Sur la représentation des charges périodiques et quelques de ses applications (*).

W. Kecs (Petroşani) - P. P. Teodorescu (Bucarest)

A Dario Graffi nel suo 70° compleanno

Résumé. – *Aprés avoir introduit les distributions périodiques, on arrive au développement en série de Fourier des charges concentrées (force concentrée, moment dirigé concentré et dipôle linéaire) périodiques, dans l'espace des distributions. En utilisant ces résultats, on peut étudier le demiplan élastique soumis à de telles charges sur la ligne de séparation.*

1. – Introduction.

En mécanique on a beaucoup à faire avec des charges périodiques, qui présentent une grande importance tant du point de vue théorique que du point de vue pratique. Les développements en série de Fourier constituent souvent une représentation convenable pour de tels cas de chargement.

Mais on peut être quelques fois obligé faire face à certaines difficultés, dues au fait que la série de Fourier ne converge pas toujours vers la fonction à représenter, par exemple dans le cas des charges concentrées périodiques. Une théorie générale et unitaire qui permet de dépasser ces difficultés est réalisée par le développement en série de Fourier des charges périodiques dans l'espace des distributions; dans cet espace, toute série de Fourier, correspondante à une distribution périodique, converge vers cette distribution. C'est ainsi que le problème de la convergence ne se pose plus et nous avons la possibilité de représenter par des séries de Fourier tant des charges exprimées par des fonctions localement intégrables que des charges exprimées par des distributions périodiques.

Pour pouvoir mettre en évidence les propriétés des séries de Fourier dans l'espace des distributions, on étudie, dans ce qui va suivre, la dépendence entre les fonctions définies sur un cercle et les fonctions périodiques correspondantes sur la droite. On va représenter ainsi quelques charges périodiques concentrées des plus importantes et on va appliquer ces résultats à l'étude du demiplan élastique soumis à des charges périodiques sur la ligne de séparation.

(*) Entrata in Redazione il 20 maggio 1975.

2. – Distributions périodiques.

Soit Γ un cercle de longueur T et dont le centre est dans l'origine O et soit $\boldsymbol{f}(M)$, $M\in\Gamma$, une fonction vectorielle définie sur Γ; on va faire correspondre à cette fonction la fonction vectorielle périodique [1] $\tilde{\boldsymbol{f}}(x)$, de période T, sur l'axe Ox. À la fonction fondamentale $\varphi(x)\in K(R)$ (espace des fonctions fondamentales de classe C^∞, à support compact) on va associer une fonction périodique de période T, notamment

$$(2.1)\qquad \tilde{\Phi}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+nT)\,,\qquad n\in Z\,;$$

cette fonction est évidemment aussi une fonction fondamentale, donc

$$\tilde{\Phi}(x)\in K(R)\,.$$

Entre la fonction $\boldsymbol{f}(s)$ définie sur Γ et la fonction périodique $\tilde{\boldsymbol{f}}(x)$ définie sur R il existe la relation

$$(2.2)\qquad \int_\Gamma \boldsymbol{f}(s)\,\Phi(s)\,ds=\int_R \tilde{\boldsymbol{f}}(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^T \boldsymbol{f}(x)\,\tilde{\Phi}(x)\,dx\,,$$

où $\Phi(s)$ est une fonction de classe $C^\infty(\Gamma)$, $\Phi(s)\in K(\Gamma)$.

On a

$$(2.3)\qquad \boldsymbol{f}(s)=\tilde{\boldsymbol{f}}(x)\,,\qquad \Phi(s)=\tilde{\Phi}(x)\,,$$

parce que $x, s\in[0, T]$.

Définition. – La distribution $F(x)\in K'(R)$ est périodique de période T si, pour n'importe quel $\varphi(x)\in K(R)$, on a

$$(2.4)\qquad \big(F(x-T),\varphi(x)\big)=\big(F(x),\varphi(x)\big)\,.$$

Tenant compte de cette définition et de la relation (2.2), la correspondance entre la distribution $\boldsymbol{f}(s)$ sur Γ et la distribution périodique $\tilde{\boldsymbol{f}}(x)$ sur R est donneé par la relation

$$(2.2')\qquad (\tilde{\boldsymbol{f}}(x),\varphi(x))=(\boldsymbol{f}(s),\Phi(s))\,,$$

qui constitue une généralisation de la relation (2.2).

Soit $\delta(s)\in K'(\Gamma)$ la distribution de Dirac concentrée dans l'origine de l'arc s sur le cercle Γ. À cette distribution on va faire correspondre la distribution périodique

[1] Le « tilde » met en évidence le fait que la fonction est périodique.

