = \frac{\mu}{R}.$$

⁽⁶⁾ In tutto il presente lavoro l'integrazione va intesa nel senso di LEBESGUE.

⁽⁷⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽¹⁾, n. 4, pag. 275. Per la forma che assume l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ quando il parametro non è l'arco rettificato, rinvia o al luogo ora citato n. 3, pag. 278.

Inoltre conveniamo che ogni curva, costituita da un solo punto, è una curva ordinaria $C^{(2)}$, per la quale è $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)} = 0$.

OSSERVAZIONE. - Per il seguito è utile ricordare la ben nota identità (nella quale le derivate sono calcolate rispetto all'arco rettificato)

$$(2) \quad u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = (x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

4. **Definizioni.** - α) Chiamiamo *quasi-regolare positivo* ogni integrale $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$, per il quale risulta

$$(3) \quad \mathcal{E}(x, y, z; \quad x', y', z'; \quad \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; \quad u_2, v_2, w_2) \geq 0$$

in ogni punto (x, y, z) del campo A per qualsiasi terna di numeri (x', y', z') e per tutti i valori reali di $\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, u_2, v_2, w_2$.

L'integrale $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ viene chiamato *quasi-regolare positivo seminormale*, se è quasi-regolare positivo e se in corrispondenza a qualsiasi punto (x, y, z) del campo A e a qualunque terna di numeri (non tutti nulli) (x', y', z') esiste almeno una terna $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)$ in modo che risulti

$$\mathcal{E}(x, y, z; \quad x', y', z'; \quad \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; \quad u_2, v_2, w_2) > 0$$

per tutte le terne (u_2, v_2, w_2) non coincidenti con $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)$.

Infine l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$, viene chiamato *quasi regolare positivo normale*, se è quasi-regolare positivo e se in qualsiasi punto (x, y, z) del campo A e per qualunque terna di numeri (non tutti nulli) (x', y', z') risulta

$$\mathcal{E}(x, y, z; \quad x', y', z'; \quad \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; \quad u_2, v_2, w_2) > 0$$

per tutte le sestuple di numeri $\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; u_2, v_2, w_2$ con (u_2, v_2, w_2) distinto da $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)$.

b) Supponiamo, soltanto nel presente capoverso, che, ferme restando le ipotesi del n. 2, α), esistano finite e continue anche le derivate parziali del secondo ordine $F_{u_2u_2}, F_{v_2v_2}, F_{w_2w_2}, F_{u_2v_2}, F_{u_2w_2}, F_{v_2w_2}$. Sotto queste ipotesi l'integrale vien chiamato *regolare positivo*, se la forma quadratica

$$\alpha^2 F_{u_2u_2}(\dots) + \beta^2 F_{v_2v_2}(\dots) + \gamma^2 F_{w_2w_2}(\dots) + 2\alpha\beta F_{u_2v_2}(\dots) + 2\alpha\gamma F_{u_2w_2}(\dots) + 2\beta\gamma F_{v_2w_2}(\dots)$$

è definita positiva in ogni punto (x, y, z) del campo A , per ogni terna di numeri (non tutti nulli) (x', y', z') e per qualunque terna di numeri (u_2, v_2, w_2) .

c) Infine l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è *definito positivo* [semidefinito positivo], se in tutti i punti (x, y, z) del campo A , per tutte le terne (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ e per tutti i valori reali di u_2, v_2, w_2 è $F > 0$ [$F \geq 0$].

5. **Intorno $(\rho)^2$ di una curva ordinaria $C^{(2)}$.** - a) Data una curva ordinaria $C_0^{(2)}$ di lunghezza $L_0 > 0$ e considerato un numero ρ con $0 < \rho < 1$, noi diciamo che la curva ordinaria $C^{(2)}$ di lunghezza L appartiene all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$, quando, indicate con s e σ rispettivamente le lunghezze degli archi rettificati delle curve $C_0^{(2)}$ e $C^{(2)}$ contate a partire dai loro primi estremi, se le curve sono aperte, e da punti convenientemente scelti, se le curve sono chiuse, è possibile determinare una funzione $\sigma(s)$, ($0 \leq s \leq L_0$) con $\sigma(0) = 0$, $\sigma(L_0) = L$, la quale sia continua assieme alla propria derivata del primo ordine $\sigma'(s)$ e tale che valga la doppia disuguaglianza

$$(4) \quad 1 - \rho \leq \sigma'(s) \leq 1 + \rho,$$

in modo che, essendo

$$\begin{array}{lll} C_0^{(2)} & x = x_0(s), & y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0), \\ C^{(2)} & x = x(\sigma), & y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq L), \end{array}$$

risulti per qualunque s di $(0, L_0)$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_0(s) - x(\sigma(s))| \leq \rho, \quad |y_0(s) - y(\sigma(s))| \leq \rho, \quad |z_0(s) - z(\sigma(s))| \leq \rho; \\ \left| \frac{dx_0(s)}{ds} - \left[\frac{dx(\sigma)}{d\sigma} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho, \quad \left| \frac{dy_0(s)}{ds} - \left[\frac{dy(\sigma)}{d\sigma} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho, \\ \left| \frac{dz_0(s)}{ds} - \left[\frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho \end{array} \right.$$

b) Se la curva ordinaria $C_0^{(2)}$ è costituita da un solo punto (x_0, y_0, z_0) , diciamo che una curva ordinaria $C^{(2)}$ di lunghezza $L > 0$ appartiene all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$, se per qualunque σ di $(0, L)$ è

$$(6) \quad |x_0 - x(\sigma)| \leq \rho, \quad |y_0 - y(\sigma)| \leq \rho, \quad |z_0 - z(\sigma)| \leq \rho,$$

e se per qualsiasi coppia di valori distinti σ_1, σ_2 di $(0, L)$ sono verificate le disuguaglianze

$$(7) \quad |x'(\sigma_1) - x'(\sigma_2)| \leq \rho, \quad |y'(\sigma_1) - y'(\sigma_2)| \leq \rho, \quad |z'(\sigma_1) - z'(\sigma_2)| \leq \rho.$$

Inoltre ogni curva $C^{(2)}$ costituita da un solo punto (x, y, z) appartiene all'intorno (ρ) di $C_0^{(2)}$, quando sono verificate le disuguaglianze

$$|x_0 - x| \leq \rho, \quad |y_0 - y| \leq \rho, \quad |z_0 - z| \leq \rho.$$

c) **OSSERVAZIONE I.** - Dalla (4) segue immediatamente che la lunghezza L di ogni curva, appartenente all'intorno $(\rho)^2$ della curva $C_0^{(2)}$ avente lunghezza $L_0 > 0$, soddisfa alla doppia disuguaglianza

$$(8) \quad (1 - \rho)L_0 \leq L \leq (1 + \rho)L_0.$$

Ciò è ovvio essendo

$$L = \int_0^L d\sigma = \int_0^{L_0} \sigma'(s) ds.$$

d) OSSERVAZIONE II. - Se la curva ordinaria $C_0^{(2)}$ è costituita da un solo punto, supposto

$$(9) \quad \rho \leq \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

ogni curva ordinaria $C^{(2)}$, appartenente all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$, ha lunghezza non superiore a $4\sqrt{3}\rho$.

Infatti essendo $x'^2(0) + y'^2(0) + z'^2(0) = 1$, almeno uno dei tre numeri $x'(0)$, $y'(0)$, $z'(0)$ ha valore assoluto non inferiore a $1:\sqrt{3}$. Quindi, in virtù delle (7) e tenuto conto della (9), lungo tutta la curva $C^{(2)}$ è verificata almeno una delle tre disuguaglianze

$$|x'(\sigma)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |y'(\sigma)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |z'(\sigma)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ciò premesso, siccome usufruendo delle (6) e in virtù del teorema del valor medio risulta

$$2\rho \geq |x(L) - x(0)| = L |x'(\tilde{\sigma}_1)|,$$

$$2\rho \geq |y(L) - y(0)| = L |y'(\tilde{\sigma}_2)|,$$

$$2\rho \geq |z(L) - z(0)| = L |z'(\tilde{\sigma}_3)|,$$

ove $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$ sono tre opportuni valori interni all'intervallo $(0, L)$, si conclude immediatamente che è

$$2\rho \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} L,$$

cioè l'asserto è provato.

6. Semicontinuità e continuità dell'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$. - L'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è funzione semicontinua inferiormente, se, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare un $\rho > 0$ in modo che, se $C_0^{(2)}$ è una qualunque curva ordinaria $C^{(2)}$, la disuguaglianza

$$(10) \quad \mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} > \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} - \varepsilon$$

sia verificata per tutte le curve ordinarie $C^{(2)}$, che appartengono all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$.

Dalla definizione ora data segue immediatamente quella di continuità, sostituendo alla (10) la disuguaglianza

$$|\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)} - \mathcal{I}_{C_0^{(2)}}^{(2)}| < \varepsilon.$$

7. Classe completa di curve di ordine 2. - Considerato un insieme J di infinite curve ordinarie $C^{(2)}$, noi diciamo che la curva $C_0^{(2)}$ è una sua curva di accumulazione di ordine 2, se a ogni intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$ appartengono infinite curve dell'insieme.

Ciò premesso un insieme J di curve ordinarie $C^{(2)}$ costituisce una *classe completa di ordine 2*, quando ogni sua curva di accumulazione di ordine 2, se è una curva ordinaria $C^{(2)}$, appartiene all'insieme J .

§ 2. - La semicontinuità.

8. Un teorema di continuità. - Sia K_0 una classe di curve ordinarie

$$C^{(2)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

ed esista un numero $\Lambda > 0$ in modo che, per qualunque curva di K_0 , sia verificata la disuguaglianza

$$(11) \quad \int_0^L \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \, ds \leq \Lambda.$$

Allora, se P_i , ($i = 0, 1, 2, 3$) sono quattro costanti, l'integrale

$$\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)} = \int_{C^{(2)}} [P_0 + P_1 u_2 + P_2 v_2 + P_3 w_2] \, ds$$

è una funzione continua nella classe K_0 .

Infatti considerata una qualunque curva ordinaria di K_0

$$C_0^{(2)}: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

sia

$$C^{(2)}: \quad x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq L)$$

(ove s e σ rappresentano la lunghezza dei rispettivi archi rettificati) una curva ordinaria appartenente all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$.

Sia, dapprima, $L_0 > 0$, e supponiamo $\rho < 1$. Integrando prima per sostituzione poi per parti abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{C^{(2)}} x'(\sigma) y''(\sigma) d\sigma - \int_{C_0^{(2)}} x'_0(s) y''_0(s) ds &= \int_0^L x'(\sigma) y''(\sigma) d\sigma - \int_c^{L_0} x'_0(s) y''_0(s) ds = \\ &= \int_0^{L_0} [x'(\sigma(s)) y''(\sigma(s)) \sigma'(s) - x'_0(s) y''_0(s)] ds = \\ &= \int_0^{L_0} x'(\sigma(s)) [y''(\sigma(s)) \sigma'(s) - y''_0(s)] ds + \int_0^{L_0} [x'(\sigma(s)) - x'_0(s)] y''_0(s) ds = \\ &= [x'(\sigma(s)) \{ y'(\sigma(s)) - y'_0(s) \}]_0^{L_0} - \int_0^{L_0} [y'(\sigma(s)) - y'_0(s)] x''(\sigma(s)) \sigma'(s) ds + \\ &\quad + \int_0^{L_0} [x'(\sigma(s)) - x'_0(s)] y''_0(s) ds, \end{aligned}$$

da cui, prendendo il valore assoluto e usufruendo delle (5) del n. 5, a), tenuta presente la (4), segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{C^{(2)}} x'(\sigma) y''(\sigma) d\sigma - \int_{C_0^{(2)}} x'_0(s) y''_0(s) ds \right| &\leq \left[2 + \int_0^{L_0} |x''(\sigma(s))| \sigma'(s) ds + \int_0^{L_0} |y''_0(s)| ds \right] \rho = \\ &= \left[2 + \int_0^L |x''(\sigma)| d\sigma + \int_0^{L_0} |y''_0(s)| ds \right] \rho. \end{aligned}$$

Pertanto, tenute presenti le (1), procedendo in modo analogo sugli altri integrali, in virtù della (8) del n. 5, c) e della (11) risulta immediatamente (')

$$|\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} - \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}| \leq \{ |P_0| L_0 + 2[|P_1| + |P_2| + |P_3|] [2 + \sqrt{2}\Delta] \} \rho$$

e l'asserto è evidente.

