Fonctions de Morse sur les espaces exotiques.

G. VRANCEANU (Bucarest)

Summary. — *It is shown that on an exotique space V_{2n-1} of Kervaire type, we can construct a Morse function having only four critical points, the maximum, the minimum and two points of index $n-1$ and n .*

Etant donnée la sphère S_{2n+1} dans l'espace euclidien $E_{2n+2}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$ par l'équation

$$(1) \quad z_0 \bar{z}_0 + \dots + z_n \bar{z}_n = 2 \quad [z_h = x_h + iy_h, \quad h = 0, \dots, n],$$

on peut considerer les variétés V_{2n-1} définies sur S_{2n+1} par l'équation

$$(2) \quad z_0^k + z_1^k + \dots + z_n^k = 0$$

où k est un nombre entier plus grand que 1. Si $k = 2$ les variétés V_{2n-1} sont des variétés quadratiques

$$(2') \quad \begin{aligned} x_0^2 + \dots + x_n^2 &= 1 \\ x_0 y_0 + \dots + x_n y_n &= 0 \\ y_0^2 + \dots + y_n^2 &= 1, \end{aligned}$$

Si k est un nombre impair, les variétés V_{2n-1} sont des sphères standard ou exotiques du type Kervaire [1]. On peut donc dire que les espaces (1), (2) pour k un nombre entier plus grand que 1 sont des espaces exotiques, où quasi-quadratiques.

Nous allons montrer ici que l'on peut construire des fonctions de Morse sur les V_{2n-1} exotiques, qui ont seulement quatres points critiques.

Pour cela observons que nous avons

$$z_h^2 = x_h^2 - y_h^2 + 2ix_h y_h, \quad z_0^k = P + iQ \quad (h = 1, \dots, n)$$

où P ; Q sont des polynomes homogènes du degré k

$$\begin{aligned} P &= x_0^k - \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2} y_0^2 + \dots \\ Q &= kx_0^{k-1} y_0 + \dots \end{aligned}$$

(*) Entrata in Redazione il 20 ottobre 1972.

et ces polynomes satisfont évidemment aux conditions de Cauchy

$$(2'') \quad P_{x_0} = Q_{y_0}, \quad P_{y_0} = -Q_{x_0}.$$

Cela dit, on peut écrire les trois équations réelles de V_{2n-1} sous la forme

$$(3) \quad \begin{aligned} R_1 &= x_0^2 + y_0^2 + P + 2x_h^2 - 2 = 0 \\ R_2 &= x_0^2 + y_0^2 - P + 2y_h^2 - 2 = 0 \\ R_3 &= Q + 2x_h y_h = 0. \end{aligned}$$

Considérons alors sur V_{2n-1} comme fonction de Morse

$$(4) \quad F = 4x_1 + 4my_2 + 2ax_0,$$

où m est une constante différente de zéro et a une constante quelconque et cherchons à voir quelles sont les points critiques de cette fonction. Pour cela on peut utiliser la fonction auxiliaire

$$(4') \quad \varphi = F - \lambda R_1 - \mu R_2 - 2\rho R_3$$

où λ , ρ , μ sont des paramètres. Il faut donc pour un point critique de F sur V_{2n-1} que toutes les dérivées de cette fonction par rapport aux coordonnées de E_{2n+2} soient nulles.

En dérivant par rapport aux coordonnées x_0 , y_0 , nous obtenons les deux équations

$$(5) \quad \begin{aligned} \lambda(2x_0 + P_{x_0}) + \mu(2x_0 - P_{x_0}) + 2\rho Q_{x_0} &= 2a, \\ \lambda(2y_0 + P_{y_0}) + \mu(2y_0 - P_{y_0}) + 2\rho Q_{y_0} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous dérivons par rapport aux x_1 , y_1 et x_2 , y_2 nous obtenons

$$(5') \quad \begin{aligned} \lambda x_1 + \rho y_1 &= 1, & \rho x_1 + \mu y_1 &= 0, \\ \lambda x_2 + \rho y_2 &= 0, & \rho x_2 + \mu y_2 &= m. \end{aligned}$$

Quant aux dérivées par rapport aux autres variables, elles nous donnent

$$(6) \quad \lambda x_j + \rho y_j = 0, \quad \rho x_j + \mu y_j = 0 \quad (j = 3, \dots, n).$$

