Über geschlossene Extremalen und eine einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen.

Memoria di JOHANN RADON (a Wien).

Zusammenfassung. - Unter den zahlreichen Beweisen, die für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises und verwandte Ungleichungen gegeben worden sind, erfreuen sich diejenigen, die sich der Methoden der Variationsrechnung bedienen, im allgemeinen keiner besonderen Beliebtheit, da sie verhältnismässig kompliziert sind. T. BONNESEN ⁽¹⁾ hat in einer bekannten Arbeit gezeigt, wie man mit Methoden der Variationsrechnung zum Ziel kommt, ohne die Theorie des isoperimetrischen Problems im eigentlichen Sinn zu benützen und ist sogar bis zu wesentlichen Verschärfungen der zu beweisenden Ungleichungen gelangt.

Wenn ich im folgenden mit einer neuen Methode, die übrigens mit der von BONNESEN nahe verwandt ist, auf das alte Problem zurückkomme, so geschieht dies aus dem Grunde, dass mir diese Methode besonders einfach erscheint und zu Beweisen führt, die sich ohne die technischen Hilfsmittel der Variationsrechnung leicht durchführen lassen (diesbezüglich sei auf den letzten Teil der Arbeit verwiesen). Ferner trägt meine Methode insofern sehr weit, als sie ohne weiters auf den nichteuklidischen Fall anwendbar ist, Konvexität nicht voraussetzt und vermutlich auch in anderen ähnlichen Fällen zum Ziel führt.

I.

1. Wir beginnen mit einigen Betrachtungen über das einfachste Variationsproblem in Parameterdarstellung.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

sei das zum Extrem zu machende Integral.

Eine einparametrische Extremalenschar

$$x = x(t, a), \quad y = y(t, a), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad A_0 \leq a \leq A_1$$

gestattet bekanntlich jeden einfachen, ihr angehörenden Extremalenbogen längs dessen die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, a)}$$

ungleich Null ist, in ein Feld einzubetten. Dort sind die beiden Ableitungen

$$F'_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad F'_y(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

(1) « Acta Mathematica », Bd. 48 (1926).

als Funktionen des Ortes betrachtet, die partiellen Ableitungen einer Funktion $W(x, y)$:

$$F_x = W_x, \quad F_y = W_y$$

(Unabhängigkeitssatz von HILBERT). Verlängern wir einen Extremalenbogen des Feldes nach beiden Seiten bis zu den « Brennpunkten » $A_1 A_2$, d , h . bis zu den ersten Punkten, in denen $\Delta = 0$, so treffen wir dort die Einhüllende der Schar (H_1 bzw. H_2 , siehe Figur 1). Es steht nun nichts im Wege, die

Fig. 1.

Funktion W auch noch auf H_1 und H_2 zu definieren, indem man z.B. ihren Wert in A_2 durch

$$W_{A_2} = W_B + J_{BA_2}$$

erklärt, wobei das Integral J längs des Extremalenbogens BA_2 unserer Schar zu nehmen ist. W ist dann im ganzen « uneigentlichen » Feld, das durch die Hüllen H_1 , H_2 und etwa $a = a_1$, $a = a_2$ begrenzt zu denken ist, stetig. Beachtet man jetzt, dass auch auf den beiden Hüllen durch die Orientierung der sie berührenden Extremalenbogen (im Sinn wachsender t) eine Orientierung gegeben ist, (den Fall singulärer Punkte, insbesondere Spitzen der Hüllen schliessen wir ausdrücklich aus), so gilt nach dem Hüllensatz von A. KNESER:

$$(1) \quad W_{A'_2} - W_{A_2} = J_{A_2 A'_2}$$

unter der Voraussetzung, dass A_2 auf H_2 vor A'_2 liegt und das Integral $I_{A_2 A'_2}$ längs H_2 genommen wird. Entsprechendes gilt für H_1 .

2. Wir nehmen jetzt an, dass es eine einparametrische Schar geschlossener Extremalen E gibt, die zwischen zwei Hüllkurven H_1 und H_2 derart verlaufen, dass bei Beschränkung auf die Teilbogen $A_1 A_2$ bzw. $A_2 A_1$ (Fig. 2) jedesmal

Fig. 2.

ein uneigentliches Feld im Sinn von 1. entsteht. Es ist klar, dass J für alle Extremalen E bei einmaligem Umlauf denselben Wert hat.

Zu jedem der so entstehenden Felder gehört eine Funktion W bzw. W' und nach (1) ist die Differenz $W - W'$ auf jeder der Hüllen konstant.

Als « Feld » werde von jetzt ab das Gebiet zwischen H_1 und H_2 bezeichnet, soweit es *beiden* uneigentlichen Feldern angehört.