Rimane da considerare il caso $L_0 = 0$, nel quale è $\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} = 0$. Abbiamo in modo ovvio

$$\begin{aligned} \int_{C^{(2)}} x'(\sigma) y''(\sigma) d\sigma &= \int_0^L [x'(\sigma) - x'(0)] y''(\sigma) d\sigma + x'(0) \int_0^L y''(\sigma) d\sigma = \\ &= \int_0^L [x'(\sigma) - x'(0)] y''(\sigma) d\sigma + x'(0) [y'(L) - y'(0)], \end{aligned}$$

(') Dalla trattazione è manifesto che in tutto il presente paragrafo non occorre far esplicito appello al Lemma del successivo n. 17.

e per le (7) del n. 5, b) risulta

$$\left| \int_{C^{(2)}} x'(\sigma) y''(\sigma) d\sigma \right| \leq \left[\int_0^L |y''(\sigma)| d\sigma + 1 \right] \rho.$$

Pertanto, per $\rho \leq 1: 2\sqrt{3}$, in virtù del n. 5, d) e della (11) si ottiene immediatamente

$$|\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} - \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}| \leq [4\sqrt{3} |P_0| + \{|P_1| + |P_2| + |P_3|\} \{2 + \sqrt{2}\Lambda\}] \rho,$$

e anche in questo caso l'asserto è evidente.

OSSERVAZIONE. - Il teorema del presente n.º si può estendere al caso in cui P_0, P_1, P_2, P_3 sono, anzichè costanti, funzioni di x, y, z, x', y', z' , sotto opportune ipotesi di derivabilità, sulle quali non ci soffermiamo, perchè non interessano per il presente lavoro.

9. Esempio. - È importante rilevare che, se si considera una classe di curve ordinarie $C^{(2)}$, per le quali l'integrale della flessione non è inferiore a un numero fisso, può mancare la continuità dell'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$. Ciò risulta dal seguente esempio:

a) Consideriamo la successione di eliche circolari

$$C_n^{(2)}: \begin{cases} x = x_n(s) \equiv \frac{1}{n^\alpha} \sin(n^\alpha a_n s) \\ y = y_n(s) \equiv \frac{1}{n^\alpha} \cos(n^\alpha a_n s) \\ z = z_n(s) \equiv b_n \cdot s, \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 2\pi), \quad n = 1, 2, \dots$$

ove

$$a_n = \sin \frac{1}{n}, \quad b_n = \cos \frac{1}{n}, \quad \alpha = 3,$$

e la funzione

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} u_2.$$

Si verifica immediatamente che, per n sufficientemente grande, le curve $C_n^{(2)}$ appartengono all'intorno $(\rho)^2$ della curva

$$C_0^{(2)}: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = s, \quad (0 \leq s \leq 2\pi),$$

per la quale è

$$\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} = 0.$$

D'altra parte risulta

$$\mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)} = - \int_{C_n^{(2)}} n^2 a_n^3 ds = - 2\pi n^3 \operatorname{sen}^3 \frac{1}{n},$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)} = - 2\pi,$$

vale a dire l'integrale $\mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)}$ non è continuo sulla curva $C_0^{(2)}$. Ciò dipende dal fatto che gli integrali della flessione

$$\int_{C_n^{(2)}} \sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} ds = \int_0^{2\pi} n^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} ds = 2\pi n^3 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}$$

non sono limitati.

b) Consideriamo la stessa funzione F indicata in a) e la stessa successione di eliche circolari, intendendo che $C_n^{(2)}$ sia definita nell'intervallo $(0 \leq s \leq \frac{2\pi}{n})$ e che sia $\alpha = 4$.

Allora le curve $C_n^{(2)}$ per n sufficientemente grande appartengono all'intorno $(\rho)^2$ della curva

$$C_n^{(2)}: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

e in modo analogo si verifica che su questa curva l'integrale $\mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)}$ non è continuo.

10. Lemma. — Se $\mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)}$ è un integrale quasi-regolare positivo normale preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, in corrispondenza ad ogni punto (x_0, y_0, z_0) del campo A , a ogni terna (x'_0, y'_0, z'_0) normalizzata e a ogni terna di numeri reali $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2)$ è possibile determinare almeno cinque numeri p_0, p_1, p_2, p_3, ρ con $\rho > 0$ in modo che in tutti i punti (x, y, z) di A soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|x - x_0| \leq \rho, \quad |y - y_0| \leq \rho, \quad |z - z_0| \leq \rho$$

e per tutte le terne normalizzate (x', y', z') e tali che sia

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 \leq \rho^2$$

risulti

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) > p_0 + p_1 u_2 + p_2 v_2 + p_3 w_2$$

per tutte le terne (u_2, v_2, w_2) , e anche

$$F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) < p_0 + p_1 u_2 + p_2 v_2 + p_3 w_2 + \varepsilon$$

per quelle terne (u_2, v_2, w_2) , per le quali è

$$(u_2 - \bar{u}_2)^2 + (v_2 - \bar{v}_2)^2 + (w_2 - \bar{w}_2)^2 \leq \rho^2.$$

Infatti, considerata la figurativa

$$\Omega = F(x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0; u_2, v_2, w_2)$$

relativa al punto (x_0, y_0, z_0) e alla terna (x'_0, y'_0, z'_0) , siccome l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è quasi regolare positivo normale, l'iperpiano tangente alla figurativa nel punto P corrispondente a $u_2 = \bar{u}_2$, $v_2 = \bar{v}_2$, $w_2 = \bar{w}_2$ ha a comune con la figurativa soltanto il punto P e quindi per provare l'asserto basta un'immediata estensione di un ben noto ragionamento ⁽⁸⁾.

11. Un teorema di semicontinuità. - Sia $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ un integrale quasi-regolare positivo normale, e supponiamo che esistano due numeri $N_0 > 0$, N in modo che in ogni punto (x, y, z) del campo A , per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per tutti i numeri reali u_2, v_2, w_2 sia verificata la disuguaglianza

$$(12) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \geq N_0[|u_2| + |v_2| + |w_2|] + N.$$

Allora l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è semicontinuo inferiormente.

Infatti, considerata una qualsiasi curva ordinaria $C_0^{(2)}$, dimostriamo che l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è semicontinuo su tale curva.

Supposto, inizialmente, che la curva $C_0^{(2)}$ sia costituita da un solo punto, è $\mathcal{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} = 0$, mentre per ogni curva ordinaria $C^{(2)}$ appartenente all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$, ove $\rho \leq 1:2\sqrt{3}$, in virtù della (12) e del n. 5, d) risulta

$$\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)} \geq -4\sqrt{3}|N|\rho,$$

e quindi l'asserto è evidente.

D'altra parte, se la curva $C_0^{(2)}$ ha lunghezza $L_0 > 0$, basta considerare quelle curve ordinarie

$$C^{(2)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

per le quali è $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)} < \mathcal{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}$. Pertanto in virtù delle (2), (12) e del n. 5, c) per $\rho \leq 1$ risulta

$$(13) \quad \int_{C^{(2)}} \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} ds = \int_{C^{(2)}} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} ds \leq \\ \leq \int_{C^{(2)}} [|u_2| + |v_2| + |w_2|] ds \leq \frac{1}{N_0} \left[\int_{C^{(2)}} F ds + |N| \int_{C^{(2)}} ds \right] \leq \Lambda_0,$$

⁽⁸⁾ Vedi L. GIULIANO, *Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. X (1941), pp. 37-55. In particolare n. 2, a), pag. 42.

ove si è posto

$$\Delta_0 = \frac{1}{N_0} [\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} + 2 |N| L_0].$$

A questo punto, basandosi sul lemma del n. 10 si può ripetere in forma opportuna un ragionamento di TONELLI ⁽⁹⁾, tenendo presente che in virtù della (12) tale procedimento può essere inizialmente semplificato e che per la (13) possiamo usufruire del risultato, del n. 8.

OSSERVAZIONE. - È evidente che l'ipotesi che l'integrale sia quasi regolare normale e la disuguaglianza (12) sono tra loro indipendenti.

Infatti, per esempio, se è

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [u_2^2 + v_2^2 + w_2^2],$$

l'integrale è regolare positivo, ma non è verificata la (12).

D'altra parte, se è

$$F = 0, \quad \text{per} \quad u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 \leq 1,$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} - 1]^2, \quad \text{per} \quad 1 < u_2^2 + v_2^2 + w_2^2,$$

la (12) è verificata per $N_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $N = -\frac{9}{16}$, ma l'integrale non è normale.

12. Un'estensione del teorema del n. 11. - *Il teorema del n.º precedente è valido anche quando, ferme restando tutte le altre ipotesi, l'integrale non è normale.*

Infatti rileviamo innanzi tutto che, qualunque sia il numero $\eta > 0$, posto

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{F}(\dots) = & F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) + \\ & + \eta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}, \end{aligned}$$

l'integrale

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} = \int_{C^{(2)}} \bar{F} ds$$

risulta quasi regolare positivo normale e che la funzione $\bar{F}$ verifica una disuguaglianza analoga alla (12). Pertanto per il teorema del n.º precedente l'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è semicontinuo inferiormente.

⁽⁹⁾ Vedi L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. III (1934), pp. 401-50. In particolare n. 3, pag. 408.

Ciò premesso, considerata una curva ordinaria qualunque

$$C_0^{(2)} \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

possiamo supporre che sia $L_0 > 0$, perchè nel caso $L_0 = 0$ il ragionamento fatto nel n°. precedente è valido indipendentemente dall'ipotesi che l'integrale sia normale. Allora per provare l'asserto consideriamo soltanto quelle curve ordinarie

$$C^{(2)}: \quad x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq L),$$

ove anche σ rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato, per le quali è

$$(15) \quad \mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} < \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}.$$

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, fissiamo il numero η sopra considerato assumendo

$$(16) \quad \eta = \frac{\varepsilon}{2 \left[2L_0 + \frac{|\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}| + 2L_0 |N|}{N_0} \right]}$$

In virtù della semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ sulla curva $C_0^{(2)}$, possiamo subordinare a ε un numero $\rho > 0$, che supponiamo non superiore a 1, in modo che per tutte le curve ordinarie $C^{(2)}$, che appartengono all'intorno $(\rho)^2$ di $C_0^{(2)}$ e per le quali è verificata la disuguaglianza (15), risulti

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} > \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} - \frac{\varepsilon}{2},$$

ossia, tenuta presente la (14),

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} + \eta \int_{C^{(2)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + n_2^2} ds &> \\ &> \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} + \eta \int_{C_0^{(2)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + n_2^2} ds - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

e anche a maggior ragione

$$(17) \quad \mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} + \eta \int_{C^{(2)}} [1 + |u_2| + |v_2| + |n_2|] d\sigma > \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siccome in virtù delle (12), (15) e della (8) del n. 5 è

$$\begin{aligned} (18) \quad \int_{C^{(2)}} [1 + |u_2| + |v_2| + |n_2|] d\sigma &\leq \int_{C^{(2)}} d\sigma + \frac{1}{N_0} \left[\int_{C^{(2)}} F d\sigma + |N| \int_{C^{(2)}} d\sigma \right] \leq \\ &\leq (1 + \rho)L_0 + \frac{1}{N_0} [\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} + |N|(1 + \rho)L_0] \leq 2L_0 + \frac{1}{N_0} [|\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)}| + 2|N|L_0], \end{aligned}$$

dalla (17), tenuto conto della (16) si ottiene

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} + \frac{\varepsilon}{2} > \mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} - \frac{\varepsilon}{2},$$

è l'asserto è evidente.

ESEMPIO. - Se non è verificata la disuguaglianza (12), il teorema del presente n.º può cadere in difetto, come mostra il seguente esempio. Sia

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} (e^{u_2} + v_2 + w_2),$$

e riprendiamo la successione di eliche circolari considerata al n. 9, α) assumendo $\alpha = 3$, ricordando che, per ogni n sufficientemente grande, tali curve appartengono all'intorno $(\rho)^2$ della curva

$$C_0^{(2)}: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = s, \quad (0 \leq s \leq 2\pi),$$

per la quale è

$$\mathfrak{J}_{C_0^{(2)}}^{(2)} = \int_0^{2\pi} e^0 ds = 2\pi.$$

D'altra parte essendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)} &= \int_0^{2\pi} [e^{-n^3 a_n^3} + n^3 a_n^2 b_n \cos(n^3 a_n s) - n^3 a_n^2 b_n \sin(n^3 a_n s)] ds = \\ &= 2\pi e^{-n^3 a_n^3} + a_n b_n [\sin(2\pi n^3 a_n) + \cos(2\pi n^3 a_n) - 1], \end{aligned}$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)} = 2\pi e^{-1},$$

vale a dire l'integrale considerato non è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{(2)}$.

