

# Etude de l'écoulement autour d'un dièdre pour un gaz à quatre vitesses (\*).

HENRI CABANNES (Paris) (\*\*)

---

A DARIO GRAFFI nel suo 70° compleanno

**Résumé.** – *Dans ce travail nous considérons, en théorie cinétique, un gaz dont les molécules ne peuvent prendre pour vitesse que l'un des quatre vecteurs obtenus en joignant l'origine de l'espace des vitesses aux sommets d'un carré. Pour ce gaz les équations des ondes de choc sont établies et étudiées; l'application du critère de Lax ou du théorème H de Boltzmann permet de démontrer la stabilité de tous les chocs supersoniques et de certains chocs subsoniques. Les résultats obtenus sont appliqués à l'étude de l'écoulement plan stationnaire autour d'un dièdre; malgré l'extrême simplification du schéma adopté pour représenter le gaz, la plupart des conclusions sont analogues à celles que l'on obtient en dynamique des gaz.*

**Summary.** – *In this work we consider, in kinetic theory, a gas the molecules of which can have as velocity only one of the four vectors obtained by joining the origin of the velocity space to the vertex of a square. For this gas the equations of shock waves are derived and studied; the application of the Lax criterion or of the Boltzmann's H-theorem prove the stability of all supersonic shocks and of some subsonic shocks. The results obtained are applied to the study of the stationary plane flow around a wedge; in spite of the extreme simplicity of the scheme adopted for representing the gas the greatest part of the conclusions are analogous to those obtained in gas dynamics.*

## Introduction.

L'étude des écoulements en théorie cinétique des gaz se ramène à l'étude des solutions de l'équation de Boltzmann ou des équations modèles qui ont été proposées pour la remplacer. Pour tester la valeur de ces équations modèles, il est intéressant de comparer les écoulements obtenus à l'aide de ces équations aux écoulements obtenus en résolvant l'équation de Boltzmann. Lorsque le nombre de Knudsen est borné et non nul, le gaz se comporte comme un fluide visqueux et les écoulements obtenus sont continus; lorsque le nombre de Knudsen est nul, la forme limite de l'équation de Boltzmann est constituée d'une part par les équations d'Euler, d'autre part par l'équation obtenue en écrivant que l'intégrale de collision est nulle, c'est-

---

(\*) Entrata in Redazione il 9 febbraio 1975.

(\*\*) Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.

à-dire que la distribution des vitesses est maxwellienne; on obtient ainsi les équations de la dynamique des gaz.

Parmi les méthodes proposées pour simplifier l'équation de Boltzmann figure la méthode de discrétisation de l'espace des vitesses, dont une étude générale très complète a été faite par R. GATIGNOL (1975). Cette méthode consiste à supposer que les molécules fluides ne peuvent prendre pour vitesses que des valeurs discrètes  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ . Les densités  $N_i$  des particules de vitesse  $\mathbf{u}_i$ , vérifient alors un système de  $p$  équations aux dérivées partielles quasi linéaires, appelées équations cinétiques, et jouant le rôle de l'équation de Boltzmann. Lorsque le nombre de Knudsen est nul, les équations cinétiques se décomposent en un système de  $q$  équations linéaires qui sont des équations de conservation et de  $p - q$  équations algébriques, relations quadratiques entre les densités  $N_i$ . Le système ainsi obtenu constitue les équations d'Euler du modèle, et ses solutions correspondent à des écoulements qui peuvent comporter des ondes de choc. L'objet de ce travail est l'étude d'une de ces solutions: écoulement stationnaire autour d'un dièdre pour un gaz à quatre vitesses.

Le modèle que nous considérons est un modèle plan, constitué par un gaz dont les molécules ne peuvent prendre pour vitesses que les quatre vitesses obtenues en joignant le centre d'un carré aux sommets. Suivant le repère choisi, le centre du carré coïncide ou non avec l'origine de l'espace des vitesses. Tous les mouvements sont supposés plans parallèles au plan défini par les vitesses, et les ondes de choc seront supposées planes perpendiculaires à ce plan. L'étude sera divisée en deux parties; dans la première partie nous étudierons la propagation des chocs instationnaires, en supposant le centre du carré situé à l'origine de l'espace de vitesses, et dans la seconde partie nous appliquerons les résultats à l'étude de l'écoulement stationnaire autour d'un dièdre, en supposant pour cela que le centre du carré occupe une position arbitraire dans l'espace des vitesses.

## 1. — Etude de la propagation des ondes de choc.

### 1.1. *Equations cinétiques.*

Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires  $ox, oy$ , nous considérons un gaz dont les molécules ne peuvent prendre pour vecteur vitesse que l'un des quatre vecteurs suivants:

$$\mathbf{u}_1 \begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 \begin{vmatrix} 0 \\ c \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 \begin{vmatrix} -c \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 \begin{vmatrix} 0 \\ -c \end{vmatrix}.$$

Ce modèle a été envisagé par J. BÉDÉ (1971) pour l'étude de l'écoulement autour d'une plaque plane de longueur finie. La densité  $N_i$  des molécules animées de la vitesse  $\mathbf{u}_i$  est supposée fonction des variables  $x, y, t$ :  $N_i = N_i(x, y, t)$  et indépendante de la troisième variable d'espace,  $z$ . Si on suppose que dans une collision entre deux molécules tous les couples possibles sont obtenus avec la même proba-

bilité, et si on désigne par  $S$  la section efficace de collision, les équations cinétiques s'écrivent sous la forme suivante (\*):

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \frac{\partial N_1}{\partial x} = cS(N_2N_4 - N_1N_3), \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + c \frac{\partial N_2}{\partial y} = cS(N_1N_3 - N_2N_4), \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} - c \frac{\partial N_3}{\partial x} = cS(N_2N_4 - N_1N_3), \\ \frac{\partial N_4}{\partial t} - c \frac{\partial N_4}{\partial y} = cS(N_1N_3 - N_2N_4). \end{array} \right.$$

Les seconds membres des équations précédentes sont égaux au signe près; leur élimination permet de remplacer trois des équations (1) par les équations suivantes:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial t} + c \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_3}{\partial t} + c \frac{\partial N_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_4}{\partial t} - c \frac{\partial N_4}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque la section efficace de collision  $S$  est infinie (c'est-à-dire, lorsque le nombre de Knudsen est nul), la quatrième équation s'écrit:

$$(3) \quad N_1N_3 = N_2N_4;$$

elle exprime que le gaz est dans un état maxwellien.

Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel dans la direction  $\Delta$  de vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  qui fait avec  $ox$  l'angle  $\beta - \pi/2$ , les densités  $N_i$  sont des fonctions de la forme  $N_i(t, X)$  avec  $X = x \sin \beta - y \cos \beta$ , les équations (2) s'écrivent alors sous la forme (4):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \sin \beta \frac{\partial N_1}{\partial X} + \frac{\partial N_2}{\partial t} - c \cos \beta \frac{\partial N_2}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \sin \beta \frac{\partial N_1}{\partial X} - \frac{\partial N_3}{\partial t} + c \sin \beta \frac{\partial N_3}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} + c \sin \beta \frac{\partial N_1}{\partial X} + \frac{\partial N_4}{\partial t} + c \cos \beta \frac{\partial N_4}{\partial X} = 0. \end{array} \right.$$

(\*) Cf. R. GATIGNOL (1975).

