Cup-product e prodotto esterno.

ENZO MARTINELLI (Roma) (*)

A Beniamino SEGRE nel suo 70^{mo} compleanno

Summary. – *Alternating cup-product for alternating singular cochains and cohomology classes, over a field of characteristic zero, is considered. Differently from ordinary cup-product, the alternating one is skew-commutative for cochains also, and exactly parallel to exterior product for differential forms. A direct proof of de Rham's third theorem follows, with use of a convenient simplicial (but not barycentric) subdivision.*

È noto che il cup-product nell' A -modulo graduato delle cocatene (per esempio singolari, di uno spazio topologico X , con A anello commutativo) e conseguentemente nell' A -modulo di omologia, è stato introdotto da J. W. ALEXANDER e A. KOLMOGOROFF (con contributi essenziali di H. WHITNEY ed E. ČECH) sul fondamento dell'idea di costruire qualcosa di analogo al prodotto esterno di forme differenziali su una varietà differenziabile M . Di fatto accade che, secondo i teoremi di G. DE RHAM, rinunciati in termini coomologici, per $A =$ campo reale $\mathbf{R}$ e $X = M$, l'algebra della coomologia singolare è isomorfa all'algebra della coomologia di de Rham.

Tuttavia, come ha esplicitamente osservato M. J. GREENBERG in un suo recente volume ⁽¹⁾, il cup-product « corrisponde » al prodotto esterno al livello delle classi di coomologia, ma non altrettanto al livello delle cocatene.

Che l'anzidetta « corrispondenza » non sussista al livello delle cocatene in senso « globale », non stupisce data la maggior flessibilità delle forme differenziali rispetto alle cocatene. Si può verificare però che la « corrispondenza » non sussiste neppure in senso « infinitesimale ». Anche ciò non può in verità considerarsi paradossale, in quanto si sa, oggidi, che il cup-product coomologico può introdursi direttamente a partire dal cross-product e dalla rappresentazione diagonale d e la forma classica del cup-product dipende dalla « approssimazione » che si sceglie per d (cosiddetta « approssimazione diagonale di Alexander-Whitney »).

Comunque non sembra privo di interesse chiedersi quali siano le ragioni della anomalia accennata e quali le eventuali conseguenze. La presente memoria vuole rispondere a tali interrogativi.

(*) Entrata in Redazione il 21 ottobre 1972.

⁽¹⁾ Cfr. [1], p. 150, Remark (24.14).

In primo luogo occorre avvertire che, essendo le forme differenziali di loro natura alternanti, un confronto tra prodotto esterno e cup-product deve farsi con riguardo alle cocatene alternanti e alla corrispondente coomologia singolare alternante, la quale è peraltro isomorfa all'ordinaria coomologia singolare ⁽¹⁾. L'esame dell'intimo significato del prodotto esterno, $\wedge$, mostra allora ch'esso ha un analogo per le cocatene alternanti, che diremo *cup-product alternante* e denoteremo con $\cup_a$, sotto l'ipotesi essenziale che l'anello A sia un campo di caratteristica zero (qual'è, in particolare, $\mathbf{R}$).

Contrariamente a quanto accade per l'ordinario cup-product $\cup$, $\cup_a$ risulta anticommutativo come $\wedge$ e, per $A = \mathbf{R}$, $X = M$, « corrisponde » perfettamente a $\wedge$ in senso « infinitesimale », con significato preciso di questo termine (cfr. n. 5, Teorema 5.2.1; il lettore che desideri farsi prima una idea intuitiva può cominciare col vedere il n. 5.4).

Sia $\cup$ che $\cup_a$ inducono cup-product « equivalenti » al livello della coomologia. Ne segue una dimostrazione diretta del 3° teorema di de Rham (n. 6), sfruttando una opportuna suddivisione simpliciale che chiamo *equilineare* (n. 7), non sembrando adatta allo scopo l'ordinaria suddivisione simpliciale baricentrica.

I. - Cup-product alternante.

1. - Preliminari.

1.1. - Per le ragioni addotte nell'introduzione avremo da considerare, accanto alla *coomologia singolare ordinaria* $H^*(X; \Gamma)$, la *coomologia singolare alternante* $H_{\text{alt}}^*(X; \Gamma)$, naturalmente isomorfa alla precedente, essendo entrambe le coomologie definite in uno spazio topologico X e a valori in un campo Γ di caratteristica zero.

A partire dal complesso $S.(X) = \{S_n(X), \partial_n\}$ delle catene singolari intere di X , si ha il complesso delle cocatene singolari ordinarie a valori in Γ :

$$(1.1.1) \quad S'(X; \Gamma) = \text{Hom}(S.(X), \Gamma) = \text{Hom}(S.(X; \Gamma), \Gamma),$$

e il complesso delle cocatene singolari alternanti a valori in Γ :

$$(1.1.2) \quad S'_{\text{alt}}(X; \Gamma) = \text{Hom}(S^{\text{ori}}(X), \Gamma) = \text{Hom}(S^{\text{ori}}(X; \Gamma), \Gamma),$$

ove $S^{\text{ori}}(X) = S.(X)/T.(X)$, $S^{\text{ori}}(X; \Gamma) = S.(X; \Gamma)/T.(X; \Gamma)$ sono i complessi delle catene singolari *orientate*, risp. intere o a coefficienti in Γ (essendo $T.(X)$, $T.(X; \Gamma)$ i sottocomplessi degeneri risp. di $S.(X)$, $S.(X; \Gamma)$) ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. [3].

⁽²⁾ Cfr. [3], nn. 2, 5. Con $\equiv$ intendiamo « identificato ».

$H^*(X; \Gamma)$, $H_{\text{alt}}^*(X; \Gamma)$ si ottengono applicando il funtore omologico risp. a $S(X; \Gamma)$, $S_{\text{alt}}(X; \Gamma)$.

1.2. – Sia $s_n: \Delta_n \rightarrow X$ un n -simplello singolare di X , essendo $\Delta_n = U^0 \dots U^n$ l' n -simplello affine prototipo ordinato. Alla permutazione che muta $(0, \dots, n)$ in $(i_0, \dots, i_n)$ corrisponde l'affinità di permutazione $\alpha = \alpha_n = \alpha^{i_0 \dots i_n}: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, che porta il vertice U^k di Δ_n in U^{i_k} , e l'automorfismo $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_n = \bar{\alpha}^{i_0 \dots i_n}$ di $S_n(X; \Gamma)$ definito da $\bar{\alpha}(s_n) = s_n \circ \alpha = s_n \alpha$.

Indicheremo con $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{i_0 \dots i_n}$ la segnatura della permutazione $(0, \dots, n) \rightarrow (i_0, \dots, i_n)$. A seconda che sia $\varepsilon(\alpha) = 1$ o -1 , l'affinità α è *diretta* o *inversa*, perchè muta l'indicatrice simpliciale di orientazione $[U^0 \dots, U^n]$ in una indicatrice equiversa o contraversa $[U^{i_0} \dots, U^{i_n}]$.

Una cocatena alternante $a^n \in S_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ si identifica ad una cocatena di $S^n(X; \Gamma)$ che assume valori alternanti sui simpletti s_n , $s_n \alpha = \bar{\alpha}(s_n)$ (e quindi, più in generale, su n -catene c_n , $\bar{\alpha}(c_n) \in S_n(X; \Gamma)$):

$$(1.2.1) \quad \langle s_n \alpha, a^n \rangle = \varepsilon(\alpha) \langle s_n, a^n \rangle.$$

Penseremo dunque $S_{\text{alt}}(X; \Gamma)$ contenuto in $S(X; \Gamma)$ mediante l'inclusione $j: S_{\text{alt}}(X; \Gamma) \rightarrow S(X; \Gamma)$.

Consideriamo gli *operatori di alternazione*

$$(1.2.2) \quad \pi_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\alpha_n} \varepsilon(\alpha_n) \bar{\alpha}_n = \frac{1}{(n+1)!} \varepsilon_{i_0 \dots i_n} \bar{\alpha}^{i_0 \dots i_n},$$

dove a secondo membro la somma s'intende estesa a tutte le affinità α_n di Δ_n in sè, e a terzo membro si sottintende di sommare rispetto a tutte le *permutazioni* $(i_0, \dots, i_n)$ di $(0, \dots, n)$.

Si prova che tali operatori definiscono una rappresentazione di catene $\pi = \{\pi_n\}: S(X; \Gamma) \rightarrow S(X; \Gamma)$ ⁽¹⁾, che ha per trasposta $\pi' = \text{Hom}(\pi, \Gamma)$ una rappresentazione di cocatene $\pi' = \{\pi'_n\}: S(X; \Gamma) \rightarrow S(X; \Gamma)$, essendo:

$$(1.2.3) \quad \langle c_n, \pi^n c^n \rangle = \langle \pi_n c_n, c^n \rangle,$$

con $c_n \in S_n(X; \Gamma)$, $c^n \in S^n(X; \Gamma)$.

Si prova inoltre che

$$(1.2.4) \quad \pi^n c^n \in S_{\text{alt}}^n(X; \Gamma),$$

e che π' definisce (canonicamente) una *equivalenza omotopica* ($\pi' j = 1, j \pi' \simeq 1$):

$$(1.2.5) \quad \pi': S(X; \Gamma) \xrightarrow{\simeq} S_{\text{alt}}(X; \Gamma);$$

(1) Cfr. [3], n. 5.3.

la quale induce l'*isomorfismo naturale*:

$$(1.2.6) \quad \pi^*: H^*(X; \Gamma) \xrightarrow{\cong} H_{\text{alt}}^*(X; \Gamma) \quad (1).$$

1.3. – Considereremo anche *affinità di faccia* $\beta = \beta_p = \beta^{i_0 \dots i_p}: \Delta_p \rightarrow \Delta_n (p \leq n)$ definite dalle $\beta(U^k) = U^{j_k}$ con $k = 0, \dots, p$ e gli j_k *distinti*, compresi tra 0 e n .

Sarà spesso utile notare che si ha:

$$(1.3.1) \quad \beta^{i_0 \dots i_p} \alpha^{i_0 \dots i_p} = \beta^{i_{i_0} \dots i_{i_p}},$$

$$(1.3.2) \quad \alpha^{i_0 \dots i_n} (s_n) \beta^{i_0 \dots i_p} = s_n \alpha^{i_0 \dots i_n} \beta^{i_0 \dots i_p} = s_n \beta^{i_{i_0} \dots i_{i_p}}.$$

2. – Cup-product alternante.