13. Un caso particolare del teorema del n. 11. - Sia K_0 una classe di curve ordinarie $C^{(2)}$, per la quale è soddisfatta la disuguaglianza (11) del n. 8. Allora, se $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è un integrale quasi regolare positivo, $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ risulta semicontinuo inferiormente nella classe K_0 .

Infatti basta ripetere la dimostrazione del n.º precedente, usufruendo, in luogo della (18), della seguente disuguaglianza che è conseguenza immediata della (11)

$$\begin{aligned} \int_{C^{(2)}} \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} d\sigma &\leq \int_{C^{(2)}} d\sigma + \int_{C^{(2)}} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} d\sigma \leq \\ &\leq (1 + \rho) L_0 + \int_{C^{(2)}} \sqrt{x''^2(\sigma) + y''^2(\sigma) + z''^2(\sigma)} d\sigma \leq 2L_0 + \Lambda. \end{aligned}$$

14. **Estensione all'infinito della semicontinuità.** - a) *Si consideri una curva rettificabile*

$$\Gamma_0: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

(ove il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato) con $L_0 > 0$, appartenente al campo A e tale che le funzioni $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$ siano assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine. Allora supposto che l'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ sia quasi regolare positivo normale e che sia verificata la disuguaglianza (12), se la funzione

$$F(x_0(s), \dots; x_0'(s), \dots; x_0''(s)y_0''(s) - x_0''(s)y_0'(s), \dots)$$

non è integrabile sull'intervallo $(0, L_0)$, preso ad arbitrio un numero $H > 0$, si può determinare un numero $\rho > 0$ in modo che, per ogni curva ordinaria $C^{(2)}$ appartenente all'intorno $(\rho)^2$ della Γ_0 sia verificata la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} > H.$$

Per provare l'asserto basta considerare la classe K costituita da tutte le eventuali curve ordinarie $C^{(2)}$, che appartengono all'intorno $(\rho)^2$ della Γ_0 e per le quali è

$$(19) \quad \mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} \leq H.$$

In virtù della (12) per ognuna di tali curve risulta

$$\int_{C^{(2)}} [|u_2| + |v_2| + |w_2|] ds \leq \frac{1}{N_0} \left[\int_{C^{(2)}} F ds + |N| \int_{C^{(2)}} ds \right],$$

e anche, tenuto conto della (19) e della (8) del n. 5, c),

$$(20) \quad \int_{C^{(2)}} [|u_2| + |v_2| + |w_2|] ds \leq \frac{1}{N_0} [H + (1 + \rho) |N| L_0].$$

Ciò premesso, siccome, in virtù della (20), si può usufruire del teorema di continuità del n. 8, ripetendo un noto ragionamento di TONELLI⁽¹⁰⁾ si conclude che, per $\rho > 0$ sufficientemente piccolo, è verificata la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} > H,$$

la quale è in contrasto con la (19).

b) *Ferme restando tutte le altre ipotesi, il teorema del capoverso a) è valido anche quando l'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ non è normale.*

⁽¹⁰⁾ Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ⁽⁹⁾, n. 6, pp. 412-3.

Infatti anche in questo caso basta che ci limitiamo a considerare tutte le eventuali curve ordinarie $C^{(2)}$ appartenenti all'intorno $(\rho)^2$ della Γ_0 , per le quali è verificata la disuguaglianza (19). Supposto $\rho \leq 1$, risulta come in *a*)

$$(21) \quad \int_{C^{(2)}} [1 + |u_2| + |v_2| + |w_2|] ds \leq \frac{H}{N_0} + 2L_0 \left[1 + \frac{|N|}{N_0} \right].$$

Ciò premesso consideriamo la funzione $\bar{F}$, definita al n. 12 assumendo

$$(22) \quad \eta = 1 : \left[\frac{H}{N_0} + 2L_0 \left(1 + \frac{|N|}{N_0} \right) \right];$$

siccome anche la funzione

$$\bar{F}(x_0(s), \dots; x'_0(s), \dots; x''_0(s)y'_0(s) - x'_0(s)y''_0(s), \dots)$$

non risulta integrabile sull'intervallo $(0, L_0)$ e l'integrale $\bar{\mathcal{J}}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è normale, in virtù del risultato del capoverso *a*) possiamo determinare un $\rho > 0$ in modo che, per ogni curva ordinaria $C^{(2)}$ appartenente all'intorno $(\rho)^2$ della Γ_0 , sia verificata la disuguaglianza

$$\bar{\mathcal{J}}_{C^{(2)}}^{(2)} > H + 1,$$

ossia

$$\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)} + \eta \int_{C^{(2)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} ds > H + 1.$$

Da questa disuguaglianza, in virtù delle (21) e (22) segue

$$\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)} > H,$$

in contrasto con la (19).

c) È evidente che il teorema del capoverso *a*) è valido sotto la sola ipotesi che l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ sia quasi-regolare positivo, qualora si consideri una classe K_0 di curve ordinarie $C^{(2)}$, per le quali è soddisfatta la disuguaglianza (11) del n. 8.

§ 3. Esistenza dell'estremo assoluto.

15. Il campo A_0 . - Supponiamo che il campo A , di cui al n. 1, sia limitato ⁽¹¹⁾; in tale ipotesi il campo A viene indicato con A_0 .

⁽¹¹⁾ Nel presente lavoro non ci occupiamo del caso, in cui il campo A non è limitato, perchè è evidente la forma nella quale i teoremi di esistenza stabiliti per gli integrali curvilinei del piano [vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, § 4, pp 46-49] si estendono agli integrali curvilinei dello spazio.

16. Primo teorema di esistenza. — Supponiamo che: 1°) l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(2)}}$ sia quasi-regolare positivo, 2°) esista una funzione $\Phi(t)$, ($0 \leq t < +\infty$) inferiormente limitata e tale che per $t \rightarrow +\infty$ sia $\Phi(t) : t \rightarrow +\infty$, in modo che, in tutto il campo A_0 , per ogni terna normalizzata (x', y', z') , e per tutti i numeri reali u_2, v_2, w_2 , sia

$$(23) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \geq \Phi(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}).$$

Allora in ogni classe $K^{(2)}$, completa di ordine 2, di curve ordinarie $C^{(2)}$ aventi lunghezza inferiore a un numero fisso L' esiste il minimo assoluto di $\mathcal{I}_{C^{(2)}}$.

La dimostrazione è identica a quella che abbiamo sviluppato nel caso degli integrali curvilinei del piano ⁽¹²⁾, perchè per provare l'equiassoluta continuità delle derivate del primo ordine delle funzioni che definiscono una successione minimizzante di curve ordinarie $C^{(2)}$ estratta dalla classe $K^{(2)}$, basta tener presente la (2) del n. 3.

Infine si può usufruire delle proposizioni dei nn. 14, b) e 12, perchè in virtù delle ipotesi di cui gode la funzione $\Phi(t)$, considerato un numero $N'_0 > 0$, possiamo determinare un $t_0 > 0$ in modo che, per ogni $t > t_0$, sia $\Phi(t) \geq N'_0 t$ e pertanto, chiamato N' il limite inferiore di $\Phi(t)$, risulta per ogni $t \geq 0$

$$\Phi(t) \geq N'_0 t - |N'| - N'_0 t_0,$$

e pertanto dalla (23) segue

$$(24) \quad F \geq \frac{N'_0}{\sqrt{2}} [|u_2| + |v_2| + |w_2|] - |N'| - N'_0 t_0.$$

OSSERVAZIONE. — Se si considera una classe di curve, le cui lunghezze non sono inferiori a un numero fisso, il teorema del presente n.º può cadere in difetto. Ciò risulta dal seguente esempio ⁽¹³⁾. Sia

$$A_0 \equiv [-2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 2, \quad -2 \leq z \leq 2],$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [(u_2 - 1)^2 + v_2^2 + w_2^2],$$

e consideriamo la classe di curve ordinarie

$$C_n^{(2)}: \begin{cases} x = \frac{n+1}{n} \cos \left(\frac{n}{n+1} s \right) \\ y = \frac{n+1}{n} \sin \left(\frac{n}{n+1} s \right) \\ z = 0, \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 2\pi(n+1)), \quad n = 1, 2, \dots$$

⁽¹²⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 15, pag. 33.

⁽¹³⁾ Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 18, pag. 36.

Essendo

$$\mathfrak{I}_{C(2)}^{(2)} = \int_0^{2\pi(n+1)} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right)^2 ds = \frac{2\pi}{n+1},$$

il limite inferiore di $\mathfrak{I}_{C(2)}^{(2)}$ nella classe considerata è uguale a zero, ma nella classe non esiste alcuna curva, per la quale sia $\mathfrak{I}_{C(2)}^{(2)} = 0$.

17. Lemma. — *Considerato un insieme J di infinite curve continue e rettificabili*

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

(ove il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato), definite da funzioni assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e contenute in un campo limitato A_0 dello spazio (x, y, z) , supponiamo che esista un numero $H > 0$ in modo che per qualunque curva di J sia verificata la disuguaglianza

$$(25) \quad \int_0^L \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} ds \leq H.$$

Allora la lunghezza L di qualsiasi curva dell'insieme J è inferiore a un numero fisso.

Infatti rileviamo, innanzi tutto, che dalla (25) segue in modo ovvio

$$\int_0^L |x''(s)| ds \leq H, \quad \int_0^L |y''(s)| ds \leq H, \quad \int_0^L |z''(s)| ds \leq H,$$

vale a dire le variazioni totali delle derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ (relative alle curve dell'insieme J) risultano minori o uguali del numero H .

D'altra parte, considerata una curva qualunque dell'insieme J , sia s_0 un qualsiasi valore del rispettivo intervallo di definizione $(0, L)$. Essendo $x'^2(s_0) + y'^2(s_0) + z'^2(s_0) = 1$, ha luogo almeno una delle disuguaglianze

$$|x'(s_0)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |y'(s_0)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z'(s_0)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

e quindi, se δ è un numero reale positivo (con $s_0 + \delta \leq L$) tale che nell'intervallo $(s_0, s_0 + \delta)$ la variazione totale di ciascuna delle tre derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ sia non superiore a $1 : 2\sqrt{3}$, in tutto l'intervallo $(s_0, s_0 + \delta)$ è verificata almeno una delle tre disuguaglianze

$$|x'(s)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |y'(s)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |z'(s)| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

siccome, in virtù del teorema del valor medio, abbiamo

$$\begin{aligned} |x(s_0 + \delta) - x(s_0)| &= \delta |x'(\eta')|, \\ |y(s_0 + \delta) - y(s_0)| &= \delta |y'(\eta'')|, \\ |z(s_0 + \delta) - z(s_0)| &= \delta |z'(\eta''')|, \end{aligned}$$

ove η' , η'' , η''' sono tre opportuni valori di $(s_0, s_0 + \delta)$, chiamata Ω la massima distanza tra i punti del campo limitato A_0 , risulta

$$(26) \quad \delta \leq 2\sqrt{3} \Omega.$$

Ciò premesso, se M è il minimo intero positivo, per il quale è

$$(27) \quad \frac{M}{2\sqrt{3}} \geq H,$$

possiamo suddividere in modo opportuno l'intervallo $(0, L)$ (relativo alla curva considerata) in M parti, in modo che in ciascuna di queste parti la variazione totale della derivata $x'(s)$ sia non superiore a $1 : 2\sqrt{3}$; inoltre analoghe osservazioni si possono fare per le derivate $y'(s)$, $z'(s)$ relative alla curva considerata. Pertanto, suddividendo opportunamente l'intervallo $(0, L)$ al più in $3M - 2$ parti, in ciascuna di queste la variazione totale di ognuna delle derivate $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$ risulta non superiore a $1 : 2\sqrt{3}$.

Allora in virtù della (26) si conclude che è

$$L \leq 2\sqrt{3} \Omega (3M - 2),$$

e l'asserto è così provato, perchè del tutto arbitraria è la curva dell'insieme J , che abbiamo considerato.

OSSERVAZIONE. - Siccome dalla (27) segue $\frac{M-1}{2\sqrt{3}} < H$, ossia $M < 1 + 2\sqrt{3}H$, si conclude che è

$$(28) \quad L < 2\sqrt{3} \Omega (1 + 6\sqrt{3}H),$$

ove H è il numero che figura nella (25) e Ω è la massima distanza tra i punti del campo limitato A_0 .