1.2. *Equations des chocs.*

Les équations (2), ou les équations (4) sont des équations de conservation il leur, correspond donc des équations de choc lorsque les fonctions  $N_i$  sont discontinues. Ainsi lorsque la section efficace de collision  $S$  est infinie, le mouvement du gaz, régi par les équations (2) et (3), est susceptible de comporter des ondes de choc. Pour établir les équations des chocs, nous supposons qu'une onde de choc plane perpendiculaire au plan  $xy$  se déplace avec la vitesse  $\xi$  dans la direction  $\Delta$ . Les états du gaz avant et après le passage de l'onde de choc seront repérés par les suffixes <sup>(1)</sup> et <sup>(2)</sup> et on pose  $[Q] = Q^{(2)} - Q^{(1)}$ ; des équations (4) on déduit les relations qui lient les discontinuités des densités:

$$(5) \quad \begin{cases} (\xi - c \sin \beta)[N_1] + (\xi + c \cos \beta)[N_2] = 0 \\ (\xi - c \sin \beta)[N_1] - (\xi + c \sin \beta)[N_3] = 0 \\ (\xi - c \sin \beta)[N_1] + (\xi - c \cos \beta)[N_4] = 0 \end{cases}$$

Comme la relation (3) est vérifiée aussi bien pour l'état (1) que pour l'état (2), on obtient ensuite la valeur de  $[N_1]$ . Pour expliciter les résultats, nous supposons que dans la région (1) le gaz est au repos dans un état maxwellien; on a alors

$$N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = N_3^{(1)} = N_4^{(1)} = N_0$$

On obtient ainsi

$$(6) \quad \frac{[N_1]}{N_0} = \frac{-2\xi(2\xi^2 - c^2)}{(c \sin \beta - \xi)c^2 \cos 2\beta}$$

puis:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{N_1^{(2)}}{N_0} = \frac{(\xi + c \sin \beta)(2\xi - c \sin \beta - c \cos \beta)(2\xi - c \sin \beta + c \cos \beta)}{(\xi - c \sin \beta)c^2 \cos 2\beta}, \\ \frac{N_2^{(2)}}{N_0} = -\frac{(\xi - c \cos \beta)(2\xi + c \cos \beta + c \sin \beta)(2\xi + c \cos \beta - c \sin \beta)}{(\xi + c \cos \beta)c^2 \cos 2\beta}, \\ \frac{N_3^{(2)}}{N_0} = \frac{(\xi - c \sin \beta)(2\xi + c \sin \beta + c \cos \beta)(2\xi + c \sin \beta - c \cos \beta)}{(\xi + c \sin \beta)c^2 \cos 2\beta}, \\ \frac{N_4^{(2)}}{N_0} = -\frac{(\xi + c \cos \beta)(2\xi - c \cos \beta + c \sin \beta)(2\xi - c \cos \beta - c \sin \beta)}{(\xi - c \cos \beta)c^2 \cos 2\beta}. \end{cases}$$

De la valeur de la densité  $N_1^{(2)}$ , on déduit les valeurs des densités  $N_i^{(2)}$  ( $i = 2, 3, 4$ ) par changement de  $\beta$  en  $\beta + (1-i)\pi/2$ .

Les seules valeurs acceptables pour  $\xi$  et  $\beta$  sont celles pour lesquelles les densités  $N_i^{(2)}$  sont toutes positives ou nulles.  $N_0$  et  $c$  sont positifs, et on peut supposer que l'on

à  $\pi/2 < \beta < 3\pi/4$  et  $\xi \geq 0$  (les résultats obtenus s'étendront ensuite par symétrie par rapport aux axes de coordonnées par rapport aux bissectrices de ces axes). On doit avoir ainsi

$$\text{soit} \quad \frac{\xi}{c} \leq \inf \left( -\cos \beta, \frac{\sin \beta + \cos \beta}{2} \right),$$

$$\text{soit} \quad \frac{\sin \beta - \cos \beta}{2} \leq \frac{\xi}{c} \leq \sin \beta.$$

Sur la figure 1, les régions du plan dans lesquelles doit se trouver l'extrémité du vecteur  $\mathbf{OP} = \mathbf{n}\xi$  pour qu'il en soit ainsi sont indiquées par des hachures; ces régions sont limitées par des arcs de cercles.

Pour  $\xi = \xi^* = c/\sqrt{2}$ , toutes les discontinuités  $[N_i]$  sont nulles; la valeur  $\xi^*$  représente donc la vitesse de propagation des chocs infiniment faibles, c'est-à-dire des ondes sonores; cette vitesse est indépendante de la direction de la propagation. Ainsi, bien que le fluide considéré soit un milieu anisotrope, la vitesse du son est une grandeur isotrope. Sur la figure 1, les régions qui correspondent à un choc supersonique sont marquées par des hachures verticales; les régions qui correspondent à un choc subsonique sont marquées par des hachures horizontales. On est ainsi amené à distinguer trois types de chocs possibles:

- les chocs subsoniques lents,
- les chocs subsoniques rapides,
- les chocs supersoniques.

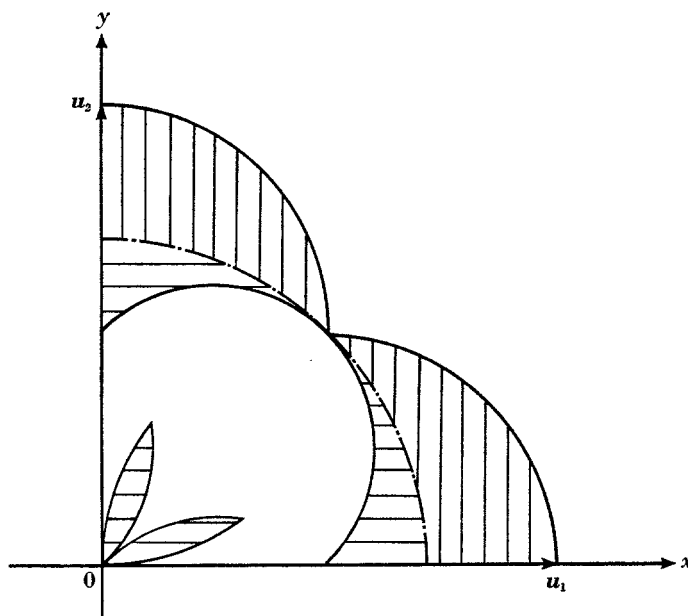


Figure 1. — Valeurs limites de la vitesse du choc.

La vitesse d'un choc subsonique lent est toujours inférieure à  $c/2$ ; la vitesse d'un choc subsonique rapide est supérieure ou égale à  $c/2$ .

