Il wronskiano di un sistema di sezioni di un fibrato vettoriale di rango 1 sopra una curva algebrica ed il relativo divisore di Brill-Severi.

G. GALBURA (Bucarest) (*)

Lavoro dedicato al Prof. Beniamino SEGRE
in omaggio al suo 70° compleanno.

Sunto. – *In questo lavoro, nato dalle discussioni che ebbi anni fa con A. Lascu, riconsidero, nella teoria dei fibrati vettoriali su una curva algebrica, il problema classico dei punti* $(r+1)$*-upli di una serie lineare* g_n^r.

1. – Sia X una curva algebrica irriducibile, non singolare, definita sopra un corpo algebricamente chiuso k. Denoteremo con $\mathcal{O}$ il fascio costante delle funzioni razionali su X e con K il fibrato cotangente di X, cioè il fibrato per cui le funzioni di transizione sono $\gamma_{\alpha\beta} = dt_\alpha/dt_\beta$ (ove t_β è la coordinata locale in un aperto U_β di X, e t_α è la coordinata locale in un aperto U_α di X), ossia il fibrato delle forme differenziali di primo grado.

Sia L un fibrato vettoriale di rango 1 su X e sia $\Gamma(X, \mathcal{O}(L))$ lo spazio vettoriale delle sezioni di L regolari sulla X. Consideriamo un numero naturale $r \leqslant \dim \Gamma(X, \mathcal{O}(L)) - 1$ ed un sottospazio A di $\Gamma(X, \mathcal{O}(L))$ di dimensione $r+1$.

Sia $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ una base di A.

Denoteremo con $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un ricoprimento aperto della X, costituito da intorni di coordinate per L e per K; con $\varphi_{\alpha\beta}$ le funzioni di transizione del fibrato L e con $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ l'anello delle funzioni razionali su X regolari nei punti di U_α.

Sia, per $\alpha \in I$, t_α una coordinata locale in U_α, cioè una funzione razionale, regolare nei punti di U_α, ivi iniettiva e tale che, per ogni $x \in U_\alpha$, $t_\alpha - t_\alpha(x)$ sia un parametro locale nel punto x. Un siffatto sistema di coordinate locali si può sempre assegnare scegliendo abbastanza fine il ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Ogni sezione $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{O}(L))$ è rappresentata da una collezione $\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di funzioni $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, 0)$ collegate fra di loro mediante le relazioni

$$s_\alpha(P) = \varphi_{\alpha\beta}(P)s_\beta(P)\,, \quad \text{per ogni } P \in U_\alpha \cap U_\beta\,. \tag{1}$$

(*) Entrata in Redazione il 5 agosto 1973.

In particolare, ognuna delle sezioni σ_i $(i = 0, 1, \dots, r)$ è rappresentata mediante una collezione $s_{i\alpha}$ di tali funzioni. Una sezione qualunque di A $\sigma = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \sigma_i$ sarà rappresentata da $\{s_\alpha\}$ con $s_\alpha = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i s_{i\alpha}$.

Denotiamo, al solito, con $v_a(\sigma)$ il coefficiente del punto $a \in X$ nel divisore (σ) associato a σ (cfr. [1]). Se $a \in U_\alpha$, abbiamo $v_a(\sigma) = v_a(s_\alpha)$, per definizione (cfr. [1]). La condizione $v_a(\sigma) \geqslant h$ è dunque equivalente alla condizione $v_a(s_\alpha) \geqslant h$, la quale a sua volta si esprime mediante le relazioni

$$s_\alpha(a) = 0\,, \qquad \frac{ds_\alpha}{dt_\alpha}(a) = 0\,,\; \dots,\; \frac{d^{h-1} s_\alpha}{dt_\alpha^{h-1}}(a) = 0\,.$$

Quindi la condizione necessaria è sufficiente affinchè esista una sezione $\sigma \in A$ ed un punto $P \in X$ per cui $v_P(\sigma)$ sia maggiore od uguale a $r+1$ si scrive, in U_α, mediante le equazioni lineari nelle $\lambda_0, \dots, \lambda_r$

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i s_{i\alpha}(P) = 0\,, \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \frac{ds_{i\alpha}}{dt_\alpha}(P) = 0\,, \;\dots,\; \sum \lambda_i \frac{d^r s_{i\alpha}}{dt_\alpha^r}(P) = 0\,. \tag{2}$$

