Sull'equazione integrale non lineare di Volterra.

Nota di MAURO PICONE (a Roma)

A Giovanni Sansone nel suo 70^{mo} compleanno.

Sunto. - *Si dà un nuovo teorema che allarga la classe delle equazioni integrali non lineari di Volterra, dotate di un'unica soluzione.*

Summary. - *A new theorem is given, which extends the class of non-linear Volterra integral equations, whose solution exists and is unique.*

Per una matrice a , in particolare per un vettore, dirò suo *modulo*, e lo indicherò col simbolo

$$|a|,$$

una funzione reale dei suoi elementi, reali o complessi, definita ovunque e continua, che gode delle seguenti proprietà.

- 1) Non è mai inferiore al modulo di ciascuno dei suoi elementi;
- 2) se μ è un numero qualsivoglia, reale o complesso, si ha

$$|\mu a| = |\mu| |a|;$$

designando a e a' due matrici,

- 3) se esse sono simili risulta

$$|a + a'| \leq |a| + |a'|,$$

- 4) se il numero delle colonne di a eguaglia quello delle righe di a' ,

$$|aa'| \leq |a| |a'|.$$

Com'è noto possiedono queste proprietà, per esempio, i moduli di FROBENIUS, così definiti: Supposta la matrice a di r righe e s colonne e indicati con a_{ij} i suoi elementi,

$$|a| = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s |a_{ij}|^2},$$

$$|a| = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s |a_{ij}|, \quad |a| = \max_{1 \leq j \leq s} \sum_{i=1}^r |a_{ij}|.$$

Evidentemente: Se la matrice a è funzione di un punto x di uno spazio euclideo, con elementi quasi continui in un insieme lebesghiano E , la funzione $|a|$ è pur essa funzione quasi continua di x nell'insieme E , e se ciascun elemento di a vi è sommabile, indicando con

$$\int_E a(x) dx$$

la matrice, simile alla a , che ha gli elementi

$$\int_E a_{ij}(x) dx,$$

risulta

$$\left| \int_E a(x) dx \right| \leq \int_E |a(x)| dx,$$

e, per essere $|a_{ij}(x)| \leq |a(x)|$, dalla sommabilità di $|a(x)|$ in E , segue quella, ivi, degli elementi $a_{ij}(x)$.

Ciò posto, rappresentino

x una variabile reale e x_0 un fissato suo valore;

α un fissato numero positivo o l'infinito positivo;

E un insieme chiuso di punti dello spazio euclideo complesso $S_{(2r)}$, a $2r$ dimensioni, del quale si indica con u il punto generico e con $u_1, u_2, \dots, u_r$ le coordinate, reali o complesse, di questo;

I_α l'intervallo aperto a destra, luogo dei punti dell'asse reale x per i quali

$$x_0 \leq x < x_0 + \alpha;$$

per ogni numero positivo α , $\bar{I}_\alpha$ l'intervallo chiuso, luogo dei punti per i quali

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha;$$

T_α l'insieme del piano reale (x, y) , luogo dei punti per i quali

$$x_0 \leq x < x_0 + \alpha, \quad 0 \leq y \leq x;$$

$\bar{T}_\alpha$ il triangolo del detto piano, luogo dei punti per i quali

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \quad 0 \leq y \leq x;$$

$f(x)$ e $K(x, y, u)$ assegnati vettori a r componenti, reali o complesse, funzioni, il primo della variabile x , definita in I_α ed il secondo funzione delle $r+2$ variabili $x, y, u_1, u_2, \dots, u_r$, definita in $T_\alpha \times E$, entrambe continue.

Si vuol considerare il problema della risoluzione dell'equazione di VOLTERRA:

$$(1) \quad u(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K[x, y, u(y)] dy,$$

per x in I_x , nella classe — che indicheremo col simbolo $C(I_x, E)$ — delle funzioni $u(x)$, continue in I_x , di cui insieme contenuto in E .