### 1.3. Calcul des grandeurs macroscopiques.

A partir des valeurs des densités on calcule les grandeurs macroscopiques: densité totale  $n$ , vitesse moyenne  $\mathbf{u}$  (de composantes  $u$  et  $v$ ), température  $T$ , pression  $p$ :

$$(8) \quad \begin{cases} n = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \\ nu = c(N_1 - N_3), \\ nv = c(N_2 - N_4), \end{cases}$$

$$(9) \quad p = knT = \frac{\mu}{3} n \{c^2 - (u^2 + v^2)\};$$

$\mu$  désigne la masse des particules, et  $k$  la constante de Boltzmann. Dans le cas d'une distribution maxwellienne, on peut à l'aide des formules (8) exprimer les densités en fonction de  $n$ ,  $u$  et  $v$ :

$$(10) \quad \begin{cases} N_1 = n \frac{(c+u)^2 - v^2}{4c^2}, & N_2 = n \frac{(c+v)^2 - u^2}{4c^2}, \\ N_3 = n \frac{(c-u)^2 - v^2}{4c^2}, & N_4 = n \frac{(c-v)^2 - u^2}{4c^2}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs des densités dans les équations (2), on obtient les équations d'Euler du modèle:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} + \frac{\partial nv}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( n \frac{c^2 + u^2 - v^2}{2} \right) = 0, \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( n \frac{c^2 - u^2 + v^2}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Ces équations peuvent être écrites sous une forme matricielle, en introduisant le vecteur  $\mathbf{z}$  de composantes  $nc$ ,  $nu$ ,  $nv$  et les matrices  $\mathbf{A}(\mathbf{z})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{z})$  définies par les formules suivantes:

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ \frac{c^2 - u^2 + v^2}{2c} & u & -v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ \frac{c^2 + u^2 - v^2}{2c} & -u & v \end{pmatrix},$$

Le système des équations (11) s'écrit ainsi sous la forme

$$(11') \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y} = 0.$$

Des formules (8) et (9) et des équations de choc on déduit:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} = \frac{c^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \xi^4}{(c^2 \sin^2 \beta - \xi^2)(c^2 \cos^2 \beta - \xi^2)}, \\ \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} = \frac{2\mu c^2 \{N_1^{(2)} + N_3^{(2)}\} \{N_2^{(2)} + N_4^{(2)}\} + \{N_1^{(2)} N_3^{(2)} + N_2^{(2)} N_4^{(2)}\}}{N_1^{(2)} + N_2^{(2)} + N_3^{(2)} + N_4^{(2)}} = \\ = 1 + \frac{\xi^2(2\xi^2 - c^2)(2\xi^2 - c^2 \sin^2 2\beta)}{\cos^2 2\beta c^2 (\xi^4 - c^4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta)}. \end{array} \right.$$

La pression augmente à travers le choc si l'on a :

$$\text{soit} \quad \frac{1}{2} < \frac{\xi^2}{c^2},$$

$$\text{soit} \quad 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta < \frac{\xi^2}{c^2} < \sin \beta \cos \beta.$$

Comme, pour  $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/4$  on a toujours les inégalités suivantes:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \inf \left( -\cos \beta, \frac{\sin \beta + \cos \beta}{2} \right) \leq -\sqrt{2} \sin \beta \cos \beta, \\ 2 \sqrt{-\sin \beta \cos \beta} \leq \sin \beta - \cos \beta, \end{array} \right.$$

on peut conclure que la pression augmente dans les chocs supersoniques et diminue dans les chocs subsoniques. On constate également que la masse volumique augmente dans les chocs supersoniques et dans les chocs subsoniques lents, tandis qu'elle diminue dans les chocs subsoniques rapides.

Il est possible naturellement d'établir les équations de choc à partir des équations d'Euler; celles-ci sont des équations de conservation auxquelles correspondent les

équations de discontinuités suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} [n\xi - nu \sin \beta + nv \cos \beta] = 0, \\ \left[ nu\xi - n \frac{c^2 + u^2 - v^2}{2} \sin \beta \right] = 0, \\ \left[ nv\xi + n \frac{c^2 - u^2 + v^2}{2} \cos \beta \right] = 0. \end{cases}$$

On retrouve ainsi les équations (12) qui sont les conditions de choc pour un gaz régi par les équations (11). Cependant si on ne s'occupe plus de la description microscopique du gaz, la condition que nous avons imposée à toutes les densités  $N_i^{(2)}$  (être positives) doit être remplacée par la condition moins forte  $n^{(2)} > 0$ ; l'extrémité du vecteur  $OP = n\xi$  doit alors se trouver dans l'une des régions hachurées indiquées sur la figure 2. Pour les chocs supersoniques, les conditions

$$n^{(2)} > 0 \quad \text{et} \quad N_i^{(2)} > 0$$

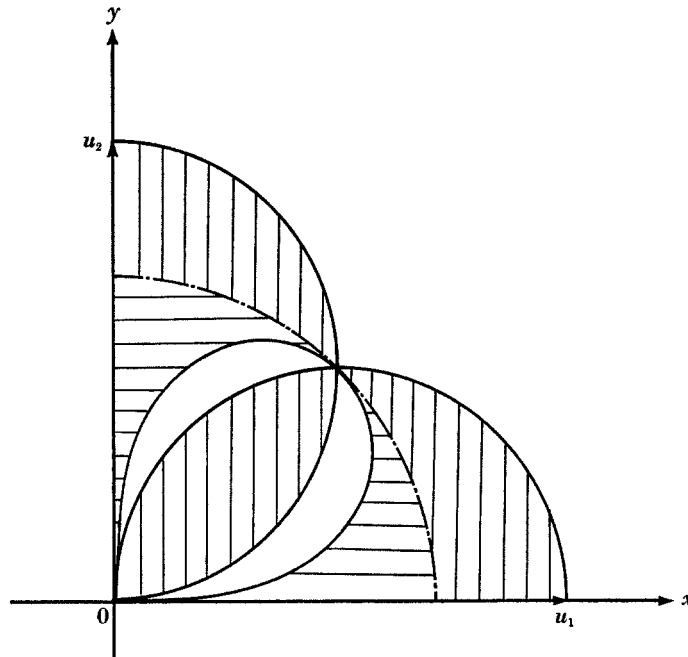


Figure 2. - Valeurs du rapport  $\frac{n^{(2)}}{n^{(1)}}$

hachures verticales	$1 < \frac{n^{(2)}}{n^{(1)}}$
hachures horizontales	$0 < \frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} < 1$
pas de hachures	$\frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} < 0$



sont équivalentes; pour les chocs subsoniques, les conditions  $N_i^{(2)} > 0$  sont plus restrictives.

La conditions nécessaire que nous avons imposée aux densités  $N_i^{(2)}$  d'être toutes positives n'est pas suffisante pour que les chocs correspondants puissent être considérés comme ayant une réalité physique. En dynamique des gaz on doit satisfaire la condition qui exprime que l'entropie spécifique augmente au cours du choc, ou étudier la stabilité des chocs et exclure les chocs instables. En théorie cinétique on doit, d'une façon analogue, écrire la condition qui exprime que la fonction  $H$  de Boltzmann diminue au cours du choc ou étudier la stabilité. Nous allons faire cette étude pour le modèle à quatre vitesses.

