Sull'ultima teoria unitaria di Einstein.

BRUNO FINZI (Milano) (*)

Questo lavoro è dedicato all'amico carissimo Beniamino SEGRE in occasione del suo 70° compleanno.

Sunto. – *Si propongono alcune estensioni e complementi all'ultima teoria relativistica unitaria di Einstein.*

Questa Nota riguarda possibili estensioni dell'ultima teoria unitaria di Einstein. Ho creduto opportuno per facilitarne la comprensione richiamare con una certa estensione la teoria ormai classica della gravitazione (**) e i concetti da me ottenuti nella Nota «Su le equazioni di campo della teoria relativistica unitaria di Einstein» (***)

1. – Lo spazio-tempo e il principio di relatività generale.

La teoria della relatività nega carattere assoluto, indipendente cioè dall'osservatore, sia allo spazio che al tempo, per attribuire invece tale carattere alla sola propagazione della luce.

Sin dal 1908 risultò evidente, seguendo un'idea di Minkowski, che se è assoluta la propagazione della luce, assoluto deve pure risultare lo spazio-tempo, il continuo quadridimensionale insieme degli eventi elementari, insieme dei movimenti corpuscolari. In questo continuo si deve ravvisare il grande palcoscenico dei fenomeni naturali, che la nostra mente non può neppure pensare da esso avulsi.

Come le leggi geometriche di uno spazio debbono essere invarianti rispetto ad ogni cambiamento di riferimento in questo spazio, così, se veramente lo spazio-tempo è sede dei fenomeni fisici, tutte le leggi fisiche debbono avere carattere invariante di fronte ad un generico cambiamento del riferimento spazio-temporale, soddisfacendo al principio di relatività generale.

La teoria einsteiniana della relatività generale, fondata su tale principio, costruì un mirabile modello atto a spiegare in termini geometrici l'inerzia e la gravitazione.

(*) Entrata in Redazione il 4 giugno 1973.

(**) B. FINZI, *Teorie relativistiche unitarie*, Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Pavia-Torino, 1956.

(***) B. FINZI, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, **14** (1953).

2. – L'inerzia.

Per spiegare i fenomeni inerziali basta valersi di uno spazio-tempo pseudoeuclideo quadridimensionale, la cui metrica può sempre e ovunque porsi nella seguente forma pseudopitagorica:

$$(1) \quad ds^2 = (dy_0)^2 - (dy_1)^2 - (dy_2)^2 - (dy_3)^2,$$

dove, se c è la velocità della luce (nel vuoto), $y_0 = ct$ esprime il tempo in unità römeriane e y_1, y_2, y_3 sono tre coordinate cartesiane spaziali.

Nel riferimento presupposto dalla (1), che viene detto riferimento inerziale, l'operazione di derivazione tensoriale è quella ordinaria, e un corpuscolo si muove, per inerzia, di moto rettilineo uniforme.

Questo semplicissimo moto è rappresentato nello spazio-tempo da una linea retta, che è una geodetica, autoparallela, per cui:

$$(2) \quad \delta \int ds = 0.$$

Cambiamo riferimento, passando dalle particolari coordinate y alle coordinate generali x .

La metrica perde la forma pseudopitagorica (1), e assume la forma differenziale quadratica, indefinita in segno:

$$(3) \quad ds^2 = a_{ik}(x) dx^i dx^k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

La derivazione tensoriale in coordinate generali non è più quella ordinaria, perchè ad es. un vettore v_i si deriva così:

$$(4) \quad v_{i/k} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\} v_l$$

dove $\left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di Christoffel, costruiti con le derivate ordinarie dei coefficienti a_{ik} della metrica (3).

Anche nel generico riferimento considerato vale per il moto inerziale di un corpuscolo la legge (2) della geodetica spazio-temporale, perchè la retta definita dalla (2) è un ente geometrico che prescinde dal particolare riferimento di cui ci si vale per rappresentarla. Scrivendo le equazioni che traducono la formula variazionale (2), si ottengono delle equazioni perfettamente analoghe a quelle vigenti in meccanica classica per il moto inerziale, soltanto che la massa risulta variabile con la velocità, e tende all'infinito quando questa tende alla velocità della luce (genericamente variabile nel generico riferimento considerato). Le forze apparenti che si debbono intro-

durre in meccanica classica quando il riferimento non è inerziale (le forze di trasciamento, centrifughe, centrifughe composte, che subisce ad es. un passeggero sbalottato in un veicolo) risultano espresse linearmente e omogeneamente mediante i simboli di Christoffel.

L'inerzia assume così carattere geometrico nello spazio-tempo, perchè il moto inerziale è tradotto da una retta e le forze apparenti (le forze inerziali) sono rappresentate dai simboli di Christoffel, simboli che non sono tensori, che non hanno in sè nulla d'intrinseco, come appunto le forze apparenti; e gli uni, come le altre, sono nulli nel riferimento inerziale (1), ma non in un altro riferimento generico.

3. - La gravitazione.

Per spiegare i fenomeni gravitazionali basta valersi ancora della legge d'inerzia tradotto dalla (2) a cui corrisponde una geodetica dello spazio-tempo. Essa non si riferisce però ad uno spazio-tempo pseudoeuclideo, ma ad uno spazio-tempo riemanniano, incurvato dalle masse e dalle energie, le quali appunto così esplicano le loro azioni gravitazionali.

La geometria di uno spazio-tempo riemanniano è tutta individuata da una generica forma differenziale quadratica indefinita in segno:

$$(5) \quad ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k$$

che, a differenza della (3) non può porsi, sempre e ovunque, con un semplice cambiamento di coordinate, nella forma pseudopitagorica (1). Il tensore doppio simmetrico g_{ik} che compare nella (5), il tensore fondamentale, dà col suo campo la geometria nell'intorno di ogni evento, permette di costruire con le derivate ordinarie delle sue componenti i simboli di Christoffel e di eseguire quindi, con la (4), l'operazione di derivazione tensoriale. Questo campo funge da costante, perchè, per il lemma di Ricci, esso ha derivate nulle:

$$(6) \quad g_{ik|k} \equiv 0.$$

Estendendo quel che avviene nei moti inerziali, i simboli di Christoffel, che intervengono nelle equazioni differenziali traducenti la formula variazionale (2), rappresentano l'insieme delle forze inerziali e delle forze gravitazionali agenti su un corpuscolo. Le componenti del tensore fondamentale, da cui i simboli di Christoffel provengono per derivazione ordinaria, rappresentano allora i potenziali gravitazionali ed inerziali.

Deve essere rilevato che, genericamente, la geodetica che dà il moto gravitazionale di un corpuscolo non è una retta, perchè lo spazio-tempo è curvo, e neppure esiste un riferimento inerziale rispetto a cui il movimento corrispondente è rettilineo uniforme.

Ma come s'incurva lo spazio-tempo in presenza di masse assegnate? Come si precisa, attraverso le cosiddette equazioni gravitazionali, la solidarietà fra fenomeni e spazio-tempo in cui si svolgono?