2.1. DEFINIZIONE. – Diremo *cup-product alternante* di due cocatene $c^p \in S^p(X; \Gamma)$, $'c^q \in S^q(X; \Gamma)$, e lo denoteremo con $c^p \cup_a 'c^q$, la *cocatena alternante* di $S_{\text{alt}}^{p+q}(X; \Gamma)$ ($\subset S^{p+q}(X; \Gamma)$), definita, per ogni $(p+q)$ -simpleso singolare s_{p+q} , dalla:

$$(2.1.1) \quad \langle s_{p+q}, c^p \cup_a 'c^q \rangle = \frac{1}{(p+q+1)!} \varepsilon_{i_0 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{i_0 \dots i_p}, c^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{i_p \dots i_{p+q}}, 'c^q \rangle,$$

dove la somma è sottintesa rispetto a tutte le permutazioni $(i_0, \dots, i_{p+q})$ di $(0, \dots, p+q)$, e $\beta^{i_0 \dots i_p}: \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q}$, $\beta^{i_p \dots i_{p+q}}: \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q}$ sono affinità di faccia (n. 1.3).

Ricordando la definizione dell'ordinario cup-product $c^p \cup 'c^q$, fornita dalla

$$\langle s_{p+q}, c^p \cup 'c^q \rangle = \langle s_{p+q} \beta^{0 \dots p}, c^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{p \dots p+q}, 'c^q \rangle,$$

e il trasposto π^{p+q} dell'operatore di alternazione π_{p+q} , (1.2.2, 1.2.3), nonchè la (1.3.2), la (2.1.1) può scriversi succintamente:

$$(2.1.2) \quad c^p \cup_a 'c^q = \pi^{p+q}(c^p \cup 'c^q);$$

onde è chiaro che $c^p \cup_a 'c^q$ è una cocatena alternante a cagione di (1.2.4).

2.2. – Avremo da considerare nel seguito particolarmente il caso in cui il cup-product alternante $\cup_a$ opera su cocatene alternanti c^p , $'c^q$ (che indicheremo allora con a^p , $'a^q$).

Convieni osservare che in tal caso ciascun termine della somma (sottintesa) in (2.1.1) *non cambia valore* se si effettua una permutazione degli indici $(i_0, \dots, i_{p+q})$ che sia ottenibile componendo successivamente (in un ordine o nell'opposto) una

(¹) Cfr. [3], n. 5.6.

permutazione degli indici $(i_0, \dots, i_p)$ che appaiono nel 1° fattore $\langle \rangle$, e una permutazione degli indici $(i_p, \dots, i_{p+q})$ che appaiono nel 2° fattore (il che implica ovviamente che l'indice comune i_p resti fisso in una almeno delle due permutazioni successive).

Infatti, in base a (1.3.1) e (1.2.1) per $n = p, q$, così facendo i due fattori $\langle \rangle$, $\langle \rangle$ si alterano delle segnature delle permutazioni su $(i_0, \dots, i_p)$, $(i_p, \dots, i_{p+q})$ ed $\varepsilon_{i_0 \dots i_{p+q}}$ si altera del prodotto di tali segnature.

Ciò premesso si ha subito la

(2.2.1) PROPOSIZIONE. – *Per cocatene alternanti il cup-product alternante è definito anche dalla:*

$$(2.2.2) \quad \langle s_{p+q}, a^p \cup_a 'a^q \rangle = \frac{1}{(p+q+1)!} \varepsilon_{i_0 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{i_0 i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{i_0 i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle.$$

Infatti, stante l'alternanza di a^p , si ha da (2.1.1):

$$\langle s_{p+q}, a^p \cup_a 'a^q \rangle = \frac{1}{(p+q+1)!} \varepsilon_{i_p i_1 \dots i_{p-1} i_0 i_{p+1} \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{i_p i_1 \dots i_{p-1} i_0}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle,$$

e quindi scambiando, prima di sommare, il nome degli indici i_0, i_p , si ha la (2.2.2).

Dalla Proposizione precedente si trae:

(2.2.3) PROPOSIZIONE. – *Per cocatene alternanti il cup-product è anticommutativo, cioè:*

$$(2.2.4) \quad a^p \cup_a 'a^q = (-1)^{pq} a^q \cup_a a^p.$$

La (2.2.4) scende dalla (2.2.2) tenuto conto che: $\varepsilon_{i_0 i_{p+1} \dots i_{p+q} i_1 \dots i_p} = (-1)^{pq} \varepsilon_{i_0 \dots i_{p+q}}$.
Stabiliamo infine la

(2.2.5) PROPOSIZIONE. – *Per cocatene alternanti il cup-product alternante soddisfa la relazione fondamentale di cobordo:*

$$(2.2.6) \quad \delta(a^p \cup_a 'a^q) = \delta a^p \cup_a 'a^q + (-1)^p a^p \cup_a \delta 'a^q.$$

La (2.2.6) discende subito dall'analoga valida per il cup-product ordinario, applicando la rappresentazione di cocatene $\pi = \text{Hom}(\pi, I)$ (n. 1.2). Tenuto conto della (2.1.2) si ha invero:

$$\begin{aligned} \delta(a^p \cup_a 'a^q) &= \delta \pi^{p+q}(a^p \cup 'a^q) = \pi^{p+q+1} \delta(a^p \cup 'a^q) \\ &= \pi^{p+q+1}(\delta a^p \cup 'a^q + (-1)^p a^p \cup \delta 'a^q) \\ &= \delta a^p \cup_a 'a^q + (-1)^p a^p \cup_a \delta 'a^q. \end{aligned}$$

2.3. – Restringiamoci ora a considerare i *cocicli alternanti* e stabiliamo la

(2.3.1) PROPOSIZIONE. – *Se a^p , $'a^q$ sono cocicli alternanti, il cup-product alternante è definito anche dalla:*

$$(2.3.2) \quad \langle s_{p+q}, a^p \cup_a 'a^q \rangle = \frac{1}{(p+q)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle,$$

$$(2.3.2') \quad = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{<, <} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle,$$

dove la prima somma (sottintesa) deve estendersi a tutte le permutazioni $(i_1, \dots, i_{p+q})$ di $(1, \dots, p+q)$ e la somma $\sum_{<, <}$ deve estendersi alle permutazioni bi-ordinate, cioè con gl'indici che appaiono nei due fattori $\langle \rangle$, $\langle \rangle$ separatamente ordinati ($i_1 < \dots < i_p$, $i_{p+1} < \dots < i_{p+q}$).

DIMOSTRAZIONE. – La (2.3.2') è ovvia conseguenza della (2.3.2) (cfr. n.2.2, osservazione iniziale). Per provare la (2.3.2) partiamo dalla (2.2.2), ed osserviamo che il secondo membro di quest'ultima (a parte il fattore $1/(p+q+1)!$) si ripartisce in $p+q+1$ addendi corrispondenti ai possibili valori dell'indice i_0 . Se si prova che tali addendi, nelle ipotesi poste, sono tutti uguali fra loro, si ottiene la (2.3.2) assumendo $i_0 = 0$.

Basta stabilire che sono uguali gli addendi corrispondenti ad $i_0 = 0$, $i_0 = 1$, perchè lo stesso ragionamento vale poi per $i_0 = 1$, $i_0 = 2$, ecc., previa permutazione circolare di $(0, 1, \dots, p+q)$.

Denotiamo con Σ_0 , Σ_1 i due addendi per $i_0 = 0$, $i_0 = 1$. Tenuto conto dell'alternanza di a^p , $'a^q$, si ha:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \varepsilon_{0i_1 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle \\ &= p!q! \sum_{<, <} \varepsilon_{0i_1 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle. \end{aligned}$$

Ora, nella 2^a espressione di Σ_0 , può aversi $1 = i_1$ ovvero $1 = i_{p+1}$; quindi si ha anche

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= p!q! \left(\sum_{<, <} \varepsilon_{0i_1 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle + \right. \\ &\quad \left. \sum_{<, <} \varepsilon_{0i_1 \dots i_p 1 i_{p+1} \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle \right), \end{aligned}$$

dove le somme $\sum_{<, <}$ s'intendono qui, ovviamente, estese alle permutazioni bi-ordinate degli interi disponibili $2, \dots, p+q$.

Analogamente si ottiene:

$$\Sigma_1 = p!q! \left(\sum_{<, <} \varepsilon_{10i_2 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{10i_2 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{1i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q' \rangle + \right. \\ \left. \sum_{<, <} \varepsilon_{1j_1 \dots j_p 0i_{p+1} \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{1j_1 \dots j_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{10j_{p+1} \dots j_{p+q}}, 'a^q' \rangle \right),$$

e quindi (tenuto sempre conto dell'alternanza di $a^p, 'a^q'$):

$$(2.3.3) \quad \Sigma_0 - \Sigma_1 = p!q! \left(\sum_{<, <} \varepsilon_{01i_2 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{01i_2 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}} - s_{p+q} \beta^{1i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q' \rangle + \right. \\ \left. \sum_{<, <} \varepsilon_{0j_1 \dots j_p 1j_{p+1} \dots j_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{0j_1 \dots j_p} - s_{p+q} \beta^{1j_1 \dots j_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{01j_{p+1} \dots j_{p+q}}, 'a^q' \rangle \right).$$

D'altronde si ha:

$$(2.3.4) \quad \partial(s_{p+q} \beta^{01j_1 \dots j_p}) = s_{p+q} \left(\beta^{1j_1 \dots j_p} - \beta^{0j_1 \dots j_p} - \sum_1^p (-1)^r \beta^{01j_1 \dots \hat{j}_r \dots j_p} \right),$$

dove il 2° membro si riguardi come la trasformata mediante s_{p+q} di una catena singolare di Δ_{p+q} .