È ovvio, in base alla dimostrazione sviluppata nel presente n.º, che la (28) potrebbe essere lievemente migliorata sostituendo a Ω il maggiore dei tre massimi di $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$, $|z_1 - z_2|$ al variare dei punti (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) in tutto il campo limitato A_0 .

18. Un complemento al lemma precedente. - Specialmente per il seguito⁽¹⁴⁾ è utile rilevare che il lemma del n. 17 è valido anche se si sostituisce alla disuguaglianza (25) la seguente ipotesi:

⁽¹⁴⁾ Vedi in particolare il n. 38 del Cap. II.

Esistono un numero finito $H' > 0$ e una funzione (continua) $G(t)$, ($0 \leq t < +\infty$) crescente, concava verso l'alto e tale che sia $G(0) = 0$, in modo che per qualunque curva dell'insieme J sia verificata la disuguaglianza ⁽¹⁵⁾

$$(29) \quad \int_0^L G(\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}) ds \leq H'.$$

Infatti, considerata una curva qualunque dell'insieme J , in virtù della disuguaglianza di JENSEN e della (29) risulta

$$G\left(\frac{1}{L} \int_0^L \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} ds\right) \leq \frac{1}{L} \int_0^L G(\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}) ds \leq \frac{H'}{L},$$

e pertanto se $t = g(\tau)$, ($0 \leq \tau < +\infty$) è la funzione inversa di $\tau = G(t)$ si ottiene (siccome anche $g(\tau)$ risulta crescente)

$$\int_0^L \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} ds \leq Lg\left(\frac{H'}{L}\right),$$

e anche, usufruendo della (28) del n. 17,

$$L < 2\sqrt{3}\Omega + 36\Omega Lg\left(\frac{H'}{L}\right),$$

ossia

$$(30) \quad L\left[1 - 36\Omega g\left(\frac{H'}{L}\right)\right] < 2\sqrt{3}\Omega.$$

Tenuto presente che $g(\tau)$ risulta continua e crescente con $g(0) = 0$, fissiamo un numero $H'' > 0$ in modo che sia

$$g(H'') < \frac{1}{36\Omega}.$$

Allora o è $\frac{H'}{L} > H''$, vale a dire $L < \frac{H'}{H''}$, oppure è $\frac{H'}{L} \leq H''$ e quindi

$$g\left(\frac{H'}{L}\right) \leq g(H'')$$

e dalla (30) segue

$$L < \frac{2\sqrt{3}\Omega}{1 - 36\Omega g(H'')};$$

⁽¹⁵⁾ È ovvio che, nell'ipotesi che sia verificata la (29), è implicita la condizione che esiste finito l'integrale che figura al primo membro della (29) stessa.

pertanto qualunque curva dell'insieme J ha lunghezza inferiore al più grande dei due numeri

$$\frac{H'}{H''}, \quad \frac{2\sqrt{3}\Omega}{1-36\Omega g(H'')}.$$

OSSERVAZIONE. - È notevole il caso particolare $G(t) \equiv t^2$, nel quale la (29) assume la forma

$$(31) \quad \int_0^L [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)] ds \leq H'.$$

19. **Corollari.** - Nel teorema del n. 16 la condizione, che le curve della classe $K^{(2)}$ abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso, può essere soppressa, se è verificata almeno una delle seguenti ipotesi:

(I) *L'integrale $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ è definito positivo.*

(II) *Esiste un $h > 0$ in modo che, per ogni $t \geq 0$, sia*

$$(32) \quad \Phi(t) \geq ht.$$

(III) *Per la funzione $\Phi(t)$ sono verificate anche le ipotesi (cui soddisfa la funzione $G(t)$) dell'enunciato del n. 18.*

Infatti, se è verificata l'ipotesi (I), basta ripetere il ragionamento fatto per gli integrali curvilinei del piano ⁽¹⁶⁾.

Nell'ipotesi (II), siccome il limite inferiore i di $\mathcal{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ nella classe $K^{(2)}$ è non negativo, basta estrarre da $K^{(2)}$ una successione minimizzante di curve ordinarie

$$C_n^{(2)}: \quad x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad z = z_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Se è $L_n > 0$, ricordando la (2) del n. 3, in virtù delle (32) e (23) si ottiene

$$\int_0^{L_n} \sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} ds = \int_0^{L_n} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} ds \leq \frac{1}{h} \int_0^{L_n} F ds \leq \frac{i+1}{h},$$

e quindi in virtù del lemma del n. 17 tutte le curve della successione minimizzante considerata hanno lunghezza inferiore a un numero fisso.

Infine, nell'ipotesi (III), si procede in modo analogo e si conclude anche più rapidamente in virtù del n. 18.

⁽¹⁶⁾ Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 16.

OSSERVAZIONE. - È evidente che la funzione F , considerata nell'esempio che figura alla fine del n. 16, non soddisfa ad alcuna delle tre condizioni enunciate nel presente n°.

20. **Un'estensione del teorema del n. 16.** - *a) Il teorema del n. 16 è ancora valido, quando le curve della classe considerata non hanno lunghezza inferiore a un numero fisso, purchè tutte le curve ordinarie $C^{(2)}$, per le quali è $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)} \leq 0$, abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso.*

La dimostrazione è identica a quella sviluppata per gli integrali curvilinei del piano ⁽¹⁷⁾, tenendo presente quanto abbiamo rilevato alla fine della dimostrazione del n. 16 del presente lavoro.

b) In particolare è verificata la condizione del capoverso a), se, ferme restando le ipotesi dell'enunciato del n. 16, la funzione $\Phi(t)$ è non negativa e si annulla soltanto per $t = 0$.

OSSERVAZIONE. - Alcuni dei risultati del n. 19 si possono ottenere anche come conseguenza del presente n°.

21. **Secondo teorema di esistenza.** *Supponiamo che: 1°) l'integrale $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ sia quasi-regolare positivo; 2°) esistano m punti distinti del campo A_0 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , ..., (x_m, y_m, z_m) , e $m + 2$ numeri positivi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \omega, h_0$ con ω maggiore di tutti i $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, in modo che in tutto il campo A_0 , per ogni terna (x', y', z') normalizzata e per qualunque terna u_2, v_2, w_2 sia verificata la disuguaglianza*

$$(33) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2) \geq h_0 \left[\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \right]^{\mu_1} \dots \\ \dots \left[\sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 + (z-z_m)^2} \right]^{\mu_m} \left(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \right)^{1+\omega}.$$

La dimostrazione si sviluppa in modo analogo al caso degli integrali curvilinei del piano ⁽¹⁸⁾, introducendo alcune varianti che vengono segnalate.

α) Innanzi tutto ci limitiamo al caso in cui i punti (x_j, y_j, z_j) , $(j = 1, 2, \dots, m)$ si riducono a uno solo, che viene supposto coincidente con l'origine delle coordinate, cosicchè la (33) assume la forma più semplice

$$(33') \quad F \geq h \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{\mu} \left(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \right)^{1+\omega},$$

ove h, μ, ω sono numeri positivi con $\omega > \mu$.

⁽¹⁷⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 19, pag. 37. Per ragioni di chiarezza rileviamo che, se il limite inferiore i di $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ nella classe considerata è negativo, è ovvio che possiamo limitarci a considerare curve della successione minimizzante le cui lunghezze, per ipotesi, risultano inferiori a un numero fisso, mentre se è $i \geq 0$, posto $i + 1 = M$, risulta $M > 0$.

⁽¹⁸⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 21, pag. 39.

β) Proseguendo come al luogo citato, estratta dalla classe $K^{(2)}$ una successione minimizzante di curve ordinarie

$$C_n^{(2)}: \quad x=x_n(s), \quad y=y_n(s), \quad z=z_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_n), \quad n=1, 2, \dots,$$

si distinguono tre casi del tutto analoghi quelli visti nel caso degli integrali curvilinei del piano, intendendo che $(0; r')$ sia la sfera di raggio r' , avente il centro nell'origine delle coordinate.

Se è verificato il caso I), il teorema è senz'altro dimostrato, perchè siamo nelle condizioni del n. 20, b).

γ) Per esaminare i casi II) e III) basta dimostrare che, fissato comunque un numero positivo $\eta < \frac{1}{\sqrt{3}}$, è possibile determinare un numero $r > 0$

in modo che sopra ciascun arco continuo di ogni curva ordinaria $C_n^{(2)}$, tutto contenuto nella sfera $(0, r)$, l'oscillazione di ciascuna delle derivate $x'_n(s)$, $y'_n(s)$, $z'_n(s)$ sia minore di η . A tal uopo, posto $\frac{i+1}{h} = H$, (ove i è il limite inferiore di $\mathcal{J}_{C_n^{(2)}}^{(2)}$ nella classe $K^{(2)}$) basta scegliere

$$(34) \quad r < \left(1 - \frac{\mu}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\omega-\mu}} \frac{\eta^{\frac{1+\omega}{\omega-\mu}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta \right]^{\frac{\omega}{\omega-\mu}}}{2^{1+\frac{2\omega}{\omega-\mu}} H^{\frac{1}{\omega-\mu}}}.$$

Infatti, supposto che l'asserto non sia vero, esisterà almeno un arco continuo $G^{(n)} \equiv (s_1^{(n)} \leq s \leq s_2^{(n)})$ di $C_n^{(2)}$, tutto costituito di punti appartenenti alla sfera $(0; r)$ e tale che sia verificata almeno una delle uguaglianze

$$|x'_n(s_2^{(n)}) - x'_n(s_1^{(n)})| = \eta, \quad |y'_n(s_2^{(n)}) - y'_n(s_1^{(n)})| = \eta, \quad |z'_n(s_2^{(n)}) - z'_n(s_1^{(n)})| = \eta.$$

Pertanto risulta

$$\eta \leq \sqrt{\left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} x''_n(s) ds \right]^2 + \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} y''_n(s) ds \right]^2 + \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} z''_n(s) ds \right]^2},$$

e quindi anche, per una nota disuguaglianza ⁽¹⁸⁾ e per la (2),

$$(35) \quad \eta \leq \int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \sqrt{x_n''(s)^2 + y_n''(s)^2 + z_n''(s)^2} ds = \int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} ds;$$

⁽¹⁸⁾ Vedi per esempio HARDY-POLYA-LITTLEWOOD, *Inequalities*, « Cambridge University Press » (1952), Cap. VI, teorema 201, pag. 148.

e si prosegue in modo noto ⁽²⁰⁾, moltiplicando e dividendo per $\left[\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}\right]^{\frac{\mu}{1+\omega}}$ la funzione integranda che figura nell'ultimo membro della (35), e usufruendo della (33').

Successivamente, posto $\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} - \eta$, si definiscono come al luogo citato $\delta_n, s_0^{(n)}, s_{1,0}^{(n)}, s_{2,0}^{(n)}$ ⁽²¹⁾, mentre nella maggiorazione degli integrali che figurano al secondo membro dell'uguaglianza

$$\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left[\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} = \int_{s_1^{(n)}}^{s_{1,0}^{(n)}} + \int_{s_{1,0}^{(n)}}^{s_0^{(n)}} + \int_{s_0^{(n)}}^{s_{2,0}^{(n)}} + \int_{s_{2,0}^{(n)}}^{s_2^{(n)}}$$

occorre tener presente che:

i) per ogni s di $(s_1^{(n)}, s_{1,0}^{(n)})$, siccome la distanza tra i punti dell'arco $G^{(n)}$ corrispondenti ai valori s e $s_0^{(n)}$ del parametro risulta ⁽²²⁾ non inferiore a $(s_0^{(n)} - s)\tau$, è

$$\sqrt{x_n^2(s) + y_n^2(s) + z_n^2(s)} \geq (s_0^{(n)} - s)\tau - \delta_n;$$

⁽²⁰⁾ Cfr. la (12) del luogo cit. in ⁽¹⁸⁾.

⁽²¹⁾ Vedi le (13) e (14) del luogo cit. in ⁽¹⁸⁾.