Mi basta ricordare che, se si riguardano le masse come singolarità assegnate del campo gravitazionale, la geometria dello spazio-tempo esternamente ad esse è data da un semplice ed espressivo principio variazionale.

Si consideri il tensore di Riemann contratto R_{ik} , ottenuto contraendo il tensore quadruplo di Riemann, che dà le curvature e che è costruito con i simboli di Christoffel e con le loro derivate prime. Si consideri poi l'invariante lineare del tensore di Riemann contratto:

$$(7) \quad R = R_{ik} g^{ik}.$$

R dà il valore medio delle curvature attorno ad ogni punto (evento) dello spazio-tempo. Sia infine ω una generica regione dello spazio-tempo. Il principio variazionale annunciato è il seguente: il valor medio in ω della curvatura media R è minimo, a parità di condizioni al contorno, e quindi:

$$(8) \quad \delta \int_{\omega} R d\omega = 0.$$

Dal principio variazionale precedente si traggono le seguenti equazioni gravitazionali, valide esternamente alle masse che costituiscono assegnate singolarità nel campo:

$$(9) \quad R_{ik} = 0.$$

Poichè, negli spazi riemanniani, R_{ik} è un tensore doppio simmetrico, la (9) riassume 10 equazioni differenziali di 2° ordine nelle 10 componenti del campo fondamentale che dà la geometria dello spazio-tempo riemanniano considerato. E però le 4 coordinate spazio-temporali di cui ci si vale, debbono restare arbitrarie, e quindi dalle (9) si debbono trarre 4 identità. Queste provengono infatti da certe identità, note in geometria differenziale col nome di « identità di Bianchi », e sono anche diretta conseguenza del principio variazionale (8). Esse affermano che è nulla la divergenza di un tensore doppio simmetrico A_{ik} costruito linearmente ed omogeneamente col tensore di Riemann contratto R_{ik} , il tensore gravitazionale di Levi-Civita:

$$(9') \quad \operatorname{div} A_{ik} \equiv A_{ik/l} g^{kl} = 0.$$

Il tensore gravitazionale A_{ik} è nullo esternamente alla materia, come lo è, per la (9), il tensore R_{ik} da cui dipende linearmente ed omogeneamente, ma non è nullo entro la materia, dove risulta proporzionale ad un tensore che sintetizza le energie dovute alla distribuzione delle masse e al loro movimento.

Si ottengono così tutte le leggi meccaniche a cui ubbidiscono le masse gravitanti dandone il movimento. Queste leggi risultano coincidenti con quelle desunte dal principio della geodetica spazio-temporale (2).

Secondo la teoria einsteiniana, lo spazio-tempo riemanniano costituisce un modello geometrico dei fenomeni gravitazionali ed inerziali, nel quale gravitazione, inerzia e geometria costituiscono un tutto unico.

4. — Il campo elettromagnetico.

A differenza del campo gravitazionale, il campo elettromagnetico non trova la sua essenza nella geometria di uno spazio-tempo riemanniano, ma vi trova sintetica ed espressiva rappresentazione, e singolarmente compendiose ed eleganti risultano le leggi che lo governano.

Il campo elettromagnetico (nel vuoto) viene rappresentato nello spazio-tempo dal campo di un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{ik} = -F_{ki}$, il tensore elettromagnetico, e la distribuzione elettrica dal campo di un unico vettore j_i , il vettore distribuzione elettrica.

Le leggi elettromagnetiche, le leggi di Maxwell, si riducono (nel vuoto) alle seguenti due, che, per il loro carattere tensoriale nello spazio-tempo, soddisfano automaticamente al principio di relatività generale: il tensore elettromagnetico è irrotazionale, la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica. Queste leggi si enunciano nello stesso modo delle ben note leggi elettrostatiche, e però le leggi elettromagnetiche vigono nello spazio-tempo quadridimensionale, mentre le leggi elettrostatiche, essendo indipendenti dal tempo, vigono nello spazio tridimensionale.

Nello spazio-tempo le leggi elettromagnetiche si scrivono così:

$$(10) \quad \text{rot } F_{ik} \equiv \varepsilon^{jhki} F_{jk/h} = 0$$

$$(11) \quad \text{div } F_{ik} \equiv g^{hk} F_{ik/h} = j_i.$$

I primi membri nelle due relazioni hanno la stessa struttura, soltanto che nella prima compare il tensore emisimmetrico di Ricci ε^{jhki} che serve a costruire i prodotti esterni e formazioni esterne, nella seconda compare il tensore fondamentale g^{hk} che serve a costruire i prodotti interni e formazioni interne. Entrambi questi tensori fungono da costanti in uno spazio riemanniano, perchè hanno ivi derivato tensoriale nullo.

La prima legge dice che il tensore elettromagnetico proviene per derivazione da un potenziale elettromagnetico φ_i , cioè che l'integrale generale della (10) si esprime così:

$$(12) \quad F_{ik} = \varphi_{k/i} - \varphi_{i/k}.$$

Dalla seconda si trae come importante conseguenza che il vettore distribuzione elettrica è solenoidale:

$$(13) \quad \operatorname{div} j_i = 0$$

e questa relazione traduce il principio di conservazione dell'elettricità.

Il campo elettromagnetico esercita attraverso la sua energia azione gravitazionale e contribuisce ad incurvare lo spazio-tempo. Brevemente si dice che anche l'energia elettromagnetica pesa, intendendo dire che il tensore gravitazionale A_{ik} non è nullo esternamente alle masse gravitanti, come lo è in assenza di campo elettromagnetico, ma è proporzionale ad un tensore doppio simmetrico E_{ik} che sintetizza tutte le molteplici manifestazioni energetiche del campo elettromagnetico.

Per ottenere le leggi meccaniche alle quali ubbidiscono le masse, in presenza di campo elettromagnetico, basta tener conto dell'identità (9'). Si nota così una profonda differenza fra il movimento, per sola gravitazione, di un corpuscolo neutro e il movimento di un corpuscolo elettrizzato: mentre il movimento di un corpuscolo neutro è dato da una geodetica dello spazio-tempo riemanniano, ed ha quindi carattere geometrico, il movimento di un corpuscolo elettrizzato, non solo non è dato da una geodetica dello spazio-tempo, ma non ha neppure carattere geometrico, perchè la legge che ne dà il movimento contiene un parametro che dipende dal corpuscolo e non dallo spazio-tempo, e precisamente il rapporto fra la carica del corpuscolo e la sua massa.

In compenso vi è un carattere saliente che il campo gravitazionale e il campo elettromagnetico hanno in comune. entrambi i campi comportano una propagazione ondosa, e i fronti d'onda avanzano con la medesima velocità, la velocità della luce.

5. — Teorie relativistiche unitarie.

I pochi cenni che ho richiamato lasciano intuire quanto adeguata e sintetica rappresentazione trovi il campo elettromagnetico nello spazio-tempo e quanto semplici ed eleganti risultino le leggi che lo governano.