Ora, siccome a^p è per ipotesi un cociclo, il valore di a^p sulla catena (2.3.4) è nullo; quindi risulta:

$$(2.3.5) \quad \langle s_{p+q} (\beta^{0j_1 \dots j_p} - \beta^{1j_1 \dots j_p}), a^p \rangle = \langle s_{p+q} \left(\sum_1^p (-1)^r \beta^{01j_1 \dots \hat{j}_r \dots j_p} \right), a^p \rangle.$$

In modo analogo si ottiene:

$$(2.3.6) \quad \langle s_{p+q} (\beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}} - \beta^{1i_{p+1} \dots i_{p+q}}), 'a^q' \rangle = \langle s_{p+q} \left(\sum_1^q (-1)^s \beta^{01i_{p+1} \dots \hat{i}_{p+s} \dots i_{p+q}} \right), 'a^q' \rangle.$$

Sostituendo (2.3.5), (2.3.6) nella (2.3.3), viene:

$$(2.3.7) \quad \Sigma_0 - \Sigma_1 = p!q! \left(\sum_{<, <} \varepsilon_{01i_2 \dots i_{p+q}} \langle s_{p+q} \beta^{01i_2 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q} \left(\sum_1^q (-1)^s \beta^{01i_{p+1} \dots \hat{i}_{p+s} \dots i_{p+q}} \right), 'a^q' \rangle + \right. \\ \left. \sum_{<, <} \varepsilon_{0j_1 \dots j_p 1j_{p+1} \dots j_{p+q}} \langle s_{p+q} \left(\sum_1^p (-1)^r \beta^{01j_1 \dots \hat{j}_r \dots j_p} \right), a^p \rangle \langle s_{p+q} \beta^{01j_{p+1} \dots j_{p+q}}, 'a^q' \rangle \right).$$

Si tenga conto infine che

$$\varepsilon_{01i_2 \dots i_{p+q}} (-1)^s = \varepsilon_{01i_{p+s} i_2 \dots \hat{i}_{p+1} \dots i_{p+q}} (-1)^p, \quad \varepsilon_{0j_1 \dots j_p 1j_{p+1} \dots j_{p+q}} (-1)^r = \varepsilon_{01j_r j_1 \dots \hat{j}_r \dots j_{p+1} \dots j_{p+q}} (-1)^{p-1},$$

e che nelle due somme $\sum_{<, <}$ di (2.3.7) può assumersi $i_{p+s} = j_r = t$ al variare di t nell'insieme di interi $\{2, \dots, p+q\}$. Assumendo inoltre, com'è lecito: $(i_2, \dots, i_p) =$

$= (j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_p) = (h_1, \dots, h_{p-1}), (i_{p+1}, \dots, \hat{j}_{p+s}, \dots, i_{p+q}) = (j_{p+2}, \dots, j_{p+q}) = (k_1, \dots, k_{q-1})$,
essendo $\{h_1, \dots, h_{p-1}, k_1, \dots, k_{q-1}\} = \{2, \dots, \hat{i}, \dots, p+q\}$ e $h_1 < \dots < h_{p-1}, k_1 < \dots < k_{q-1}$,
la (2.3.7) diviene:

$$\Sigma_0 - \Sigma_1 = p!q! \left(\sum_{\substack{t \\ <, <}}^{p+q} \varepsilon_{01h_1 \dots h_{p-1}k_1 \dots k_{q-1}} \langle s_{p+q} \beta^{01h_1 \dots h_{p-1}}, a^p \rangle \cdot \right. \\ \left. \langle s_{p+q} \beta^{01k_1 \dots k_{q-1}}, 'a^q \rangle ((-1)^p + (-1)^{p-1}) \right) = 0 ;$$

il che prova quanto volevasi.

(2.3.8) OSSERVAZIONE. — Se, in luogo di uno spazio topologico X , si considera un complesso simpliciale K e, in luogo di semplici singolari, semplici *ordinati* di K , le formule e alcune delle deduzioni indicate divengono spontanee. Per es. la (2.3.2') ha per analoga la:

$$(2.3.9) \quad \langle A^0 A^1 \dots A^{p+q}, a^p \cup_a 'a^q \rangle = \\ \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\substack{t \\ <, <}} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}} \langle A^0 A^{i_1} \dots A^{i_p}, a^p \rangle \langle A^0 A^{i_{p+1}} \dots A^{i_{p+q}}, 'a^q \rangle ,$$

essendo $A^0 A^1 \dots A^{p+q}$ un $(p+q)$ -simpleso ordinato e $a^p, 'a^q$ un p -cociclo e un q -cociclo *alternanti* di K .

3. — Struttura di algebra in $\oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; I)$.

3.1. — Denoteremo con $Z_{\text{alt}}^n(X; I)$ ($\subset S_{\text{alt}}^n(X; I)$) lo spazio vettoriale degli n -cocicli singolari alternanti di X a valori in I .

Stabiliamo il

(3.1.1) TEOREMA. — *Il cup-product alternante definisce in $\oplus_n Z_{\text{alt}}^n(X; I)$ una struttura di algebra graduata associativa e anticommutativa su I .*

DIMOSTRAZIONE. — Si è già visto che $\cup_a$ è anticommutativo (Proposizione 2.2.3). Dalla Proposizione (2.2.5) si ha inoltre che $Z_{\text{alt}}^p \cup_a Z_{\text{alt}}^q \subset Z_{\text{alt}}^{p+q}$. Resta da provare che $\cup_a$ è associativo.

Si consideri all'uopo $a^p \cup_a ('a^q \cup_a ''a^r)$. Applicando la (2.3.2') con $'a^q \cup_a ''a^r$ in luogo di $'a^q$, viene:

$$\langle s_{p+q+r}, a^p \cup_a ('a^q \cup_a ''a^r) \rangle = \frac{p!(q+r)!}{(p+q+r)!} \sum_{\substack{t \\ <, <}} \varepsilon_{i_1 \dots i_p j_{p+1} \dots j_{p+q+r}} \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \cdot \\ \langle s_{p+q+r} \beta^{0j_{p+1} \dots j_{p+q+r}}, 'a^q \cup_a ''a^r \rangle ,$$

dove la somma è estesa alle permutazioni bi-ordinate $(i_1, \dots, i_p, j_{p+1}, \dots, j_{p+q+r})$ di $(1, \dots, p+q+r)$.

Applicando nuovamente la (2.3.2'), con i cambiamenti del caso, si ha:

$$\begin{aligned} \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q+r}}, 'a^q \cup_a ''a^r \rangle = \\ \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{<, <, <} \varepsilon(\tau) \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_{p+q+1} \dots i_{p+q+r}}, ''a^r \rangle, \end{aligned}$$

dove la somma è estesa alle permutazioni bi-ordinate $\tau: (j_{p+1}, \dots, j_{p+q+r}) \rightarrow (i_{p+1}, \dots, i_{p+q+r})$, ($i_{p+1} < \dots < i_{p+q}$, $i_{p+q+1} < \dots < i_{p+q+r}$), ed $\varepsilon(\tau)$ ne designa la relativa segnatura. Poichè $\varepsilon_{i_1 \dots i_p j_{p+1} \dots j_{p+q+r}} \varepsilon(\tau) = \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q+r}}$, si ha infine:

$$\begin{aligned} (3.1.2) \quad \langle s_{p+q+r}, a^p \cup_a ('a^q \cup_a ''a^r) \rangle = \\ \frac{p!q!r!}{(p+q+r)!} \sum_{<, <, <} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q+r}} \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_1 \dots i_p}, a^p \rangle \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}}, 'a^q \rangle \langle s_{p+q+r} \beta^{0i_{p+q+1} \dots i_{p+q+r}}, ''a^r \rangle, \end{aligned}$$

dove la somma $\sum_{<, <, <}$ s'intende estesa alle permutazioni *tri-ordinate* $(i_1, \dots, i_{p+q+r})$ di $(1, \dots, p+q+r)$, cioè soddisfacenti alle $i_1 < \dots < i_p$, $i_{p+1} < \dots < i_{p+q}$, $i_{p+q+1} < \dots < i_{p+q+r}$.

È ovvio che lo stesso risultato si ottiene valutando $(a^p \cup_a 'a^q) \cup_a ''a^r$ su s_{p+q+r} ; d'onde la conclusione.

3.2. – Denotato con $B_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ il sottospazio dei *cobordi alternanti* di $Z_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$, dalla Proposizione (2.2.5) risulta che $\oplus_n B_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ è un ideale bilatero dell'anello $\oplus_n Z_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$, quindi, passando al quoziente, risulta, come al solito ⁽¹⁾, che $\cup_a$ induce un *cup-product alternante tra classi di coomologia*, che indicheremo con $\mathbf{U}_a$. Dal teorema (3.1.1) si trae allora senz'altro;

(3.2.1) TEOREMA. – *Il cup-product alternante $\mathbf{U}_a$ definisce in $\oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ una struttura di algebra graduata associativa e anticommutativa su Γ .*

Si noti che l'anticommutatività di $\mathbf{U}_a$ risulta qui direttamente dal fatto ch'essa già sussiste per $\cup_a$ (contrariamente a quanto accade per l'ordinario cup-product ⁽²⁾).

3.3. – Mostriamo ora che, nonostante l'ordinario cup-product $\cup$ e il cup-product alternante $\cup_a$ siano ovviamente diversi, i corrispondenti prodotti tra classi di coomologia $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_a$ coincidono « sostanzialmente ».

Precisamente si ha:

(3.3.1) TEOREMA. – *L'isomorfismo π^* , (1.2.6), induce un isomorfismo di Γ -algebre graduate $\oplus_n H^n(X; \Gamma) \xrightarrow{\cong} \oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ in cui si corrispondono $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_a$.*

⁽¹⁾ Cfr. p. es. P. J. HILTON-S. WYLIE [2], p. 142.

⁽²⁾ M. J. GREENBERG [1], p. 146, osserva che la dimostrazione della anticommutatività dell'ordinario cup-product tra classi di coomologia, è « surprisingly complicated ». La considerazione del cup-product alternante $\cup_a$ mostra dov'è la radice di tale complicazione (cfr. il successivo Teorema 3.3.1).

DIMOSTRAZIONE. — Denotiamo con $c^p, 'c^q$ cocicli di $S'(X; I')$ e con $[], []_a$ classi di coomologia risp. di $H^*(X; I'), H_{\text{alt}}^*(X; I')$. Si tratta di provare che:

$$(3.3.2) \quad \pi^*([c^p]) \mathbf{U} ['c^q] = \pi^*[c^p] \mathbf{U}_a \pi^*['c^q] .$$

Si ha invero, (1.2.4),

$$\pi^p c^p = a^p, \quad \pi^q 'c^q = 'a^q$$

con $a^p, 'a^q$ cocicli di $S'_{\text{alt}}(X; I') \subset S'(X; I')$. Di più, stante la (1.2.5), risulta: $[c^p] = [a^p], ['c^q] = ['a^q]$.

Ciò posto si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi^*([c^p] \mathbf{U} ['c^q]) &= \pi^*([a^p] \mathbf{U} ['a^q]) = \pi^*[a^p \cup 'a^q] = [\pi^{p+q}(a^p \cup 'a^q)]_a, \\ \pi^*[c^p] \mathbf{U}_a \pi^*['c^q] &= [\pi^p a^p]_a \mathbf{U}_a [\pi^q 'a^q]_a = [a^p]_a \mathbf{U}_a ['a^q]_a = [a^p \cup_a 'a^q]_a. \end{aligned}$$

Poichè gli ultimi membri delle due righe coincidono in virtù di (2.1.2), la (3.3.2) risulta dimostrata.