$\tilde{\delta}(x)$ sur R, tel qu'on ait la relation

$$(\delta(s), \Phi(s)) = (\tilde{\delta}(x), \varphi(x)) = \Phi(0) . \tag{2.5}$$

En observant que

$$\Phi(0) = \tilde{\Phi}(0) ,$$

conformément à (2.1), on a

$$\tilde{\Phi}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) , \qquad n \in \boldsymbol{Z} ; \tag{2.6}$$

donc

$$(\tilde{\delta}(x), \varphi(x)) = \tilde{\Phi}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT), \varphi(x)\Big) , \qquad n \in \boldsymbol{Z} . \tag{2.5$'$}$$

On obtient ainsi

$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) , \qquad n \in \boldsymbol{Z} . \tag{2.7}$$

Mais on peut écrire (²)

$$\delta(\sin \omega x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) , \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} , \ n \in \boldsymbol{Z} ; \tag{2.8}$$

on observe ainsi que la distribution composée $\delta(\sin \omega x)$ est une distribution périodique, de période T, pour laquelle

$$\tilde{\delta}(x) = \delta(\sin \omega x) . \tag{2.8$'$}$$

On va encore observer que la distribution primitive de $\tilde{\delta}(x)$ peut être notée avec $\tilde{\theta}(x)$; évidemment, la distribution $\tilde{\theta}(x)$ est aussi une distribution de période T, pour laquelle on a

$$\tilde{\theta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(x - nT) , \qquad n \in \boldsymbol{Z} , \tag{2.7$'$}$$

qui satisfait à la relation

$$\tilde{\theta}'(x) = \tilde{\delta}(x) \tag{2.9}$$

et qui correspond à la distribution de Heaviside.

(²) Voir [1], p. 160.

De même, pour la distribution $\delta'(x)$, obtenue par dérivation, on a

$$\tilde{\delta}'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - nT), \qquad n \in Z. \tag{2.10}$$

Soit maintenant $\tilde{f}(x)$ une distribution périodique, de période T, sur R. Les coefficients de la série de Fourier correspondante sont donnés par la relation

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T}(\tilde{f}(x), \exp[-in\omega x]), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \; n \in Z, \tag{2.11}$$

et la série de Fourier sera de la forme

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{f}) \exp[in\omega x], \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \; n \in Z. \tag{2.11'}$$

On peut faire une étude analogue pour des distributions périodiques $\tilde{f}(x) \in K'(R^n)$, $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; en particulier, on peut considérer des distributions vectorielles dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, utiles pour leur applications en mécanique.

3. – Charges concentrées périodiques.

Nous allons utiliser les résultats ci-dessus pour la représentation de certaines charges concentrées périodiques usuelles. Par exemple, pour une force concentrée périodique, de période T, actionnant dans les points $x = nT$, $n \in Z$, et ayant l'intensité $|\boldsymbol{F}|$, la charge équivalente s'exprime sous la forme (3)

$$\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{F}\delta(x). \tag{3.1}$$

Les coefficients de Fourier seront donnés par

$$\boldsymbol{c}_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T}(\boldsymbol{F}\tilde{\delta}(x), \exp[-in\omega x]) = \frac{1}{T}\boldsymbol{F}, \qquad n \in Z; \tag{3.1'}$$

en conséquence, la distribution concentrée périodique (3.1) peut être écrite sous la forme

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\boldsymbol{F} \exp[in\omega x], \qquad n \in Z, \tag{3.2}$$

(3) Voir [1], p. 256.

ou encore sous la forme

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}\delta(x - nT)\,, \qquad n \in \boldsymbol{Z}\,. \tag{3.2'}$$

Un moment concentré dirigé, de grandeur M, actionnant dans le point O, peut être représenté par la charge équivalente (4)

$$\boldsymbol{Q}(x) = -\frac{M\boldsymbol{F}_0}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{F}_0|}\frac{\partial}{\partial u}\delta(x)\,, \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{F}_0$ est le verseur des forces qui constituent le couple et $\boldsymbol{u}$ est le verseur de la direction qui correspond au processus de passage à la limite et où on a indiqué par «$\times$» le produit vectoriel.

En notant par $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ la distribution correspondante aux moments concentrés dirigés périodiques, de période T, on obtient les développements en série

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{Q}}(x) &= -\frac{M\boldsymbol{F}_0}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{F}_0|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta'(x-nT)\\ &= -\frac{M\boldsymbol{F}_0}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{F}_0|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi i n}{T^2}\exp[in\omega x]\,, \qquad n\in\boldsymbol{Z}\,,\end{aligned} \tag{3.4}$$

où on a admis que $\boldsymbol{u}$ est le verseur de l'axe Ox.