Tuttavia i fenomeni elettromagnetici non trovano spiegazione nella geometria dello spazio-tempo riemanniano, come la trovano invece i fenomeni gravitazionali. Non si possono interpretare in termini geometrici gli enti F_{ik} e j_i che individuano il campo elettromagnetico, così come avviene per gli enti che individuano il campo gravitazionale; le leggi elettromagnetiche non sono interpretabili quali enunciati di teoremi di geometria, come quelle meccaniche provenienti dall'identità (9'); la legge di movimento di un corpuscolo elettrizzato non ha carattere geometrico.

La ragione di tutto ciò sta nel fatto che lo spazio-tempo riemanniano ha la sua geometria completamente impegnata a spiegare la gravitazione, e questa geometria è troppo angusta, non ha disponibile un numero sufficiente di parametri per spiegare, oltre alla gravitazione, anche il campo elettromagnetico.

Per spiegare in termini geometrici sia i fenomeni gravitazionali che quelli elettromagnetici, e cioè essenzialmente tutti i fenomeni attualmente noti nel macrocosmo, è necessario valersi di spazi che hanno una geometria più ampia dei riemanniani quadridimensionali. Soltanto così è possibile istituire una teoria relativistica unitaria, che, anche se limitata al macrocosmo, corrisponde ad un anelito, ad un ideale, verso il quale furono protesi, dal 1918 in poi, molti matematici e fisici alcuni dei quali di gran nome, come EINSTEIN, WEYL, EDDINGTON, SCHRÖDINGER, VELEN, ... [1].

Ma come può ampliarsi la geometria di uno spazio riemanniano quadridimensionale? Tre procedimenti si presentano spontanei: 1) aumentare il numero di dimensioni; 2) mantenere fisso il numero 4 delle dimensioni, ma ampliare la metrica, che dà la geometria nell'intorno in ogni punto, facendone una metrica più ampia della riemanniana, come negli spazi di Eddington, e più generalmente di Finsler; 3) mantenere fissi sia il numero 4 delle dimensioni che la metrica, ma ampliare la connessione fra due intorni contigui, servendosi, in luogo dei simboli di Christoffel, di altri coefficienti di connessione. Si può poi naturalmente valersi di più d'uno dei tre procedimenti.

6. — Teoria riemanniana pentadimensionale.

Nella teoria unitaria di Kaluza [2], risalente al 1921, si considera uno spazio-tempo riemanniano pentadimensionale, nel quale le coordinate di un punto sono: la coordinata temporale $x_0 = ct$, tre coordinate spaziali x_1 x_2 x_3 e una quinta coordinata x_4 «inconoscibile», che non è certamente nè spaziale, nè temporale.

L'idea fondamentale della teoria è quella di determinare la forma differenziale quadratica in 5 variabili

$$(14) \quad d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4).$$

che rappresenta la metrica e che dà tutta la geometria dello spazio riemanniano pentadimensionale, in modo che al movimento di un generico grave elettrizzato, al quale non corrisponde una geodetica dello spazio-tempo quadridimensionale, corrisponda invece una geodetica dello spazio pentadimensionale.

Ciò è possibile, pur di legare in modo semplicissimo i coefficienti $\gamma_{\alpha\beta}$ della metrica pentadimensionale ai coefficienti g_{ik} della metrica dello spazio-tempo quadridimensionale (i potenziali gravitazionali), e alle componenti φ_i del vettore spazio-temporale che dà il potenziale elettromagnetico.

Come nella teoria gravitazionale, scriviamo che, esternamente alla materia, lo spazio pentadimensionale è in media il meno curvo possibile. Si perviene così alla

$$(15) \quad R_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)$$

del tutto analoga alla (9), ed essa sintetizza in modo miracoloso due leggi: la prima dice come pesi, esternamente alla materia, l'energia elettromagnetica; la seconda afferma la solenoidalità del tensore elettromagnetico, conformemente alla (11), perchè esternamente alla materia è $j_i = 0$.

La teoria di Kaluza, successivamente perfezionata da KLEIN [3], è soddisfacente in quanto geometrizza il moto di ogni corpuscolo e traduce in teoremi geometrici le leggi gravitazionali ed elettromagnetiche, ma introduce una quinta misteriosa dimensione « extra » che persuade poco.

Tuttavia, se alcuni dei risultati elegantissimi ai quali la teoria perviene sono ottenuti, diremo così, « per costruzione », molti altri rappresentano reconditi teoremi, che non possono essere casuali. Molta verità fisica deve essere rappresentata dal modello geometrico di cui la teoria si vale!

7. – Ampliamento della metrica e della connessione riemanniana.

Non volendo accogliere nelle teorie relativistiche unitarie spazi pentadimensionali, nè volendo ricorrere agli equivalenti spazi proiettivi, non restano altre alternative se non quella di ampliare la metrica o quella di ampliare la connessione di uno spazio riemanniano.

Si può ampliare la metrica riemanniana accogliendo la proposta di EDDINGTON [4], o altre più generali e complesse.

Si può ampliare la connessione riemanniana valendosi nella derivazione tensoriale, invece dei simboli di Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}$, di generici coefficienti che indichiamo con $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right]$. Per derivare un vettore v_i , ci serviremo perciò, in luogo della (4), della seguente formula:

$$(16) \quad v_{i/k} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right] v_l.$$

I coefficienti di connessione possono dipendere, oltre che dalle coordinate x , anche dalle loro derivate dx/ds , come nella teoria unitaria di Nowobatski [5], e in quella di Horvath e Moor [6] (la quale ultima si vale anche di una generica metrica di Finsler); ma nelle teorie più feconde i coefficienti di connessione dipendono soltanto dalle coordinate, e quindi la connessione è affine.

8. – Teoria affine di Weyl.

La prima teoria a connessione affine è anche teoria relativistica unitaria, in ordine di tempo. Essa risale al 1918, ed è dovuta a WEYL [7].

Nella teoria di Weyl i coefficienti $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right]$ sono « oggetti geometrici » che differiscono dai simboli di Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\}$ tratti dalla metrica (5) per un tensore triplo γ^l_{ik} costruito linearmente ed omogeneamente col potenziale elettromagnetico φ_i :

$$(17) \quad \left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right\} + \gamma^l_{ik}, \quad \gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} \{ \varphi_i g^l_k + \varphi_k g^l_i - \varphi^l g_{ik} \}.$$

Essendo $\gamma^l_{ik} = \gamma^l_{ki}$, la connessione è simmetrica e quindi lo spazio è privo di torsione.

L'esistenza di un potenziale elettromagnetico assicura automaticamente l'irrotazionalità del tensore elettromagnetico, mentre la seconda legge elettromagnetica (11), insieme ad altre leggi vigenti nella teoria gravitazionale, precisa la solidarietà fra fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici, da un lato, e lo spazio-tempo in cui si svolgono, dall'altro.

Un serio appunto si può muovere alla teoria di Weyl: quello di non fondere in un tutto unico il campo gravitazionale e il campo elettromagnetico, perchè, in sostanza, quest'ultimo interviene direttamente soltanto nella connessione dello spazio-tempo, attraverso il suo potenziale.