Betrachten wir jetzt eine beliebige geschlossene Kurve C , die ganz im Feld verläuft und H_i in B_i trifft ($i = 1, 2$). Es ist:

$$\begin{aligned} J_C &= I_{B_1 B_2} + J_{B_2 B_1} \\ J_{B_1 B_2} - (W_{B_2} - W_{B_1}) &= \int_{t_0}^{t_1} (F - W_x \dot{x} - W_y \dot{y}) dt \\ J_{B_2 B_1} - (W'_{B_1} - W'_{B_2}) &= \int_{t_1}^{t_2} (F - W'_x \dot{x} - W'_y \dot{y}) dt. \end{aligned}$$

Der Integrand rechts ist beidemale die WEIERSTRASS'sche E -Funktion; sind also die Extremalen stark, so sind die Integrals beide ≥ 0 .

Also folgt durch Addition:

$$J_C \geq (W_{B_2} - W'_{B_2}) - (W_{B_1} - W'_{B_1}) = (W_{A_2} - W'_{A_2}) - (W_{A_1} - W'_{A_1}).$$

Die rechte Seite stellt aber den Wert von J längs einer der geschlossenen Extremalen dar. Also hat man:

$$(2) \quad J_C \geq J_E.$$

Wenn hier das Gleichheitszeichen gelten soll, so müssen die beiden E -Funktionen Null sein, d.h., die Richtung von C muss mit der Feldrichtung übereinstimmen. Das bedeutet, dass der Bogen $B_1 B_2$, soweit er im Feldinneren verläuft, mit einem Extremalenbogen $A_1 A_2$ zusammenfallen muss, an den

Fig. 3.

sich vor A_1 und nach A_2 je ein Bogen der Hülle H_1 bzw. H_2 anschliessen kann. (« verlängerter » Extremalenbogen). Analoges gilt für den Bogen B_2B_1 : Demnach gilt das Gleichheitszeichen in (2) nur dann, wenn C Feldextremale ist oder sich aus zwei « verlängerten Extremalenbogen » zusammensetzt, also eine « verlängerte Extremale » darstellt, die aus zwei Bogen A_1A_2 und $A'_2A'_1$ geschlossener Feldextremalen unter Zwischenschaltung zweier Stücke von H_1 bzw. H_2 zusammensetzt (vgl. Fig. 2). Solche verlängerte Extremalen gibt es offenbar nur dann, wenn sich bei Verschiebung von A_1 im positiven Sinn längs H_1 im negativen Sinn längs H_2 bewegt; in dem durch Fig. 3 veranschaulichten umgekehrten Fall gilt daher stets $J_C > J_E$, wenn C nicht Feldextremale ist.

II.

1. Wir betrachten nun den Sonderfall:

$$F = \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

wo λ eine positive Konstante ist. Die Extremalen sind hier die positiv umlaufenen Kreise vom Radius λ , also alle geschlossen, das Integral J hat für jede derselben den Wert $\pi\lambda^2$.

Sei nun C eine geschlossene Kurve, die in einem von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifen der Breite 2λ verläuft und beide Ränder des Streifens trifft. Die dem Streifen einbeschriebenen Kreise bilden ein Feld im Sinn von I, 2. Daher liefert das Ergebnis vom I, 2 sofort

$$(3) \quad \lambda L_C - F_C \geq \pi\lambda^2,$$

dann unser Variationsproblem ist positiv-regulär, sodass alle Extremalen stark sind. Hieraus schliesst man aber bekanntlich sofort auf die « isoperimetrische Ungleichung », indem man bemerkt, dass das quadratische Polynom in λ :

$$\pi\lambda^2 - \lambda L_C$$

wegen (3) Werte < 0 annimmt. Bei dem Beweis werden keine Voraussetzungen über Konvexität benötigt, man kommt, wie eine eingehendere Betrachtung leicht ergibt, mit der einzigen Voraussetzung der Rektifizierbarkeit von C aus.

2. Statt der einem Parallelstreifen eingeschriebenen Kreise kann man natürlich andere Kreisscharen benützen, z. B. Kreise, deren Mittelpunkte auf einem festen Kreis liegen. Von Interesse ist der folgende Spezialfall: Kreise vom Radius $\lambda > 0$, deren Mittelpunkte auf einem Kreis vom Radius $\mu < \lambda$ liegen. Durch diese Schar wird ein Kreisring mit dem äusseren Radius $\lambda + \mu$, dem inneren $\lambda - \mu$ doppelt überdeckt. Hier liegt der in Fig. 3. dargestellte Fall vor. Es erhellt, dass für jede geschlossene, positiv umlaufene Kurve, die

im Ringgebiet einen einfachen Umlauf macht und beide Ränder trifft, wieder die Ungleichung

$$\lambda L - F \geq \pi \lambda^2$$

gilt, in der nur für die feldbildenden Kreise das Gleichheitszeichen eintritt. Hieraus folgt die Ungleichung:

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{\pi} \leq 2\lambda \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{\pi}$$

Insbesondere gilt für den inneren und äusseren Radius des Minimalkreisrings ⁽²⁾ die entsprechende Ungleichung:

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{\pi} \leq \rho + P \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{\pi}.$$

3. Die Betrachtungen dieses Abschnittes gestatten ebenso den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für die elliptische und die hyperbolische Ebene. Man verwendet dabei wieder Scharen von Kreisen mit festem Radius, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Ebenso ist es möglich, Minkowskis Ungleichung für den gemischten Inhalt ebener konvexer Bereiche mit unserer Methode herzuleiten und dabei auch eine Erweiterung auf den Fall zu erhalten, dass einer der Bereiche nicht konvex ist.