II. - Prodotto esterno.

4. - Premesse.

4.1. — Supponiamo ora che X sia una *varietà differenziabile* ⁽¹⁾, e fissiamo l'attenzione sulle n -catene singolari orientate *differenziabili* di X a coefficienti nel campo reale $\mathbf{R}$, cioè combinazioni lineari, con coefficienti in $\mathbf{R}$, di simplessi singolari $s_n: \Delta_n \rightarrow X$ definiti da applicazioni differenziabili.

Tali cocatene differenziabili costituiscono un complesso di catene che denoteremo con gli stessi simboli già usati nel caso di catene continue: $S^{\text{ori}}(X; \mathbf{R}) = \{S_n^{\text{ori}}(X; \mathbf{R}), \partial_n\}$. Il complesso di cocatene associato, a valori in $\mathbf{R}$, sarà denotato analogamente con $S'_{\text{alt}}(X; \mathbf{R}) = \{S'_{\text{alt}}(X; \mathbf{R}), \delta_n\}$.

Nella varietà X le n -forme differenziali esterne reali ω_n (di classe C^∞) costituiscono a loro volta un complesso di cocatene $\Omega(X; \mathbf{R}) = \{\Omega_n(X; \mathbf{R}), d\}$, essendo d l'operazione di differenziazione esterna.

Si ha:

(4.1.1) PROPOSIZIONE. — *L'operazione di integrazione J fornisce una rappresentazione di cocatene:*

$$(4.1.2) \quad J: \Omega(X; \mathbf{R}) \rightarrow S'_{\text{alt}}(X; \mathbf{R}),$$

⁽¹⁾ Qui ed oltre con « differenziabile » intendiamo « differenziabile di classe C^∞ », per quanto non strettamente necessario.

assumendo la cocatena $J(\omega_n)$ definita, per ogni s_n , dalla:

$$(4.1.3) \quad \langle s_n, J(\omega_n) \rangle = \int_{s_n} \omega_n = \int_{\Delta_n} s_n^*(\omega_n) .$$

Nella (4.1.3) $s_n^*(\omega_n)$ denota la forma su Δ_n immagine inversa di ω_n mediante l'applicazione $s_n: \Delta_n \rightarrow X$. Inoltre l'ultimo integrale denota un integrale n -plo ordinario nello spazio euclideo $E_n(t^1, \dots, t^n)$ contenente il simpleso prototipo Δ_n , i cui vertici $U^0, U^1, \dots, U^n$ assumiamo coincidenti risp. con l'origine e i punti unità degli assi.

Dalla (4.1.3) risulta intanto che la cocatena $J(\omega_n)$ è alternante. Invero, se si muta s_n in $s_n \alpha$ (n. 1.2), l'ultimo membro della (4.1.3) si muta in $\int_{\Delta_n} \alpha^* s_n^*(\omega_n)$, che uguaglia $\varepsilon(\alpha) \int_{\Delta_n} s_n^*(\omega_n)$, giacchè α è una affinità *equivalente* che trasforma Δ_n in sé conservandone o cambiandone l'orientazione a seconda che sia $\varepsilon(\alpha) = 1$ o -1 (n. 1.2).

Per riconoscere poi che J è una rappresentazione di cocatene, basta verificare che $Jd = \delta J$. Di fatto risulta:

$$\begin{aligned} \langle s_{n+1}, J(d\omega_n) \rangle &= \int_{\Delta_{n+1}} s_{n+1}^*(d\omega_n) = \int_{\Delta_{n+1}} ds_{n+1}^*(\omega_n) , \\ \langle s_{n+1}, \delta(J\omega_n) \rangle &= \langle \partial s_{n+1}, J(\omega_n) \rangle = \int_{\partial \Delta_{n+1}} s_{n+1}^*(\omega_n) , \end{aligned}$$

e gli ultimi integrali delle due righe sono uguali per la formula di Green-Stokes.

Notiamo che da (4.1.1) segue il

(4.1.4) COROLLARIO. — Se ω_n è chiusa ($d\omega_n = 0$), $J(\omega_n)$ è un n -cociclo alternante; se ω_n è esatta ($\omega_n = d\omega_{n-1}$), $J(\omega_n)$ è un n -cobordo alternante.

5. — Confronto tra cup-product alternante e prodotto esterno.

5.1. — Il nostro intento è di mostrare che il prodotto esterno $\omega_p \wedge \omega_q$ di due forme differenziali su X corrisponde « nell'infinitesimo » al cup-product alternante delle cocatene definite dalle forme ω_p, ω_q . Si tratta cioè di confrontare i valori che assumono le cocatene $J(\omega_p \wedge \omega_q)$, $J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q)$ di $S_{\text{alt}}(X; \mathbf{R})$, (4.1.1), sui semplici singolari « infinitesimi ».

Per precisare il senso di quanto accennato, fissiamo un simpleso singolare $s_n: \Delta_n \rightarrow X$ e consideriamo un'affinità diretta $h^{(e)}: E_n \rightarrow E_n$ di *rapporto* (di volume) q^n ($q > 0$). Precisamente, se $t = (t^i)$, $t' = (t'^i)$ sono punti corrispondenti mediante $h^{(e)}$ e il corrispondente dell'origine $U^0 \equiv (0)$ è $t'_0 = (t_0^i)$, le equazioni di $h^{(e)}$ sono del tipo:

$$(5.1.1) \quad t'^i = q c_j^i t^j + t_0'^i \quad (i, j = 1, \dots, n) ,$$

con

$$(5.1.2) \quad \det(c_j^i) = 1.$$

Sia $\Delta_n^{(\varrho)} = h^{(\varrho)}(\Delta_n)$ l' n -simpleso affine trasformato di Δ_n , e supponiamo $\Delta_n^{(\varrho)} \subset \Delta_n$ per ϱ abbastanza piccolo.

Fissati i coefficienti c_j^i , per $\varrho \rightarrow 0$, $\Delta_n^{(\varrho)}$ si contrae al punto t_0' e il simpleso singolare $s_n^{(\varrho)} = s_n h^{(\varrho)}: \Delta_n \rightarrow X$ ha un'immagine $s_n^{(\varrho)}(\Delta_n) \subset X$ che si contrae al punto $x_0 = s_n^{(\varrho)}(t_0')$.

Ora si ha:

$$(5.1.3) \quad \langle s_n^{(\varrho)}, J(\omega_n) \rangle = \int_{\Delta_n} h_n^{(\varrho)*} s_n^*(\omega_n),$$

dove $s_n^*(\omega_n) = a'(t') dt'^1 \wedge \dots \wedge dt'^n$ con a' funzioni di $t' \equiv (t'^i)$. Tenuto conto delle (5.1.1), (5.1.2), si ha poi

$$(5.1.4) \quad dt'^1 \wedge \dots \wedge dt'^n = \varrho^n \det(c_j^i) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n = \varrho^n dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n,$$

nonchè $a'(t') = a'(\varrho c_j^i t^j + t_0'^i) = a(t)$ e quindi

$$h^{(\varrho)*}(a'(t')) dt'^1 \wedge \dots \wedge dt'^n = \varrho^n a(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n.$$

D'altronde per $t \in \Delta_n$ risulta:

$$(5.1.5) \quad |a(t) - a(0)| = \left| \left(\frac{\partial a'}{\partial t'^i} \right)_{\#} \varrho c_j^i t^j \right| \leq \varrho \sup |c_j^i| N,$$

ove le derivate s'intendono calcolate in un punto opportuno ed N è un numero positivo indipendente da ϱ, t . Può pertanto scriversi:

$$(5.1.6) \quad h^{(\varrho)} s_n^*(\omega_n) = (\varrho^n a(0) + o(\varrho^n)) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n,$$

e la (5.1.3) dà:

$$(5.1.7) \quad \langle s_n^{(\varrho)}, J(\omega_n) \rangle = \varrho^n a(0) \int_{\Delta_n} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n + o(\varrho^n) = \frac{1}{n!} \varrho^n a(0) + o(\varrho^n).$$

Il primo termine del 2° e 3° membro della (5.1.7), in quanto proporzionale a ϱ^n per un fattore costante, lo diremo *parte principale* del valore della n -cocatena $J(\omega_n)$ sul simpleso singolare $s_n^{(\varrho)}$, e indicheremo con $\cong$ un'uguaglianza a meno di un $o(\varrho^n)$ (se n è il grado delle cocatene considerate).

5.2. – Ciò posto dimostriamo il

(5.2.1) **TEOREMA.** – *Assegnate due forme differenziali ω_p, ω_q sulla varietà X , sono uguali le parti principali dei valori che le cocatene $J(\omega_p \wedge \omega_q), J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q)$ assumono sui semplici singolari infinitesimi $s_{p+q}^{(q)}$, cioè:*

$$(5.2.2) \quad \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p \wedge \omega_q) \rangle \stackrel{\circ}{=} \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE. – Quanto al 1° membro di (5.2.2) si ha:

$$(5.2.3) \quad \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p \wedge \omega_q) \rangle = \int_{\Delta_{p+q}} h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_p \wedge \omega_q) = \int_{\Delta_{p+q}} h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_p) \wedge h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_q),$$

giacchè il prodotto esterno $\wedge$ si conserva per la trasformazione indotta sulle forme da $s_{p+q} h^{(q)}$.

D'altronde, ragionando analogamente al n. 5.1, si ha:

$$(5.2.4) \quad h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_p) = (\varrho^p a_{h_1 \dots h_p} + o(\varrho^p)) dt^{h_1} \wedge \dots \wedge dt^{h_p},$$

$$(5.2.5) \quad h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_q) = (\varrho^q b_{k_1 \dots k_q} + o(\varrho^q)) dt^{k_1} \wedge \dots \wedge dt^{k_q},$$

dove indichiamo con $a_{h_1 \dots h_p}, b_{k_1 \dots k_q}$ i valori in $t \equiv (0)$ dei coefficienti (alternanti) delle forme $h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_p), h^{(q)*} s_{p+q}^*(\omega_q)$, e sottintendiamo le somme rispetto agli indici ripetuti.