#### 1.4. *Etude de la stabilité des ondes de choc.*

L'étude de la stabilité des ondes de choc à l'aide du critère de Lax (1957) consiste à comparer la vitesse du choc et les vitesses caractéristiques du système des équations

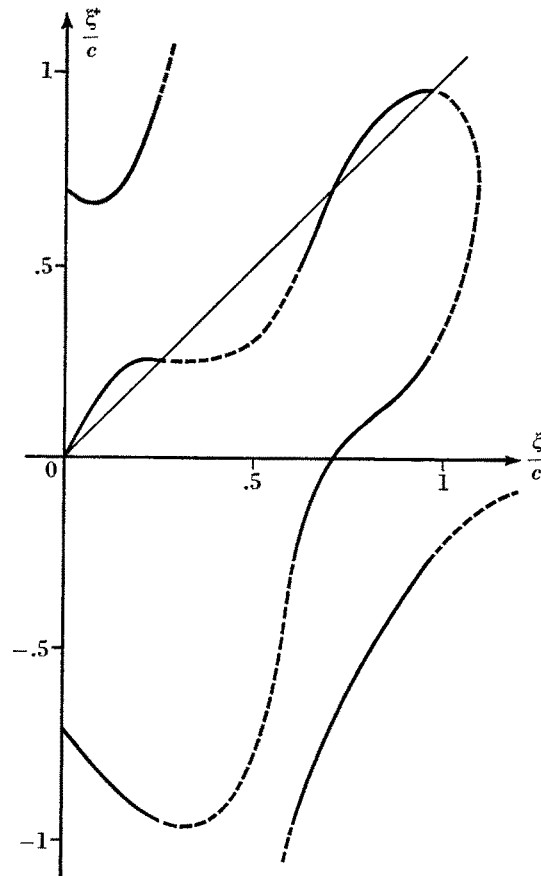


Figure 3. - Vitesses caractéristiques après le choc ( $\alpha = 15^\circ$ ).

d'Euler. Ce système étant écrit sous la forme (11'), les vitesses caractéristiques dans la direction  $\Delta$  qui fait avec  $Ox$  l'angle  $\alpha = \beta - \pi/2$  sont les valeurs propres  $\xi^*$  de la matrice  $\mathbf{A} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha$ ; ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique

$$(15) \quad \xi^{*3} - (u \cos \alpha + v \sin \alpha) \xi^{*2} + \frac{(u^2 - v^2) \cos 2\alpha - c^2}{2} \xi^* + \sin \alpha \cos \alpha c^2 (u \sin \alpha + v \cos \alpha) = 0.$$

Lorsque le fluide est au repos, on retrouve que la distribution de la vitesse du son est isotrope; quel que soit l'angle  $\alpha$ , l'équation (15) admet pour racines les valeurs  $0, \pm c/\sqrt{2}$ . Dans le cas général on sait <sup>(1)</sup> que les vitesses caractéristiques sont réelles chaque fois que les densités  $N_i$  sont toutes positives. Pour calculer leurs valeurs après le choc il suffit d'exprimer  $u$  et  $v$  à l'aide des équations de choc. On obtient ainsi l'équation suivante:

$$(15') \quad c^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \{ \xi^* (2\xi^{*2} - c^2) - 2\xi (2\xi^2 - c^2) \} - \xi^2 \xi^* \{ \xi^2 (2\xi^{*2} - c^2) - 2\xi \xi^* (2\xi^2 - c^2) + (2\xi^2 - c^2)^2 \} = 0$$

Les valeurs des trois vitesses caractéristiques dans la région 2,  $\xi_-^*$ ,  $\xi_0^*$  et  $\xi_+^*$ , sont indiquées dans les tables I pour  $\alpha = 0^\circ, \alpha = 15^\circ$  et  $\alpha = 30^\circ$ , et représentées sur la figure 3 pour  $\alpha = 15^\circ$ ; sur cette figure les arcs en traits pleins correspondent à des valeurs de  $\xi$  pour lesquelles toutes les densités  $N_i^{(2)}$  sont positives; les autres arcs sont indiqués en pointillés. Les valeurs des vitesses caractéristiques pour les cas limites où l'une des densités  $N_i^{(2)}$  change de signe sont indiquées dans le tableau suivant ( $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ ):

$\xi/c$	$\xi_-^*/c$	$\xi_0^*/c$	$\xi_+^*/c$
0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$-\cos \beta$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\frac{\sin \beta + \cos \beta}{2}$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)}{1 - 6 \sin \alpha \cos \alpha}$
$\frac{\sin \beta - \cos \beta}{2}$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{1 + 6 \sin \alpha \cos \alpha}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sin \beta$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

(1) R. GATIGNOL (1975), chap. III.

TABLE I. - *Vitesses caractéristiques.*

	$\xi/c$	$\xi_-^*/c$	$\xi_0^*/c$	$\xi_+^*/c$
$\alpha = 0^\circ$	0,50	- 1,000	0,000	0,000
	0,55	- 0,986	0,000	0,250
	0,60	- 0,901	0,000	0,434
	0,65	- 0,816	0,000	0,578
	0,70	- 0,721	0,000	0,693
	0,75	- 0,619	0,000	0,786
	0,80	- 0,510	0,000	0,860
	0,85	- 0,395	0,000	0,919
	0,90	- 0,273	0,000	0,962
	0,95	- 0,142	0,000	0,990
	1,00	0,000	0,000	1,000
$\alpha = 15^\circ$	0,00	- 0,707	0,000	0,707
	0,05	- 0,764	0,097	0,668
	0,10	- 0,826	0,179	0,663
	0,15	- 0,885	0,231	0,705
	0,20	- 0,932	0,254	0,799
	0,25	- 0,962	0,259	0,937
	0,60	- 1,035	- 0,328	0,461
	0,65	- 0,835	- 0,112	0,580
	0,70	- 0,722	- 0,010	0,693
	0,75	- 0,625	0,047	0,785
	0,80	- 0,533	0,088	0,857
	0,85	- 0,444	0,128	0,911
	0,90	- 0,359	0,173	0,947
	0,95	- 0,281	0,234	0,965
$\alpha = 30^\circ$	0,00	- 0,707	0,000	0,707
	0,05	- 0,756	0,100	0,657
	0,10	- 0,802	0,202	0,606
	0,15	- 0,843	0,309	0,551
	0,70	- 0,693	- 0,100	0,723
	0,75	- 0,644	0,271	0,782
	0,80	- 0,581	0,388	0,838
	0,85	- 0,519	0,412	0,864
	0,90	- 0,459	0,568	0,856

La vitesse du choc et les vitesses caractéristiques vérifient les inégalités suivantes :

*Avant le choc*

pour les chocs subsoniques  $-\xi^* < 0 < \xi < \xi^*$ ,

pour les chocs supersoniques  $-\xi^* < 0 < \xi^* < \xi$ ,

Après le choc

$$\begin{array}{ll} \text{pour les chocs subsoniques lents} & \xi_-^* < \xi < \xi_0^* < \xi_+^*, \\ \text{pour les chocs subsoniques rapides} & \xi_-^* < \xi_0^* < \xi_+^* < \xi, \\ \text{pour les chocs supersoniques} & \xi_-^* < \xi_0^* < \xi < \xi_+^*, \end{array}$$

Les ondes acoustiques sont divergentes (par rapport au choc) si leur vitesse avant le choc est supérieure à celle du choc et si leur vitesse après le choc est inférieure à celle du choc. Le nombre des ondes divergentes est donc

$$\begin{array}{ll} \text{pour les chocs subsoniques lents} & 1 + 1 = 2 \\ \text{pour les chocs subsoniques rapides} & 1 + 3 = 0 \\ \text{pour les chocs supersoniques} & 0 + 2 = 2 \end{array}$$

D'après le critère de Lax, un choc est stable si le nombre des ondes divergentes est égal à  $q - 1$ , en désignant par  $q$  le nombre des variables indépendantes du problème. Dans le cas actuel on a  $q = 3$ , ce qui prouve que les chocs supersoniques et les chocs subsoniques lents sont stables, tandis que les chocs subsoniques rapides sont instables.