Les équations (5') nous disent que l'on doit avoir

$$(6') \quad \lambda\mu - \rho^2 \neq 0.$$

En effet les équations en x_1, y_1 de (5') peuvent n'être pas indépendantes seulement, si $\varrho = \mu = 0$, ce qui est en contradiction avec la dernière équation (5'). De même, les équations (5') nous disent que l'on a

$$(6'') \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$$

et l'on peut résoudre ces équations par rapport aux variables $x_2, \lambda, \varrho, \mu$ par les formules

$$(7) \quad \begin{aligned} x_2 &= m y_1, & \lambda &= \frac{y_2}{x_1 y_2 - m y_1^2}, \\ \varrho &= -\frac{m y_1}{x_1 y_2 - m y_1^2}, & \mu &= \frac{m x_1}{x_1 y_2 - m y_1^2}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la (6'), les équations (6) nous donnent

$$(8) \quad x_j = y_j = 0 \quad (j = 3, \dots, n)$$

donc les équations (3) s'écrivent en tenant compte de la première (7)

$$(9) \quad \begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + P + 2[x_1^2 + m^2 y_1^2] &= 2 \\ x_0^2 + y_0^2 - P + 2[y_1^2 + y_2^2] &= 2 \\ Q + 2y_1[x_1 + m y_2] &= 0 \end{aligned}$$

De même, les équations (5) s'écrivent en tenant compte des (7)

$$(10) \quad \begin{aligned} y_2[2x_0 + P_{x_0}] + m x_1[2x_0 - P_{x_0}] - 2m y_1 Q_{x_0} &= 2a[x_1 y_2 - m y_1^2] \\ y_2[2y_0 + P_{y_0}] + m x_1[2y_0 - P_{y_0}] - 2m y_1 Q_{y_0} &= 0 \\ x_1 y_2 - m y_1^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte le théorème:

Les points critiques de la fonction (4) sont les solutions en x_0, y_0, x_1, y_1, y_2 des équations (9) et (10), les x_j, y_j ($j > 2$) étant nulles, et x_2 est donnée par la première (7).

Or supposons que l'on a

$$(10') \quad x_0 = y_0 = 0,$$

ce qui peut arriver seulement si la constante a est nulle.

En ce cas les (10) sont vérifiées et les (9) s'écrivent

$$(11) \quad x_1^2 + m^2 y_1^2 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1, \quad (x_1 + m y_2) y_1 = 0.$$

La dernière nous dit que ou bien nous avons $y_1 = 0$, donc aussi $x_2 = 0$ et alors les premières nous disent que nous avons comme solutions

$$(12) \quad x_1 = \varepsilon, \quad y_2 = \eta \quad (\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1)$$

et toutes les autres variables nulles.

Si $y_1 \neq 0$ les (11) s'écrivent

$$x_1 = -my_2, \quad m^2[y_1^2 + y_2^2] = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1$$

et nous avons une impossibilité si $m^2 \neq 1$. Nous avons donc le théorème:

La fonction

$$(13) \quad F = 4(x_1 + my_2) \quad (m^2 \neq 1, 0)$$

possède seulement les quatre points critiques (12), si les (10') sont vérifiées.

Dans le cas où $k = 2$, les (10') sont toujours vérifiées, donc il en résulte que sur les variétés quadratique (2') la fonction (13) a seulement les quatres points critiques (12).

Supposons que l'on a $m^2 = 1$, par exemple $m = 1$. En ce cas il en résulte que la fonction

$$(14) \quad F = 4(x_1 + y_2)$$

possède, si les (10') sont vérifiées, une infinité des points critiques dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_1, x_2, y_1, y_2 et nous avons

$$(14') \quad x_1 = -y_2, \quad x_2 = y_1, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1$$

et par conséquent la fonction (14) est une fonction Morse-Bott sur la variété quasi-quadratique V_{2n-1} . Dans le cas des variétés quadratiques, les (14') nous donnent tous les points critiques de la fonction (14).

Supposons que l'on a $k > 2$, donc la variété n'est pas quadratique, et cherchons s'il y a des solutions pour lesquelles une au moins des variables x_0, y_0 n'est pas nulle. En ce cas en multipliant la première (10) par y_0 et la seconde (10) par $-x_0$ et en sommant on trouve l'équation

$$[y_2 - mx_1]Q + 2my_1P = 0$$

et cette équation s'écrit, en tenant compte des (9)

$$y_1[x_1y_2 - my_1^2] = 0$$

Donc la dernière (10) nous dit que l'on a $y_1 = 0$ et les autres équations (9) et (10) s'écrivent

$$(15) \quad \begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + P + 2x_1^2 &= 2, & Q &= 0, & x_1 y_2 &\neq 0, \\ x_0^2 + y_0^2 - P + 2y_2^2 &= 2, & P &= \varepsilon[x_0^2 + y_0^2]^{k/2}, & \varepsilon &= \pm 1, \\ y_2[2(x_0^2 + y_0^2) + kP] + m x_1[2(x_0^2 + y_0^2) - kP] &= 0, \end{aligned}$$

la dernière s'obtenant en multipliant respectivement par x_0 et y_0 et en sommant.