La (5.2.3) dà allora:

$$\begin{aligned} (5.2.6) \quad \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p \wedge \omega_q) \rangle &\stackrel{\circ}{=} \varrho^{p+q} \int_{\Delta_{p+q}} a_{h_1 \dots h_p} b_{k_1 \dots k_q} dt^{h_1} \wedge \dots \wedge dt^{h_p} \wedge dt^{k_1} \wedge \dots \wedge dt^{k_q} \\ &= \varrho^{p+q} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} \int_{\Delta_{p+q}} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{p+q} \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \varrho^{p+q} \varepsilon^{i_1 \dots i_{p+q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}, \end{aligned}$$

essendo $\varepsilon^{i_1 \dots i_{p+q}} = \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}}$ la segnatura della permutazione considerata.

Per valutare il 2° membro di (5.2.2) si osservi preliminarmente che il valore su $s_{p+q}^{(q)}$ di $J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q)$ si esprime come una combinazione lineare di prodotti di valori di $J(\omega_p), J(\omega_q)$ su facce di $s_{p+q}^{(q)}$, cioè di integrali sulle corrispondenti facce di Δ_{p+q} delle forme (5.2.4), (5.2.5). A meno di un $o(\varrho^{p+q})$, si possono allora sostituire alle forme (5.2.4), (5.2.5) le:

$$(5.2.7) \quad \tilde{\omega}_p = \varrho^p a_{h_1 \dots h_p} dt^{h_1} \wedge \dots \wedge dt^{h_p}, \quad \tilde{\omega}_q = \varrho^q b_{k_1 \dots k_q} dt^{k_1} \wedge \dots \wedge dt^{k_q},$$

che sono ovviamente chiuse. $J(\tilde{\omega}_p), J(\tilde{\omega}_q)$ sono quindi cocicli alternanti definiti

su $s_{p+q}^{(q)}$ (Corollario 4.1.4), e il prodotto $\cup_a$ può valutarsi in modo semplice sulla base della Proposizione (2.3.1).

Risulta così:

$$(5.2.8) \quad \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \rangle \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{(p+q)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}} \int_{\Delta_p} \beta^{0i_1 \dots i_p*}(\tilde{\omega}_p) \int_{\Delta_q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}*}(\tilde{\omega}_q) .$$

Ricordiamo che l'affinità di faccia $\beta^{0i_1 \dots i_p}$ porta $\Delta_p = U^0 \dots U^p$ in $U^0 U^{i_1} \dots U^{i_p}$ facendo corrispondere ordinatamente i vertici (n. 1.3), onde porta $\overrightarrow{U^0 t} = t^1 \overrightarrow{U^0 U^1} + \dots + t^p \overrightarrow{U^0 U^p}$ in $\overrightarrow{U^0 \tilde{t}} = t^1 \overrightarrow{U^0 U^{i_1}} + \dots + t^p \overrightarrow{U^0 U^{i_p}}$. Ne segue che $\tilde{t}^i = t^1, \dots, \tilde{t}^p = t^p$, mentre le altre coordinate di $\overrightarrow{U^0 \tilde{t}}$ sono nulle. Perciò:

$$\beta^{0i_1 \dots i_p*}(d\tilde{t}^{h_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{t}^{h_p}) = \begin{cases} 0 & \text{per } \{h_1, \dots, h_p\} \neq \{i_1, \dots, i_p\} \\ \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{h_1 \dots h_p} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p, & \end{cases}$$

dove $\varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{h_1 \dots h_p}$ è la segnatura della permutazione $(h_1, \dots, h_p) \rightarrow (i_1, \dots, i_p)$. Allora (sostituendo, come devesi, le t^h con le $\tilde{t}^h$ nell'espressione di $\tilde{\omega}_p$ data da (5.2.7)) si ha:

$$\int_{\Delta_p} \beta^{0i_1 \dots i_p*}(\tilde{\omega}_p) = \varrho^p \varepsilon_{i_1 \dots i_p}^{h_1 \dots h_p} a_{h_1 \dots h_p} \int_{\Delta_p} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p = \varrho^p a_{i_1 \dots i_p},$$

avendo supposto gli $a_{i_1 \dots i_p}$ alternanti.

Analogamente si ottiene:

$$\int_{\Delta_q} \beta^{0i_{p+1} \dots i_{p+q}*}(\tilde{\omega}_q) = \varrho^q b_{i_{p+1} \dots i_{p+q}},$$

e quindi la (5.2.8) diviene:

$$(5.2.9) \quad \langle s_{p+q}^{(q)}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \rangle \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{(p+q)!} \varrho^{p+q} \varepsilon_{i_1 \dots i_{p+q}} a_{i_1 \dots i_p} b_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} .$$

Il confronto delle (5.2.6), (5.2.9) prova il Teorema.

5.3. ESEMPIO E CONTROESEMPIO. — Consideriamo il caso di due forme differenziali di 1° grado nel piano $E_2(t^1, t^2)$: $\omega_1 = a_1 dt^1 + a_2 dt^2$, $\omega'_1 = b_1 dt^1 + b_2 dt^2$. Supponiamo costanti i coefficienti delle forme. Ciò consente ovviamente di riferire la (5.2.2) al semplice finito Δ_2 .

Risulta:

$$(5.3.1) \quad \langle \Delta_2, J(\omega_1 \wedge \omega'_1) \rangle = \int_{\Delta_2} \omega_1 \wedge \omega'_1 = \int_{\Delta_2} (a_1 b_2 - a_2 b_1) dt^1 \wedge dt^2 = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

$$\begin{aligned}
 (5.3.2) \quad \langle \Delta_2, J(\omega_1) \cup_a J(\omega_2) \rangle &= \frac{1}{2} (\langle U^0 U^1, J(\omega_1) \rangle \langle U^0 U^2, J(\omega'_1) \rangle - \\
 &\quad \langle U^0 U^2, J(\omega_1) \rangle \langle U^0 U^1, J(\omega'_1) \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{U^0 U^1} \omega_1 \int_{U^0 U^2} \omega'_1 - \int_{U^0 U^2} \omega_1 \int_{U^0 U^1} \omega'_1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{U^0 U^1} a_1 dt^1 \int_{U^0 U^2} b_2 dt^2 - \int_{U^0 U^2} a_2 dt^2 \int_{U^0 U^1} b_1 dt^1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1),
 \end{aligned}$$

il che conferma la (5.2.2) (col segno $=$ in luogo di $\doteq$).

Se, invece di considerare $\cup_a$, si fosse considerato l'ordinario cup-product $\cup$, in luogo della (5.3.2) si sarebbe ottenuto:

$$\begin{aligned}
 (5.3.3) \quad \langle \Delta_2, J(\omega_1) \cup J(\omega'_1) \rangle &= \langle U^0 U^1, J(\omega_1) \rangle \langle U^1 U^2, J(\omega'_1) \rangle = \\
 &= \int_{U^0 U^1} \omega_1 \int_{U^1 U^2} \omega'_1 \\
 &= \int_{U^0 U^1} a_1 dt^1 \int_{U^1 U^2} b_1 dt^1 + b_2 dt^2 \\
 &= a_1 \int_{U^0 U^1} b_1 d(1-t^2) + b_2 dt^1 \\
 &= a_1 b_2 - a_1 b_1,
 \end{aligned}$$

e l'uguaglianza tra (5.3.1), (5.3.3) non avrebbe luogo.

Si noti che la comparsa del fattore $\frac{1}{2}$ nella espressione (5.3.1), e in generale del fattore $1/(p+q)!$, è legata alla valutazione del volume del simpleso prototipo Δ_{p+q} . Si comprende perciò che, nell'ambito delle cocatene singolari « di tipo simpliciale » a valori in un campo di caratteristica $\neq 0$, non è possibile introdurre un « opportuno » cup-product che fornisca una interpretazione del prodotto esterno (del genere di quella assegnata dal Teorema 5.2.1).

È forse ciò possibile, per valori in un campo di caratteristica $\neq 0$ o più in generale in un anello, qualora si considerino cocatene singolari « cubiche »? (Cfr. il successivo n. 5.4).

5.4. FONDAMENTO CONCETTUALE. — Dal punto di vista intuitivo l'essenza del Teorema (5.2.1) è la seguente.

Sia $\omega_n = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ una forma differenziale monomia sulla varietà X (x punto di X di coordinate locali x^i , $i=1, \dots, \dim X$), e V_n una sottovarietà n -dimensionale di X .

L'« elemento di integrale » di ω_n su V_n è l'integrale di ω_n su un « parallelepipedo infinitesimo » di V_n determinato da n « vettori infinitesimi » $\underset{1}{d}, \dots, \underset{n}{d}$, tangenti a V_n

in x , di coordinate $\underset{1}{dx^i}, \dots, \underset{n}{dx^i}$, cioè

$$\omega_n(\underset{1}{d} \wedge \dots \wedge \underset{n}{d}) = a(x) \left| \underset{h}{dx^{i_1}} \dots \underset{h}{dx^{i_n}} \right|,$$

dove con l'espressione tra barre si è denotato il determinante d'ordine n di cui si è indicata la riga h -ma ($h = 1, \dots, n$).

Assegnate le forme $\omega_p = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, $\omega_q = b(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$, l'elemento di integrale di $\omega_p \wedge \omega_q$ vale allora:

$$(\omega_p \wedge \omega_q)(\underset{1}{d} \wedge \dots \wedge \underset{p+q}{d}) = a(x)b(x) \left| \underset{h}{dx^{i_1}} \dots \underset{h}{dx^{i_p}} \underset{h}{dx^{j_1}} \dots \underset{h}{dx^{j_q}} \right|,$$

con $h = 1, \dots, p+q$. Sviluppando il determinante a secondo membro con la regola di Laplace relativa allo spezzamento in due matrici $(p+q) \times p$, $(p+q) \times q$, viene:

$$\begin{aligned} (\omega_p \wedge \omega_q)(\underset{1}{d} \wedge \dots \wedge \underset{p+q}{d}) &= \sum_{<, <} a(x)b(x) \varepsilon^{h_1 \dots h_{p+q}} \left| \underset{h_1}{dx^{i_1}} \dots \underset{h_p}{dx^{i_p}} \right| \left| \underset{h_{p+1}}{d} \underset{h_{p+2}}{d} \dots \underset{h_{p+q}}{d} \right| \\ &= \sum_{<, <} \varepsilon^{h_1 \dots h_{p+q}} \omega_p(\underset{h_1}{d} \wedge \dots \wedge \underset{h_p}{d}) \omega_q(\underset{h_{p+1}}{d} \wedge \dots \wedge \underset{h_{p+q}}{d}). \end{aligned}$$

D'altronde il parallelepipedo infinitesimo individuato dai vettori $\underset{1}{d}, \dots, \underset{n}{d}$ si decompone in $n!$ « semplici infinitesimi » su ciascuno dei quali l'integrale di una forma ω_n assume valori uguali (a meno di infinitesimi d'ordine superiore). Denotiamo con $s_n(\underset{1}{d}, \dots, \underset{n}{d})$ quello degli $n!$ semplici che ha un vertice in x e gli altri negli estremi di $\underset{1}{d}, \dots, \underset{n}{d}$. Si ottiene:

$$(5.4.1) \quad \langle s_{p+q}(\underset{1}{d}, \dots, \underset{p+q}{d}), \omega_p \wedge \omega_q \rangle = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{<, <} \varepsilon^{h_1 \dots h_{p+q}} \langle s_p(\underset{1}{d}, \dots, \underset{p}{d}), \omega_p \rangle \langle s_q(\underset{p+1}{d}, \dots, \underset{p+q}{d}), \omega_q \rangle.$$

Questa formula suggerisce l'espressione (2.3.2') che definisce $\cup_a$ in guisa da ricavarne l'interpretazione di $\wedge$ (cfr. anche l'Osservazione 2.3.8).