Une seconde méthode pour étudier la stabilité des ondes de choc consiste à utiliser le théorème  $H$  de Boltzmann.

Etant donné un gaz dont les molécules ne peuvent prendre pour vitesses que  $p$  vecteurs  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ , un choc plan perpendiculaire au vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , se déplaçant avec la vitesse  $\xi$  dans la direction  $\mathbf{n}$ , sera stable si la fonction

$$(16) \quad H_1 = \sum_{i=1}^p (\xi - \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_i) N_i \log N_i$$

diminue à la traversée de l'onde de choc. Il est en effet naturel de considérer comme stables les discontinuités qui peuvent être obtenues comme limites, par un certain processus, d'écoulements continus. Dans un écoulement continu les densités  $N_i$  vérifient les équations cinétiques

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \operatorname{div} N_i = \frac{1}{2} \sum_{jkl} A_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j)$$

les  $A_{ij}^{kl}$  sont des constantes positives qui représentent les probabilités de transition. On déduit des équations cinétiques la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^p N_i \log N_i \right) + \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i N_i \log N_i \right) = \sum_{i=1}^p \left\{ (1 + \log N_i) \frac{1}{2} \sum_{jkl} A_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j) \right\}.$$

Le second membre est négatif ou nul, quelles que soient les densités  $N_i$ , lorsque ces

fonctions sont discontinues, on en déduit que le saut de la fonction  $H_1$  est négatif ou nul.

Pour appliquer ce résultat au cas du modèle à quatre vitesses, nous posons

$$H_1 = \left(\frac{\xi}{c} - \cos \alpha\right) \frac{N_1}{N_0} \log \frac{N_1}{N_0} + \left(\frac{\xi}{c} - \sin \alpha\right) \frac{N_2}{N_0} \log \frac{N_2}{N_0} + \\ + \left(\frac{\xi}{c} + \cos \alpha\right) \frac{N_3}{N_0} \log \frac{N_3}{N_0} + \left(\frac{\xi}{c} + \sin \alpha\right) \frac{N_4}{N_0} \log \frac{N_4}{N_0}.$$

Cette fonction est nulle avant le choc; les chocs stables seront donc ceux lesquels on a  $H_1^{(2)} \leq 0$ . Les valeurs de cette fonction sont indiquées dans les tables II pour  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$  et  $\alpha = 30^\circ$ . On obtient les mêmes conclusions que par l'application du critère de Lax; les chocs supersoniques et les chocs subsoniques lents sont stables, tandis que les chocs subsoniques rapides sont instables.

TABLE II. - *Discontinuité de la fonction H de Boltzmann.*

$\xi/c$	$[H_1] = H_1^{(2)} - H_1^{(1)}$		
0,00		0,00000	0,00000
05		-0,00362	-0,00362
10		-0,03061	-0,03069
15		-0,11522	-0,11827
0,20		-0,33729	
25		-1,25180	
30			
35			
0,40			
45			
50	0,57536		
55	0,18263		
0,60	0,05285		
65	0,00780	0,01655	
70	0,00001	0,00003	0,00028
75	-0,00361	-0,00587	-0,03704
0,80	-0,03878	-0,06271	-0,36623
85	-0,16040	-0,25911	-2,13570
90	-0,48004	-0,81547	
	-1,34145	-2,99269	
1,00	$-\infty$		
	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 30^\circ$

## 2. — Le problème du dièdre.

Après avoir établi et étudié les équations des ondes de choc, nous nous proposons, dans une seconde partie, d'appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'écoulement supersonique stationnaire autour d'un dièdre. Si on se place dans un repère lié au choc on a  $\xi = 0$  et les vitesses ne peuvent avoir les valeurs adoptées dans la première partie, car dans ce cas la valeur minimale du choc supersonique (le seul auquel nous intéressons) est  $c/\sqrt{2}$ . Nous nous placerons dans un repère, animé par rapport au repère adopté dans la première partie, d'une translation de vitesse constante. Autrement dit nous supposons que les molécules du fluide peuvent prendre pour vitesse l'un des quatre vecteurs suivants:

$$\mathbf{u}_1 \begin{vmatrix} u_0 + c \cos \varphi \\ c \sin \varphi \end{vmatrix} \quad \mathbf{u}_2 \begin{vmatrix} u_0 - c \sin \varphi \\ c \cos \varphi \end{vmatrix} \quad \mathbf{u}_3 \begin{vmatrix} u_0 - c \cos \varphi \\ -c \sin \varphi \end{vmatrix} \quad \mathbf{u}_4 \begin{vmatrix} u_0 + c \sin \varphi \\ -c \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Ces vecteurs sont représentés sur la figure 4.a. Dans une région de l'espace, région (1), la distribution des vitesses est uniforme, les quatre densités  $N_1^{(1)}$  ont pour valeur

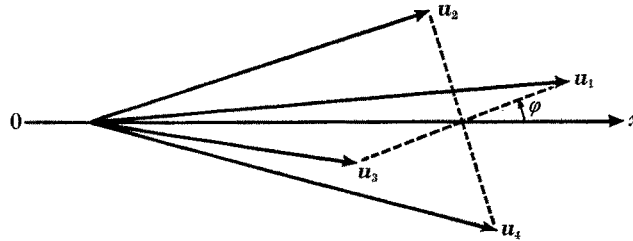


Figure 4a. — Espace des vitesses.

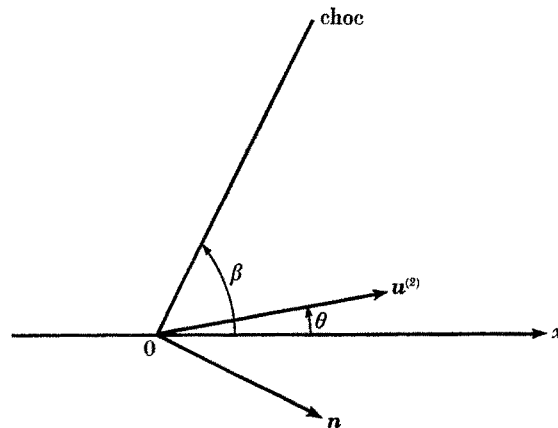


Figure 4b. — Espace physique.

commune  $N_0$ , et  $u_0(u_0, 0)$  représente la vitesse moyenne; les vitesses d'agitation ont alors même module  $c$ , et font avec la vitesse moyenne les angles  $\varphi$ ,  $\varphi + \pi/2$ ,  $\varphi + \pi$ ,  $\varphi + 3\pi/2$ ; on peut toujours supposer  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , ce que nous ferons.