En éliminant x_1, y_2 il en résulte l'équation en $\varrho^2 = x_0^2 + y_0^2$

$$(15') \quad (2 - \varrho^2 + \varepsilon \varrho^k)(2\varrho^2 + \varepsilon k \varrho^k)^2 - m^2[2 - \varrho^2 - \varepsilon \varrho^k](2\varrho^2 - \varepsilon k \varrho^k)^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est positif si ε est égal à 1 et $m^2 < 1$, donc il n'y a pas des solutions. Si ε est égal à -1 et $m^2 < 1$ il y a une seule solution

$$(15'') \quad x_0^2 + y_0^2 = \varrho^2, \quad [0 < \varrho < 1]$$

car m^2 est une fonction qui décroît de 2 à zéro dans l'intervalle

$$0 < x_0^2 + y_0^2 < 1,$$

donc x_0, y_0 sont solutions de (15'') et de $Q = 0$.

Nous avons le théorème:

La fonction (13) a pour $k > 2$ plus que quatre points critiques et ces points sont tous isolés.

Cherchons maintenant à voir quelles sont les indices des points critiques (12) de la fonction (4). Dans le voisinage d'un tel point on peut considérer comme quantités du premier ordre les variables

$$x_0, y_0, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_3, \dots, y_n$$

et les premières équations (3) nous donnent, en tenant compte seulement des termes jusqu'au second ordre et en supposant $k > 2$

$$(16) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varepsilon \left[1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{4} - \frac{x_2^2 + \dots + x_n^2}{2} \right] & (\varepsilon = \pm 1) \\ y_2 &= \eta \left[1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{4} - \frac{y_1^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2}{2} \right] & (\eta = \pm 1) \end{aligned}$$

et la dernière équation (3) nous donne

$$(16') \quad y_1 = -\varepsilon \eta x_2,$$

abstraction faite des termes du second ordre.

Donc on peut considerer x_1, y_2 comme fonctions de x_0, y_0, x_2, x_h ($h \geq 3$) et nous avons pour F

$$(17) \quad F = 4\varepsilon + 4m\eta - (\varepsilon + m\eta)(x_0^2 + y_0^2) - 2(\varepsilon + m\eta)x_2^2 - 2\varepsilon x_j^2 - 2m\eta y_j^2.$$

Supposons que $0 < m < 1$. En ce cas les points $\varepsilon = -1, \eta = -1$ et $\varepsilon = 1, \eta = 1$ sont le minimum et le maximum et nous avons, respectivement

$$(18) \quad \begin{aligned} F &= -4(1+m) + [1+m](x_0^2 + y_0^2 + 2x_2^2) + 2x_j^2 + 2my_j^2 \\ F &= 4(1+m) - [1+m](x_0^2 + y_0^2 + 2x_2^2) - 2x_j^2 - 2my_j^2. \end{aligned}$$

Dans le point R ($\varepsilon = -1, \eta = 1$) nous avons

$$(19) \quad F = -4(1-m) + (1-m)[x_0^2 + y_0^2 + 2x_2^2] + 2x_h^2 - 2my_h^2$$

et le point est l'indice $n-2$, tandis que dans le point S ($\varepsilon = 1, \eta = -1$), nous avons

$$(20) \quad F = 4(1-m) - (1-m)[x_0^2 + y_0^2 + x_2^2] - 2x_h^2 + 2my_h^2$$

et il est d'indice $n+1$.

Donc nous avons le théorème:

La fonction

$$(21) \quad F = 4x_1 + 4my_1 \quad (0 < m < 1),$$

est une fonction ayant sur l'espace V_{2n-1} avec $k > 2$ quatre points critiques non dégénérés, le minimum, le maximum et les deux points R, S d'indices $n-2$ et $n+1$, la fonction ayant comme minimum $-4(1+m)$, comme maximum $4(1+m)$ et ayant dans les points R et S respectivement les valeurs $4(-1+m)$ et $4(1-m)$.