Ma vi è un'altra circostanza che ha indotto ad abbandonare la teoria di Weyl: uno scalare, quale il modulo $\sqrt{g_{ik} v^i v^k}$ di un vettore v^i , nel trasporto per parallelismo del vettore, non resta invariato. Esso non si deriva quindi nel modo consueto e l'incremento che subisce lungo un cammino chiuso non è nullo. Ciò dipende dal fatto che non è identicamente nulla la derivata tensoriale del tensore g_{ik} . Si ha infatti:

$$(18) \quad g_{ik|k} = -\varphi_k g_{ik}.$$

I medesimi inconvenienti si riscontrano anche nell'estensione che Eddington diede nel 1924 della teoria di Weyl [8]. Non si riscontrano invece nell'ultima teoria unitaria di Einstein e nella teoria puramente affine di Schrödinger [9] che ne costituisce una variante, perchè esiste qui un tensore fondamentale, la cui derivata, eseguita in modo opportuno, è nulla.

9. — L'ultima teoria di Einstein.

Esporrò ora, per sommi capi, l'ultima teoria unitaria di Einstein, alla quale egli pervenne dopo molteplici abbozzi, esposizioni organiche nell'ambito reale e nell'ambito complesso, abbandoni, riprese, che assillarono l'ultimo decennio della sua vita, volto e coronare 35 anni di ricerche e di meditazioni sull'affascinante problema unitario [10].

L'idea fondamentale dell'ultima teoria unitaria einsteiniana mi sembra la seguente: valersi sì di uno spazio-tempo quadridimensionale non riemanniano, ma a connessione affine e il più possibile vicino, nelle sue proprietà essenziali, agli spazi riemanniani; valersi di uno spazio-tempo non riemanniano, la cui geometria dipenda, come avviene per gli spazi riemanniani, da un unico campo fondamentale, e trarre da questo campo ogni ente fisico.

Il tensore fondamentale del quale ci si vale non può essere simmetrico, come avviene negli spazi riemanniani. Potremo perciò spezzare il tensore fondamentale, che diremo G_{ik} , in due parti, l'una simmetrica $G_{\underline{ik}}$ e l'altra emisimmetrica $G_{\dot{ik}}$:

$$(19) \quad G_{ik} = G_{\underline{ik}} + G_{\dot{ik}}.$$

Imponiamo al campo fondamentale asimmetrico $G_{ik}(x)$ tre uffici e una proprietà: gli stessi tre uffici che competono, la stessa proprietà che è identicamente goduta dal campo fondamentale simmetrico $g_{ik}(x)$ negli spazi riemanniani.

In primo luogo, il campo fondamentale dia, con la sua parte simmetrica, la metrica (5), sia cioè:

$$(20) \quad G_{\underline{ik}} = g_{ik}.$$

In secondo luogo, il tensore fondamentale colleghi fra di loro le varie forme di rappresentazione, covariante, controvariante, miste, degli stessi enti.

Il terzo ufficio del tensore fondamentale è il seguente. Negli spazi di Riemann dal lemma di Ricci (6), che afferma la costanza del tensore fondamentale g_{ik} , si possono ricavare le espressioni dei simboli di Christoffel che danno la connessione (simmetrica). Imponendo analogamente la costanza del tensore fondamentale G_{ik} , si possono ricavare i coefficienti di connessione dello spazio non riemanniano considerato, quando si scriva che è nullo il derivato del tensore fondamentale e si eseguisca la derivazione così:

$$(21) \quad G_{\pm \frac{ik}{h}} \equiv \frac{\partial G_{ik}}{\partial x^h} - \left[\begin{matrix} l \\ i \ h \end{matrix} \right] G_{lk} - \left[\begin{matrix} l \\ h \ k \end{matrix} \right] G_{il} = 0.$$

In questa relazione, non essendovi simmetria, bisogna rispettare l'ordine degli indici e trattare i da primo indice e k da secondo. Per non sbagliare, si polarizzano gli indici (come le cariche elettriche), contrassegnandoli con un segno $+$ o $-$ come è indicato nella (21) stessa. Ed è proprio necessario eseguire la derivazione con la polarizzazione indicata, perchè se la si eseguisse polarizzando gli indici tutti col segno $+$, o tutti col segno $-$, sarebbe nullo il determinante della 64 equazioni lineari (algebriche) che si verrebbero a scrivere nelle 64 incognite $\left[\begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right]$, e quelle non potrebbero univocamente risolversi rispetto a queste. Le 64 equazioni riassunte nella (21) sono invece in grado di dare in modo univoco i 64 coefficienti di connessione $\left[\begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right]$, come hanno mostrato esplicitamente la TONNELAT [11] e HLAVATY [12].

Se il campo fondamentale è simmetrico, dalla (21) si deduce che lo è pure la connessione e i suoi coefficienti si riducono ai simboli di Christoffel: ne segue che lo spazio è riemanniano, ma non così se il campo fondamentale non è simmetrico. Anzi, in questo caso i coefficienti di connessione non sono mai simmetrici rispetto ai due indici inferiori, e la loro parte emisimmetrica $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right]$ costituisce un tensore triplo T_{ik}^l : il tensore di Cartan, che dà la torsione:

$$(22) \quad T_{ik}^l = \left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right].$$

E veniamo ora alla proprietà che si impone al tensore fondamentale.

Negli spazi di Riemann, dal lemma di Ricci (6), si deduce che è costante anche il tensore di Ricci ε^{jki} , e cioè che è nullo il suo derivato:

$$(23) \quad \varepsilon^{jki}/_r = 0.$$

Questa proprietà non sussiste genericamente invece per gli spazi non riemanniani di torsione, anche se per essi vale la (21).

Per rendere questi spazi anche sotto questo aspetto, che ha molti e importanti riflessi geometrici, analoghi agli spazi riemanniani, imponiamo la condizione (23) (con la polarizzazione tutta d'egual segno). Ne segue che deve essere nullo il vettore T_i :

$$(24) \quad T_i \equiv T_{ik}^k = 0.$$

Il vettore T_i è detto vettore di torsione, o vettore di Einstein.

La (24) può scriversi in altra forma, introducendo il tensore emisimmetrico coniugato del tensore fondamentale, o meglio della sua parte emisimmetrica:

$$(25) \quad *G_{ik} = \varepsilon_{ikrs} G^{rs}.$$

Si ha infatti:

$$(26) \quad \text{rot } *G_{ik} = 0.$$

Questa relazione, confrontata con la (10), permette di identificare il coniugato del tensore fondamentale (o meglio della sua parte emisimmetrica) al tensore elettromagnetico F_{ik} . Così infatti risulta identicamente soddisfatta la prima legge elettromagnetica, mentre la seconda, la (11), diviene la definizione della distribuzione elettrica: «distribuzione elettrica è ciò che diverge dal coniugato del tensore fondamentale»; e identicamente tale distribuzione elettrica risulta solenoidale, conformemente al principio di conservazione dell'elettricità.