### 2.1. Equations des chocs.

Nous supposons qu'une onde de choc plane, perpendiculaire au plan  $xy$  se déplace parallèlement à la direction  $\Delta$  avec la vitesse  $\xi$ , la direction  $\Delta$  fait avec  $ox$  l'angle  $\beta - \pi/2$ : figure 4. Comme dans la première partie, on écrit successivement les équations cinétiques, les équations des mouvements unidimensionnels dans la direction  $\Delta$ , et les équations de chocs; les discontinuités  $[N_i]$  sont reliées entre elles par les relations suivantes:

$$(16) \quad \begin{aligned} [N_1] \{u_0 \sin \beta + c \sin (\beta - \varphi) - \xi\} = \\ -[N_2] \{u_0 \sin \beta - c \cos (\beta - \varphi) - \xi\} = \\ [N_3] \{u_0 \sin \beta - c \sin (\beta - \varphi) - \xi\} = \\ -[N_4] \{u_0 \sin \beta + c \cos (\beta - \varphi) - \xi\} \end{aligned}$$

naturellement lorsque  $u_0$  et  $\varphi$  sont nuls on retrouve les relations (5). On a en outre, écrivant que la relation (3) est satisfaite avant et après le choc.

$$(17) \quad \begin{aligned} N_0[N_1] + N_0[N_3] + [N_1][N_3] = \\ N_0[N_2] + N_0[N_4] + [N_2][N_4]. \end{aligned}$$

Les équations (16) et (17) déterminent les discontinuités des densités à travers le choc. Nous supposons dans cette partie que le choc est stationnaire:  $\xi = 0$ . Posant

$$\tau = \tan (\beta - \varphi), \quad \mu = \frac{u_0}{c} \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - \varphi)}.$$

On obtient:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{N_1^{(2)}}{N_0} &= \frac{(\mu - \tau)(2\mu + \tau + 1)(2\mu + \tau - 1)}{(1 - \tau^2)(\mu + \tau)}, \\ \frac{N_2^{(2)}}{N_0} &= -\frac{(\mu + 1)(2\mu - 1 + \tau)(2\mu - 1 - \tau)}{(1 - \tau^2)(\mu - 1)}, \\ \frac{N_3^{(2)}}{N_0} &= \frac{(\mu + \tau)(2\mu - \tau + 1)(2\mu - \tau - 1)}{(1 - \tau^2)(\mu - \tau)}, \\ \frac{N_4^{(2)}}{N_0} &= -\frac{(\mu - 1)(2\mu + 1 + \tau)(2\mu + 1 - \tau)}{(1 - \tau^2)(\mu + 1)}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont à comparer aux formules (7); si dans les formules (7) on avait posé

$$\tau = \tan \beta, \quad \mu = -\frac{\xi}{c} \frac{1}{\cos \beta},$$

on aurait obtenu les formules (18). Ainsi tous les résultats obtenus dans la première partie peuvent être utilisés, à conditions de remplacer  $\beta$  par  $\beta - \varphi$  et  $\xi$  par  $-u_0 \sin \beta$ .

L'expression de  $N_1^{(2)}$  se déduit de celle de  $N_2^{(2)}$  par changement de  $\mu$  en  $-\mu$ ; l'expression de  $N_3^{(2)}$  se déduit de celle de  $N_4^{(2)}$  de la même façon.

Les quatre discontinuités  $[N_i]$  sont nulles, lorsqu'on a

$$(19) \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c}{u_0};$$

l'onde de choc est alors une onde sonore, et l'angle  $\beta$  ainsi défini est l'angle de Mach de l'écoulement amont; cet angle est indépendant de l'angle  $\varphi$ , c'est-à-dire de l'orientation des vitesses d'agitation.

Lorsque  $u_0/c$  et  $\varphi$  sont donnés, les seules valeurs physiquement acceptables de l'angle  $\beta$  sont celles pour lesquelles les densités  $N_i^{(2)}$  sont toutes positives. Dans un plan rapporté aux coordonnées  $\tau, \mu$  cela correspond aux points appartenant aux régions hachurées de la figure 5. Seul le quart de plan  $\tau > 0, \mu > 0$  est représenté; mais la figure se complète par symétrie par rapport aux de coordonnées. Sur la courbe d'équation

$$(20) \quad 2\mu^2 - \tau^2 = 1$$

l'équation (19) est satisfaite.

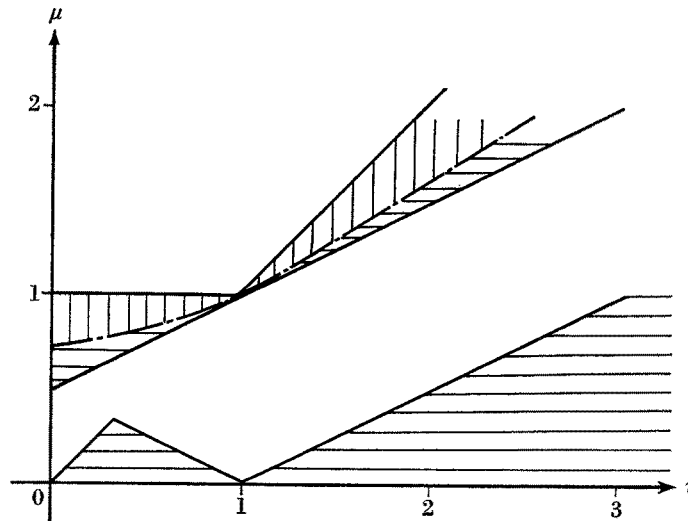


Figure 5. - Signe des densités  $N_i^{(2)}$ .



Les grandeurs macroscopiques se déduisent des formules obtenues dans la première partie; en particulier on a

$$(21) \quad \frac{p^{(2)}}{p^{(1)}} = 1 + \frac{\mu^2\{2\mu^2 - (1 + \tau^2)\}\{\mu^2(1 + \tau^2) - 2\tau^2\}}{(1 - \tau^2)^2(\mu^4 - \tau^2)}.$$

Dans les zones à hachures verticales de la figure 5, le choc est accompagné d'une compression; dans les zones à hachures horizontales le choc est accompagné d'une détente.

## 2.2. *Écoulement autour d'un dièdre.*

Dans le modèle adopté, les grandeurs macroscopiques  $n$ ,  $u$ ,  $v$  ont pour expression

$$(22) \quad \begin{cases} n = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \\ u = u_0 + \frac{c}{n} \{(N_1 - N_3) \cos \varphi - (N_2 - N_4) \sin \varphi\}, \\ v = \frac{c}{n} \{(N_1 - N_3) \sin \varphi + (N_2 + N_4) \cos \varphi\}. \end{cases}$$

La vitesse moyenne après le choc,  $\mathbf{u}^{(2)}$ , fait avec l'axe  $ox$  l'angle  $\theta$  tel que l'on ait

$$(23) \quad \tan \theta = \frac{v^{(2)}}{u^{(2)}}.$$

Si on impose à cette vitesse moyenne une direction donnée, l'équation (23) détermine pour chaque couple de valeurs  $\theta$ ,  $\varphi$ , l'angle  $\beta$  du choc, en fonction du quotient  $\lambda = (u_0/c)$  de la vitesse amont par le module des vitesses d'agitation. L'équation (23) s'explique sous la forme suivante

$$(24) \quad A \left(\frac{u_0}{c}\right)^4 + B \left(\frac{u_0}{c}\right)^2 + C = 0$$

avec:

$$A = \sin^4 \beta \{2 \sin \beta \cos (\beta - 2\varphi) - \cos 2\varphi \tan \theta\}$$

$$B = \sin^3 \beta \{ \tan \theta \sin (\beta - 2\varphi) + \tan \theta \cos \beta \sin 2(\beta - \varphi) - \cos (\beta - 2\varphi) - \sin \beta \sin 2(\beta - \varphi) \}$$

$$C = \sin (\beta - \varphi) \cos (\beta - \varphi) \{ \sin^2 \beta + \tan \theta \sin (\beta - \varphi) \cos (\beta - \varphi) \cos 2(\beta - \varphi) - \tan \theta \sin \beta \cos \beta \}.$$