In proposito è classico il seguente

TEOREMA A. — *Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite in I_x , dalle uguaglianze:*

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= f(x) + \int_{x_0}^x K[x, y, u^{(0)}(y)] dy, \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(n+1)}(x) &= f(x) + \int_{x_0}^x K[x, y, u^{(n)}(y)] dy, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

sono della classe $C(I_x, E)$ ⁽¹⁾, e ad ogni numero positivo $\alpha (< \alpha)$ ne corrisponde uno Λ_α , per il quale riesce

$$|K(x, y, u') - K(x, y, u)| \leq \Lambda_\alpha |u' - u|,$$

comunque si prendano (x, y, u) e (x, y, u') in $T_\alpha \times E$, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (1), nella classe $C(I_x, E)$ e risulta

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni intervallo $\bar{I}_\alpha$, con $\alpha < \alpha$.

Tale soluzione verifica, in I_α , la limitazione:

$$|u(x)| \leq U_\alpha + V_\alpha e^{\alpha \Lambda_\alpha} + \alpha W_\alpha e^{\alpha \Lambda_\alpha},$$

(1) In particolare, se $E \equiv S_{(2r)}$.

ove U_α , V_α e W_α sono tre numeri reali, i primi due non superati, in I_α , rispettivamente da

$$|u^{(0)}(x)| \text{ e } |f(x) - u^{(0)}(x)|,$$

ed il terzo, in T_α , da

$$|K[x, y, u^{(0)}(y)]|,$$

ed anche la più ristretta

$$|u(x) - u^{(0)}(x)| \leq (V_\alpha + W_\alpha^*)e^{\Lambda_\alpha(x-x_0)},$$

essendo W_α^* un numero non superato, in $\bar{I}_\alpha$, da

$$\left| \int_{x_0}^x K[x, y, u^{(0)}(y)] dy \right|.$$

Se $f(x)$ appartiene, essa pure, alla classe $C(I_\alpha, E)$, posto $u^{(0)}(x) \equiv f(x)$, per la soluzione $u(x)$, valgono anche le limitazioni

$$|u(x)| \leq F_\alpha + \alpha G_\alpha e^{\alpha \Lambda_\alpha},$$

$$|u(x) - f(x)| \leq G_\alpha^* e^{\Lambda_\alpha(x-x_0)},$$

ove F_α e G_α^* , sono due numeri reali non superati, in $\bar{I}_\alpha$, rispettivamente, da

$$|f(x)| \text{ e } \left| \int_{x_0}^x K[x, y, f(y)] dy \right|$$

e G_α è un numero reale non superato, in $\bar{T}_\alpha$, da

$$|K[x, y, f(y)]|.$$

Scopo della presente nota è di dimostrare il seguente teorema che ritengo nuovo.

TEOREMA B. - Se, avendosi in $T_\alpha \times E$,

$$(3) \quad K(x, y, u) \equiv H(x, y, u)u,$$

ove $H(x, y, u)$ designa una matrice quadrata d'ordine r , funzione continua di (x, y, u) in $T_\alpha \times E$, la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite

Si ha, inoltre, in ogni intervallo $\bar{I}_a$, la limitazione, per la soluzione,

$$|u(x) - f(x)| \leq F_a(e^{\Psi_a(x-x_0)} - 1)$$

ove Ψ_a designa un numero non superato, in $\bar{T}_a$, da $|\psi(x, y)|$.

Si osservi pure che, all'identità $K \equiv Hu$, sulla quale si basa il teorema si potrebbe sostituire l'altra

$$K(x, y, u) \equiv G(x, y) + H(x, y, u)[u - g(y)],$$

$g(y)$ e $G(x, y)$ designando due vettori a r componenti, funzioni continue, rispettivamente, in I_x e in T_x , e $H(x, y, u)$ una matrice quadrata d'ordine r , funzione continua in $T_x \times E$, valendo la quale l'equazione (1) si scrive

$$u(x) = h(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u(y)][u(y) - g(y)]dy,$$

con

$$h(x) = f(x) + \int_{x_0}^x G(x, y)dy,$$

e subito si constata che la dimostrazione qui data del teorema B è valida anche per il seguente

TEOREMA C. - *Se la funzione $u^{(0)}(x)$ e tutte quelle successivamente definite dalle equazioni*

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= h(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u^{(0)}(y)][u^{(1)}(y) - g(y)]dy, \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(n+1)}(x) &= h(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u^{(n)}(y)][u^{(n+1)}(y) - g(y)]dy, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

appartengono alla classe $C(I_x, E)$ e la matrice $H(x, y, u)$ verifica le limitazioni (5) e (6), esiste una ed una sola soluzione $u(x)$ della (1), nella classe indicata, e si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(x) = u(x),$$

uniformemente in ogni intervallo $\bar{I}_a$, con $a < \alpha$. Tale soluzione verifica, in $\bar{I}_a$,

la limitazione:

$$|u(x) - h(x)| \leq N_a(e^{M_a(x-x_0)} - 1),$$

avendo designato con N_a un numero non superato, in $\bar{I}_a$, da $|h(x) - g(x)|$.

