Sulle curve razionali dotate di cuspidi.

Nota di AMBROGIO LONGHI (a Lugano).

Sunto. - *Si espongono alcuni risultati di geometria numerativa concernenti le curve razionali iperspaziali.*

1. In uno spazio lineare a quante si vogliano dimensioni, sopra una curva razionale e irriducibile Γ si consideri una serie algebrica γ_n^r , di dimensione r , d'ordine n e d'indice $v \geq 1$, di gruppi di punti: necessariamente equivalenti per la razionalità di Γ .

Se $v_1, v_2, \dots, v_t$ sono t numeri (distinti o no) interi e positivi, tali che:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = r,$$

con $1 \leq t \leq n - r$, la γ_n^r possiede in generale un numero finito N di gruppi dotati ciascuno di (1) t punti rispettivamente multipli (1) secondo $v_i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, t$); ed è noto come N si possa calcolare mediante una formula di DE JONQUIÈRES, la quale, nel caso della curva sostegno Γ razionale, diviene (2) :

$$(1) \quad N = \frac{t!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} (v_1 + 1)(v_2 + 1) \dots (v_t + 1) v \binom{n-r}{t},$$

supposto che nell'insieme dei t numeri v_i , riducentisi a τ distinti, ve ne siano α_j eguali fra di loro ma diversi dai rimanenti $t - \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, \tau$).

È però da osservare che *se la curva Γ ha delle cuspidi, nel numero N fornito dalla (1) risultano conteggiati, in modo affatto incognito, anche i gruppi di γ_n^r con almeno uno dei t punti multipli situato in una cuspide*: mentre in molti importanti problemi occorre fare astrazione da tali gruppi.

Così, ad esempio, supponendo la curva Γ una Γ_n^r di ordine n , con ρ cuspidi ordinarie in posizione generica, senza altri elementi stazionari che iperpiani ordinari, e appartenente allo spazio S_r ad r dimensioni, il numero dei suoi iperpiani r -tangenti (ciascuno ad r rami) eguaglia quello dei gruppi

---

(1) Sottintendasi: *almeno e in generale precisamente.*

(2) E. DE JONQUIÈRES, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque...* « Journal für Math. », 66, 1866. Cf. pure: F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Vol. I, Parte I (Bologna, 1926), p. 243; R. TORELLI, *Dimostrazione di una formula di De Jonquière e suo significato geometrico*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 21, 1906, e *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti dell'Accademia di Torino », 42, 1907, n. 1, ultima nota.

con r punti doppi *tutti distinti dalle ρ cuspidi* ⁽³⁾ entro la serie lineare g_n^r delle sezioni iperpiane di Γ_n^0 : onde la formula (1) di DE JONQUIÈRES non è atta a determinare il numero suddetto se non quando $\rho = 0$. Ponendovi $t = r$, $v = 1$, $v_i = 1$, $\tau = 1$, $\alpha_i = r$ essa offre soltanto il numero:

$$2^r \binom{n-r}{r}$$

degli iperpiani r -tangenti di una *generica* ⁽⁴⁾ curva razionale d'ordine n dello spazio S_r .

Ben diversa, e assai meno semplice, è l'espressione del numero stesso nel caso $\rho > 0$: vedasi il n. 3.

2. In un lavoro in corso di pubblicazione ⁽⁵⁾ risolvo appunto la questione di precisare il numero χ dei gruppi della serie γ_n^r , d'indice v , dotati ciascuno dei t punti $(v_1 + 1)$ -upli summenzionati (n. 1): però tutti distinti dalle ρ cuspidi della curva sostegno Γ_n^0 razionale (n. 1). E dimostro il teorema espresso dalla seguente formula:

$$(2) \quad \chi = \frac{v}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (t-k)! k! s_k \binom{n-r-k}{t-k} \binom{n-r-\rho}{k},$$

ove i τ numeri α_j ($j = 1, 2, \dots, \tau$) sono quelli già definiti nel n. 1, mentre $s_0 = 1$ ed s_k ($k = 1, 2, \dots, t$) è la somma dei prodotti a k a k dei t numeri (distinti o no) $v_1, v_2, \dots, v_t$.