Les courbes  $\theta = \text{constantes}$ , courbes de choc, dépendent de l'angle  $\varphi$  qui définit l'orientation des vitesses d'agitation. Sur chaque courbe, seuls les arcs qui correspondent à une valeur positive des quatre densités  $N_1^{(2)}$  ont une signification phy-

sique; nous nous limiterons aux chocs de compression, c'est-à-dire aux arcs sur lesquels les inégalités suivantes sont satisfaites

$$(25) \quad \frac{1 + \tau^2}{2} < \mu^2 < \sup(1, \tau^2);$$

l'inégalité de gauche est satisfaite si on a  $\theta \geq 0$ , l'inégalité de droite entraîne  $\beta \geq \theta$ . La courbe de choc  $\theta = 0$ , qui est la courbe définie par la formule (19) est indépendante de l'angle  $\varphi$ .

Nous supposons  $\varphi$  compris entre 0 et  $\pi/2$ . Les courbes de choc correspondant à un écoulement symétrique sont représentées sur les figures 6 ( $\varphi = 0$ ) et 7 ( $\varphi = \pi/4$ ). Sur les quatre figures suivantes sont représentées les courbes de choc correspondant

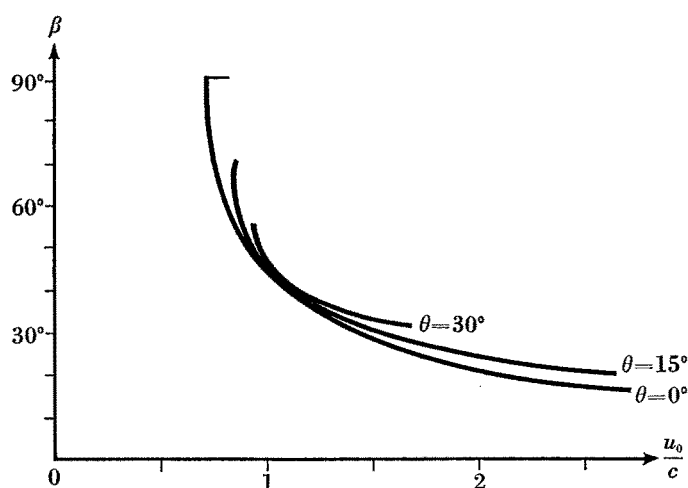


Figure 6. - Courbes de choc pour  $\varphi = 0$ .

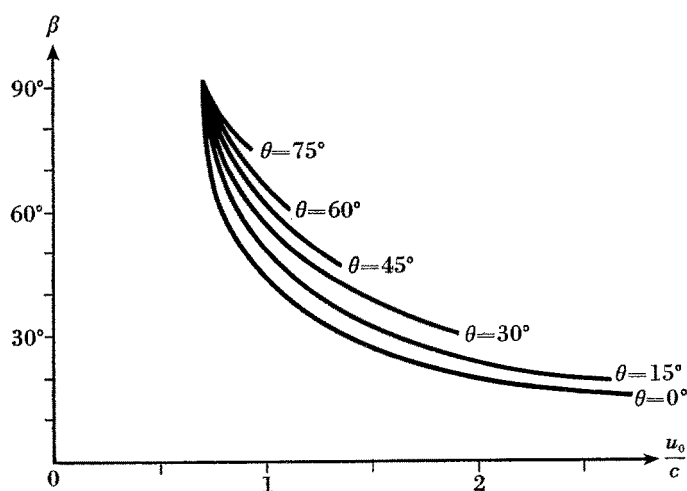


Figure 7. - Courbes de choc pour  $\varphi = \pi/4$ .

aux valeurs  $\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  et  $75^\circ$  respectivement. Les courbes de choc (les arcs utiles ou leur prolongement) passent toutes par les points :

$$\beta = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi},$$

$$\beta = \varphi + \frac{3\pi}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{\cos \varphi - \sin \varphi},$$

ou

$$\beta = \varphi - \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi},$$

$$\beta = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi},$$

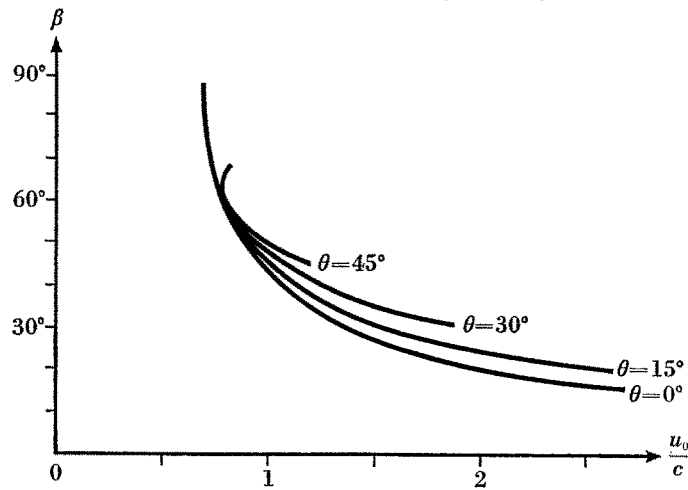


Figure 8. - Courbes de choc pour  $\varphi = 15^\circ$ .

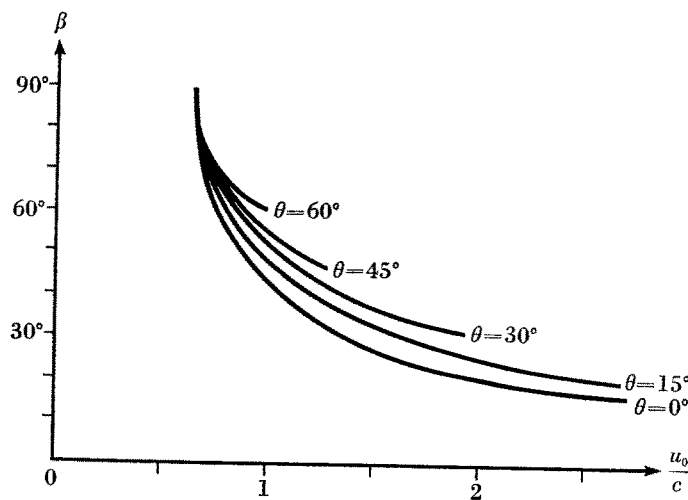


Figure 9. - Courbes de choc pour  $\varphi = 30^\circ$ .

suivant que l'on a  $\varphi \leq \pi/4$  ou  $\pi/4 < \varphi$ . Elles sont tangentes entre elles, dans chacun des deux cas, au premier point.