⁽²²⁾ Quanto abbiamo asserito nel testo è conseguenza immediata della seguente proposizione:

Se lungo l'arco di curva continua e rettificabile

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (s' \leq s \leq s'')$$

(ove il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato e le funzioni $x(s), y(s), z(s)$ sono continue in tutto (s', s'') assieme alle loro derivate del primo ordine) l'oscillazione di ciascuna delle derivate prime è non superiore a un numero positivo $\eta < \frac{1}{\sqrt{3}}$, allora, chiamata Δ la distanza tra i punti terminali dell'arco considerato, risulta

$$\Delta \geq (s'' - s') \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta \right).$$

Infatti, siccome almeno uno dei tre numeri $|x'(s')|, |y'(s')|, |z'(s')|$ è non inferiore a $1/\sqrt{3}$, lungo tutto l'arco (s', s'') è verificata almeno una delle disuguaglianze

$$|x'(s)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} - \eta, \quad |y'(s)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} - \eta, \quad |z'(s)| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} - \eta.$$

Pertanto, essendo in virtù del teorema del valor medio

$$|x(s'') - x(s')| = (s'' - s') |x'(\tilde{s}_1)|, \quad |y(s'') - y(s')| = (s'' - s') |y'(\tilde{s}_2)|, \\ |z(s'') - z(s')| = (s'' - s') |z'(\tilde{s}_3)|,$$

ove $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3$ sono tre opportuni valori interni a (s', s'') , l'asserto è evidente.

ii) per ogni s di $(s_{2,0}^{(n)}, s_2^{(n)})$ è in modo analogo

$$\sqrt{x_n^2(s) + y_n^2(s) + z_n^2(s)} \geq (s - s_0^{(n)})\tau - \delta_n;$$

iii) per ogni s di $(s_{1,0}^{(n)}, s_{2,0}^{(n)})$ risulta, come al luogo più volte citato,

$$\sqrt{x_n^2(s) + y_n^2(s) + z_n^2(s)} \geq \delta_n \geq |s_0^{(n)} - s|\tau.$$

Non rimane che proseguire come nel caso degli integrali curvilinei del piano, con l'unica avvertenza di usufruire ulteriormente dell'osservazione che abbiamo fatta in ⁽²²⁾, per provare quanto abbiamo asserito all'inizio del presente capoverso γ) e per concludere che, se ha luogo il caso II), è dimostrata l'esistenza del minimo, il quale è fornito dalla curva costituita dall'origine delle coordinate.

δ) Per esaminare il III) caso si fa, nel presente capoverso, l'ipotesi supplementare che tutte le curve della sottosuccessione minimizzante considerata abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso L' . Si assume $\eta = 1:2\sqrt{3}$ subordinando ad esso un $\bar{r} > 0$ in modo che, in base al capoverso γ), su ciascun arco continuo $G_*^{(n)}$ di ogni curva $C_n^{(2)}$, il quale sia tutto contenuto nella sfera $(0, \bar{r})$, ciascuna delle derivate $x'_n(s)$, $y'_n(s)$, $z'_n(s)$ vari in un intervallo avente ampiezza minore di $1:2\sqrt{3}$.

Mediante il procedimento seguito nel caso degli integrali curvilinei del piano (cui si arrecano le varianti suggerite dal capoverso γ) del presente n.º)

si prova l'equiassoluta continuità degli integrali $\int_0^s \sqrt{x_n''/2(s) + y_n''/2(s) + z_n''/2(s)} ds$,

relativi alle curve della sottosuccessione minimizzante considerata, da cui segue sia l'equiassoluta continuità delle derivate $x'_n(s)$, $y'_n(s)$, $z'_n(s)$, sia, in virtù dell'ipotesi ausiliaria fatta all'inizio del presente capoverso, l'esistenza di un numero Λ , tale che per tutte le curve della sottosuccessione minimizzante considerata risulta

$$\int_0^{L_n} \sqrt{x_n''/2(s) + y_n''/2(s) + z_n''/2(s)} ds \leq \Lambda.$$

Pertanto, usufruendo dei risultati dei nn. 14, c) e 13, si prova l'esistenza del minimo assoluto.

ε) Infine, come nel caso degli integrali curvilinei del piano si elimina l'ipotesi supplementare fatta all'inizio del capoverso δ).

OSSERVAZIONE. - Si può rilevare ⁽²³⁾ che, se uno dei numeri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ è maggiore o uguale a ω , il teorema del presente n.º non è più valido.

⁽²³⁾ Basta riprendere i nostri esempi del n. 22 del luogo cit. in ⁽²⁾.

CAP. II - PROBLEMI DEL TERZO ORDINE

§ 1. Generalità

22. **La funzione F .** - a) Ferma restando la definizione di campo A (Cap. I, n. 1) supponiamo che $F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3)$ sia una funzione definita e continua assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine $F_{u_i}, F_{v_i}, F_{w_i}$ in ogni punto (x, y, z) del campo A , per ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ e per tutti i valori reali di $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3$, che sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y', z' , e che inoltre sia

$$F(x, y, z; 0, 0, 0; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) = 0.$$

b) In modo del tutto analogo (Cap. I, n. 2, b)) si definisce per ogni (x, y, z) del campo A , per ogni terna (di numeri non tutti nulli) x', y', z' e per tutti i valori reali di $u_2, v_2, w_2; \bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3; u_3, v_3, w_3$, la funzione (di WEIERSTRASS)

$$\mathcal{G}(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; \bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3; u_3, v_3, w_3).$$

23. **Le curve ordinarie $C^{(3)}$ e l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$.** - Chiamiamo *curva ordinaria* $C^{(3)}$ ogni curva rettificabile

$$C^{(3)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

(ove s è la lunghezza dell'arco rettificato), per la quale le funzioni $x(s), y(s), z(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate dei primi due ordini, ogni punto $(x(s), y(s), z(s))$ appartiene al campo A ed esiste finito l'integrale ⁽²⁴⁾

$$\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)} = \int_{C^{(3)}} F(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) ds,$$

ove per ragioni di brevità si intende che (assieme alle (1) del Cap. I, n. 3) sia

$$(36) \quad u_3 = x'(s)y''(s) - x'''(s)y'(s), \quad v_3 = y'(s)z''(s) - y'''(s)z'(s), \quad w_3 = z'(s)x''(s) - z'''(s)x'(s)$$

od anche

$$(36') \quad u_3 = \frac{d}{ds} \frac{\nu}{R}, \quad v_3 = \frac{d}{ds} \frac{\lambda}{R}, \quad w_3 = \frac{d}{ds} \frac{\mu}{R}.$$

Inoltre conveniamo ancora che ogni curva costituita da un solo punto è una curva ordinaria $C^{(3)}$, per la quale è $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)} = 0$.

⁽²⁴⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit in (1), n. 7, pag. 282. Per la forma che assume l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$, quando il parametro non è l'arco rettificato, rinviamo al luogo ora citato n. 6, pag. 279.

OSSERVAZIONE. - Per il seguito è utile ricordare assieme alla (2) (Cap. I, n. 3), l'identità (nella quale le derivate sono calcolate rispetto all'arco rettificato)

$$(37) \quad u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = (x'y''' - x''y')^2 + (y'z''' - y''z')^2 + (z'x''' - z''x')^2 = \\ = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

ossia

$$(38) \quad u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = \frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2,$$

ove $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{T}$ sono la flessione e la torsione.

24. **Definizioni.** - a) L'integrale $\mathfrak{I}_{C^{(s)}}^{(s)}$ viene chiamato *quasi-regolare positivo*, se risulta

$$\mathfrak{E}(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; \bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3; u_3, v_3, w_3) \geq 0$$

in ogni punto (x, y, z) del campo A , per ogni terna (x', y', z') e per tutti i valori reali di $u_2, v_2, w_2; \bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{w}_3; u_3, v_3, w_3$.

Le definizioni di integrale *quasi-regolare positivo seminormale*, di integrale *quasi-regolare positivo normale* e così pure quella di integrale *definito positivo* [semidefinito positivo] si deducono in modo ovvio da quelle del Cap. I, n. 4.

b) Pure dal luogo ora citato si deduce la definizione di integrale *regolare*, supponendo in più, nel presente capoverso, che esistano finite e continue anche le derivate parziali del secondo ordine $F_{u_3 u_3}, F_{v_3 v_3}, F_{w_3 w_3}, F_{u_3 v_3}, F_{u_3 w_3}, F_{v_3 w_3}$ (in luogo delle $F_{u_2 u_2}$, ecc.).

25. **Intorno $(\rho)^3$ di una curva ordinaria $C^{(3)}$.** - a) Data una curva ordinaria $C_0^{(3)}$ avente lunghezza $L_0 > 0$, noi diciamo che un'altra curva ordinaria $C^{(3)}$ avente lunghezza L appartiene all'intorno $(\rho)^3$ di $C_0^{(3)}$, quando, oltre a tutte le condizioni indicate al n. 5, a) del Cap. I, sono verificate per qualunque s di $(0, L_0)$ anche le disuguaglianze

$$(39) \quad \left| \frac{d^2 x_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2 x(\sigma)}{d\sigma^2} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho, \quad \left| \frac{d^2 y_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2 y(\sigma)}{d\sigma^2} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho, \\ \left| \frac{d^2 z_0(s)}{ds^2} - \left[\frac{d^2 z(\sigma)}{d\sigma^2} \right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho.$$

b) Se la curva $C_0^{(s)}$ è costituita da un solo punto, la curva ordinaria $C^{(3)}$ di lunghezza $L > 0$ appartiene all'intorno $(\rho)^3$ di $C_0^{(3)}$, se, oltre a tutte le condizioni indicate al n. 5, b) del Cap. I, sono verificate, per qualunque coppia di valori distinti σ_1, σ_2 di $(0, L)$, anche le disuguaglianze

$$(40) \quad |x''(\sigma_1) - x''(\sigma_2)| \leq \rho, \quad |y''(\sigma_1) - y''(\sigma_2)| \leq \rho, \quad |z''(\sigma_1) - z''(\sigma_2)| \leq \rho.$$

Infine nulla è da aggiungere a quanto è stato detto per le curve $C^{(2)}$ nel caso, in cui entrambe le curve $C_0^{(3)}$ e $C^{(3)}$ sono costituite da un solo punto.

c) È ovvio che le osservazioni I e II del n. 5 del Cap. I sono valide, a maggior ragione, nelle presenti condizioni.

26. Semicontinuità e continuità dell'integrale $\mathfrak{J}_{C^{(3)}}^{(3)}$. Classe completa di curve di ordine 3. — Queste definizioni si deducono da quelle dei nn. 6 e 7 del Cap. I, sostituendo ovunque 3 al posto di 2.

§ 2. La semicontinuità.

27. Un teorema di continuità. — Se P_i , ($i=0, 1, 2, 3$) sono quattro costanti, l'integrale

$$\mathfrak{J}_{C^{(3)}}^{(3)} = \int_{C^{(3)}} [P_0 + P_1 u_3 + P_2 v_3 + P_3 w_3] ds$$

è una funzione continua.

Infatti, considerata una qualunque curva ordinaria

$$C_0^{(3)}: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

sia

$$C^{(3)}: \quad x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = z(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq L),$$

(ove i parametri s e σ rappresentano le lunghezze del rispettivo arco rettificato) una curva ordinaria appartenente all'intorno $(\rho)^3$ di $C_0^{(3)}$, e distinguiamo due casi:

(I) Se è $L_0 > 0$, siccome $x'y''' - x''y'$ è una derivata esatta, abbiamo mediante un ovvio artificio

$$\begin{aligned} & \int_0^L [x'(\sigma)y'''(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)] d\sigma - \int_0^{L_0} [x'_0(s)y_0'''(s) - x_0''(s)y_0'(s)] ds = \\ &= [x'(\sigma)y''(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)]_0^L - [x'_0(s)y_0''(s) - x_0''(s)y_0'(s)]_0^{L_0} = \\ &= x'(L)[y''(L) - y_0''(L_0)] + y_0''(L_0)[x'(L) - x_0'(L_0)] - y'(L)[x''(L) - x_0''(L_0)] - \\ &- x_0''(L_0)[y'(L) - y_0'(L_0)] - x'(0)[y''(0) - y_0''(0)] - y_0''(0)[x'(0) - x_0'(0)] + \\ &+ y'(0)[x''(0) - x_0''(0)] + x_0''(0)[y'(0) - y_0'(0)], \end{aligned}$$

e quindi, chiamato H il massimo dei valori assoluti delle derivate $x_0''(s)$, $y_0''(s)$, $z_0''(s)$ nell'intervallo $(0, L_0)$, ricordando che il valore assoluto di ogni

derivata del primo ordine è non superiore all'unità e usufruendo del n. 25, a), si ottiene immediatamente

$$\left| \int_0^L [x'(\sigma)y'''(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)]d\sigma - \int_0^L [x_0'(s)y_0'''(s) - x_0''(s)y_0'(s)]ds \right| \leq 4(1+H)\rho.$$

Pertanto è evidente in qual modo si prova l'asserto.