10. — Le equazioni di campo.

La geometria dello spazio-tempo della teoria unitaria di Einstein è dunque tutta individuata dal campo fondamentale $G_{ik}(x)$, che con la sua parte simmetrica dà ovunque la metrica, con la parte simmetrica e l'emisimmetrica dà la connessione, e quindi la curvatura e la torsione. Ma come individuare questo campo fondamentale? Mediante quel medesimo suggestivo principio di minima curvatura media che vige nella teoria semplicemente gravitazionale.

Sia R l'invariante lineare del tensore di Riemann contratto R_{ik} , che ora è un tensore doppio genericamente asimmetrico, costruito con i coefficienti di connessione $\left[\begin{smallmatrix} l \\ i \ k \end{smallmatrix} \right]$ e le loro derivate:

$$(27) \quad R = R_{ik} G^{ik}.$$

Scriviamo ancora il principio variazionale (8) in una generica regione dello spazio-tempo. Da esso, eseguendo la variazione nel rispetto dell'unica condizione (26) imposta al campo fondamentale (oltre, sintende, delle condizioni al contorno), si trovano altre due equazioni tensoriali da aggiungere alla (26). La prima afferma che la parte simmetrica del tensore di Riemann contratto è nulla:

$$(28) \quad R_{\underline{ik}} = 0;$$

la seconda afferma che è nullo il rotore della sua parte emisimmetrica:

$$(29) \quad \text{rot } R_{\underline{ik}} = 0.$$

Il quadro delle equazioni indefinite del campo unitario è dunque il seguente:

$$(28) \quad R_{\underline{ik}} = 0 \qquad (29) \quad \text{rot } R_{\underline{ik}} = 0 \qquad (26) \quad \text{rot } *G_{ik} = 0.$$

Se è vero, come diceva EINSTEIN, che « la teoria dei campi è il più grande successo dell'uomo nella scienza », dobbiamo noi uomini, e in particolare noi matematici, rallegrarci, perchè l'unico campo al quale egli è pervenuto con la sua ultima teoria unitaria costituisce l'estrema sintesi di tutti i campi attualmente noti nel macrocosmo; il campo che dà la geometria dello spazio-tempo, e quindi la cinematica, intesa veramente come geometria del movimento, il campo dell'inerzia, il campo della gravitazione, il campo elettromagnetico.

Molte ricerche matematiche si ispirarono alla teoria esposta, e alcune anzi ne presentarono qualche spunto, come quelle di STRANEO [13] e di HATTORI [14], vaticinanti l'una l'intervento della torsione, l'altra l'asimmetria del tensore fondamentale. Contributi importanti vi recarono SCHRÖDINGER [15], TONNELAT [16], HALAVATY [17],

EISENHART [18], STRAUSS [19], LICHNEROWICZ [20], WYMAN [21], BONNOR [22], PAPA-PETROU [23], BOSE [24], VAIDYA [25], WINOGRADZKI [26], e contributi significativi anche dall'Italia [27]. E così doveva essere, perchè proprio in Italia fu creato dal RICCI quel « Calcolo differenziale assoluto » che costituisce lo strumento matematico essenziale della teoria della relatività, perchè in Italia LEVI-CIVITA e la sua scuola recarono contributi fondamentali a tale calcolo e alla istituzione stessa della teoria della relatività generale.

11. — Carattere e significato delle teorie relativistiche unitarie.

Fra le varie teorie relativistiche unitarie le più suggestive sono: la teoria pentadimensionale, o l'equivalente teoria proiettiva, e l'ultima teoria affine di Einstein.

In entrambe il campo gravitazionale e quello elettromagnetico determinano insieme una geometria, ma mentre nella prima teoria è facile interpretare fisicamente i vari enti geometrici, ciò appare meno facile nella seconda teoria; per contrapposto, nella teoria affine il campo gravitazionale e il campo elettromagnetico sono più intimamente fusi che non nella teoria pentadimensionale: la teoria affine è certamente più unitaria della teoria pentadimensionale.

In entrambe le teorie tutte le leggi gravitazionali ed una delle due leggi elettromagnetiche maxwelliane vengono espresse da identità geometriche. Nella teoria pentadimensionale è la seconda legge elettromagnetica (riguardante la divergenza del tensore elettromagnetico) che viene da un'identità geometrica, mentre la prima legge (riguardante il rotore) è identicamente soddisfatta, avendo postulato l'esistenza di un potenziale elettromagnetico; nella teoria affine è invece la prima legge elettromagnetica che viene espressa da un'identità geometrica, mentre la seconda diviene una ragionevole definizione: la definizione della distribuzione elettrica, definizione ragionevole perchè tale distribuzione risulta solenoidale, come vuole il principio di conservazione dell'elettricità.

Entrambe le teorie unitarie sono poi conformi ad un determinismo relativistico. Entrambe infine rappresentano il coronamento della teoria elettromagnetica della luce, perchè l'unico campo che esse considerano comporta una propagazione ondosa, nella quale i fronti d'onda avanzano con la velocità della luce.

Ho parlato di varie teorie unitarie, il ch indica chiaramente come il problema della loro costruzione non sia univocamente determinato. E non lo di fatto, perch problema analogo a quello di far passare una linea per un numero finito, se pur grande, di punti rappresentanti dati di esperienza. Se perch ci si impongono vincoli di semplicit concettuale, di generalit, d'eleganza, la precedente arbitrariet diviene molto esigua e il problema di difficilissima soluzione.

Una teoria unitaria, come del resto ogni teoria fisica, non rappresenta la verit, ma ha soltanto un contenuto di verit, pi o meno grande, a secondo se maggiore o minore il numero di fenomeni che vi trovano spiegazione. Essa pu anche permet-

tere la previsione di nuovi fenomeni, proprio così come una linea, che passa per numerosi punti rappresentanti dati d'esperienza, può permettere di prevedere, con altri suoi punti, i risultati di nuove esperienze. E come la previsione di nuovi dati d'esperienza trova assai spesso conferma nei fatti, quando la linea di cui ci si vale gode di proprietà semplici, così la previsione di nuovi fenomeni, tratta da una teoria fisica, trova sovente conferma sperimentale, quando la teoria fisica è ben congegnata, concettualmente semplice, elegante.

Ma cosa c'entrino i criteri estetici d'eleganza e di bellezza, relativi al modo con cui la nostra mente rappresenta i fatti, con i fatti stessi, è problema ben più grosso del problema relativistico unitario, al quale voglio limitare la mia esposizione. Parlarne ci porterebbe dritto dritto alla questione della razionalità del mondo fisico, e dovremmo esclamare con Einstein: « Il più grande di tutti i misteri è che noi del mondo si riesca, bene o male, a capirne qualcosa! ».

Nella teoria della relatività, come in tutta la fisica matematica, fisica e matematica diventano un unico pensiero, tanto che è impossibile separare l'una dall'altra. La teoria generale della relatività ne costituisce un limpido esempio.