Les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  font avec  $ox$  les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que l'on ait:

$$\tan \theta_1 = \frac{c \sin \varphi}{u_0 + c \cos \varphi}, \quad \tan \theta_2 = \frac{c \cos \varphi}{u_0 - c \sin \varphi}$$

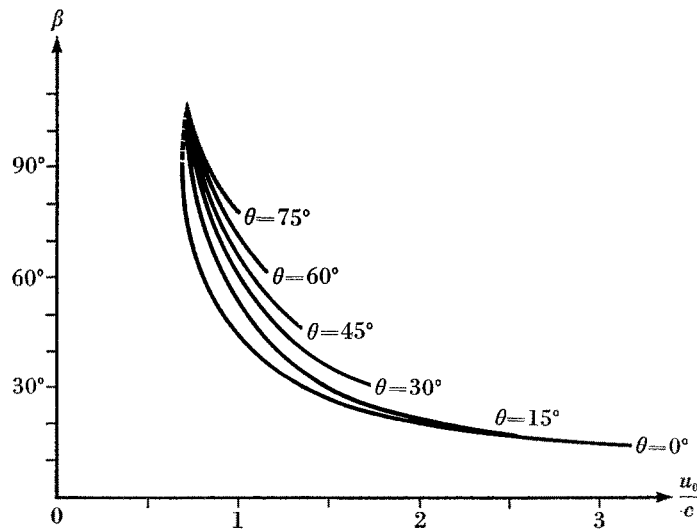


Figure 10. - Courbes de choc pour  $\varphi = 60^\circ$ .

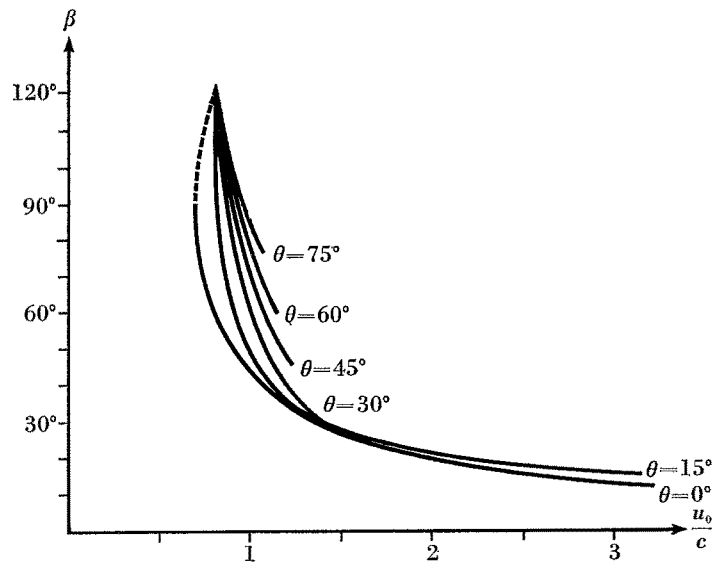


Figure 11. - Courbes de choc pour  $\varphi = 75^\circ$ .

lorsqu'on a  $\theta_1 < \theta_2$  les molécules qui rebondissent sur la surface du dièdre sont

$$\begin{aligned} &\text{les molécules de vitesse } \mathbf{u}_1 \text{ ou } \mathbf{u}_2 && \text{si } \theta < \theta_1 \\ &\text{les molécules de vitesse } \mathbf{u}_2 && \text{si } \theta_1 < \theta < \theta_2 ; \end{aligned}$$

Pour  $\theta$  supérieur à  $\theta_2$  toutes les molécules heurtent la surface du dièdre et aucune ne rebondit. Ces trois cas correspondent respectivement à

$$\begin{aligned} &\lambda \sin \theta < \sin (\varphi - \theta) \\ &\sin (\varphi - \theta) < \lambda \sin \theta < \cos (\varphi - \theta) \\ &\cos (\varphi - \theta) < \lambda \sin \theta . \end{aligned}$$

Le dernier cas ne se présente jamais, car il correspond à  $\beta < \theta$ . Donc il y a toujours des molécules qui rebondissent. Par exemple pour  $\varphi = 45^\circ$ , les molécules de vitesse  $\mathbf{u}_2$  sont les seules à rebondir si  $\theta > \arctan \frac{1}{2} = 26^\circ,565$ . Pour  $\theta < \arctan \frac{1}{2}$ , les molécules de vitesse  $\mathbf{u}_2$  sont encore les seules à rebondir si on a  $\lambda \sin \theta > \sin(\varphi - \theta)$ ; dans le cas contraire les molécules de vitesse  $\mathbf{u}_2$  ainsi que celles de vitesse  $\mathbf{u}_1$  rebondissent sur la paroi du dièdre. Comme il n'y a au maximum que deux espèces de molécules, sur quatre, qui rebondissent il n'est pas possible de préciser la loi de réflexion diffuse à laquelle correspond l'hypothèse faite suivant laquelle la vitesse moyenne  $\mathbf{u}^{(2)}$  après le choc est colinéaire à la paroi du dièdre. Cette hypothèse correspond en fait à une condition macroscopique.

### 3. - Conclusion.

Le problème que nous venons de traiter est une illustration de la méthode de discrétisation de l'espace des vitesses en théorie cinétique, illustration qui montre la valeur de cette méthode. En effet, si les courbes de choc diffèrent sur plusieurs points des courbes analogues obtenues en dynamique des gaz, ce qui est normal étant donné la simplicité extrême du schéma adopté (schéma à quatre vitesses), un nombre important des conclusions obtenues sont satisfaisantes: d'une part les chocs supersoniques sont des compressions accompagnées d'une augmentation de la masse volumique, d'autre part pour un dièdre donné l'angle du choc est une fonction décroissante de la vitesse amont, tandis que pour une vitesse amont donnée cet angle est une fonction croissante de l'angle du dièdre. Ces résultats sont encourageants pour traiter des problèmes plus compliqués avec le même modèle, en particulier des problèmes d'écoulements continus autour d'obstacles donnés, comme l'a fait J. BÉDÉ (1971); ils sont encourageants également pour traiter des problèmes avec des modèles dont le nombre des vitesses discrètes que peuvent prendre les molécules est plus grand.

## BIBLIOGRAPHIE

- BÉDÉ J., *The group method and its application to problems in rarefied gas dynamics*, Ph. D. Thesis, Columbia University, New York (1971).
- BROADWELL J., *Shock structure in a simple discrete velocity gas*, The Physics of Fluids, **7**, no. 8 (1964), p. 1243.
- CABANNES H., *Propagation des ondes de choc dans un gaz à quatorze vitesses*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **279** (1974), p. 761.
- CABANNES H., *Réflexion des ondes de choc dans un gaz à quatorze vitesses*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **279** (1974), p. 789.
- CABANNES H., *Etude de la propagation des ondes dans un gaz à 14 vitesses*, Journal de Mécanique, **14** (1975), p. 705.
- GATIGNOL R., *Etude de la structure d'une onde de choc dans un gaz à répartition discrète de vitesses*, C. R. Acad. Sci. Paris, **261** (1965), p. 2841.
- GATIGNOL R., *Théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesses*, Lectures Notes in Physics, vol. 36, Springer-Verlag, Heidelberg (1975).
- LAX P., *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **10** (1957), p. 537.
-