Tuttavia la (2.3.2') è adatta soltanto per « cocicli » (alternanti), così come la (5.4.1) è adatta per forme differenziali considerate su semplici infinitesimi, in quanto in tal caso i coefficienti delle forme possono considerarsi « costanti » e quindi le forme stesse « chiuse ».

Per estendere $\cup_a$ a cocatene qualunque (alternanti o no, cocicli o no) riesce opportuno modificarne la definizione nella forma (2.1.1), che si presta meglio, come abbiamo visto, alle deduzioni. Quest'ultima definizione non dà luogo però, in generale, ad un prodotto associativo.

III. - Terzo teorema di de Rham.

6. - Teoremi di de Rham.

6.1. - La rappresentazione di cocatene (4.1.2), passando alle classi di coomologia, fornisce un omomorfismo:

$$(6.1.1) \quad J^*: \oplus_n H_{\text{dR}}^n(X; \mathbf{R}) \rightarrow \oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; \mathbf{R})$$

dello spazio vettoriale graduato della *coomologia di de Rham* $H_{\text{dR}}^*(X; \mathbf{R})$ nello spazio vettoriale graduato della *coomologia alternante* $H_{\text{alt}}^*(X; \mathbf{R})$, che possiamo identificare ad $H^*(X; \mathbf{R})$ in base alla (1.2.6).

È ben noto che J^* risulta addirittura un *isomorfismo* (*Teorema di de Rham*). Precisamente le affermazioni: 1) $\text{Im } J^* = \oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; \mathbf{R})$, 2) $\text{Ker } J^* = 0$, costituiscono risp. il 1° e il 2° Teorema di de Rham enunciati in termini coomologici ⁽¹⁾.

Tenuto conto che, in base al Teorema (3.3.1), $\oplus_n H_{\text{alt}}^n(X; \mathbf{R})$ e $\oplus_n H^n(X; \mathbf{R})$ possono identificarsi anche come $\mathbf{R}$ -algebre, e denotato con $\mathbf{A}$ il prodotto tra classi di coomologia $[\omega_n]$ di $H_{\text{dR}}^*(X; \mathbf{R})$ indotto dal prodotto esterno $\wedge$ tra forme differenziali ($[\omega_p] \mathbf{A} [\omega_q] = [\omega_p \wedge \omega_q]$), il 3° *Teorema di de Rham* può enunciarsi dicendo che:

$$(6.1.2) \quad J^* \text{ è un isomorfismo di } \mathbf{R}\text{-algebre in cui si corrispondono i prodotti } \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{U}_a.$$

Vogliamo mostrare come possa ottenersi direttamente quest'ultimo risultato sulla base del Teorema (5.2.1) (una volta noto che J^* è un isomorfismo di spazi vettoriali graduati).

6.2. - Si tratta di provare che, assegnate due forme differenziali chiuse ω_p, ω_q su X , coincidono le due classi di coomologia di $H_{\text{alt}}^*(X; \mathbf{R})$:

$$J^*([\omega_p] \mathbf{A} [\omega_q]), \quad J^*[\omega_p] \mathbf{U}_a J^*[\omega_q],$$

cioè che il cociclo $J(\omega_p \wedge \omega_q) - J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \in Z_{\text{alt}}^{p+q}(X; \mathbf{R})$ è un cobordo.

Per dimostrare che così è di fatto, basta far vedere che tale $(p+q)$ -cociclo ha valore nullo su ogni ciclo $z_{p+q} \in Z_{p+q}(X; \mathbf{R})$, cioè che si annulla la differenza:

$$(6.2.1) \quad D(z_{p+q}) = \int_{z_{p+q}} \omega_p \wedge \omega_q - \langle z_{p+q}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \rangle.$$

Suddividendo baricentricamente il ciclo singolare z_{p+q} , non se ne altera la classe di omologia, perciò non muta il valore del secondo membro di (6.2.1), trattandosi

⁽¹⁾ Ci riferiamo per semplicità al caso di X compatta.

del valore di un cociclo. Possiamo perciò sostituire a z_{p+q} una sua suddivisione baricentrica iterata $z_{p+q}^{(r)}$, di ordine r comunque alto, e si ha anche:

$$(6.2.2) \quad D(z_{p+q}) = \int_{z_{p+q}^{(r)}} \omega_p \wedge \omega_q - \langle z_{p+q}^{(r)}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_q) \rangle.$$

Vedremo tuttavia che, per i nostri scopi, è conveniente sostituire alla suddivisione baricentrica di z_{p+q} un altro tipo di suddivisione che passiamo a descrivere.

Come nel caso della suddivisione baricentrica, basta definire la suddivisione per l' n -simpleso prototipo $\Delta_n (n = p + q)$, perchè essa resta poi indotta su ogni s_n singolare e quindi su $z_n = z_{p+q}$.

Indichiamo con $\square_n = \{(t^i) | 0 \leq t^i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ l' n -cubo unitario di E_n . $\square_n$ può decomorsi in $n!$ n -simplessi affini, tra cui Δ_n , per ciascuno dei quali, che indicheremo genericamente con $\tilde{\Delta}_n$, lo *scarto coordinato* vale 1: cioè, se $t \equiv (t^i) \in \tilde{\Delta}_n$, ogni t^i descrive l'intervallo $[0, 1]$. La decomposizione è ovviamente individuata per $n = 2$; ma già non lo è più per $n = 3$. Tuttavia, una volta fissato l'ordinamento delle coordinate $t^1, \dots, t^n$, si può individuare una di tali decomposizioni, che diremo *decomposizione simpliciale canonica* (per questo, e per altri dettagli, cfr. Appendice, n. 7).

Ciò posto, per ogni intero $r \geq 1$, suddividiamo $\square_n$ in r^n n -cubi omotetici di lato $1/r$, che indichiamo genericamente con $\tilde{\square}_n^{(1/r)}$. La decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$ si trasforma per omotetia in un'analoga decomposizione di $\tilde{\square}_n^{(1/r)}$, il cui generico n -simpleso, che indicheremo con $\tilde{\Delta}_n^{(1/r)}$, ha scarto coordinato $1/r$. Si riconosce che, con la scelta fatta della decomposizione canonica, gli $r^n n!$ simplessi $\tilde{\Delta}_n^{(1/r)}$ danno luogo ad una suddivisione simpliciale di $\square_n$, ed r^n opportuni di questi ad una suddivisione simpliciale di Δ_n , che denoteremo con $\text{Se}^{(r)} \Delta_n$, mentre diremo che $\text{Se}^{(r)}$ è l'operatore di *suddivisione simpliciale equilineare a scarto coordinato* $1/r$.

Come per le suddivisioni baricentriche l'operatore $\text{Se}^{(r)}$ si estende funtorialmente ad ogni s_n singolare e quindi ad una n -catena singolare, cosicchè possiamo supporre che nella (6.2.2) sia $z_{p+q}^{(r)} = \text{Se}^{(r)} z_{p+q}$.

6.3. — Orbene, fissato un s_n singolare di $z_n = z_{p+q}$, ognuno degli r^n simplessi singolari che costituiscono la catena $\text{Se}^{(r)} s_n$ può pensarsi ottenuto da s_n con un'opportuna affinità $h^{(e)}$ (n. 5.1), cioè sarà del tipo $s_n^{(e)} = s_n h^{(e)}$, ove il rapporto d'affinità vale $\varrho^n = 1/r^n$, cosicchè:

$$(6.3.1) \quad \varrho = \frac{1}{r}.$$

Corrispondentemente, $z_n^{(e)} = \text{Se}^{(r)} z_n$ si decompone in una combinazione lineare di catene del tipo $\text{Se}^{(r)} s_n$ e l'espressione a secondo membro di (6.2.1) nella stessa com-

binazione lineare di espressioni del tipo:

$$(6.3.2) \quad D(s_n, r) = \sum_{s_n^{(q)}} \left(\int_{s_n^{(q)}} \omega_p \wedge \omega_a - \langle s_n^{(q)}, J(\omega_p) \cup_a J(\omega_a) \rangle \right),$$

dove la somma s'intende estesa agli r^n semplici singolari $s_n^{(q)}$ che costituiscono $\text{Se}^{(r)} s_n$.

Ora, in base al Teorema (5.2.1), le differenze delle parti principali a secondo membro di (6.3.2) si annullano. Valutiamo i termini di ordine $o(\varrho^n)$.

A tale scopo, ricordando le equazioni (5.1.1) di $h^{(q)}$, si osservi preliminarmente che:

$$|\varrho c_j^i| = |(\varrho c_k^i \delta_j^k + t_0'^i) - (\varrho c_j^i 0 + t_0'^i)|$$

uguaglia lo scarto della coordinata t'^i lungo lo spigolo $h^{(q)}(U^0 U^j)$ di $\Delta_n^{(q)}$ ($= \tilde{\Delta}_n^{(1/r)}$, cfr. 6.3.1 e n. 6.2), onde risulta $\leq 1/r = \varrho$: Si ha dunque:

$$(6.3.3) \quad \sup |c_j^i| \leq 1 \quad (1).$$

Ciò premesso, riandando alla dimostrazione del Teorema (5.2.1), si ha che ciascuna differenza della somma a secondo membro della (6.3.2) è della forma:

$$[A + o(\varrho^n)] - \sum_{\lambda} [B_{\lambda} + o(\varrho^p)] [c_{\lambda} + o(\varrho^q)],$$

dove $A = \sum_{\lambda} B_{\lambda} C_{\lambda}$ ($A, B_{\lambda}, C_{\lambda}$ parti principali; λ variabile in corrispondenza agli addendi cui dà luogo $\cup_a$).