III.

1. Man kann die Betrachtungen von I auf Doppelintegrale mit geschlossenen Extremalen von Kugeltypus übertragen. Man erhält dann eine Aussage über das Extrem, wobei als konkurrierende Flächen solche zugelassen sind, die im Inneren eine Schar geschlossener Extremalen einhüllenden Röhre verlaufen und deren Mantel längs einer die Röhre umschlingenden Kurve berühren. Wendet man das auf ein Variationsproblem an, unter dessen Extremalen die Kugeln auftreten, so erhält man bei Benutzung einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, insbesondere Aussagen über die dem Hüllzylinder eingeschriebenen Drehflächen. Mit Hilfe der Verkreisung von H. A. SCHWARZ ⁽²⁾ kann man dann auf bekannte Weise z.B. die Minimaleigenschaft der Kugel beweisen. Statt dies näher auszuführen, will ich lieber zeigen, wie dieser Gedanke eine ganz elementare, die Mittel der Variationsrechnung nicht explizit heranziehende Methode zum Beweis der »isoperimetrischen Ungleichung« für Drehflächen liefert.

⁽²⁾ Vgl. BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934, S. 35.

⁽³⁾ Ebenda, S. 71 f.

2. Wir betrachten eine ebene Kurve C :

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad 0 \leq t \leq 1,$$

die ganz in $y \geq 0$ verläuft und ihre beiden Endpunkte auf der x -Achse hat. Das Maximum von $y(t)$ sei $\lambda > 0$ und werde für $t = \tau$ angenommen ($0 < \tau < 1$). Den Teilbogen für $0 \leq t \leq \tau$ nennen wir C_1 , den Bogen $\tau \leq t \leq 1$ C_2 .

Aus der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ folgt sofort:

$$(4) \quad (\lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - y\dot{x})y \geq \sqrt{\lambda^2 - y^2} \dot{y}y \quad (\sqrt{\lambda^2 - y^2} \geq 0)$$

und das Gleichheitszeichen gilt dabei nur, wenn:

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{x} = ky, \quad \dot{y} = k\sqrt{\lambda^2 - y^2} \quad (k > 0).$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\lambda \int_0^\tau y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \int_0^\tau y^2 \dot{x} dt \geq \int_0^\tau \sqrt{\lambda^2 - y^2} y \dot{y} dt = \int_0^\lambda y \sqrt{\lambda^2 - y^2} dy = \frac{\lambda^3}{3},$$

Verfährt man analog mit der durch Vorzeichenwechsel der rechten Seite von (4) entstehenden Ungleichung, so folgt weiter:

$$\lambda \int_\tau^1 y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt - \int_\tau^1 y^2 \dot{x} dt \leq - \int_\tau^1 \sqrt{\lambda^2 - y^2} y \dot{y} dt = - \int_\lambda^0 y \sqrt{\lambda^2 - y^2} dy = \frac{\lambda^3}{3}.$$

Addition ergibt dann, wenn noch mit 2π multipliziert wird:

$$(5) \quad \lambda O - 2V \geq \frac{4\lambda^3\pi}{3},$$

wo O die Oberfläche, V das Volumen der von C bei Drehung um die x -Achse erzeugten Rotationsfläche bedeutet. Da das Polynom in λ :

$$\frac{4\lambda^3\pi}{3} - \lambda O$$

für $\lambda \geq 0$ den Minimalwert $\frac{1}{6\sqrt{\pi}} O^{\frac{3}{2}}$ annimmt, ergibt sich:

$$(6) \quad O^3 \geq 36\pi V^2.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur eintreten — dies zeigt eine Betrachtung, die ganz analog zu der in I, 2 durchgeführten ist — wenn C sich aus zwei Viertelkreisen unter Einschub eines Stückes von $y = 1$ (das auch wegfallen kann) zusammensetzt (Stücke von $y = 0$, die zunächst auch auftreten können, sind für das Problem ohne Bedeutung). Will man jetzt zur isoperimetrischen Ungleichung für beliebige Flächen gelangen, so braucht man in bekannter Weise nur die Verkreisung von SCHWARZ zu benutzen. Falls die betrachtete Fläche keine Kugel ist, so wird bei Verkreisung mit geeigneter Achse sicher O verkleinert und damit die Ungleichung (6) automatisch zu

$$O^3 > 36\pi V^2$$

verschärft, sodass man sich die Diskussion der Frage, wann in (5) das Gleichheitszeichen gilt, überhaupt ersparen kann.