Si $k=2$ la fonction (21) a seulement les points critiques (12) et les formules (16) s'écrivent, en tenant compte des (16')

$$x_1 = \varepsilon \left[1 - \frac{x_0^2 + x_2^2 + x_h^2}{2} \right], \quad y_2 = \eta \left[1 - \frac{y_0^2 + x_2^2 + y_h^2}{2} \right], \quad (h > 2)$$

et nous avons

$$F = 4\varepsilon + 4\eta m - 2\varepsilon[x_0^2 + x_h^2] - 2(\varepsilon + m\eta)x_2^2 - 2m\eta(y_0^2 + y_h^2)$$

ce qui nous dit que les points R et S sont d'indices $n-1$ et n .

Le fait que la fonction (4) pour $a = 0$ et $m^2 \neq 1$ possède pour $k = 2$ seulement quatre points critiques non dégénérés peut s'exprimer en disant que cette fonction est une bonne fonction de Morse pour les espaces quadratiques (2'). En effet, il est peu probable que l'on puisse avoir en ce cas des fonctions ayant seulement trois points critiques et on ne peut pas avoir des fonctions ayant deux points critiques, car d'après le théorème de REEB [3], il en résulterait que (2') est une sphère, ce qu'on sait qu'il n'est pas le cas même pour k pair plus grand que 2. Le fait que pour k impaire la fonction (4) a plus que quatre points critiques, et l'on sait qu'en cas ce il doit en exister des fonctions ayant seulement deux points critiques, on peut dire que (4) pour $a = 0$ n'est pas une bonne fonction de Morse au moins pour k impaire.

Nous allons considérer des fonctions (4) avec $a \neq 0$ et $m = 1$. Donc en ce cas les conditions (10') ne peuvent pas plus être vérifiées et par conséquent nous avons toujours

$$x_0^2 + y_0^2 \neq 0.$$

En multipliant la première (10) avec y_0 et la seconde avec $-x_0$ et en sommant, on obtient en tenant compte de (2'')

$$(22) \quad k(y_2 - x_1)Q + 2ky_1P = 2ay_0[x_1y_2 - y_1^2].$$

D'autre part les (9) nous donnent

$$(22') \quad P = y_2^2 - x_1^2, \quad Q = -2y_1(x_1 + y_2)$$

et l'équation (22) devient

$$(22'') \quad y_0 = 0.$$

D'autre part la dernière (9) nous donne $y_1 = 0$, car on ne peut pas avoir $y_2 = -x_1$, donc $P = 0$, car x_0 est différent de zéro.

Nous avons ainsi le théorème:

Les points critiques de la fonction

$$(23) \quad f = 4(x_1 + y_2) + 2ax_0$$

ont les coordonnées y_0, x_2, y_1, x_h, y_h ($h > 2$) nulles, tandis que chacune des coordonnées x_0, x_1, y_2 est différente de zéro.

On peut donc écrire les équations (9) et (10) sous la forme

$$(24) \quad \begin{aligned} x_0^2 + x_0^k + 2x_1^2 &= 2, & x_0 &\neq 0 \\ x_0^2 - x_0^k + 2y_2^2 &= 2, & x_1y_2 &\neq 0 \\ x_0y_2[2 + kx_0^{k-2}] + x_0x_1[2 - kx_0^{k-2}] &= 2ax_1y_2 \end{aligned}$$

et il s'agit de trouver les solutions de ces équations.

En éliminant x_1, y_2 on trouve pour x_0 l'équation

$$(25) \quad [x_0^2[2 + kx_0^{k-2}]^2[2 - x_0^2 + x_0^k] + x_0^2[2 - kx_0^{k-2}]^2[2 - x_0^2 - x_0^k] - \\ - 2\alpha^2[(2 - x_0^2)^2 - x_0^{2k}]^2 - 4x_0^k[(2 - x_0^2)^2 - x_0^{2k}][k^2x_0^{2k-4} - 4]^2 = 0 .$$

Nous avons donc une équation en x_0^2 du degré $3k-2$. Comme les premières (24) nous disent que x_0^2 doit se trouver dans l'intervalle

$$(25') \quad 0 < x_0^2 < 1$$

pour obtenir des valeurs réelles pour x_1, x_2 il faut chercher les solutions de (25) dans l'intervalle (25'). Comme dans les extrémités de cet intervalle le premier membre de (25) est positif, il en résulte que l'on a au moins deux solutions de l'équation (25)

$$x_0^2 = \alpha^2, \quad x_0^2 = \alpha'^2, \quad 0 < \alpha < \alpha' < 1$$

et par conséquent au moins quatre solutions pour x_0 , qui conduisent au moins à 8 solutions pour le système (24). Le nombre se réduit à moitié si $x_0^2 = \alpha^2$ est une racine double de (25), ce qui arrive si α^2 est solution de l'équation

$$(25'') \quad k^2 x_0^{2k-4} - 4 = 0$$

donc si α est solution de l'équation

$$(26) \quad k\alpha^{k-2} - 2 = 0,$$

équation qui est une identité pour $k=2$. Nous allons supposer donc $k > 2$. En supposant α positif, la dernière équation nous dit que l'on doit avoir

$$(27) \quad \alpha = \frac{2\alpha}{\beta}, \quad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right)}.$$