12. — Estensione della teoria di Einstein.

Il fatto che non vi sia un'unica teoria unitaria induce a cercarne altre, ponendosi dal punto di vista einsteiniano.

Per ottenere le equazioni di campo ci si vale di un principio d'azione stazionaria, nel quale si fanno variare in modo arbitrario, in una regione dello spazio-tempo, i coefficienti di trasporto e il tensore fondamentale, rispettandone però i valori al contorno. Quando alle equazioni di campo così ottenute si aggiunga la condizione posta a priori (se pur compatibile)

$$(24) \quad T_i \equiv T_{ik}^k = 0 ,$$

queste si possono scrivere così:

$$(30) \quad G_{+k/1} = 0$$

$$R_{ik} = 0 , \quad \text{ossia} \quad R_{ik} = 0 , \quad R_{ik} = 0 ,$$

dove R_{ik} è il tensore ottenuto contraendo il tensore di Riemann, dipendente soltanto dai coefficienti di trasporto e dalle loro derivate prime ordinarie. La prima delle (30) non è altro che la (21), di profondo significato geometrico, e da essa si trae la costanza della densità scalare $w = \sqrt{-\|G_{ik}\|}$, mentre dalla (21) e dalla (24) si deduce che è pure costante il tensore di Ricci (quando si polarizzino tutti i suoi indici con lo stesso segno), e che la parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale $g^{ik} = wG^{ik}$ è solenoidale:

$$(31) \quad w_{/k} = 0 , \quad \varepsilon_{++++/l}^{ikrs} = 0 , \quad g_{,k}^{ik} = 0$$

L'ultima delle (31) permette di interpretare il tensore doppio emisimmetrico $*G^{ik}$, coniugato del tensore fondamentale (o della sola sua parte emisimmetrica) come tensore elettromagnetico, perchè (conformemente alle leggi di Maxwell) il suo rotore è nullo, mentre la sua divergenza, rappresentante la distribuzione elettrica, è solenoidale, come vuole il principio di conservazione dell'elettricità.

13. – La seconda appendice al volume « Il significato della Relatività ».

L'appendice della 4^a edizione [10] del volume « Il significato della Relatività » modifica alquanto la teoria precedente. In essa le equazioni di campo sono ancora ricavate da un principio variazionale affermando la stazionarietà dell'azione

$$(32) \quad S = \int R_{ik}^{**} g^{ik} d\tau ,$$

dove l'integrale è esteso ad una generica regione dello spazio-tempo, $d\tau$ è proporzionale al prodotto dei quattro differenziali delle coordinate, e

$$(33) \quad R_{ik}^{**} = R_{ik}^{*} - \left(\frac{1}{w} w_{,i} \right)_{,k} , \quad \text{essendo } R_{ik}^{*} = R_{ik} + T_{\frac{i}{h}} .$$

Come si vede, R_{ik}^{**} si riduce ad R_{ik}^{*} , quando $G_{ik/1} = 0$, perchè allora $w_{,i} = 0$, e si riduce ad R_{ik} quando è nullo anche il vettore di torsione, cioè $T_i = 0$. Per ottenere le equazioni di campo si impone a priori la condizione espressa dall'ultima (31), e cioè la solenoidalità di g^{ik} ,

$$(34) \quad g^{ik}_{,k} = 0 ,$$

e si scrive che è nulla la variazione di S subordinata soltanto da tale condizione (fermi restando si intende i valori al contorno degli elementi che sono arbitrari nella variazione).

Le equazioni che così si ottengono da tale principio di stazionarietà condizionata sono le seguenti:

$$(35) \quad \begin{aligned} G_{\frac{ik}{r}} &= 0 , \\ R_{ik}^{**} &= 0 , \quad \text{rot } R_{ik}^{**} \equiv \varepsilon^{ikrs} R_{ik,r}^{**} = 0 . \end{aligned}$$

Ad esse naturalmente va aggiunta la condizione (34), che insieme alla prima delle (35) conduce all'annullarsi del vettore di torsione T_i . Nelle ultime (33) è allora possibile sostituire R_{ik}^{**} col tensore du di Riemann contratto, scrivendole così:

$$(35') \quad R_{ik} = 0 , \quad \text{rot } R_{ik} = 0 .$$

Einstein pone a raffronto il sistema di equazioni di campo (30) ottenuto nel 1950 con il sistema attuale formato dalla (34) e dalle (35) e consta che quest'ultimo è più « forte » del primo, e perciò lo preferisce.

L'interpretazione geometrica del tensore elettromagnetico è ancora quella data precedentemente.

14. — Oggetto di questa Nota.

Nella recente versione della teoria relativistica unitaria, Einstein postula la (34) (equivalente a 4 equazioni scalari, fra le quali sussiste però l'identità differenziale $(g^{ik})_{,i} = 0$), ma ciò non mi sembra del tutto spontaneo in una teoria che vuol spiegare geometricamente le leggi elettromagnetiche, perchè proprio la (34) è la relazione destinata ad essere interpretata come quella che traduce le equazioni maxwelliane sintetizzate dall'irrotazionalità del tensore elettromagnetico. Mi sembra perciò non privo di interesse mostrare quali equazioni di campo si ottengono dalla stazionarietà dell'azione einsteiniana, senza presupporre a priori nessuna equazione, ma soltanto dando significative variazioni, se pur non del tutto arbitrarie, all'azione stessa (*).

In questa Nota mostro, in primo luogo, che le (35) possono ottenersi dando una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione solenoidale alla parte emisimmetrica, rispettando però i valori al contorno degli elementi arbitrari in tale variazione. Mostro poi che, se la variazione della parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale è somma di una variazione solenoidale e di una irrotazione, si trovano, accanto alla (21), delle equazioni di campo analoghe a quelle di altre teorie unitarie, come ad esempio quella di Hattori. Enuncio infine che, se la variazione della parte emisimmetrica della densità tensoriale fondamentale è somma di una variazione solenoidale e di una ottenuta eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale, le equazioni di campo sono tutte quelle della teoria relativistica unitaria einsteiniana.

15. — Variazioni di S .

Variamo l'azione S , rispettando i valori al contorno degli elementi arbitrari da cui la variazione dipende, e scriviamo che tale variazione è nulla (**):

$$(36) \quad \delta S = \int \left\{ w G_{+i}^{ik} \delta \begin{bmatrix} l \\ i \ k \end{bmatrix} + R_{ik}^{**} \delta g^{ik} + (g_{+i}^{ik})_{,k} \delta \log w \right\} d\tau = 0.$$

(*) Così si fa, del resto, in molti principi variazionali fisici, nei quali, a seconda dei casi, la variazione è sincrona (Hamilton), o isoenergetica (Maupertuis-Hölder), o equilibrata (Menabrea), ecc.

(**) Cfr. A. EINSTEIN, loco citato [10], pp. 143-146.