Questo sistema ammette una soluzione diversa da $(0, \dots, 0)$ se e soltanto se, denotando con w_α il determinante $|d^i s_{i\alpha}/dt_\alpha^j|$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant r$, è soddisfatta la condizione

$$w_\alpha(P) = 0\,. \tag{3}$$

La funzione razionale w_α è regolare in ogni punto di U_α. Ricordiamo ora che una sezione $\sigma \in A$, al pari di una funzione razionale sulla curva X, ha soltanto un numero finito di zeri e che il divisore $(\sigma) = \sum v_P(\sigma) P$ si chiama il divisore della sezione σ.

Supponendo che la curva X sia completa, vi è una biezione tra lo spazio proiettivo $P(A)$, associato allo spazio vettoriale A, e la serie lineare $g_n^r(A)$, costituito dai divisori delle sezioni $\sigma \in A$; la dimensione r della serie coincide con la dimensione di $P(A)$. La condizione (3) è necessaria e sufficiente per l'esistenza di un divisore $(\sigma) \in g_n^r(A)$ per cui $v_P(\sigma) \geqslant r+1$. È nota la formula classica di Brill-Segre (cfr. [5]) la quale dà il numero

$$(r+1)(n + gr - r) \tag{4}$$

dei punti $(r+1)$-upli di una serie lineare g_n^r. Di questa formula Severi ha dato una interpretazione funzionale (cfr. [6])

$$H \equiv (r+1)\,G + \binom{r+1}{2} K\,, \tag{5}$$

ove H indica il divisore costituito dai punti $(r+1)$-upli della g_n^r, ognuno preso con la debita molteplicità; G indica un divisore (gruppo) della serie g_n^r e K un divisore (gruppo) canonico della curva X; il segno $\equiv$ indica l'equivalenza lineare.

Nella presente nota ci proponiamo di dimostrare il risultato equivalente, nell'ambito della geometria degli spazi fibrati, cioè il seguente

TEOREMA. – *Sia X una curva algebrica non singolare, sia K il fibrato cotangente di X, L un fibrato vettoriale di rango 1 su X e A uno spazio vettoriale di dimensione $r+1$ contenuto nello spazio $\Gamma(X, \mathcal{O}(L))$ delle sezioni regolari nel fibrato L sulla curva X; sia $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ una base dello spazio A. Consideriamo un ricoprimento $U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di X, tale che K sia rappresentato da un cociclo $(\gamma_{\alpha\beta})$ ed L da un cociclo $(\varphi_{\alpha\beta})$ di U. Consideriamo inoltre, per ogni i $(0 \leqslant i \leqslant r)$, le funzioni razionali $s_{i\alpha}$ $(\alpha \in I)$ le quali rappresentano la sezione σ_i e, per ogni α, il wronskiano w_α delle funzioni $s_{0\alpha}, \ldots, s_{r\alpha}$. Le coppie $(U_\alpha, w_\alpha)_{\alpha\in I}$ rappresentano una sezione w in un fibrato M isomorfo al prodotto $L^{\otimes(r+1)} \otimes K^{\otimes(r(r+1))/2}$.*

DIMOSTRAZIONE. – Poichè per ipotesi $(s_{i\alpha})_{\alpha\in I}$ rappresenta la sezione σ_i nel fibrato L e $\varphi_{\alpha\beta}$ sono funzioni di transizione di questo fibrato, possiamo scrivere $s_{i\alpha} = \varphi_{\alpha\beta} s_{i\beta}$ e, denotando con t_α una coordinata locale in U_α e con t_β una coordinata locale in U_β,