Nous avons donc pour x_0 positif et k impair les deux points critiques

$$(28) \quad x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \quad y_2 = \eta\gamma, \quad \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} \right)}, \quad \eta = \pm 1$$

et pour x_0 négatif les deux points critiques

$$(28') \quad x_0 = -\alpha, \quad x_1 = \varepsilon\gamma, \quad y_2 = -\beta, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Pour k pair nous avons les quatres points critiques

$$(29) \quad x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \quad y_2 = \eta\gamma; \quad x_0 = -\alpha, \quad x_1 = -\beta, \quad y_2 = \varepsilon\gamma.$$

Nous voulons maintenant montrer qu'il n'y a pas d'autres points critiques. Pour cela observons qu'en supposant que $x_0 = \pm \alpha$ étant une racine de (25) où α est la solution réelle positive de (26), il faut que le premier membre de (25) soit divisible par $(x_0^2 - \alpha^2)^2$, donc il faut que nous ayaons

$$(29') \quad x_0^2[2 - x_0^2][4 + k^2 x_0^{2k-4}] + 4kx_0^{2k} - a^2[(2 - x_0^2)^2 - x_0^{2k}] = (x_0^2 - \alpha^2)R(x_0^2)$$

où $R(x_0^2)$ est un polynome en x_0^2 de degré $k-1$. Or ce polynome ne peut pas s'annuler dans l'intervalle (25) car en écrivant le premier membre de (29') sous la forme

$$(2 - x_0^2) \left[\frac{x_0^{2k}[a^2 + 4k]}{2 - x_0^2} + k^2 x_0^{2k-2} + (a^2 + 4)x_0^2 - 2a^2 \right]$$

la fonction entre grandes parenthèses est une fonction croissante dans l'intervalle (25'), donc elle ne peut avoir que la racine α^2 , donc $R(x_0^2)$ ne s'annule pas et il est toujours positif.

De même nous pouvons écrire

$$(30) \quad k^2 x_0^{2k-4} - 4 = (x_0^2 - \alpha^2)S$$

où S est aussi un polynome en x_0^2 toujours positif. Donc en divisant l'équation (25) par $(x_0^2 - \alpha^2)^2$ on obtient

$$R^2 - x_0^4[(2 - x_0^2)^2 - x_0^{2k}]S^2 = 0$$

équation qu'on peut encore écrire

$$(30') \quad x_0^{2k+4}S^2 + [R + x_0^2(2 - x_0^2)S][R - x_0^2[2 - x_0^2]S] = 0.$$

On voit que le premier terme de cette équation est positif et il en est de même de la première parenthèse dans l'intervalle (25').

Il reste à montrer qu'il en est de même pour la quantité

$$(31) \quad \mathcal{M} = R - x_0^2[2 - x_0^2]S.$$

Pour cela multiplions avec $x_0^2 - \alpha^2$. Nous avons en vertu des (29') et (30)

$$\mathcal{M}(x_0^2 - \alpha^2) = \left[\frac{(a^2 + 4k)x_0^{2k}}{2 - x_0^2} + (3 + a^2)x_0^2 - 2a^2 \right]$$

et la quantité entre grandes parenthèses croît dans l'intervalle (25'), donc $\mathcal{M}$ est positif dans cet intervalle, sauf pour $x_0^2 = \alpha^2$, quand il peut être nul.

Il en résulte que le premier membre de (30') est toujours positif et nous avons le théorème:

La fonction

$$(33) \quad f = 4(x_1 + y_2) + \frac{2\alpha}{\beta} x_0, \quad k\alpha^{k-2} = 2, \quad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right)}$$

est pour les variétés exotiques V_{2n-1} une fonction de Morse ayant seulement les quatre points critiques (28) et (28') où (28'') suivant que le nombre k est impair ou pair.