Prendendo in questa formula variazionale $\delta g^{ik} = 0$, affinchè essa sia verificata qualunque sia la variazione $\delta \begin{bmatrix} l \\ i \ k \end{bmatrix}$ dei coefficienti di trasporto, deve essere:

$$(37) \quad G_{+-/1}^{ik} = 0$$

e quindi anche $G_{+-/1}^{ik} = 0$, $g_{+-/1}^{ik} = 0$. Allora la formula variazionale (36) diviene, per δg^{ik} generica:

$$(38) \quad \int R_{ik}^{**} \delta g^{ik} d\tau = 0 .$$

Prendendo nella (38) $\delta g^{ik} = 0$, affinchè essa sia verificata qualunque sia la variazione δg^{ik} della parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, deve essere:

$$(39) \quad R_{ik}^{**} = 0 .$$

Allora la (38), per δg^{ik} generico, diviene:

$$(40) \quad \int R_{ik}^{**} \delta g^{ik} d\tau = 0 .$$

Assumiamo come tensore δg^{ik} un generico tensore doppio emisimmetrico solenoidale, che sempre può porsi nella forma

$$(41) \quad \delta g^{ik} = \eta^{ikrs} \psi_{r,s} ,$$

dove ψ_r è un vettore a priori arbitrario ed η^{ikrs} è la densità tensoriale di Levi-Civita corrispondente al tensore ε^{ikrs} di Ricci. Ponendo la (41) nella (40), integrando per parti e ricordando che al contorno $\psi_r = 0$, si ha:

$$(42) \quad - \int \eta^{ikrs} R_{ik,s}^{**} \psi_r d\tau = 0$$

Scrivendo che la (42) è verificata qualunque sia ψ_r nella regione spazio-temporale considerata, si trova che:

$$(43) \quad \text{rot } R_{ik}^{**} = 0 .$$

Dando dunque una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione solenoidale alla parte emisimmetrica (rispettando però i valori al contorno degli elementi arbitrari in tale variazione) si ottengono le equazioni che coincidono con le (35). Le ultime due equazioni, non avendo noi imposto a priori la (34), non possono porsi nella forma (35'), perchè, essendo $G_{ik/1} = 0$, è ancora $w_{/i} = 0$, ma non $T_i = 0$. Ricordando

la (33) queste ultime due equazioni si possono però scrivere così:

$$(44) \quad R_{\underline{ik}}^* = 0, \quad \text{rot } R_{\underline{ik}}^* = 0.$$

16. – Estensione.

Diamo ora nell'espressione dell'azione S una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione alla parte emisimmetrica, che, come è proprio di un generico tensore doppio emisimmetrico, sia somma di una variazione solenoidale e di una irrotazione, e sempre rispettiamo i valori al contorno degli elementi arbitrari di tale variazione.

Dall'equazione variazionale $\delta S = 0$ potremo ancora dedurre le equazioni di campo (37) e (39) e la formula variazionale (40). In quest'ultima però δg^{ik} dovrà esprimersi mediante due vettori arbitrari: il potenziale φ_k e l'antipotenziale ψ_r (*). Si ha così, integrando per parti e ricordando che al contorno $\varphi_r = 0$, $\psi_r = 0$

$$(45) \quad \text{rot } R_{\underline{ik}}^{**} = 0, \quad \text{div } R_{\underline{ik}}^{**} = 0.$$

Queste ultime equazioni di campo, essendo per la (37) $G_{+-}^{ik/1} = 0$, possono scriversi più semplicemente così:

$$(45') \quad \text{rot } R_{\underline{ik}}^* = 0 \quad \text{div } R_{\underline{ik}}^* = 0.$$

17. – Ulteriore estensione.

Alla stessa conclusione si giunge dando all'azione S una variazione corrispondente ad un incremento arbitrario dei coefficienti di trasporto e della parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e un incremento alla parte emisimmetrica che sia somma di un generico incremento solenoidale e di un generico incremento ottenuto eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale. Tale variazione rispetti, al solito, i valori al contorno degli elementi arbitrari.

18. – Conclusione.

Concludendo: dal principio dell'azione einsteiniana stazionaria si possono ottenere le equazioni (37), (39), (43), che la (33), grazie alla (37) e alla (34), permette di scrivere così:

$$(46) \quad G_{+-}^{ik/1} = 0, \quad g_{,k}^{ki} = 0 \\ R_{\underline{ik}} = 0, \quad \text{rot } R_{\underline{ik}} = 0$$

(*) B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, Rend. Acc. Naz. Lincei, ser. VIII, **12** (1952), p. 378.

Esse comprendono tutte le equazioni del campo unitario di Einstein, e sono state ottenute non presupponendone nessuna, dando una variazione arbitraria ai coefficienti di trasporto e alla parte simmetrica della densità tensoriale fondamentale, e una variazione alla parte emisimmetrica che sia somma di una generica variazione solenoidale e di una ottenuta eseguendo un cambiamento infinitesimo del riferimento spazio-temporale. Come di consueto, queste variazioni rispettano i valori al contorno degli elementi arbitrari.

Nulla muta relativamente all'interpretazione geometrica delle (45). La prima è equivalente a 64 equazioni scalari che danno i 64 coefficienti di trasporto, e quindi la connessione, mediante il campo del tensore fondamentale. Questo campo, a sua volta è individuato dalle rimanenti tre equazioni tensoriali, che riassumono $4 + 10 + 4 = 18$ equazioni differenziali scalari: le prime quattro di primo ordine, le seconde dieci di secondo ordine, le terze quattro di terzo ordine nelle 16 componenti del tensore fondamentale. E ciò è possibile perchè fra le quattro equazioni differenziali di primo ordine riassunte dalla $g^{ik}_{,k} = 0$ intercede l'identità differenziale di secondo ordine $(g^{ik}_{,k})_{,i} = 0$, e fra le quattro equazioni differenziali di terzo ordine riassunte dalla $\text{rot } R_{ik} = 0$ intercede l'identità differenziale di quarto ordine $\text{div rot } R_{ik} = 0$.

Dal punto di vista fisico, il tensore elettromagnetico è sempre identificato al tensore G^{*ik} coniugato del tensore fondamentale, e l'equazione $g^{ik}_{,k} = 0$ ne traduce l'irrotazionalità. La distribuzione elettrica, definita dalla divergenza del tensore elettromagnetico, è solenoidale, conformemente al principio di conservazione dell'elettricità, e negli spazi vuoti di materia, a cui le (46) si riferiscono, la distribuzione elettrica non può essere generica, perchè deve ubbidire alle relazioni che le (46) stesse implicano.

Le equazioni (45') possono più spontaneamente suggerire di interpretare il tensore R^*_{ik} come tensore elettromagnetico, perchè quello come questo per un campo neutro sono irrotazionali e solenoidali. Questa interpretazione richiama altre teorie relativistiche, come quelle di HATTORI [14]. L'analogia sta nel fatto che ancor qui il tensore elettromagnetico risulta doppio emisimmetrico, dipendente essenzialmente dal tensore di Riemann contratto. E però nella teoria di Hattori non sussiste la (37), cioè la (21), che costituisce la più suggestiva e profonda relazione nella teoria unitaria einsteiniana.