Quanto agli $o(\varrho^m)$ ($m = n, p, q$), essi soddisfano a disuguaglianze del tipo:

$$|o(\varrho^m)| \leq \varrho \sup |c_j^i| (\varrho \sup |c_j^i|)^m N_m,$$

essendo le costanti N_m indipendenti da r (ovvero da $\varrho = 1/r$) per ogni fissato s_n , come segue da disuguaglianze analoghe alle (5.1.5) operando poi le necessarie integrazioni, tenuto conto che (almeno per $m = p, q$) le analoghe della (5.1.4) che qui intervengono non consentono di usufruire della condizione (5.1.2) valida nel caso $m = n$.

Ora la (6.3.3) permette di ridurre le precedenti disuguaglianze alla forma:

$$(6.3.4) \quad |o(\varrho^m)| \leq \varrho^{m+1} N_m,$$

(1) La condizione di limitatezza di $|c_j^i|$, per ogni $h^{(q)}$ che interviene nella definizione della suddivisione $\text{Se}^{(r)}$ di Δ_n , essenziale per il seguito, non sarebbe soddisfatta usufruendo della suddivisione baricentrica in luogo della $\text{Se}^{(r)}$.

e quindi, tenuto conto che gli $s_n^{(q)}$ che appaiono nella somma di (6.3.2) sono in numero di $r^n = 1/q^n$, si ottiene:

$$(6.3.5) \quad |D(s_n, r)| \leq r^n q^{n+1} N = \frac{1}{r} N,$$

con N costante dipendente soltanto da ω_p, ω_q, s_n .

Infine, poichè il ciclo z_n è una combinazione lineare finita di simplessi singolari s_n , sussiste una disuguaglianza dello stesso tipo (6.3.5) per $D(z_{p+q})$, (6.2.2); si ha cioè:

$$|D(z_{p+q})| \leq \frac{1}{r} K,$$

con K costante positiva dipendente soltanto da $\omega_p, \omega_q, z_{p+q}$.

Poichè può assumersi r comunque grande, si conclude che $D(z_{p+q}) = 0$; come volevasi dimostrare.

7. - Appendice: suddivisione simpliciale equilineare.

7.1. - Sia $t \equiv (t^1, \dots, t^n)$ un vertice di $\square_n$, cosicchè ogni $t^i = 0, 1$. Considerando $(t^1 \dots t^n)$ come un intero $k \geq 0$ espresso con scrittura posizionale in base 2 *da destra a sinistra* ⁽¹⁾, si ottiene al crescere di k un *ordinamento canonico* dei vertici, indefinitamente prolungabile aumentando n . Si ha così per es.: $0 = (0), 1 = (1); 2 = (01), 3 = (11); 4 = (001), 5 = (101), 6 = (011), 7 = (111); \dots$ e $U^0 = 0, U^1 = 1, U^2 = 2, U^3 = 4, \dots, U^n = 2^{n-1}, \dots$

Per definire una *decomposizione simpliciale canonica* di $\square_n$ (comprendente $\Delta_n = U^0 U^1 \dots U^n$), procediamo per induzione. Per i primi valori di n assumiamo (denotando i vari $\tilde{\Delta}_n$ ordinati della decomposizione con i numeri d'ordine dei vertici): $\square_1 = \Delta_1 = 01$; $\square_2 = 012 \cup 123$; $\square_3 = 0124 \cup 1245 \cup 2456 \cup 1235 \cup 2356 \cup 3567$; ...

In generale, pongasi $\square_{n-1}^{\hat{n}} = \square_{n-1} \cap \{t^n = 0\} = \square_{n-1}$, ${}'\square_{n-1}^{\hat{n}} = \square_n \cap \{t^n = 1\}$. Sia $\tilde{\Delta}_{n-1} = X^0 X^1 \dots X^{n-1} \subset \square_{n-1}$ un simpleso della decomposizione simpliciale canonica di $\square_{n-1}$, essendo $X^0 < X^1 < \dots < X^{n-1}$ ordinati secondo l'ordinamento canonico. Con la traslazione $Y^i = X^i + \overrightarrow{U^0 U^n}$, $\tilde{\Delta}_{n-1}$ si muta nel simpleso ${}'\tilde{\Delta}_{n-1} = Y^0 Y^1 \dots Y^{n-1} \subset {}'\square_{n-1}^{\hat{n}}$ e risulta ovviamente $Y^0 < Y^1 < \dots < Y^{n-1}$. Ebbene il prisma simpliciale che ha per basi $\tilde{\Delta}_{n-1}, {}'\tilde{\Delta}_{n-1}$ si decompone negli n n -simplessi:

$$(7.1.1) \quad \tilde{\Delta}_n = X^i \dots X^{n-1} Y^0 \dots Y^i \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

i cui vertici appaiono ordinati, giacchè $X^{n-1} < Y^0$ (essendo le coordinate n -me dei vertici: $t^n(X^{n-1}) = 0, t^n(Y^0) = 1$).

⁽¹⁾ Cioè opposta a quella ordinariamente in uso. Si noti che, nella scrittura posizionale considerata, potrà sempre tralasciarsi una successione di soli zeri a destra.

Al variare degli $(n-1)!$ $\tilde{J}_{n-1}$ della decomposizione di $\square_{n-1}$ si ottengono così $n!$ $\tilde{J}_n$ che assumiamo costituire la decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$.

7.2. – Stabiliamo alcune proprietà della decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$.

a) Ogni $\tilde{J}_n$ ha scarto coordinato uguale ad 1 (cfr. n. 6.2).

È ovvio per induzione, giacchè per la coordinata t^n ciò risulta palesemente dalla (7.1.1).

b) Il volume di ogni $\tilde{J}_n$ vale $1/n!$.

Posto $t^h(X^j) = t_i^h$ ($h=1, \dots, n-1$; $j=0, \dots, n-1$), si ha da (7.1.1), con scrittura abbreviata per i determinanti:

$$\text{vol } \tilde{J}_n = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_i^h & \dots & t_{n-1}^h & t_0^h & \dots & t_i^h \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_0^h & \dots & t_{n-1}^h \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{n} \text{vol } \tilde{J}_{n-1};$$

onde b) segue subito per induzione.

Poniamo $\sigma(X) = \sum_i t^i(X)$, con $t^i(X)$ coordinate del punto X . Si ha allora:

c) Se $\tilde{J}_n = X^0 \dots X^n$ (con $X^0 < \dots < X^n$), risulta: $\sigma(X^0) < \sigma(X^1) < \dots < \sigma(X^n)$ e $\sigma(X^n) - \sigma(X^0) = 1$.

Consegue per induzione dalla (7.1.1). Invero, applicando c) a $\tilde{J}_{n-1} = X_0 \dots X^{n-1}$, si ha $\sigma(X^0) < \dots < \sigma(X^{n-1}) = \sigma(X^0) + 1$. Quindi $\sigma(X^i) < \dots < \sigma(X^{n-1})$, $\sigma(Y^0) = \sigma(X^0) + 1 < \sigma(Y^1) < \dots < \sigma(Y^i) = \sigma(X^i) + 1$ e $\sigma(X^{n-1}) = \sigma(Y^0)$; il che prova c) per $\tilde{J}_n$.

d) La decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$ subordina la decomposizione simpliciale canonica su ogni faccia $\square_{n-1}^{\hat{i}} = \square_n \cap \{t^i = 0\}$, relativamente all'ordinamento delle coordinate $t^1, \dots, \hat{t}^i, \dots, t^n$.

Per $i=n$ ciò discende dalla stessa costruzione induttiva dei $\tilde{J}_n$ data dalla (7.1.1).

Per $i \neq n$, si osservi che, limitatamente ai vertici di $\square_{n-1}^{\hat{i}}$, l'ordinamento canonico sopra definito coincide coll'analogo limitato alla considerazione delle coordinate $t^1, \dots, \hat{t}^i, \dots, t^n$ (in quanto ciò corrisponde a sopprimere le espressioni numeriche in base 2 con l' i -ma cifra uguale ad 1). Ne segue che la solita costruzione induttiva della decomposizione canonica, limitata ai vertici di $\square_{n-1}^{\hat{i}}$, dà gli $(n-1)$ -simplessi che appartengono a $\square_{n-1}^{\hat{i}}$ e sono facce di n -simplessi della decomposizione di $\square_n$.

e) La decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$ subordina decomposizioni simpliciali congruenti, mediante la traslazione $\overrightarrow{U^0 U^i}$, sulle coppie di facce $\square_{n-1}^{\hat{i}} = \square_n \cap \{t^i = 0\}$, $\square_{n-1}^{\hat{i}} = \square_n \cap \{t^i = 1\}$ ($i=1, \dots, n$).

Per $i = n$ ciò è implicito nella costruzione induttiva fornita dalla (7.1.1), guardando agli $(n-1)$ -simplessi $X^0 \dots X^{n-1}$, $Y^0 \dots Y^{n-1}$ facce risp. degli n -simplessi $X^0 \dots X^{n-1} Y^0$, $X^{n-1} Y^0 \dots Y^{n-1}$.

Per $i \neq n$ si tenga conto di d); quindi si consideri un $(n-1)$ -simpleso della decomposizione di $\square_{n-1}^i$ e l' $(n-1)$ -simpleso di $\square_{n-1}^i$ che si ottiene da questo mediante la traslazione $\overrightarrow{U^0 U^i}$. Il prisma che ha per basi i due $(n-1)$ -simplessi è di necessità composto con $\tilde{A}_n$ della decomposizione di $\square_n$, in base ad a); onde i due $(n-1)$ -simplessi sono facce di n -simplessi che decompongono il prisma.

7.3. — Ciò premesso, gli iperpiani $t^i = 1/r, 2/r, \dots, (r-1)/r$ ($i = 1, \dots, n$; r intero ≥ 1) suddividono $\square_n$ in r^n cubi omotetici $\tilde{\square}_n^{(1/r)}$ di lato $1/r$, e la decomposizione simpliciale canonica di $\square_n$ si trasporta a ciascun $\tilde{\square}_n^{(1/r)}$. Tenuto conto di a), e) (n. 7.2), si ottiene così una decomposizione simpliciale di $\square_n$ con $n! r^n$ n -simplessi di scarto $1/r$, il cui generico indicheremo con $\tilde{A}_n^{(1/r)}$. Proviamo di più che:

f) *I $\tilde{A}_n^{(1/r)}$ contenuti in Δ_n sono r^n e ne determinano una decomposizione simpliciale.*

Poichè tutti gli $n! r^n \tilde{A}_n^{(1/r)}$ hanno ugual volume (n. 7.2, b) e riempiono $\square_n$, basta mostrare che nessuno spigolo di un $\tilde{A}_n^{(1/r)}$ attraversa la faccia $\Delta_{n-1}^{\hat{0}} = U^1 \dots U^n$ di Δ_n .