Cherchons maintenant à voir quelles sont les indices de ces points critiques. Pour cela supposons que pour les deux points (28) on pose

$$(33') \quad x_0 = \alpha + x, \quad x_1 = \beta + u, \quad y_2 = \eta\gamma + v$$

en considérant $x, u, v, y_0, x_2, y_1, x_h, y_h$ ($h > 2$) comme des quantités du premier ordre. En ce cas les (3) s'écrivent, en tenant compte seulement des termes jusqu'au second ordre et en tenant compte que les termes d'ordre zéro sont nuls et que α satisfait à l'équation (26)

$$4\alpha x + 4\beta u - (k-2)y_0^2 + kx^2 + 2[u^2 + x_2^2 + x_h^2] = 0$$

$$4\eta\gamma v + ky_0^2 - (k-2)x^2 + 2(v^2 + y_1^2 + y_h^2) = 0$$

$$\alpha y_0 + \beta y_1 + \eta\gamma x_2 + uy_1 + vx_2 + x_h y_h = 0 \quad (h = 3, \dots, n).$$

En utilisant la dernière de ces équations, les premières nous donnent u, v par les formules, en utilisant aussi (27)

$$4u = -2\alpha x - \left(k + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{x^2}{\beta} + (k-2) \frac{(\beta y_1 + \eta\gamma x_2)^2}{\beta\alpha^2} - \frac{2x_2^2}{\beta} - \frac{2x_h^2}{\beta},$$

$$4v = \frac{k-2}{\gamma} \eta x^2 - k\eta \frac{(\beta y_1 + \eta\gamma x_2)^2}{\gamma\alpha^2} - \frac{2y_1^2}{\gamma} \eta - \frac{2y_h^2}{v} \eta.$$

Comme la fonction (23) s'écrit en tenant compte des (28'')

$$f = 4(\beta + \eta\gamma) + 2\alpha x + 4(u + v) + 2\alpha x$$

il en résulte que nous avons

$$(36) \quad f = 4(\beta + \eta\gamma) + 2\alpha x - \left[\left(k + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{1}{\beta} - \frac{k-2}{\gamma} \right] x^2 - A - \frac{2}{\beta} x_2^2 - \frac{2\eta}{\gamma} y_h^2$$

où on a posé

$$A = \frac{2x_2^2}{\beta} + \frac{2\eta y_1^2}{\gamma} + \left(\frac{k\eta}{\gamma} - \frac{k-2}{\beta} \right) \frac{(\beta y_1 + \eta\gamma x_2)^2}{\alpha^2}.$$

Le discriminant de cette forme quadratique s'écrit

$$\mathcal{D} = \frac{2}{\alpha^2 \beta \gamma} [2\eta\alpha^2 + \beta^2 k\eta - (k-2)\gamma^2 + 2\beta\gamma]$$

et pour $\eta = 1$ nous avons

$$\mathcal{D} = \frac{4(\beta + \gamma)}{\alpha^2 \beta}$$

donc ce discriminant est positif.

Comme nous avons $\gamma > \beta$ il en résulte que pour $\eta = 1$ le coefficient de x^2 est négatif, donc le point critique (28) avec $\eta = 1$ est un maximum de F .

Si $\eta = -1$ le coefficient de x^2 est négatif mais A est d'indice 1 donc le point critique (28) pour $\eta = -1$ est non dégénéré et est d'indice n .

Considérons maintenant les points critiques (28'). En posant

$$x_0 = -\alpha + x', \quad x_1 = \varepsilon\gamma + u', \quad y_2 = -\beta + v'$$

on peut considérer autour d'un tel point comme quantités du premier ordre $x', u', v', y_0, x_2, y_1, x_h, y_h$ ($h > 2$) et les équations (3) s'écrivent, en tenant compte seulement des termes jusqu'au second ordre

$$\begin{aligned} (37) \quad & 4\varepsilon\gamma u' - (k-2)x'^2 + ky_0^2 + 2x_2^2 + 2x_h^2 = 0, \\ & -4\alpha x' - 4\beta v' + kx'^2 - (k-2)y_0^2 + 2v'^2 + 2y_1^2 + 2y_h^2 = 0, \\ & \alpha y_0 + \varepsilon\gamma y_1 + \beta x_2 + u'u_1 + v'x_2 + x_h y_h = 0, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (38) \quad & 4u' = \varepsilon \frac{k-2}{\gamma} x'^2 - \eta \frac{k}{\gamma} y_0^2 - \eta \frac{2x_2^2}{\gamma} - \eta \frac{2x_h^2}{\gamma}, \\ & 4v' = -2\alpha x' + \frac{kx'^2}{\beta} - \frac{k-2}{\beta} y_0^2 + \frac{\alpha^2}{2} x'^2 + \frac{2y_1^2}{\beta} + \frac{2y_h^2}{\beta}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction f s'écrit

$$f = 4(\varepsilon\gamma - \beta) - 2\alpha\alpha + x'^2 \left[\frac{k}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2} + \varepsilon \frac{k-2}{\gamma} \right] + A' - \frac{2\varepsilon}{\gamma} x_h^2 + \frac{2y_h^2}{\beta}$$

où l'on a posé

$$A' = \left(\frac{2-k}{\beta} - \frac{k\varepsilon}{\gamma} \right) \frac{(\beta x_2 + \varepsilon\gamma y_1)^2}{\alpha^2} + \frac{2y_1^2}{\beta} - \frac{2\varepsilon}{\gamma} x_2^2.$$