Si avverta che nella (2), e in tutte le formule del seguito, è da ritenere $\binom{h}{0} = 1$ anche quando $h \leq 0$, ed è $\binom{h}{k} = 0$ solo se $0 \leq h < k$; dovendosi invece porre:

$$\binom{h}{k} = (-1)^k \binom{k-h-1}{k}$$

se $h < 0 < k$.

3. Applicando la formula (2) alla serie lineare staccata sulla curva Γ_n^0 di S_r (n. 1) dagli iperpiani passanti per un generico spazio $S_{r-\sigma-1}$, si perviene al teorema che segue:

Gli iperpiani aventi ciascuno con una curva razionale Γ_n^0 d'ordine n ,

⁽³⁾ Se queste non fossero su Γ_n^0 in posizione generica, potrebbero eccezionalmente esistere gruppi aventi ad esempio $r-1$ punti doppi in punti semplici di Γ_n^0 e un punto triplo (almeno) in una cuspidale: ed allora tali eventuali gruppi sarebbero da conteggiare nel numero di quelli situati in iperpiani r -tangenti di Γ_n^0 .

⁽⁴⁾ Così, per brevità, si chiamerà la curva Γ_n^0 , sopra considerata, nell'ipotesi $\rho = 0$.

⁽⁵⁾ Nei « Commentarii Math. Helvetici »: A. LONGHI, *I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate*.

appartenente ad S_r e dotata di ρ cuspidi ⁽⁶⁾, t distinti contatti ⁽⁷⁾ di rispettivi dati ordini $v_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, t$), con:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = \sigma \leq s$$

e $1 \leq t \leq n - \sigma$, formano una varietà $\infty^{r-\sigma}$ di classe:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (t-k)! k! s_k \binom{n-\sigma-k}{t-k} \binom{n-\sigma-\rho}{k},$$

conservando i simboli α_j ($j = 1, 2, \dots, \tau$) ed s_k ($k = 0, 1, \dots, t$) i medesimi significati che nel n. 1 e nel n. 2.

Di questo teorema era finora noto, in tutta la sua generalità, solo il caso particolare corrispondente all'ipotesi $\rho = 0$.

Come corollario risulta ad esempio che (cfr. n. 1):

Il numero degli iperpiani r -tangenti (ciascuno ad r rami) della curva Γ_n^0 è:

$$\sum_{k=0}^r \binom{n-r-k}{r-k} \binom{n-r-\rho}{k}.$$

4. A risultati di ben maggiore rilievo conduce l'applicazione del teorema generale del n. 2 alla serie lineare descritta dal gruppo degli iperpiani osculatori a Γ_n^0 (n. 1) uscenti da un punto variabile in un generico spazio S_σ di S_r . Si trova infatti allora che:

Nello spazio S_r ad r dimensioni il luogo dei punti tali che da ciascuno di essi escono almeno, e in generale precisamente, t spazi distinti S_{r-v_i-1} ($t \geq 1$; $i = 1, 2, \dots, t$) osculatori di una data curva razionale Γ_n^0 d'ordine n , appartenente ad S_r , con ρ cuspidi ⁽⁶⁾ e quindi di classe:

$$n' = r(n-r+1) - (r-1)\rho,$$

è, se:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = \sigma \leq r,$$

una varietà di dimensione $r - \sigma$ e di ordine:

$$\frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_\tau!} \sum_{k=0}^t (-1)^k k! (t-k)! s_k \binom{n-2r+\sigma-\rho+k-1}{k} \binom{n'-\sigma-k}{t-k}.$$

Devesi supporre $1 \leq v_i < r$ e $t \leq n' - \sigma$; mentre ai simboli α_j ($j = 1, 2, \dots, \tau$) e s_k ($k = 0, 1, \dots, t$) vanno attribuiti gli stessi significati che nei n. 1 e 2.