D'une manière analogue, un moment du type dipôle linéaire, de grandeur D, actionnant dans le point O, est représenté par la charge équivalente (5)

$$\boldsymbol{Q}(x) = -D\boldsymbol{F}_0\frac{\partial}{\partial u}\delta(x)\,, \tag{3.5}$$

où F_0 est le verseur des forces qui constituent le dipôle et où $\boldsymbol{u}$ est le verseur de la direction qui correspond au passage à la limite. On admet que les forces composantes conduisent à un éloignement de leurs points d'application, ainsi que le dipôle soit positif.

La distribution périodique correspondante, de période T, sera donnée par

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}(x) = -D\boldsymbol{F}_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta'(x-nT)\,, \qquad n\in\boldsymbol{Z}\,, \tag{3.6}$$

en admettant que $\boldsymbol{u}$ est le verseur de l'axe Ox.

(4) Voir [1], p. 274.
(5) Voir [1], p. 293.

4. – Le demiplan élastique.

Soit le demiplan élastique $y \geqslant 0$, actionné par la charge périodique tangentielle $\tilde{p}(x)$ et par la charge périodique normale $\tilde{q}(x)$ sur la ligne de séparation; ces charges sont considérées positives si elles sont dirigées dans la direction positive des axes de coordonnées. On admet que le corps est isotrope, homogène et linéairement élastique, étant soumis à des petites déformations et rotations dans le cas d'un état de déformation plane.

Les tensions doivent vérifier les équations différentielles aux dérivées partielles (en absence des forces volumiques)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 , \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 , \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} , \tag{4.2}$$

les conditions sur la ligne de séparation

$$\lim_{y \to +0} \tau_{yx} = -\tilde{p}(x) , \qquad \lim_{y \to +0} \sigma_y = -\tilde{q}(x) \tag{4.3}$$

et les conditions de régularité

$$\lim_{y \to \infty} \sigma_x = \lim_{y \to \infty} \sigma_y = \lim_{y \to \infty} \tau_{xy} = 0 . \tag{4.3'}$$

La matrice solution fondamentale dans le sens de la théorie des distributions du système d'équations (4.1), (4.2) avec les conditions aux limites (4.3), (4.3') sera de la forme

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{11}(x, y) & u_{12}(x, y) \\ u_{21}(x, y) & u_{22}(x, y) \\ u_{31}(x, y) & u_{32}(x, y) \end{Bmatrix} ; \tag{4.4}$$

ses composantes doivent vérifier les équations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial u_{31}}{\partial y} = 0 , \\ &\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

$$\Delta(u_{11} + u_{21}) = 0 , \tag{4.6}$$

de même que

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_{12}}{\partial x}+\frac{\partial u_{32}}{\partial y}=0\,,\\ &\frac{\partial u_{32}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}=0\,,\end{aligned}\right. \tag{4.5'}$$

$$\Delta(u_{12}+u_{22})=0\,, \tag{4.6'}$$

les conditions sur la ligne de séparation

$$\lim_{y\to+0}\{U\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta(x) \\ -\delta(x) & 0 \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

et les conditions de régularité

$$\lim_{y\to+\infty}\{U\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.7'}$$

On aura (⁶)

$$\left\{\begin{aligned} u_{11}&=-\frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\,,\\ u_{22}&=-\frac{2}{\pi}\,\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\,,\end{aligned}\right. \tag{4.8}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_{21}=u_{32}&=-\frac{2}{\pi}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\\ u_{31}=u_{12}&=-\frac{2}{\pi}\,\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,.\end{aligned}\right. \tag{4.8'}$$

En introduisant les matrices

$$\{\sigma\}\equiv\begin{Bmatrix} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy}(x,y) \end{Bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\{\tilde{Q}\}\equiv\begin{Bmatrix} \tilde{p}(x) \\ \tilde{q}(x) \end{Bmatrix}, \tag{4.9'}$$

(⁶) Voir [1], p. 420.

on peut exprimer l'état de tension dans le demiplan élastique sous la forme

$$\{\sigma\} = \{U\} * \{\tilde{\boldsymbol{Q}}\}, \tag{4.10}$$

à l'aide du produit de convolution, en admettant que ce produit existe.