Pour $\varepsilon = -1$ nous avons un minimum car A' est définie positive. Pour $\varepsilon = 1$, A' est d'indice 1 et est le point critique est d'indice $n-1$.

Supposons maintenant k pair, donc que les points critiques sont donnés par les formules (29). Les premiers deux points critiques coïncident avec les points critiques (28), donc nous avons un maximum pour $n=1$ et un point d'indice n pour $\eta = -1$. Pour avoir les indices des deux autres points critiques (29) posons

$$x_0 = -\alpha + \xi, \quad x_1 = -\beta + \sigma, \quad y_2 = \varepsilon\gamma + \lambda.$$

En introduisant dans les formules (3) et en considérant $\xi, \sigma, \lambda, y_0, x_2, y_1, x_h, y_h$ comme des quantités du premier ordre, nous obtenons en tenant compte seulement des termes jusqu'au second ordre

$$\begin{aligned} -4\alpha\xi - 4\beta\sigma + k\xi^2 + (2-k)y_0^2 + 2\sigma^2 + 2x_2^2 + 2x_h^2 &= 0 \\ 4\varepsilon\gamma\lambda + (2-k)\xi^2 + ky_0^2 + 2y_1^2 + 2y_h^2 &= 0 \\ -\alpha y_0 - \beta y_1 + \varepsilon\gamma x_2 + x_h y_h &= 0, \quad (h = 3, \dots, n) \end{aligned}$$

de façon que nous avons

$$\begin{aligned} 4\sigma &= -\frac{4\alpha}{\beta}\xi + \frac{k\xi^2}{\beta} + \frac{(2-k)y_0^2}{\beta} + \frac{2\alpha^2}{\beta^3}\xi^2 + \frac{2x_2^2}{\beta} + \frac{2x_h^2}{\beta} \\ 4\lambda &= -\frac{(2-k)\varepsilon}{\gamma} - \frac{\varepsilon k}{\gamma}y_0^2 - \frac{2\varepsilon y_1^2}{\gamma} - \frac{2\varepsilon y_h^2}{\gamma} \end{aligned}$$

où on doit poser au lieu de y_0 la quantité $(\beta y_1 - \varepsilon\gamma x_2)/\alpha$. Il en résulte que la fonction f s'écrit

$$(39) \quad f = 4(\varepsilon\gamma - \beta) - 4\frac{\alpha^2}{\beta} + \xi^2 \left[\frac{k}{\beta} + \frac{2\alpha^2}{\beta^3} + \varepsilon \frac{k-2}{\gamma} \right] + \mathcal{M} + \frac{2x_h^2}{\beta} - \frac{2\varepsilon y_h^2}{\gamma}$$

où nous avons posé

$$\mathcal{M} = \frac{2x_2^2}{\beta} - \frac{2\varepsilon y_1^2}{\gamma} - \left(\frac{k-2}{\beta} + \frac{\varepsilon k}{\gamma} \right) \frac{(\beta y_1 - \varepsilon\gamma x_2)^2}{\alpha^2}.$$

Il en résulte que le point $\varepsilon = -1$ est le minimum de f . Pour $\varepsilon = 1$ le coefficient de ξ^2 est positif. Quant à $\mathcal{M}$ elle est d'indice 1 donc le point (29) avec $\varepsilon = 1$ est pour k pair plus grand que deux, aussi un point d'indice $n-1$.

Nous allons observer que dans les points d'indices $n-1$ et n nous avons respectivement comme valeurs de f

$$f_1 = \frac{4\gamma\beta - 4\beta^2 - 2\alpha^2}{\beta}, \quad f_2 = \frac{4\beta^2 + 2\alpha^2 - 4\beta\gamma}{\beta}$$

et nous avons $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$. En effet dire que $f_1 < 0$, revient à dire que nous avons

$$4\gamma\beta < 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 4 - \frac{4\alpha^2}{k}.$$

En elefant au carré, il en résulte que l'on doit avoir

$$\alpha^2 < \frac{4k(k-2)}{k^2-8}.$$

En tenant compte de (26) il en résulte que l'on doit avoir

$$4^{k-3} \frac{k^2 k^{k-2} (k-2)^{k-2}}{(k^2-8)^{k-2}} > 1,$$

ce qui a évidemment lieu car dans le premier membre nous avons le rapport d'un polynôme de degré $2k-2$ dans k et d'un polynôme du degré $2k-4$.