19. — Indipendenza dalla distribuzione elettrica.

Dalle (46) si può, come nel caso della seconda appendice di Einstein, calcolare i coefficienti di connessione, e si deduce ancora la costanza di w . Ma manca ancora la (24), così che nè il vettore di torsione T_i è nullo, nè il tensore di Ricci è costante.

Le tre ultime equazioni (46) sono $10 + 4 + 4 = 18$ equazioni nelle 16 componenti di G_{ik} e perciò da queste equazioni si può dedurre (all'infuori delle 4 identità

analoghe a quelle di Bianchi, che ci accordano la libertà dovutaci nella scelta delle coordinate dello spazio-tempo) le due identità seguenti:

$$(47) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} R_{ik}^* \equiv 0 \quad \operatorname{div} \operatorname{div} R_{ik}^* \equiv 0 .$$

Le due ultime relazioni (46) ci permettono d'interpretare quale tensore elettromagnetico di un campo neutro, il tensore seguente:

$$(48) \quad F_{ik} = R_{ik}^* - T_{ik} = R_{ik} - T_{ik}^1 T_i .$$

F_{ik} , come R_{ik}^* , risulta irrotazionale; ma la sua divergenza non s'annulla. Si ha precisamente (*):

$$(49) \quad j_i = \operatorname{div} F_{ik} = -\operatorname{div} T_{i,k} .$$

Il vettore j_i ora introdotto dipende dalle derivate del vettore di torsione e si annulla con queste. Rappresenta la distribuzione elettrica, perchè soddisfa alla identità

$$(50) \quad \operatorname{div} j_i = -\operatorname{div} \operatorname{div} T_{i,k} \equiv 0 ,$$

che esprime il principio di conservazione dell'elettricità.

In conclusione: nell'interpretazione ora proposta il tensore elettromagnetico, definito dalla (48), dipende dalla parte emisimmetrica dal tensore di Riemann contratto, che dà la curvatura dello spazio-tempo e dipende anche dal tensore di Cartan T_{ik}^1 che ne dà la torsione; mentre la distribuzione elettrica, data dalla (49), dipende dal vettore di torsione T_i .

Nel caso di Einstein $T_i = 0$ e quindi $j_i = 0$. Nel caso generale invece, soltanto se $j_i = 0$ il campo è neutro. Ciò esige che $T_{i,k}$ sia solenoidale, come avviene, ad es. se $T_{i,k}$ è irrotazionale, condizione questa ben più lata dell'annullarsi del vettore di torsione, del vettore cioè di Einstein T_i .

Del resto anche nel caso di Einstein dalla (25) si trae:

$$F_{ik} = {}^*G_{ik} = \varepsilon_{ikrs} G^{rs} .$$

Ne segue che

$$j_i = \operatorname{div} F_{ik} = \varepsilon_{ikrs} G^{rs,k}$$

j_i non è dunque nullo. Lo è soltanto se il tensore elettromagnetico è solenoidale. A meno che la distribuzione elettrica ora definita abbia carattere universale, generalmente associata al campo elettromagnetico.

(*) B. FINZI, *Déduction variationnelle des équations du champ unitaire*, Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam, september 2, 1954.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Fra le esposizioni di carattere generale sulle teorie relativistiche unitarie, si indicano le seguenti:
H. C. CORBEN, Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano, **23** (1952);
C. W. KILMISTER - G. STEPHENSON, Nuovo Cimento, **9** (1954);
B. FINZI, *Cinquant'anni di Relatività*, Firenze (1955), pp. 268-306;
A. LICHTNEROWICZ, *Theorie relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Paris (1955);
A. TONNELAT, *La théorie du champ unifié d'Einstein*, Paris (1955).
- [2] T. KALUZA, Sitz. Preuss. Ak. Wiss. (1921), p. 966.
- [3] O. KLEIN, Phys. Zeitsch., **37** (1926).
- [4] A. S. EDDINGTON, *The Mathematical theory of relativity*, Cambridge (1924).
- [5] K. F. NOWOBATSKI, Hungarica Acta Phys., **1** (1949).
- [6] J. HORVATH - A. MOOR, Zeitsch. f. Phys., **13** (1952).
- [7] H. WEYL, Sitz. d. Preuss. Ak. Wiss. (1918), p. 465.
- [8] A. S. EDDINGTON, loco citato.
- [9] E. SCHRÖDINGER, *Space-time-structure*, Cambridge (1950).
- [10] A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Princeton, appendice II alla 3^a ediz. (1950) e alla 4^a (1953).
- [11] M. A. TONNELAT, C. R. Ac. Sc., **230**, **231** (1950); **232** (1951).
- [12] V. HLAVATY, J. Rat. Mech. An., **1** (1952); **2** (1953); **3** (1954); Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A., **38** (1952); **39** (1953).
- [13] P. STRANEO, Atti XX Riun. SIPS (1931); Rend. Acc. Lincei, **13** (1931); **15** (1932).
- [14] K. HATTORI, Phys. Zeitsch., **29** (1928).
- [15] E. SCHRÖDINGER, Proc. R. Irish Ac., **51** (1947); **52** (1948); **56** (1954).
- [16] M. A. TONNELAT, loco citato.
- [17] V. HLAVATY, loco citato.
- [18] L. P. EISENHART, Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A., **37** (1951); **38** (1952).
- [19] E. G. STRAUSS, Journ. of Math., **47** (1946); Rev. Mod. Phys., **21** (1949).
- [20] A. LICHTNEROWICZ, C. R. Ac. Sc., **237** (1953); Journ. Rat. Mech., **3** (1954).
- [21] M. WYMAN, Phys. Rev., **70** (1946); Canad. Journ. Math., **2** (1950).
- [22] W. B. BONNOR, Proc. Roy. Soc., **209** (1951).
- [23] A. PAPAPETROU, Proc. R. Irish Ac., **51** (1947); **52** (1948).
- [24] S. N. BOSE, J. Phys. Rad., **14** (1953); Ann. Math. U.S.A., **59** (1952); C. R. Ac. Sci., **236** (1953).
- [25] P. C. VAIDYA, Phys. Rev., **83** (1951); Curr. Sc. India, **21** (1952).
- [26] J. WINOGRADZKI, C. R. Ac. Sc., **238** (1954).
- [27] B. FINZI, Rend. Acc. Lincei, **14** (1953); Proc. Math. Int. Congr., Amsterdam (1954); M. PASTORI, Is. Lomb., **84** (1951); Rend. Acc. Lincei, **15** (1952); P. UDESCHINI, Rend. Acc. Lincei, **9** (1950); **10** (1951); **15** (1953); E. BOMPIANI, Coll. H. Poincaré (1954); E. CLAUSER, Rend. Acc. Lincei, **15** (1953); Ist. Lomb., **87** (1954); F. DE SIMONI, Rend. Acc. Lincei, **18** (1955); B. TODESCHINI, Rend. Acc. Lincei, **14** (1953).