$$w_\alpha(x) = \left| \frac{d^j s_{i\alpha}}{dt_\alpha^j} \right| = \left| \frac{d^j}{dt_\alpha^j} \varphi_{\alpha\beta} s_{i\beta} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha\beta} s_{0\beta} & \varphi_{\alpha\beta} s_{1\beta} & \ldots & \varphi_{\alpha\beta} s_{r\beta} \\ \left(\varphi_{\alpha\beta}\dfrac{ds_{0\beta}}{dt_\beta} + s_{0\beta}\dfrac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt_\beta}\right)\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha} & \left(\varphi_{\alpha\beta}\dfrac{ds_{1\beta}}{dt_\beta} + s_{1\beta}\dfrac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt_\beta}\right)\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha} & \ldots & \left(\varphi_{\alpha\beta}\dfrac{ds_{r\beta}}{dt_\beta} + s_{r\beta}\dfrac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt_\beta}\right)\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha} \\ \left(\varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^2 s_{0\beta}}{dt_\beta^2} + \ldots\right)\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^2 + \left(\ldots\right)\dfrac{d^2 t_\beta}{dt_\alpha^2} & \varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^2 s_{1\beta}}{dt_\beta^2}\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^2 + \ldots & & \varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^r s_{r\beta}}{dt_\beta^r}\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^r + \ldots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^r s_{0\beta}}{dt_\beta^r}\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^r + \ldots & \varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^r s_{1\beta}}{dt_\beta^r}\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^r + \ldots & & \varphi_{\alpha\beta}\dfrac{d^2 s_{r\beta}}{dt_\beta^2}\left(\dfrac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^2 + \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi_{\alpha\beta}^{r+1}\left(\frac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^{r(r+1)/2} w_\beta(x), \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant r$$

come si verifica subito operando sulle linee del determinante.

Le funzioni

$$\psi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^{r+1}\left(\frac{dt_\beta}{dt_\alpha}\right)^{(r(r+1))/2} \tag{6}$$

sono le funzioni di transizione per un fibrato vettoriale di rango 1, che denoteremo con M.

Dalle formule generali riguardanti le operazioni con fibrati vettoriali (cfr. [2]) risulta la relazione

$$M \approx L^{\otimes(r+1)} \otimes K^{\otimes(r(r+1))/2}\,. \tag{7}$$

Le coppie (U_α, W_α) rappresentano una sezione W nel fibrato M, la quale, quando si sostituisce la base $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_r\}$ con un'altra, viene moltiplicata per un fattore costante non nullo; quindi il fibrato M e il divisore della sezione W dipendono soltanto da A e non dalla base $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_r\}$. Con questo il teorema è dimostrato. Chiameremo la sezione w il wronskiano dello spazio A.

2. – Consideriamo un punto $P \in X$. Le sezioni $\sigma \in A$ che si annullano nel punto P costituiscono uno spazio lineare A_1, di dimensione $r = \dim A - 1$. Supponiamo che la sezione generica $\sigma \in A_1$ abbia nel punto P uno zero m_1-uplo e sia A_2 lo spazio vettoriale delle sezioni $\sigma \in A_1$ le quali hanno nel punto P uno zero m-uplo con $m > m_1$; $\dim A_2 = \dim A_1 - 1 = r - 1$. La sezione generica $\sigma \in A_2$ ha nel punto P uno zero m_2-uplo con $m_2 > m_1$.

Ripetendo su A_2 il ragionamento fatto su A_1, e proseguendo nello stesso modo arriveremo ad esso spazio $A_r = \{\alpha\sigma_{r\alpha}\alpha \in k\}$, di dimensione 1, costituito da sezioni aventi, tutte, uno zero m_r-uplo nel punto P. Troveremo, in questo modo, una successione crescente di interi positivi $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$, corrispondenti ai sottospazi $A_1 > A_2 > \ldots > A_r$.

TEOREMA 2. – (Teorema di C. SEGRE) cfr. [5], [6]. *Il wronskiano w dello spazio A ha nel punto P, di cui sopra, uno zero n-uplo con*

$$n = v_P(w) = m_1 + \ldots + m_r - \frac{r(r+1)}{2}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo che si può scegliere una base dello spazio A costituita da sezioni $\sigma_0, \ldots, \sigma_r$ per cui

$$v_P(\sigma_0) = 0\,, \quad v_P(\sigma_1) = m_1, \ldots, \quad v_P(\sigma_r) = m_r$$

(supponiamo intanto che non siano nulle tutte le sezioni di A nel punto P).