(II) Nel caso $L_0 = 0$, abbiamo con un immediato artificio

$$(41) \quad \int_0^L [x'(\sigma)y'''(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)]d\sigma = x'(L)[y''(L) - y''(0)] - y'(L)[x''(L) - x''(0)] + \\ + y''(0)[x'(L) - x'(0)] - x''(0)[y'(L) - y'(0)].$$

In virtù del teorema del valor medio esistono almeno tre valori η_1, η_2, η_3 di $(0, L)$, per i quali valgono le uguaglianze

$$(42) \quad x'(L) - x'(0) = Lx''(\eta_1), \quad y'(L) - y'(0) = Ly''(\eta_2), \quad z'(L) - z'(0) = Lz''(\eta_3),$$

e pertanto per il n. 25, b) sussistono le disuguaglianze

$$(43) \quad L|x''(\eta_1)| \leq \rho, \quad L|y''(\eta_2)| \leq \rho, \quad L|z''(\eta_3)| \leq \rho.$$

Ciò premesso, per le (42) abbiamo

$$y''(0)[x'(L) - x'(0)] - x''(0)[y'(L) - y'(0)] = L[x''(\eta_1)y''(0) - y''(\eta_2)x''(0)] = \\ = L[\{x''(\eta_1) - x''(0)\}y''(0) - \{y''(\eta_2) - y''(0)\}x''(0)],$$

e anche per il n. 25, b)

$$|y''(0)[x'(L) - x'(0)] - x''(0)[y'(L) - y'(0)]| \leq \{L|y''(0)| + L|x''(0)|\}\rho.$$

D'altra parte, essendo in virtù delle (43)

$$L|x''(0)| \leq L|x''(0) - x''(\eta_1)| + L|x''(\eta_1)| \leq L\rho + \rho,$$

$$L|y''(0)| \leq L|y''(0) - y''(\eta_2)| + L|y''(\eta_2)| \leq L\rho + \rho,$$

in definitiva, supposto $\rho \leq 1: 2\sqrt{3}$, usufruendo del n. 25, c) si ottiene

$$|y''(0)[x'(L) - x'(0)] - x''(0)[y'(L) - y'(0)]| \leq 2(1+L)\rho^2 \leq 2(1+4\sqrt{3}\rho)\rho^2,$$

e dalla (41) segue immediatamente

$$\left| \int_0^L [x'(\sigma)y'''(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)]d\sigma \right| \leq 2\rho + 2(1+4\sqrt{3}\rho)\rho^2.$$

Pertanto, siccome $\mathfrak{I}_{C_0}^{(3)} = 0$ anche in questo caso l'asserto è evidente.

OSSERVAZIONE. - Si può fare un'osservazione analoga a quella del Cap. I, n. 8.

28. **Lemma** - È evidente la forma nella quale il lemma del Cap. I, n. 10 si estende a ogni integrale $\mathfrak{I}_{C^{(3)}}^{(s)}$ quasi-regolare positivo normale.

29. **Un teorema di semicontinuità.** - *Ogni integrale $\mathfrak{I}_{C^{(3)}}^{(s)}$ quasi-regolare positivo normale è semicontinuo inferiormente.*

Per provare l'asserto basta adattare la nostra precedente dimostrazione ⁽²⁵⁾, tenendo conto del lemma del n. 28 e del modo nel quale abbiamo ragionato al n. 27.

30. - **Un'estensione del teorema del n. 29.** - *Sia $\mathfrak{I}_{C^{(3)}}^{(s)}$ un integrale quasi-regolare positivo e supponiamo che esistano due numeri $N_0 > 0$, N in modo che in ogni punto (x, y, z) del campo A , per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per tutti i numeri reali $u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sia verificata la disuguaglianza*

$$(44) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) \geq N_0[|u_3| + |v_3| + |w_3|] + N.$$

Allora l'integrale $\mathfrak{I}_{C^{(3)}}^{(s)}$ è semicontinuo inferiormente.

Per la dimostrazione si può procedere in modo quasi identico al Cap. I, n. 12.

ESEMPIO. - Se non è verificata la disuguaglianza (44) il teorema di semicontinuità può cadere in difetto, come risulta dal seguente esempio.

Consideriamo l'integrale quasi-regolare positivo

$$\mathfrak{I}_{C^{(3)}}^{(s)} = \int_{C^{(3)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [u_3^2 + e^{-v_3 w_3 + w_3 v_3}] ds$$

e la classe di eliche circolari

$$C_n^{(3)}: \begin{cases} x = x_n(s) \equiv r_n \cos\left(\frac{a_n}{r_n} s\right) \\ y = y_n(s) \equiv r_n \sin\left(\frac{a_n}{r_n} s\right) \\ z = z_n(s) \equiv b_n s, \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 2\pi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

ove

$$a_n = \sin \frac{1}{n}, \quad b_n = \cos \frac{1}{n}, \quad r_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{4}}}.$$

⁽²⁵⁾ Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ⁽²⁾, n. 9, pag. 28, e anche L. TONELLI, luogo cit. in ⁽⁹⁾.

Si verifica immediatamente che, scelto $\rho > 0$ ad arbitrio, per ogni n sufficientemente grande le curve $C_n^{(s)}$ appartengono all'intorno $(\rho)^s$ della curva

$$C_0^{(s)}: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = s, \quad (0 \leq s \leq 2\pi),$$

per la quale è

$$\mathcal{J}_{C_0^{(s)}}^{(s)} = \int_0^{2\pi} e^0 ds = 2\pi.$$

D'altra parte è

$$\mathcal{J}_{C_n^{(s)}}^{(s)} = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{a_n^5}{r_n^3} b_n^2} ds = 2\pi e^{-\frac{a_n^5}{r_n^3} b_n^2},$$

e siccome

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^5}{r_n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{21}{4}} \sin^5 \frac{1}{n} = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2 = 1,$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_{C_n^{(s)}}^{(s)} = 0,$$

e si conclude che l'integrale $\mathcal{J}_{C_n^{(s)}}^{(s)}$ non è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{(s)}$.

31. Un caso particolare del teorema del n. 29. - Sia K_0 una classe di curve ordinarie

$$C^{(s)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

e sia Λ un numero positivo tale che per qualunque curva di K_0 sia verificata la disuguaglianza

$$(45) \quad \int_0^L \sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} ds \leq \Lambda.$$

Allora, se $\mathcal{J}_{C^{(s)}}^{(s)}$ è un integrale quasi regolare positivo, $\mathcal{J}_{C^{(s)}}^{(s)}$ risulta semicontinuo inferiormente nella classe K_0 .

Per provare l'asserto basta procedere come nel Cap. I, n. 13.

OSSERVAZIONE. - La classe di curve considerata nell'esempio del n. 30 non soddisfa alla disuguaglianza (45). Infatti, tenute presenti le (36), si ottiene

$$\int_0^n \sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a_n^3}{r_n^2} b_n ds = 2\pi \frac{a_n^3}{r_n^2} b_n = 2\pi n^{\frac{7}{2}} \sin^3 \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n},$$

il cui limite, per $n \rightarrow +\infty$, è $+\infty$.

32. Estensione della semicontinuità all'infinito. - Ci limitiamo a rilevare che le proposizioni del Cap. I, n. 14 si estendono agli integrali $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ nelle seguenti condizioni:

- a) *L'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ è quasi-regolare positivo normale.*
- b) *L'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ è quasi-regolare positivo e la funzione F soddisfa alla disuguaglianza (44).*
- c) *L'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ è quasi-regolare positivo e si considera una classe K_0 di curve ordinarie $C^{(3)}$, per le quali è verificata la disuguaglianza (45).*

§ 3. Esistenza dell'estremo assoluto.

33. Il campo A_0 . - Supponiamo, come nel Cap. I, n. 15, che A_0 sia un campo limitato ⁽²⁶⁾.

34. Primo teorema di esistenza. - Supponiamo che: 1°) l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ sia quasi-regolare positivo; 2°) esista una funzione $\Phi(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$ inferiormente limitata e tale che per $t \rightarrow +\infty$ sia $\Phi(t):t \rightarrow \infty$, in modo che in tutto il campo A_0 , per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per tutti i numeri reali $u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sia

$$(46) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) \geq \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}).$$

Allora esiste il minimo assoluto di $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ in ogni classe $K^{(3)}$, completa di ordine 3, di curve ordinarie $C^{(3)}$, soddisfacente alle seguenti condizioni:

- α) *Esiste un numero $L' > 0$, tale che ogni curva della classe considerata ha lunghezza non superiore a L' .*
- β) *Esiste un numero $M > 0$, tale che su ogni curva della classe considerata la flessione è non superiore a M .*

⁽²⁶⁾ Per ragione analoga a quella asserita in ⁽¹¹⁾ non ci occupiamo del caso, in cui il campo A dello spazio (x, y, z) non è limitato.

La dimostrazione si attiene a un noto procedimento, tenendo presente che il limite inferiore di $\mathcal{J}_{C^{(3)}}^{(3)}$ nella classe $K^{(3)}$ è finito e considerando una successione minimizzante, estratta da $K^{(3)}$, di curve ordinarie

$$C_n^{(3)}: \quad x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad z = z_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

tali cioè che sia

$$\mathcal{J}_{C_n^{(3)}}^{(3)} \leq i + \frac{1}{n},$$

intendendo che nel caso $i < 0$ si considerano soltanto le curve $C_n^{(3)}$ con $n > \bar{n}$, ove $\bar{n}$ è il minimo intero positivo per il quale $\bar{n} > -\frac{2}{i}$.

Al solito, se è $i = 0$ e se tra le curve della successione minimizzante ce n'è almeno una avente lunghezza nulla, essa evidentemente fornisce il minimo di $\mathcal{J}_{C^{(3)}}^{(3)}$ nella classe $K^{(3)}$.

Nel caso $i \neq 0$ possiamo supporre, per ogni n , $L_n > 0$, perchè le curve aventi lunghezza nulla non interessano.

In virtù dell'ipotesi che il campo A_0 sia limitato, delle disuguaglianze $|x'_n(s)| \leq 1$, $|y'_n(s)| \leq 1$, $|z'_n(s)| \leq 1$ e delle condizioni (α) e (β) si conclude immediatamente che le funzioni $\{x_n(s)\}$, $\{y_n(s)\}$, $\{z_n(s)\}$ e le loro derivate del primo ordine sono equiassolutamente continue e anche ugualmente limitate. Di questa ultima proprietà godono (in virtù dell'ipotesi (β)) anche le derivate seconde $\{x''_n(s)\}$, $\{y''_n(s)\}$, $\{z''_n(s)\}$, e per concludere che esse sono equiassolutamente continue basta riprendere un noto ragionamento che, nel presente caso, deve essere completato nel seguente modo:

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, e considerato un numero finito di intervalli

$$(47) \quad a_j^{(n)} \leq s \leq b_j^{(n)}, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

a due a due distinti e appartenenti al rispettivo intervallo $(0, L_n)$, sia t^* un numero positivo tale che per $t > t^*$ sia

$$(48) \quad \frac{\Phi(t)}{t} > \frac{2(|i_0| + 1)}{\varepsilon},$$

ove, indicato con Φ_0 il limite inferiore di $\Phi(t)$, si è posto $i_0 = i + L'|\Phi_0|$. Sia E_n il pseudointervallo costituito da quei valori di s appartenenti agli intervalli (47), per i quali è $\sqrt{x_n''(s) + y_n''(s) + z_n''(s)} \leq t^*$, e sia $C(E_n)$ il complementare di E_n rispetto agli intervalli (47).

Considerate, per fissare le idee, le derivate $\{x_n''(s)\}$ abbiamo in modo ovvio

$$\begin{aligned}
 (49) \quad \sum_{j=1}^m |x_n''(b_j^{(n)}) - x_n''(a_j^{(n)})| &\leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j^{(n)}}^{b_j^{(n)}} |x_n'''(s)| ds \leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j^{(n)}}^{b_j^{(n)}} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2} ds \leq \\
 &\leq \int_{E_n} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2} ds + \int_{C(E_n)} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2 - [x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2]^2} ds + \\
 &\quad + \int_{C(E_n)} (x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2) ds,
 \end{aligned}$$

e anche, tenuta presente l'identità (37), usufruendo delle disuguaglianze (48) e (46) e dell'ipotesi (β)

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m |x_n''(b_j^{(n)}) - x_n''(a_j^{(n)})| &\leq t^* m(E_n) + \frac{\varepsilon}{2(|i_0| + 1)} \left\{ \int_0^{L_n} F ds + |\Phi_0| L_n \right\} + M^2 m(C(E_n)) < \\
 &< (t^* + M^2) \sum_{j=1}^m (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) + \frac{\varepsilon}{2},
 \end{aligned}$$

da cui segue

$$\sum_{j=1}^m |x_n''(b_j^{(n)}) - x_n''(a_j^{(n)})| < \varepsilon,$$

se gli intervalli (47) hanno lunghezza complessiva non superiore a $\varepsilon : 2[t^* + M^2]$.