Sia $\tilde{A}_n^{(1/r)} = x^0 x^1 \dots x^n$ trasformato omotetico di $\Delta_n = X^0 X^1 \dots X^n$. Poichè i punti $t \in \Delta_{n-1}^{\hat{0}}$ soddisfano alla $\sigma(t) - 1 = 0$, per aversi attraversamento l'espressione $\sigma(x) - 1$ dovrebbe cambiar segno per x coincidente con due vertici x^h, x^k di $\tilde{A}_n^{(1/r)}$. Ma, in base a c) (n. 7.2), si ha:

$$(7.3.1) \quad |(\sigma(x^h) - 1) - (\sigma(x^k) - 1)| = \frac{1}{r} |\sigma(X^h) - \sigma(X^k)| \leq \frac{1}{r},$$

onde l'attraversamento non si ha, giacchè questo implicherebbe che il primo membro di (7.3.1) (il quale è un multiplo intero di $1/r$) fosse $\geq 2/r$.

Diremo che la ottenuta decomposizione simpliciale di Δ_n costituisce la *suddivisione simpliciale equilineare di ordine r* di Δ_n , poichè i $\tilde{A}_n^{(1/r)}$ della suddivisione hanno uguale scarto coordinato $1/r$ (proprietà che, come si è visto, è alla origine della disuguaglianza 6.3.3).

Denotata con $\text{Se}^{(r)}$ tal suddivisione, stabiliamo che:

g) *La suddivisione $\text{Se}^{(r)}$ di Δ_n subordina sulle facce $\Delta_{n-1}^{\hat{0}} = U^1 \dots U^n$ e $\Delta_{n-1}^{\hat{i}} = U^0 \dots \widehat{U^i} \dots U^n$ ($i = 1, \dots, n$) di Δ_n , le suddivisioni trasformate mediante le affinità risp. $\varphi^{(0)}: U^0 \dots U^{n-1} \rightarrow U^1 \dots U^n$ e $\varphi^{(i)}: U^0 \dots U^{n-1} \rightarrow U^0 \dots \widehat{U^i} \dots U^n$ della suddivisione $\text{Se}^{(r)}$ di Δ_{n-1} .*

Per quanto concerne le facce $\Delta_{n-1}^{\hat{i}}$ ($i = 1, \dots, n$) la g) è immediata conseguenza di d), tenuto conto che $\varphi^{(i)}$ porta l'inclusione $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}^{\hat{n}} \subset \square_{n-1} = \square_{n-1}^{\hat{n}}$ nella inclusione $\Delta_{n-1}^{\hat{i}} \subset \square_{n-1}^{\hat{i}}$.

Per il caso della faccia $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$, sia $x^i \dots x^{n-1} y^0 \dots y^i = \tilde{A}_n^{(1/r)}$ un n -simpleso della decomposizione di Δ_n trasformato omotetico di $X^i \dots X^{n-1} Y^0 \dots Y^i = \tilde{A}_n$, a sua volta costruito secondo il procedimento induttivo (7.1.1). Se un $(n-1)$ -simpleso $\tilde{A}_{n-1}^{(1/r)}$ faccia di $\tilde{A}_n^{(1/r)}$ è contenuto in $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$, l' $(n-1)$ -simpleso $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}}$ faccia corrispondente di $\tilde{A}_n$ è parallelo a $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$, il che implica $\sigma(Z) = \text{cost.}$ per ogni vertice Z di $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}}$.

Tenuto conto di c) si ha allora $\sigma(X^i) + 1 = \sigma(X^{i+1}) = \dots = \sigma(X^n) = \sigma(Y^0) = \dots = \sigma(Y^i)$, ovvero $\sigma(X^i) = \dots = \sigma(X^{n-1}) = \sigma(Y^0) = \dots = \sigma(Y^{i-1}) = \sigma(Y^i) - 1$, e quindi anche: $\sigma(x^i) + 1/r = \sigma(x^{i+1}) = \dots = \sigma(y^i) = 1$ ovvero $1 = \sigma(x^i) = \dots = \sigma(y^{i-1}) = \sigma(y^i) - 1/r$. Poichè si è supposto $\tilde{A}_n^{(1/r)} \subset \Delta_n$ la prima eventualità è quella valida, e risulta $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}(1/r)} = x^{i+1} \dots x^{n-1} y^0 \dots y^i$, omotetico a $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}} = X^{i+1} \dots X^{n-1} Y^0 \dots Y^i$. La proiezione ortogonale su $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}^{\hat{0}}$ di $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}(1/r)}$ è omotetica a $X^{i+1} \dots X^{n-1} X^0 \dots X^i$. Quindi, *a prescindere dall'ordinamento*, la suddivisione $\text{Se}^{(r)}$ subordina su $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$ una suddivisione che corrisponde, nell'affinità data dalla proiezione ortogonale, a quella subordinata da $\text{Se}^{(r)}$ su Δ_{n-1} , giacchè quest'ultima è proprio offerta dagli $(n-1)$ -simplessi omotetici a $X^0 \dots X^{n-1}$ in virtù dell'induzione (7.1.1).

Per precisare la questione dell'ordinamento, pongasi $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}(1/r)} = z^0 \dots z^{n-1} = x^{i+1} \dots x^{n-1} y^0 \dots y^i$, $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}} = Z^0 \dots Z^n = X^{i+1} \dots X^{n-1} Y^0 \dots Y^i$, e si consideri la proiezione ortogonale di $\tilde{A}_{n-1}^{\hat{0}(1/r)}$ su $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$, che è data dall'affinità di faccia $U^1 \dots U^n \rightarrow U^0 U^2 \dots U^n$. Sia $\bar{z}^0 \dots \bar{z}^{n-1}$ l' $(n-1)$ -simpleso di $\Delta_{n-1}^{\hat{0}}$ così ottenuto e $\bar{Z}^0 \dots \bar{Z}^{n-1} \subset \square_{n-1}^{\hat{0}}$ il suo omotetico, anch'esso ottenuto per proiezione ortogonale. Siffatta proiezione fa corrispondere gli ordinamenti canonici $z^0 < \dots < z^{n-1}$ e $\bar{z}^0 < \dots < \bar{z}^{n-1}$. Infatti si passa da Z^k a $\bar{Z}^k$ riducendo da 1 a 0 (se già non è 0) la coordinata $t^1(Z^k)$, il che implica che $\bar{Z}^k$ precede di un posto (o coincide con) Z^k nell'ordinamento. D'altronde, quando $\bar{Z}^k \neq Z^k$, siccome $\sigma(Z) = \text{cost.}$, non può aversi $\bar{Z}^k = Z^{k-1} (= \bar{Z}^{k-1})$, cosicchè resta provato che i due ordinamenti coincidono e così pure quelli corrispondenti di $z^0 < \dots < z^{n-1}$ e $\bar{z}^0 < \dots < \bar{z}^{n-1}$.

In conclusione la suddivisione di $\Delta_{n-1}^{\hat{0}} = U^1 \dots U^n$ corrisponde per affinità, anche nell'ordinamento dei simplessi, a quella di $\Delta_{n-1}^{\hat{0}} = U^0 U^2 \dots U^n$ e quest'ultima (come risulta dalla prima parte della dimostrazione di g)) a quella di $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}^{\hat{0}} = U^0 U^1 \dots U^{n-1}$. Ciò completa la dimostrazione di g).

7.4. - Denotiamo ora, per brevità, con lo stesso simbolo $\tilde{A}_n^{(1/r)} = x^0 \dots x^n$ l' n -simpleso singolare affine costituito dall'affinità: $\Delta_n = U^0 \dots U^n \rightarrow x^0 \dots x^n$.

Procedendo come nel caso delle suddivisioni baricentriche ⁽¹⁾, all' n -simpleso singolare affine identità, $1: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, possiamo allora associare l' n -catena singolare affine $\sum \pm \tilde{A}_n^{(1/r)}$ scegliendo i segni in modo che ciascun $\pm \tilde{A}_n^{(1/r)}$ (pensato come sotto-spazio orientato di Δ_n) venga ad avere orientazione coerente con quella definita dall'ordinamento di Δ_n . Scriveremo: $\text{Se}_n^{(r)} \Delta_n = \sum \pm \tilde{A}_n^{(1/r)}$.

L'operatore $\text{Se}^{(r)}$ può considerarsi per le varie dimensioni n , nonchè estendersi linearmente e funtorialmente. Tenuto conto del n. 7.3, g), si ha subito che $\text{Se}^{(r)} =$

⁽¹⁾ Cfr. p. es. [1], p. 65.

$\{\text{Se}_n^{(r)}\}$ soddisfa alla: $\partial \text{Se}_n^{(r)} \Delta_n = \text{Se}_{n-1}^{(r)} \partial \Delta_n$, e quindi analogamente per un semplice o una catena singolari qualunque. $\text{Se}^{(r)}$ fornisce dunque una *rappresentazione di catene* $\text{Se}^{(r)}: S(X) \rightarrow S(X)$.

Procedendo similmente al caso delle suddivisioni baricentriche, si costruisce un *operatore d'omotopia* $\text{Te}^{(r)} = \{\text{Te}_n^{(r)}\}: S(X) \rightarrow S(X)$, anch'esso con carattere funtoriale, definito induttivamente rispetto ad n , a partire dalla:

$$\text{Te}_n^{(r)} \Delta_n = U^0(\Delta_n - \text{Se}_n^{(r)} \Delta_n - \text{Te}_{n-1}^{(r)} \partial \Delta_n)$$

e con $\text{Te}_0^{(r)} = 0$.

Si verifica subito che $1 - \text{Se}^{(r)} = \partial \text{Te}^{(r)} + \text{Te}^{(r)} \partial$, cioè: $\text{Se}^{(r)} \simeq 1$. Ne segue che $\text{Se}^{(r)}$ muta cicli singolari in cicli singolari omologhi (ciò di cui si è tenuto conto nel passare da (6.2.1) a (6.2.2) per $z_{x+a}^{(r)} = \text{Se}^{(r)} z_{x+a}$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. J. GREENBERG, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Inc., New York (1967).
- [2] P. J. HILTON-S. WYLIE, *Homology Theory*, Cambridge University Press (1960).
- [3] E. MARTINELLI, *Omologia e coomologia singolari, orientata e alternante*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **53** (1972), pp. 264-274.