Sia U_α un aperto del ricoprimento U, contenente il punto P e sia $s_{i\alpha}$ un rappresentante della sezione σ_i nello spazio $\Gamma(U_\alpha, 0)$. Se t_α è un parametro locale nel punto P, di U_α, possiamo scrivere

$$s_{0\alpha} = f_0\,, \quad s_{1\alpha} = t_\alpha^{m_1} f_1, \ldots, s_{r\alpha} = t_\alpha^{m_r} f_r\,,$$

con $f_i \in O_{P,X}$, $f_i(P) \neq 0$; quindi abbiamo

$$w_\alpha = \begin{vmatrix} f_0 & t_\alpha^{m_1} f_1 \dots & \dots & t_\alpha^{m_r} f_r \\ f_0' & m_1 t_\alpha^{m_1-1} f_1 + t_\alpha^{m_1} f_1' \dots & \dots & m_r t_1^{m_r-} f_r + t_\alpha^{m_r} f_r' \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_0^{(m_1)} & m_1! f_1 + \dots & \dots & \dfrac{m_r!}{(m_r - m_1)!} t^{m_r - m_1} f_r + \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_0^{(r)} & m_1! f^{(r-m_1)} + \dots & \dots & \dfrac{m_r!}{(m_r - r)!} t^{m_r - r} f^r \end{vmatrix}$$

Il determinante w_α è una somma di termini della forma $a_0^{h_0} a_1^{h_1} \dots a_r^{h_r}$, ogni elemento $a_i^{h_i}$ essendo una serie di potenze intere di t_α. Il termine iniziale della serie $a_i^{h_i}$ è uguale al termine iniziale della serie $(m_i!/(m_i - h_i)!(t_\alpha^{m_i - h_i} f_i$, se $m_i - h_i \geqslant 0$ $(m_0 = 0)$, oppure al termine iniziale della serie $f_i^{(m_i - h_i)}$ se $m_i - h_i < 0$.

Quindi $v_P(a_0^{h_0} \dots a_r^{h_r})$ è maggiore od uguale alla somma dei termini positivi della successione $m_1 - h_1$, $m_2 - h_2$, ..., $m_r - h_r$.

Dunque, dato che $\{h_1, \dots, h_r\} = \{1, \dots, r\}$, possiamo scrivere

$$v_P(a_0^{h_0} \dots a_r^{h_r}) \geqslant m_1 - h_1 + \dots + m_r - h_r = \sum_{i=1}^{r} m_i - \frac{r(r+1)}{2}.$$

Il segno $=$ vale soltanto per quei prodotti $a_0^{h_0} \dots a_r^{h_r}$ per i quali $m_i - h_i \geqslant 0$, per ogni i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Per calcolare la somma S_0 dei termini iniziali di questi prodotti, cioè dei termini di grado minimo, osserviamo che questa somma è uguale alla somma dei termini di grado minimo del determinante

$$d = \begin{vmatrix} f_0 & t_\alpha^{m_1} f_1 & \dots & t_\alpha^{m_r} f_r \\ 0 & m_1 t_\alpha^{m_1 - 1} f_1 & \dots & m_r t_\alpha^{m_r - 1} f_r \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & m_1! f_1 & \dots & \dfrac{m_r!}{(m_r - m_1)!} t_\alpha^{m_r m_1} f_r \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{m_r!}{(m_r - m)!} t_\alpha^{m_r - r} f_r \end{vmatrix}$$

il quale si deduce dal determinante w_α sostituendo lo zero alle derivate $f_0', \dots, f_0^{(r)}$, $f_1', \dots, f_r^{(r)}$.

Il determinante d è uguale al prodotto $m_1 \dots m_r f_0 f_1 \dots f_r t_\alpha^{(m_1+\dots m_r/r(r+1)/2)} d_1$, ove

$$d_1 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1-1 & m_2-1 & \dots & m_r-1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (m_1-1)! & \dfrac{(m_2-m_1)!}{(m_2-1)!} & \dots & \dfrac{(m_r-1)!}{(m_r-m_1)!} \\ 0 & \dfrac{(m_2-1)!}{(m_2-m_1-1)!} & \dots & \dfrac{(m_r-1)!}{(m_r-m_1-1)!} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & (m_2-1)! & \dots & \dfrac{(m_r-m_2)!}{(m_r-1)!} \\ 0 & 0 & & \dfrac{(m_r-r)!}{(m_r-1)!} \end{array} \right|$$

Questo si vede moltiplicando, ordinatamente, per $1, t_\alpha, \dots, t^r$ le righe di d, in modo che $t_\alpha^{m_1}$ appaia come fattore nella seconda colonna, $t_\alpha^{m_2}$ nella terza colonna, ..., $t_\alpha^{m_r}$ nell'ultima.