Supposons maintenant $k=2$. En ce cas l'équation (26) est une identité et les points critiques de f satisfont aux équations

$$2x_0 = ax_1, \quad x_0^2 + x_1^2 = 1, \quad y_2^2 = 1, \quad x_1 y_2 \neq 0.$$

En supposant $a = 2 \operatorname{tg} \varphi$, donc en prenant comme fonction

$$(40) \quad f = 4[x_1 + y_2 + \operatorname{tg} \varphi x_0]$$

où φ est une constante, les coordonnées des points critiques sont toutes nulles sauf

$$(40') \quad x_0 = \varepsilon \sin \varphi, \quad x_1 = \varepsilon \cos \varphi, \quad y_2 = \eta \quad (\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1).$$

En supposant que nous avons $0 < \varphi < \pi/2$ donc $\cos \varphi > 0$, $a > 0$ et en posant

$$x_0 = \varepsilon \sin \varphi + x, \quad x_1 = \varepsilon \cos \varphi + u, \quad y_2 = \eta + y$$

les équations (2') nous donnent

$$(41) \quad \begin{aligned} 2n &= -2x \operatorname{tg} \varphi - \frac{\varepsilon x^2}{\cos \varphi} - \frac{\varepsilon x_2^2}{\cos \varphi} - \frac{\varepsilon x_h^2}{\cos \varphi}, \\ 2y &= -\eta \frac{(\varepsilon \sin \varphi y_0 + \eta x_2)^2}{\cos^2 \varphi} - \eta y_h^2 \quad (h = 3, \dots, n). \end{aligned}$$

En introduisant dans (40) on trouve que pour $\varepsilon = \eta = -1$ nous avons un minimum, pour $\varepsilon = -1$, $\eta = 1$ un point d'indice $n-1$, pour $\varepsilon = 1$, $\eta = -1$ un point

d'indice n et pour $\varepsilon = \eta = 1$ un maximum. Il en résulte que pour $k = 2$ il y a une infinité de fonctions (40) ayant seulement quatre points critiques d'indices 0 , $n-1$, n , $2n-1$.

Nous avons donc le théorème:

Si k est impair les quatre points critiques (28), (28') de la fonction (23) sont le maximum et le minimum pour $\eta = 1$ et $\varepsilon = -1$ et des points critiques non dégénérés d'indices respectivement $n-1$ et n pour $\varepsilon = 1$ et $\eta = -1$, la fonction ayant dans ces points les valeurs

$$4(\gamma - \beta) - \frac{4\alpha^2}{\beta}, \quad 4(\beta - \gamma) + \frac{4\alpha^2}{\beta}.$$

Le même théorème a lieu si k est pair et plus grand que 2 pour les points critiques (29). Si $k = 2$, c'est sont les fonctions (40) qui ont quatre points critiques ayant respectivement les indices 0 , $n-1$, n , $2n-1$. On peut observer aussi que pour k impair une transformation de la forme

$$(42) \quad x'_0 = -x_0, \quad y'_0 = -y_0, \quad x'_1 = -y_2, \quad x'_2 = y_1, \quad x'_h = y_h, \quad y'_h = -x_h$$

laisse la variété V_{2n-1} invariante et change les points critiques d'indice $n-1$ et n entre eux et de même le maximum en minimum, car la fonction change de signe.

Dans le cas pair c'est la transformation

$$(42') \quad x'_i = -x_i, \quad y'_i = -y_i$$

qui change entre eux les points critiques.

On peut terminer, en observant, qu'en tenant compte du théorème de Reeb, qui dit que sur une sphère, on peut construire une fonction de Morse ayant seulement deux points critiques, il fallait trouver une telle fonction dans le cas où k est impair, mais je n'ai pas réussi à faire cela.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. HIRZEBRUCH, *Singularities and exotic spheres*, Séminaire Bourbaki (novembre 1966), pp. 314-331.
- [2] G. VRANCEANU, *Qualche proprietà differenziale delle sfere esotiche*, Rendiconti di Milano, (1968).
- [3] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Hermann, Paris, 1952, p. 147.