Per provare il teorema enunciato basta un'immediata estensione di un nostro precedente ragionamento ⁽²⁷⁾, tenendo presente che possiamo usufruire dei risultati dei nn. 32, b) e 30, perchè, in analogia a quanto abbiamo rilevato alla fine della dimostrazione del n. 16 del Cap. I, risulta

$$F \geq \frac{N'_0}{\sqrt{2}} [|u_3| + |v_3| + |w_3|] - |N'| - N'_0 t_0.$$

OSSERVAZIONE I. - Se non è verificata la condizione (α), il teorema del presente n.º può cadere in difetto, come risulta dal seguente esempio: Sia

$$\begin{aligned}
 A_0 &\equiv [-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2], \\
 F &\equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [z^2 + u_3^2 + v_3^2 + w_3^2],
 \end{aligned}$$

(27) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in (2), n. 15, pag. 33.

e consideriamo la classe di curve ordinarie

$$C_n^{(3)}: \begin{cases} x = \frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n}{n+1}s\right) \\ y = \frac{n+1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}s\right) \\ z = \frac{1}{n}, \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 2\pi(n+1)), \quad n = 1, 2, \dots$$

rilevando che per tale classe di curve è soddisfatta la condizione (β) per $M = 1$. Risulta

$$\int_{C_n^{(3)}} F ds = \int_0^{2\pi(n+1)} \frac{1}{n^2} ds = 2\pi \frac{n+1}{n^2}$$

e quindi nella classe considerata, che è completa di ordine 3, non c'è alcuna curva che renda minimo l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(3)}}$.

OSSERVAZIONE II. - Il teorema del presente n.º può cadere in difetto, se si considera una classe di curve, per la quale non è verificata la condizione (β) , come risulta dal seguente esempio.

Consideriamo ancora il campo A_0 e la funzione F indicati nell'Osservazione I e la seguente classe di curve ordinarie

$$C_n^{(3)}: \begin{cases} x = \frac{1}{n} \cos ns \\ y = \frac{1}{n} \operatorname{sen} ns \\ z = \frac{1}{n}, \end{cases} \quad (0 \leq s \leq 2\pi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Risulta

$$\mathcal{J}_{C_n^{(3)}}^{(3)} = \frac{2\pi}{n^2},$$

e nella classe considerata, la quale è completa di ordine 3, non esiste alcuna curva che renda minimo l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(3)}}$.

35. Corollario. - a) È immediato che nel teorema del n. 34 l'ipotesi (α) può essere soppressa, se l'integrale $\mathcal{J}_{C^{(3)}}$ è definito positivo.

Infatti basta ripetere la nostra dimostrazione già citata in ⁽¹⁶⁾, tenendo presente l'ipotesi (β) .

b) È pure evidente, in virtù del lemma del n. 17 del Cap. I, che, all'ipo-

tesi (α) può essere sostituita la seguente ⁽²⁸⁾: *esiste un numero $H > 0$ in modo che per qualunque curva della classe $K^{(3)}$ è verificata la disuguaglianza*

$$\int_0^L \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \, ds \leq H.$$

c) Inoltre il teorema del n. 34 è valido anche quando non è verificata la disuguaglianza (α), purchè tutte le curve ordinarie $C^{(3)}$, per le quali è $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)} \leq 0$, abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso.

A tal uopo basta estendere il nostro ragionamento citato in ⁽¹⁷⁾.

d) OSSERVAZIONE. - È da rilevare che, a differenza da quanto avviene per gli integrali $\mathcal{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ (cfr. Cap. I, n. 20, b)), l'ipotesi che la funzione $\Phi(t)$ sia non negativa e si annulli soltanto per $t = 0$ non è affatto sufficiente, affinché sia verificata la condizione del capoverso c) ⁽⁹⁾.

Ciò è posto in piena luce dalle seguenti considerazioni, le quali illustrano l'efficacia che assume la condizione (γ), che viene introdotta nel successivo n. 35, quando viene posta nella forma più determinata (γ_0) del n. 38. Sia, per semplicità,

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \, \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}),$$

ove $\Phi(t) \geq 0$ e si annulla soltanto per $t = 0$. È evidentemente

$$\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)} = 0,$$

per qualunque curva ordinaria $C^{(3)}$ soddisfacente per quasi tutti gli s alla condizione

$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = 0$$

ossia, per le (36), al sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(50) \quad \begin{cases} x'y''' - x''y' = 0 \\ y'z''' - y''z' = 0 \\ z'x''' - z''x' = 0, \end{cases}$$

dalle quali si deduce

$$\begin{cases} x'y'' - x''y' = k_1 \\ y'z'' - y''z' = k_2 \\ z'x'' - z''x' = k_3, \end{cases}$$

⁽²⁸⁾ Oppure quella che figura nel complemento del Cap. I, n. 18.

⁽²⁹⁾ Inoltre l'esempio indicato nell'Osservazione I del n. 34 e nel quale è $\Phi(t) \equiv t^2$ mostra che il minimo può mancare.

ove k_1, k_2, k_3 sono costanti arbitrarie che noi assumiamo non tutte nulle. Quindi in virtù della (2) (Cap. I, n. 3) abbiamo

$$(51) \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0.$$

D'altra parte, ricordata l'espressione della torsione, dalle (50) segue

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0,$$

vale a dire si tratta di curve piane, le quali per la (51) sono circonferenze. Pertanto è evidente che, fissato il valore della somma $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, si ottengono curve ordinarie $C^{(3)}$ con $\mathcal{F}_{C^{(3)}} = 0$, contenute in un campo limitato e soddisfacenti alla condizione (β) del n. 34, le quali possono avere lunghezza arbitrariamente grande, perchè, fissato il centro della circonferenza di raggio $1 : \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, questa può essere percorsa un numero comunque grande di volte.

36. Un'estensione del teorema del n. 34. - Il teorema del n. 34 è ancora valido, se non è verificata l'ipotesi (β), purchè per le curve della classe $K^{(3)}$ siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(γ) *Esistono due numeri λ, Γ con $0 < \lambda < 1, \Gamma \geq 0$ in modo che, su qualunque curva ordinaria*

$$C^{(3)} \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L)$$

della classe considerata, la disuguaglianza ⁽³⁰⁾

$$(52) \quad [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]^2 \leq \lambda [x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)]$$

⁽³⁰⁾ La condizione (γ) può essere posta sotto la seguente forma geometrica: *Esiste un numero $\mu > 0$ tale che, in quasi tutti i punti di ogni curva della classe considerata, nei quali la flessione è maggiore o uguale a Γ , sia verificata la disuguaglianza*

$$(52') \quad \frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2 \geq \mu \frac{1}{R^4},$$

dove, naturalmente, $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{T}$ rappresentano la flessione e la torsione.

Per provare quanto abbiamo asserito, ricordiamo che per le (37) e (38) è

$$\frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^4} = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2.$$

Pertanto, siccome dalla (52') segue in modo ovvio

$$\frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^4} \geq (1 + \mu) \frac{1}{R^4},$$

sia verificata per quasi tutti quegli s del rispettivo intervallo di definizione, per i quali è

$$\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \geq \Gamma.$$

δ) Esistono tre numeri non negativi X, Y, Z , in modo che in corrispondenza a ciascuna curva $C^{(3)}$ della classe K ci sono almeno tre valori (distinti o no) s_1, s_2, s_3 (i quali appartengono al rispettivo intervallo di definizione della curva $C^{(3)}$), per i quali risulta

$$|x''(s_1)| \leq X, \quad |y''(s_2)| \leq Y, \quad |z''(s_3)| \leq Z.$$

Per provare l'asserto occorre stabilire, innanzi tutto, l'equiassoluta continuità delle derivate seconde $\{x_n''(s)\}, \{y_n''(s)\}, \{z_n''(s)\}$ relative alle curve della successione minimizzante considerata nella dimostrazione del n. 34.

A tal uopo sia t_0^* un numero positivo tale che per $t > t_0^*$ sia

$$(53) \quad \frac{\Phi(t)}{t} > \frac{2(|i_0| + 1)}{\varepsilon \sqrt{1 - \lambda}},$$

ove ε è un numero positivo ad arbitrio e i_0 è il numero indicato al luogo citato, e, considerati gli intervalli (47), sia $E_n^{(0)}$ il pseudointervallo costituito da quei valori s , per i quali è

$$\sqrt{x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)} \leq t_0^*,$$

sia $E_n^{(1)}$ il pseudointervallo costituito da quei valori s (dei citati intervalli), per i quali è

$$\sqrt{x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)} > t_0^*, \quad \sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} < \Gamma,$$

e infine sia $E_n^{(2)}$ il pseudointervallo costituito da quegli s , per i quali

$$\sqrt{x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)} > t_0^*, \quad \sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} \geq \Gamma,$$

intendendo che di $E_n^{(2)}$ facciano parte anche quegli s , per i quali una almeno delle tre derivate $x_n'''(s), y_n'''(s), z_n'''(s)$ non esiste finita.

si ottiene immediatamente che è verificata la (52) per $\lambda = \frac{1}{1 + \mu}$.

Viceversa la (52) assume la forma

$$\frac{1}{R^4} \leq \lambda \left[\frac{1}{R^2} \frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^4} \right],$$

da cui si deduce la (52') con $\mu = (1 - \lambda) : \lambda$.

Usufruento delle (52) e (53) abbiamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m |x_n''(b_j^{(n)}) - x_n''(a_j^{(n)})| &\leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j^{(n)}}^{b_j^{(n)}} |x_n'''(s)| ds \leq \sum_{j=1}^m \int_{a_j^{(n)}}^{b_j^{(n)}} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2} ds \leq \\
 &\leq \int_{E_n^{(0)}} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2} ds + \int_{E_n^{(1)}} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2 - [x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2]^2} ds + \\
 &+ \int_{E_n^{(1)}} (x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2) ds + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \int_{E_n^{(2)}} \sqrt{x_n'''^2 + y_n'''^2 + z_n'''^2 - [x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2]^2} ds \leq \\
 &\leq t_0^* m(E_n^{(0)}) + \int_{E_n^{(1)}} \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} ds + \Gamma^2 m(E_n^{(1)}) + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \int_{E_n^{(2)}} \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} ds \leq \\
 &\leq [t_0^* + \Gamma^2] \sum_{j=1}^m (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) + \frac{\varepsilon \sqrt{1-\lambda}}{2(|i_0|+1)} \int_{E_n^{(1)}} \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) ds + \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{2(|i_0|+1)} \int_{E_n^{(2)}} \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) ds \leq \\
 &\leq (t_0^* + \Gamma^2) \sum_{j=1}^m (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) + \frac{\varepsilon}{2[|i_0|+1]} \int_0^{L_n} \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) ds.
 \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo conto della (46), risulta come al n. 34

$$\sum_{j=1}^m |x_n''(b_j^{(n)}) - x_n''(a_j^{(n)})| < \varepsilon,$$

se gli intervalli (47) hanno lunghezza complessiva non superiore a $\varepsilon : 2[t_0^* + \Gamma^2]$.

Siccome in modo identico si ragiona sulle derivate $\{y_n''(s)\}$, $\{z_n''(s)\}$, l'equi-assoluta continuità, che avevamo affermato, è così provata e in virtù delle (α) e (δ) le $\{x_n''(s)\}$, $\{y_n''(s)\}$, $\{z_n''(s)\}$ risultano anche ugualmente limitate, e si conclude come al n. 34.

OSSERVAZIONE I. - Per esempio, alla condizione (γ) soddisfano le eliche circolari

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r_n \cos \left(\frac{a_n}{r_n} s \right) \\ y = r_n \sin \left(\frac{a_n}{r_n} s \right) \\ z = b_n s, \end{array} \right. \quad (0 \leq s \leq L), \quad n = 1, 2, \dots$$

ove

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3(n+1)}, \quad b_n = \cos \frac{n\pi}{3(n+1)},$$

e L è un numero positivo del tutto arbitrario.