Per calcolare il determinante d_1, consideriamo r variabili indipendenti $x_1, \dots, x_r$ ed il determinante

$$\delta(x_1, \dots, x_r) = \left| \begin{array}{llll} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & & x_r(x_r-1) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1(x_1-1)\dots(x_1-r+2) & x_2(x_2-1)\dots(x_2-r+2) & & x_r(x_r-1)\dots(x_r-r+2) \end{array} \right|$$

Questo determinante è, evidentemente, uguale al determinante di Vandermonke di $x_1, \dots, x_r$ e $d_1 = \delta(m_1-1, m_2-1, \dots, m_r-1)$. Siccome gli interi $m_1, \dots, m_r$ sono diversi fra di loro, risulta $d_1 \neq 0$. Risulta poi che la somma S_0 dei termini di grado minimo figuranti nello sviluppo di w_α secondo le potenze di t_α è uguale a

$$m_1 m_2 \dots m_r \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (m_i - m_j) f_0(P) \dots f_r(P) t_\alpha^{(m_1+\dots+m_r-r(r+1)/2)}$$

il che dimostra il teorema di C. SEGRE.

3. – Osservazioni.

a) Il teorema 1 vale per una curva algebrica non singolare qualunque, anche non completa; per esempio, per una curva algebrica affine.

b) Se la curva X è completa, il teorema 1 si traduce, mediante i divisori associati ai fibrati che vi intervengono, nella relazione di equivalenza lineare (5) di SEVERI (cfr. [6]).

c) Il teorema di Segre resta valido anche se P è uno zero comune a tutte le sezioni dello spazio A (il caso delle serie lineari con punti fissi). Se P è zero m_0-plo per la sezione generica $\sigma \in A$, $(m_0 + m_1)$-plo per la sezione generica $\sigma_1 \in A_1, \ldots,$ $(m_0 + m_r)$-uplo per la sezione generica di A_r, allora

$$v_P(w) = (r+1)m_0 + m_1 + \ldots + m_r - \frac{r(r+1)}{2},$$

come risulta dallo stesso ragionamento fatto sul wronskiano w_α in cui si sostituiscono $f_0, t_\alpha^{m_1} f_1, \ldots, t_\alpha^{m_r} f_r$ con $t_\alpha^{m_1} f_0, t_\alpha^{(m_0+m_1)} f_1, \ldots, t_\alpha^{(m_0+m_r)} f_r$, rispettivamente.

4. – Il teorema 1 può essere formulato e dimostrato sopra un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p > 0$. Occorre però osservare che in caratteristica positiva il wronskiano $w_\alpha = |d^j s/_{i\alpha} dt_\alpha^j|_{0 \leqslant i,j \leqslant r}$ potrebbe risultare identicamente nullo, pur essendo le funzioni $s_{0\alpha}, \ldots, s_{r\alpha}$ linearmente indipendenti.

In questo caso, considerando con F. K. SCHMIDT opportune derivazioni ed il wronskiano generalizzato (cfr. [4]), troveremo r numeri naturali $1 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r$ ed un fibrato N analogo ad M, associato allo spazio A, soddisfacente la relazione

$$N \approx L^{\otimes(r+1)} \oplus K^{\otimes(\mu_1 + \ldots + \mu_r)}. \tag{7'}$$

5. – Riteniamo interessante il problema della generalizzazione a più dimensioni del teorema 1, e qualche raffronto con i risultati di W. F. POHL (cfr. [3]) sul calcolo differenziale degli spazi fibrati.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. C. GUNING, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton (1966).
[2] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der Algebraischen geometrie*, Berlin (1956).
[3] W. F. POHL, *Differential geometry of higher order*, Topology (1962).
[4] F. K. SCHMIDT, Journal für reine und angewandte Mathematik (1937).
[5] C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di matematica, **189**.
[6] F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, vol. I, Bologna (1926).
[7] M. BECHEANU, *Asupra divizorului de contact*, Studii si cercetari Matematice (1971).