⁽⁶⁾ Per la curva Γ_n^0 si sottintendano sempre soddisfatte le ulteriori ipotesi precisate nel n. 1.

⁽⁷⁾ Ritenuto, beninteso, che un iperpiano abbia un *contatto* di ordine $\mu \geq 1$ con la curva in una sua cuspide P quando contiene l' S_μ (e non soltanto l' $S_{\mu-1}$) osculatore in P al ramo $(2, 1, \dots, 1)$ di cui P è origine: cfr. nota ⁽³⁾; cosicchè un iperpiano generico per P non è da considerarsi *tangente* alla curva in P .

Di questo teorema non era sinora noto, in tutta la sua estensione, *nep-
pure il caso particolare relativo all'ipotesi $\rho = 0$.*

L'interesse del teorema medesimo si desume dalla possibilità che esso
offre senz'altro di risolvere in modo affatto esauriente i due problemi gene-
rali seguenti ⁽⁸⁾:

*Essendo Γ una curva razionale, anche cuspidata, appartenente ad uno
spazio lineare qualunque, determinare:*

*α) Gli ordini di tutte le varietà multiple di una qualsiasi sviluppabile
osculatrice di Γ .*

*β) L'ordine della varietà d'intersezione di quante si vogliano sviluppabili
osculatrici di Γ o loro varietà multiple.*

5. Fra le molteplici proposizioni speciali deducibili dal teorema del n. 4
alcune sono assai notevoli. Ad esempio:

Nello spazio S_r ad r dimensioni esistono:

$$\sum_{k=2}^r (-1)^k \binom{n-r+k-1}{k} \binom{rn-r^2-k}{r-k}$$

*punti caratterizzati dalla proprietà che in ciascuno di essi concorrono r spazi
 S_{r-2} osculatori distinti di una generica ⁽⁴⁾ curva razionale d'ordine n appar-
tenente ad S_r .*

Giova osservare che, sebbene il numero fornito da quest'ultima proposi-
zione sia (per dualità) uguale a quello degli iperpiani r -tangenti di una curva
razionale d'ordine $r(n-r+1)$ appartenente ad S_r , *il numero stesso non si
poteva ottenere con l'ordinaria formula di DE JONQUIÈRES*: perchè tale curva
possiede necessariamente $(r+1)(n-r)$ cuspidi (cfr. n. 1).

Più in generale:

Se μ è un divisore di r , e $1 \leq \mu \leq \frac{r}{2}$, esistono in S_r :

$$\sum_{k=0}^{r:\mu} (-1)^k \binom{n-r+k-1}{k} \binom{rn-r^2-k}{\frac{r}{\mu}-k} \mu^k$$

*punti da ciascuno dei quali escono $r:\mu$ spazi distinti $S_{r-\mu-1}$ osculatori di una
generica ⁽⁴⁾ curva razionale d'ordine n appartenente ad S_r .*

Ancora:

Supposto $v_1 + v_2 = r$, $\varepsilon = 1$ se $v_1 \neq v_2$ ed $\varepsilon = 1/2$ se $v_1 = v_2$, una curva

---

⁽⁸⁾ Vedasi l'altro mio lavoro pure in corso di stampa nei « Commentarii math. Helve-
ici »: A. LONGHI, *Sulle sviluppabili osculatrici delle curve razionali iperspaziali*.

razionale Γ_n^o d'ordine n , appartenente ad S_r e con ρ cuspidi ⁽⁶⁾, ammette:

$$2\varepsilon v_1 v_2 \binom{n-r-\rho+1}{2} + \varepsilon r(n-r-1)\rho - 2\varepsilon(r-1)\binom{\rho}{2}$$

spazi S_{r-2} aventi ciascuno con essa due distinti contatti rispettivamente v_1 -punto e v_2 -punto.

In particolare, quando $\rho = 0$ il risultato concorda con quello offerto da note formule del SEVERI ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ F. SEVERI, *I gruppi neutri con elementi multipli in un'involuzione sopra un ente razionale*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », 9, 1900₁.

F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*, « Memorie dell'Accademia di Torino », 51, 1902, n. 7.