Infatti risulta

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{a_n^4}{r_n^2}, \quad x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \frac{a_n^6}{r_n^4}$$

e quindi

$$(x''^2 + y''^2 + z''^2)^2 = a_n^2 (x'''^2 + y'''^2 + z'''^2),$$

ove $a_n^2 \leq \frac{3}{4}$; vale a dire la condizione (γ) è verificata per $\lambda = \frac{3}{4}$, $\Gamma = 0$.

OSSERVAZIONE II. - Se il numero λ che figura nella condizione (γ) non è minore di 1, la proposizione del presente n.º può non essere valida.

Ciò risulta immediatamente dall'esempio considerato nell'osservazione II del n. 34. Infatti, premesso che è verificata la condizione (δ) , perchè su ogni curva ordinaria $C_n^{(3)}$ della classe considerata è $x_n''\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$, $y_n''(0) = 0$, $z_n''(s) = 0$, risulta

$$x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s) = n^2, \quad x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s) = n^4,$$

vale a dire la condizione (γ) è verificata per $\lambda = 1$, ma non per $\lambda < 1$, e, come si è visto al luogo citato, nella classe considerata manca il minimo di $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$.

OSSERVAZIONE III. - È evidente che, anche per l'estensione che forma oggetto del presente n.º, è valido quanto abbiamo rilevato al n. 35, b).

37. Secondo teorema di esistenza. - Supponiamo che: 1º) l'integrale $\mathcal{I}_{C^{(3)}}^{(3)}$ sia quasi-regolare positivo; 2º) esistano un numero $M' > 0$ e una funzione $\Phi_0(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$ non negativa e tale che per $t \rightarrow +\infty$ sia $\Phi_0(t): t \rightarrow +\infty$, in modo che in tutto il campo A_0 , per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per tutti i valori reali di $u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sia verificata la disuguaglianza

$$(54) \quad F \geq \Phi_0(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}) + M' \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}.$$

Allora esiste il minimo assoluto in ogni classe $K^{(3)}$, completa di ordine 3, di curve ordinarie $C^{(3)}$, per la quale è verificata l'ipotesi (γ) del n. 36.

Infatti sia ancora (come al n. 34)

$$C_n^{(3)}: \quad x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad z = z_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_n)$$

una successione minimizzante estratta dalla classe $K^{(3)}$.

In virtù della (54) e dell'identità (2) (Cap. I, n. 3) abbiamo immediatamente

$$(55) \quad \int_0^{L_n} \sqrt{x_n''(s) + y_n''(s) + z_n''(s)} \, ds \leq \frac{i+1}{M'},$$

e pertanto (Cap. I., n. 17) le lunghezze delle curve della successione minimizzante considerata risultano non superiori a un numero fisso L^* , ossia è soddisfatta la condizione α) del n. 34.

A questo punto, chiamato v' il limite inferiore delle lunghezze delle curve di tale successione minimizzante, distinguiamo due casi:

I) Se è $v' > 0$, dalla (55) segue che per ogni curva della citata successione minimizzante c'è almeno un valore s_n di s , per il quale risulta

$$\sqrt{x_n''(s_n) + y_n''(s_n) + z_n''(s_n)} \leq \frac{1}{v'} \frac{i+1}{M'},$$

vale a dire è verificata l'ipotesi (δ) del n. 36, e siccome la (54) è caso particolare della (46) l'asserto è immediato.

II) Nel caso $v' = 0$ dalla successione minimizzante considerata possiamo estrarre una successione parziale

$$C_{\mu_n}^{(3)}: \quad x = x_{\mu_n}(s), \quad y = y_{\mu_n}(s), \quad z = z_{\mu_n}(s), \quad (0 \leq s \leq L_{\mu_n}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

con $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_{\mu_n} = 0$, la quale converga a una curva $C_0^{(3)}$ costituita da un solo punto; dimostriamo che $C_0^{(3)}$ è curva di accumulazione di ordine 3 della classe $K^{(3)}$.

Infatti in virtù delle ipotesi fatte su $\Phi_0(t)$ esiste un numero $H_0 > 0$, tale che, per qualunque $t \geq H_0$, risulta

$$\Phi_0(t) \geq t.$$

Allora, tenendo conto della (54), abbiamo per ogni curva $C_{\mu_n}^{(3)}$

$$\int_0^{L_{\mu_n}} F ds \geq \int_0^{L_{\mu_n}} \Phi_0(\sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2}) \, ds \geq \int_{E_{\mu_n}} \sqrt{u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} \, ds,$$

ove E_{μ_n} è il pseudointervallo costituito da quei valori s di $(0, L_{\mu_n})$, per i quali, tenuta presente la (37), è

$$\sqrt{x_{\mu_n}'''(s) + y_{\mu_n}'''(s) + z_{\mu_n}'''(s)} - [x_{\mu_n}''(s) + y_{\mu_n}''(s) + z_{\mu_n}''(s)]^2 \geq H_0,$$

e pertanto, indicato con E''_{μ_n} il componente di E'_{μ_n} costituito da quei valori s , per i quali è

$$\sqrt{x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s)} \geq \Gamma,$$

in virtù della (52) risulta

$$(56) \quad \int_0^{L_{\mu_n}} F ds \geq \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \int_{E''_{\mu_n}} [x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s)] ds.$$

Nei punti del complementare di E'_{μ_n} rispetto all'intervallo $(0, L_{\mu_n})$ è evidentemente

$$x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s) - [x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s)]^2 < H_0^2,$$

e quindi, sempre per la (52), vale la disuguaglianza

$$x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s) < H_0 \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}},$$

mentre nei punti del complementare di E''_{μ_n} rispetto a E'_{μ_n} è ovviamente

$$x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s) < \Gamma^2.$$

Pertanto, indicato con H' il maggiore dei numeri $H_0 \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$, Γ^2 , e tenuto presente che le curve della successione minimizzante considerata hanno lunghezza non superiore a L^* , in virtù della (56) si conclude che è

$$\int_0^{L_{\mu_n}} [x''^2_{\mu_n}(s) + y''^2_{\mu_n}(s) + z''^2_{\mu_n}(s)] ds \leq \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} (i+1) + H' L^*,$$

ove il secondo membro è un numero fisso.

Quindi tenuto presente che, in virtù della disuguaglianza di SCHWARZ, per ogni coppia s', s'' con $s' < s''$ appartenente all'intervallo $(0, L_{\mu_n})$ sussistono la disuguaglianza

$$|x'_{\mu_n}(s'') - x'_{\mu_n}(s')| \leq \int_{s'}^{s''} |x''_{\mu_n}(s)| ds \leq \sqrt{(s'' - s') \int_{s'}^{s''} x''^2_{\mu_n}(s) ds}$$

e le analoghe, possiamo affermare che, preso ad arbitrio un numero $\rho' > 0$ è possibile determinare un $\delta'_1 > 0$, in modo che, per ogni coppia s_1, s_2 di $(0, L_{\mu_n})$ con $|s_2 - s_1| < \delta'_1$, risulti per $n = 1, 2, \dots$

$$(57) \quad |x'_{\mu_n}(s_1) - x'_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho', \quad |y'_{\mu_n}(s_1) - y'_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho', \quad |z'_{\mu_n}(s_1) - z'_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho'.$$

Infine, ricordato che il ragionamento fatto al n. 36 prova l'equiassoluta continuità delle derivate seconde della sottosuccessione minizzante considerata, si conclude che si può determinare un $\delta' > 0$ (che possiamo supporre non superiore a δ'_1) in modo che per ogni coppia s_1, s_2 di valori appartenenti all'intervallo $(0, L_{\mu_n})$ con $|s_2 - s_1| < \delta'$ siano verificate, assieme alle (57), le disuguaglianze

$$(57') \quad |x''_{\mu_n}(s_1) - x''_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho', \quad |y''_{\mu_n}(s_1) - y''_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho', \quad |z''_{\mu_n}(s_1) - z''_{\mu_n}(s_2)| \leq \rho'.$$

Pertanto determinato n' in modo che, per ogni $n > n'$, sia $L_{\mu_n} < \delta'$, le (57) e (57') sono verificate per ogni (s_1, s_2) di $(0, L_{\mu_n})$, ove $n > n'$, vale a dire $C_0^{(3)}$ è una curva di accumulazione di ordine 3 della classe $K^{(3)}$ e siccome tale classe è completa, $C_0^{(3)}$ deve appartenere alla classe $K^{(3)}$ ed evidentemente fornisce il minimo di $\mathcal{F}_{C^{(3)}}^{(3)}$ in $K^{(3)}$.

OSSERVAZIONE. - L'esempio che forma l'oggetto dell'Osservazione I del n. 34 mette in luce che, se è $M' = 0$, il teorema del presente n.º non è più valido; è da tener presente che la condizione (γ) è identicamente soddisfatta per $\Gamma = 1$.

38. Terzo teorema di esistenza. - a) Supponiamo che: 1º) l'integrale $\mathcal{F}_{C^{(3)}}^{(3)}$, sia quasi-regolare positivo; 2º) esistano un numero $h > 0$ e una funzione $\Phi_1(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$ soddisfacente alla disuguaglianza

$$(58) \quad \Phi_1(t) \geq ht, \quad (0 \leq t < +\infty),$$

e tale che per $t \rightarrow +\infty$ sia $\Phi_1(t) : t \rightarrow +\infty$, in modo che in tutto il campo A_0 , per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per tutti i numeri reali $u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3$ sia

$$(59) \quad F(x, y, z; x', y', z'; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3) \geq \Phi_1(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}).$$

Allora esiste il minimo assoluto di $\mathcal{F}_{C^{(3)}}^{(3)}$ in ogni classe $K^{(3)}$, completa di ordine 3, di curva ordinarie $C^{(3)}$, per la quale è verificata la seguente ipotesi:

(γ_0) Esiste un numero positivo $\lambda < 1$, in modo che su qualunque curva

$$C^{(3)}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (0 \leq s \leq L)$$

della classe considerata la disuguaglianza

$$(60) \quad [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]^2 \leq \lambda [x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)]$$

è verificata per quasi tutti gli s del rispettivo intervallo di definizione.

Infatti considerata ancora una successione minimizzante estratta dalla classe $K^{(3)}$

$$C_n^{(3)}: \quad x = x_n(s), \quad y = y_n(s), \quad z = z_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

tale cioè che sia $\mathcal{I}_{C_n^{(3)}}^{(3)} \leq i + \frac{1}{n}$, in virtù delle (58) e (59) risulta

$$\int_0^{L_n} \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \, ds \leq \frac{i+1}{h},$$

e pertanto, tenuta presente l'identità (37), usufruendo della (60) si ottiene

$$\int_0^{L_n} [x_n''(s) + y_n''(s) + z_n''(s)] \, ds \leq \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{i+1}{h}.$$

Allora (Cap. I, n. 18, Osservazione) le lunghezze delle curve della successione minimizzante considerata risultano non superiori a un numero fisso.

Ciò premesso, si distinguono due casi secondochè il limite inferiore delle curve di tale successione minimizzante è positivo o nullo e l'asserto segue come al n. 37 tenendo presente che, in tale secondo caso, le ipotesi del presente capoverso consentono di concludere in modo anche più rapido.

b) OSSERVAZIONE. - Il teorema del presente n.º è valido anche quando non è verificata la disuguaglianza (58), se, ferme restando tutte le altre ipotesi, la funzione (continua) $\Phi_1(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$ è crescente, concava verso l'alto ed è $\Phi_1(0) = 0$.

Infatti, considerata ancora una successione minimizzante estratta dalla classe $K^{(3)}$ e rilevato che dalla (59) segue in modo ovvio

$$(61) \quad \int_0^{L_n} \Phi_1(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) \, ds \leq i+1,$$

definiamo la funzione

$$\Phi_2(t) \equiv \Phi_1\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} t\right), \quad (0 \leq t < +\infty),$$

la quale soddisfa alle stesse ipotesi di $\Phi_1(t)$. Allora tenuto presente che, in virtù dell'identità (37) e della (60), è

$$\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \geq \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} (x_n'' + y_n'' + z_n''),$$

dalla (61) segue

$$\int_0^{L_n} \Phi_2(\sqrt{x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2}) ds \leq i + 1,$$

e pertanto (Cap. I, n. 18) le lunghezze delle curve della successione minimizzante considerata hanno lunghezza inferiore a un numero fisso. Allora l'asserto segue come al n. 37.

ESEMPIO - Ciascuna delle funzioni

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} [u_s^2 + v_s^2 + w_s^2],$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \sqrt{1 + u_s^2 + v_s^2 + w_s^2} \lg(1 + u_s^2 + v_s^2 + w_s^2)$$

soddisfa alle condizioni del presente capoverso.