1. - LEMMI AL TEOREMA B. - La dimostrazione del teorema B segue immediatamente da due lemmi che andiamo a dimostrare, il primo dei quali è ben noto.

Indichi $H(x, y, u)$ una matrice quadrata d'ordine r , a elementi reali o complessi, funzione continua del punto (x, y, u) , nell'insieme $\bar{T}_a \times E$, essendo $\bar{T}_a$ il triangolo del piano (x, y) già considerato e E un insieme chiuso di punti dello spazio complesso $S_{(r)}$ e si supponga che, in $\bar{T}_a \times E$, sia verificata la (5). Siano $f(x)$ e $u(x)$ due vettori a r componenti reali o complesse, assegnate funzioni di x continue in $\bar{I}_a$ avendo la seconda coinsieme contenuto in E e si consideri, in $\bar{I}_a$, l'equazione integrale lineare di VOLTERRA:

$$(7) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u(y)] \varphi(y) dy,$$

nel vettore incognito $\varphi(x)$ a r componenti reali o complesse, supposto funzione continua in $\bar{I}_a$. Sussistono i teoremi seguenti.

I. Il nucleo risolvete

$$R_u(x, y)$$

della (7) verifica, in $\bar{I}_a$, la limitazione:

$$(8) \quad |R_u(x, y)| \leq M_a e^{aM_a},$$

e quindi, detto F_a un numero non superato, in $\bar{I}_a$, da $|f(x)|$, la soluzione $\varphi(x)$ della (6), ivi, l'altra

$$(9) \quad |\varphi(x)| \leq F_a \cdot (1 + aM_a e^{aM_a}).$$

DIMOSTRAZIONE. - Posto

$$H_u^{(0)}(x, y) = H[x, y, u(y)],$$

$$H_u^{(1)}(x, y) = \int_y^x H[x, s, u(s)] H[s, y, u(y)] ds,$$

.....

$$H_u^{(n+1)}(x, y) = \int_y^x H_u^{(n)}[x, s, u(s)] H[s, y, u(y)] ds,$$

.....

si ha

$$|H_u^{(n)}(x, y)| \leq M_a^{n+1} \frac{(x-y)^n}{n!},$$

e quindi, per il nucleo risolvante

$$R_u(x, y) = H[x, y, u(y)] + \sum_{n=1}^{\infty} H_u^{(n)}(x, y),$$

la limitazione

$$|R_u(x, y)| \leq M_a + M_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[M_a(x-y)]^n}{n!} \leq M_a e^{\alpha M_a}.$$

Ne segue:

II. La soluzione $\varphi(x)$ della (7), verifica, in I_a , la limitazione, più ristretta della (9),

$$(9') \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq F_a(e^{M_a(x-x_0)} - 1).$$

III. Esista inoltre, un numero positivo L_a tale che, comunque si prendano, in $\bar{T}_a \times E$, due punti (x, y, u) e (x, y, u') sussista la (6) e $u(x)$ e $u'(x)$ siano due funzioni, continue in $\bar{I}_a$ e di coinsieme contenuto in E . Se $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ sono soluzioni, continue in $\bar{I}_a$, rispettivamente delle equazioni integrali lineari

$$(10) \quad \varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u(y)] \varphi(y) dy,$$

$$(10') \quad \varphi'(x) = f'(x) + \int_{x_0}^x H[x, y, u'(y)] \varphi'(y) dy,$$

essendo $f(x)$ e $f'(x)$ esse pure continue in $\bar{I}_a$, esistono due numeri positivi P_a e Q_a , per i quali sussiste, in $\bar{I}_a$, la limitazione

$$(11) \quad |\varphi'(x) - \varphi(x)| \leq |f'(x) - f(x)| + P_a \int_{x_0}^x |f'(y) - f(y)| dy + Q_a \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy.$$