Soit $\tilde{p}(x)$ et $\tilde{q}(x)$ des distributions périodiques, de période T, respectivement T'; on peut utiliser les représentations de Fourier

$$\begin{cases} \tilde{p}(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{p}) \exp[in\omega x], & \omega = \dfrac{2\pi}{T}, \quad n \in Z, \\ \tilde{q}(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\tilde{q}) \exp[in\omega' x], & \omega' = \dfrac{2\pi}{T'}, \quad n \in Z, \end{cases} \tag{4.11}$$

les coefficients de Fourier correspondants étant donnés par

$$\begin{cases} c_n(\tilde{p}) = \dfrac{1}{T}(\tilde{p}(x), \exp[-in\omega x]), & n \in Z, \\ c_n(\tilde{q}) = \dfrac{1}{T}(\tilde{q}(x), \exp[-in\omega' x]), & n \in Z. \end{cases} \tag{4.11'}$$

La matrice $\{\tilde{\boldsymbol{Q}}\}$ qui correspond aux charges périodiques actionnant sur la ligne de séparation sera de la forme

$$\{\tilde{Q}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} c_n(\tilde{p}) \exp[in\omega x] \\ c_n(\tilde{q}) \exp[in\omega' x] \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z; \tag{4.12}$$

les tensions qui apparaîssent dans le demiplan élastique vont être exprimées par le produit de convolution

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{U\} * \begin{Bmatrix} c_n(\tilde{p}) \exp[in\omega x] \\ c_n(\tilde{q}) \exp[in\omega' x] \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z. \tag{4.13}$$

En particulier, si les charges $\tilde{p}(x)$ et $\tilde{q}(x)$ ont la même période T, on peut écrire la solution (4.13) sous la forme d'une série de Fourier matricielle

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n(\sigma)\} \exp[in\omega x], \qquad n \in Z, \tag{4.14}$$

où

$$\{c_n(\sigma)\} = \{U\} * \{c_n(\tilde{\boldsymbol{Q}})\}, \qquad n \in Z, \tag{4.15}$$

avec

$$\{c_n(\tilde{Q})\} \equiv \begin{Bmatrix} c_n(\tilde{p}) \\ c_n(\tilde{q}) \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z. \tag{4.15'}$$

5. – Cas particuliers de chargement.

Soit

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}(x) = \boldsymbol{F}\tilde{\delta}(x) \tag{5.1}$$

une force concentrée périodique, de période T, actionnant sur la frontière à distance finie du demiplan élastique. En utilisant les résultats antérieurs, on peut écrire

$$\{c_n(\tilde{Q})\} = \begin{Bmatrix} F_x c_n(\tilde{\delta}) \\ F_y c_n(\tilde{\delta}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{T} F_x \\ \dfrac{1}{T} F_y \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z\,; \tag{5.2}$$

donc

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{U\} * \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{T} F_x \\ \dfrac{1}{T} F_y \end{Bmatrix} \exp[in\omega x]\,, \qquad n \in Z\,, \tag{5.3}$$

ou encore

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{U\} * \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \delta(x - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{U\} * \begin{Bmatrix} F_x \delta(x - nT) \\ F_y \delta(x - nT) \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z\,. \tag{5.3'}$$

En explicitant, on obtient

$$\begin{cases} \sigma_x = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x u_{11}(x - nT, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y u_{12}(x - nT, y)\,, & n \in Z\,, \\ \sigma_y = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x u_{21}(x - nT, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y u_{22}(x - nT, y)\,, & n \in Z\,, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x u_{31}(x - nT, y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_y u_{32}(x - nT, y)\,, \qquad n \in Z\,. \tag{5.4'}$$

Admettons maintenant que le demiplan élastique est actionné sur la ligne de séparation par des moments concentrés du type dipôle linéaire périodiques, de période T, exprimés par (3.6). L'état de tension sera donné par

$$\{\sigma\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{U\} * \begin{Bmatrix} -D\delta'(x - nT) \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad n \in Z\,; \tag{5.5}$$

en explicitant, on a

$$(5.6)\qquad \begin{cases} \sigma_x = -\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Du'_{11}(x-nT,\, y)\,, & n \in Z\,, \\ \sigma_y = -\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Du'_{21}(x-nT,\, y)\,, & n \in Z\,, \end{cases}$$

$$(5.6')\qquad \tau_{xy} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} Du'_{31}(x-nT,\, y)\,, \qquad n \in Z\,,$$

les dérivées par rapport à x étant calculées dans le sens de la théorie des distributions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. KECS - P. P. TEODORESCU, *Applications of the theory of distributions in mechanics*, Edit. Academiei, Bucarest; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent (1974).

[2] L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann éd., Paris (1961).