DIMOSTRAZIONE. - Sottraendo, membro a membro, la (10) e (10'), si ha:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - \varphi(x) = & f'(x) - f(x) + \int_{x_0}^x \{H[x, y, u'(y)] - H[x, y, u(y)]\} \varphi'(y) dy \\ & + \int_{x_0}^x H[x, y, u(y)] [\varphi'(y) - \varphi(y)] dy, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varphi'(x) - \varphi(x) &= \\ &= f'(x) - f(x) + \int_{x_0}^x \{H[x, y, u'(y)] - H[x, y, u(y)]\} \varphi'(y) dy \\ &\quad + \int_{x_0}^x R_u(x, y)[f'(y) - f(y)] dy \\ &\quad + \int_{x_0}^x R_u(x, y) dy \int_{x_0}^y \{H[y, s, u'(s)] - H[y, s, u(s)]\} \varphi'(s) ds, \end{aligned}$$

donde, indicando con P_α e N'_α i numeri, rispettivamente, ai secondi membri delle (8), (9), nell'ultima delle quali F_α è stato sostituito con un numero F'_α non inferiore al modulo di $f'(x)$ in $\bar{I}_\alpha$,

$$\begin{aligned} |\varphi'(x) - \varphi(x)| &\leq |f'(x) - f(x)| + L_\alpha N'_\alpha \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy \\ &\quad + P_\alpha \int_{x_0}^x |f'(y) - f(y)| dy + P_\alpha L_\alpha N'_\alpha \int_{x_0}^x dy \int_{x_0}^y |u'(s) - u(s)| ds \leq \\ &|f'(x) - f(x)| + P_\alpha \int_{x_0}^x |f'(y) - f(y)| dy + L_\alpha N'_\alpha (1 + \alpha P_\alpha) \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy. \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x) - \varphi(x)| &\leq |f'(x) - f(x)| + P_\alpha \int_{x_0}^x |f'(y) - f(y)| dy \\ &\quad + L_\alpha F'_\alpha (1 + \alpha P_\alpha)^2 \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy, \end{aligned}$$

e, scambiando, simultaneamente, $\varphi(x)$ con $\varphi'(x)$ e $f(x)$ con $f'(x)$,

$$\begin{aligned} |\varphi'(x) - \varphi(x)| &\leq |f'(x) - f(x)| + P_\alpha \int_{x_0}^x |f'(y) - f(y)| dy \\ &\quad + L_\alpha F_\alpha (1 + \alpha P_\alpha)^2 \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy, \end{aligned}$$

donde la (11) con

$$P_a = M_a e^{aM_a},$$

$$Q_a = L_a \frac{F_a + F_a' - |F_a - F_a'|}{2} (1 + aM_a e^{aM_a})^2.$$

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA B. - Se u e u' sono, nell'intervallo I_a , entrambe soluzioni dell'equazione (1), nelle ipotesi del teorema B, si ha in virtù del teor. III, in ogni intervallo $\bar{I}_a$,

$$|u'(x) - u(x)| \leq Q_a \int_{x_0}^x |u'(y) - u(y)| dy,$$

donde $u(x) \equiv u'(x)$ in $\bar{I}_a$, e ciò prova il teorema di unicità. Quanto a quello d'esistenza, osserviamo che le (4) definiscono una successione $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$, ..., di funzioni continue in ogni intervallo $\bar{I}_a$. Fissato uno di questi, ad arbitrio, si ha in esso, di nuovo in virtù del teor. III,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leq Q_a \int_{x_0}^x |u^{(n)}(y) - u^{(n-1)}(y)| dy,$$

donde poichè

$$|u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x)| \leq M_a N_a (x - x_0),$$

si trova, in $\bar{I}_a$,

$$|u^{(n+1)}(x) - u^{(n)}(x)| \leq M_a N_a Q_a^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq a M_a N_a \frac{(a Q_a)^n}{(n+1)!}.$$

D'altra parte, per il teorema II, riesce, in $\bar{I}_a$, comunque si assuma il numero naturale n ,

$$|u^{(n)}(x) - f(x)| \leq F_a (e^{M_a(x-x_0)} - 1),$$

donde passando al limite per $n \rightarrow \infty$, l'ultima affermazione del teorema.