Problemi di Clebschiani di spazi.

Nota di GIOVANNI GIAMBELLI (a Messina).

Sunto. - *Nella mia Nota*: Estensione del concetto di corrispondenza algebrica come operazione geometrica negli iperspazi, « *Atti Acc. Peloritana* », *Messina, 1930, ed in altre successive della stessa Accademia sono stati introdotti i connessi e i Clebschiani sia di punti, sia di spazi appartenenti a dati spazi. Questo studio è stato pure svolto in più corsi di Geometria superiore dell' Università di Messina; é di prossima pubblicazione un trattato.*

La prima parte della presente Nota si riferisce ai Clebschiani di punti e di spazi definiti dall' annullare tutti i minori di dato ordine appartenenti ad una data matrice di forme in più sistemi di variabili.

Si studiano poi i sistemi lineari di connessi puntuali, estendendo a tali sistemi il problema degli spazi secanti.

La teoria delle forme algebriche di GORDAN si presenta arida, perchè priva di applicazioni geometriche; occorre associare la Geometria proiettiva degli iperspazi.

Per la teoria delle forme in più sistemi di variabili omogenee si deve ricorrere alle Geometrie dei connessi puntuali tra più dati spazi. Il connesso di punti si estende a quello di spazi; quindi l' intersezione di connessi di spazi, ossia l' ente Clebschiano di spazi, se però l' intersezione è priva di parti multiple.

Qui non si accenna, per brevità di spazio, allo svolgimento, cui dà luogo la teoria dei connessi e Clebschiani puntuali per l'eliminazione nell' indirizzo non di KRONECKER, ma di CAYLEY, SALMON, ROBERTS [*Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables*, « Journ. für Math. », [67 (1867), pp. 266-278]. Questa ricerca è trattata in una successiva pubblicazione.

§ 1. Connesso puntuale tra più spazi. - Clebschiano puntuale tra più spazi.

Le variabili complesse

$$x_{j0},\ x_{j1}, \ldots,\ x_{jd_j} \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ t)$$

si interpretino come coordinate omogenee di punto P_j nello spazio $[d_j]$.

Sia f una forma a coefficienti complessi di grado m_1 nelle x_{10}, x_{11}, ..., x_{1d_1}, ..., di grado m_t nelle x_{t0}, x_{t1}, ..., x_{td_t}.

La f, pensata come forma in t sistemi di variabili omogenee, si dice *degenere*, se è nulla qualcuna delle $m_1, \ldots, m_t$.

Posto $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_t$ l'equazione $f = 0$ definisce un connesso puntuale $K(d_j;\, 0)_t$ di dimensione $d - 1$ tra i punti $P_1, \ldots, P_t$ appartenenti ai rispettivi spazi $[d_1], \ldots, [d_t]$. Il connesso è un sistema di ∞^{d-1} gruppi g_t di t punti $P_1, \ldots, P_t$; si dicono $m_1, \ldots, m_t$ caratteri del connesso puntuale.

Se $m_1 = m_2 = \ldots = m_t = 1$, si ha il connesso puntuale lineare, ossia la plurilinearità tra gli spazi $[d_1], \ldots, [d_t]$.

Il luogo dei gruppi g_t comuni a più connessi puntuali $K(d_j;\, 0)_t$, se non è composto di parti di diversa dimensione, si chiama Clebschiano puntuale tra i punti $P_1, \ldots, P_t$ appartenenti ai rispettivi spazi $[d_1], \ldots, [d_t]$; si denota con il simbolo

$$C(0, \ldots, 0;\, d_1, \ldots, d_t)_t .$$

Il Clebschiano si dice di dimensione δ, se ad esso appartengono ∞^{δ} gruppi g_t.

Il connesso degenere $f = 0$ si dice *elementare di indice* j $(j = 1, 2, \ldots, t)$, se f è una forma nelle sole $x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jd_j}$.

Siano $e_1, \ldots, e_t$ interi positivi zero incluso, rispettivamente non maggiori di $d_1, \ldots, d_t$; l'intersezione di e_1 connessi elementari di indice $1, \ldots$, di e_t connessi elementari di indice t, se è un Clebschiano di dimensione $d - e_1 - \ldots - e_t$, si chiama Clebschiano elementare di indici $e_1, \ldots, e_t$; si denoti con $C(e_1, \ldots, e_t)_t$.

Supposto

$$e_1 + \ldots + e_t + \delta = d,$$

esista un numero finito ν di gruppi g_t comuni ad un Clebschiano puntuale $C(0, \ldots, 0;\, d_1, \ldots, d_t)_t$ di dimensione δ e ad un Clebschiano elementare $C(e_1, \ldots, e_t)_t$. Si definisce ν carattere $G(e_1, \ldots, e_t)_t$ del detto Clebschiano $C(0, \ldots, 0;\, d_1, \ldots, d_t)_t$.

§ 2. Varietà definita dall'annullare tutti i minori di dato ordine appartenenti ad una data matrice di forme in un solo sistema di variabili.

La matrice

$$\| f_{jk} \| \qquad (j = 0, 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n)$$

di $m + 1$ orizzontali e di $n + 1$ verticali abbia per elementi f_{jk} forme di grado $p_j + q_k$ nelle $x_0, x_1, \ldots x_d$ coordinate omogenee di punto nello spazio $[d]$; le

$$p_0, p_1, \ldots, p_m, q_0, q_1, \ldots, q_n$$

sono interi positivi zero incluso.

Sia c un intero positivo, zero incluso, non maggiore di m, nè di n; si denoti con $W(m, n;\, c)$ la varietà definita dall'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ appartenenti alla matrice

$$\| f_{jk} \| \qquad (j=0,\ 1, \dots,\ m;\ k=0,\ 1, \dots,\ n)$$

di $m+1$ orizzontali e di $n+1$ verticali.

La dimensione δ di questa varietà è

$$\delta \geq d-(m-c+1)(n-c+1).$$

Si faccia ora la convenzione di indicare con $W(m,\ n;\ c)$ questa varietà, solamente, se δ è minimo, ossia

$$\delta = d-(m-c+1)(n-c+1).$$

Si denoti con

$$\Phi(p_0, \dots, p_m;\ q_0, \dots, q_n)_c$$

la funzione simmetrica sia nelle $p_0,\ p_1, \dots,\ p_m$, sia nelle $q_0,\ q_1, \dots,\ q_n$

$$\frac{1}{PQ}\sum_{hk} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{c-1} & p_1^{c-1} & \dots & p_m^{c-1} \\ p_0^{h_0} & p_1^{h_0} & \dots & p_m^{h_0} \\ p_0^{h_1} & p_1^{h_1} & \dots & p_m^{h_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{h_{m-c}} & p_1^{h_{m-c}} & \dots & p_m^{h_{m-c}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0^{c-1} & q_1^{c-1} & \dots & q_n^{c-1} \\ q_0^{k_0} & q_1^{k_0} & \dots & q_n^{k_0} \\ q_0^{k_1} & q_1^{k_1} & \dots & q_n^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0^{k_{n-c}} & q_1^{k_{n-c}} & \dots & q_n^{k_{n-c}} \end{vmatrix},$$

dove la sommatoria Σ_{hk} è estesa a tutte le permutazioni

$$h_0 h_1 \dots h_{m-c} k_0 k_1 \dots k_{n-c}$$

di

$$c,\ c+1, \dots,\ m+n-c+1,$$

per cui

$$h_0 < h_1 < \dots < h_{m-c}, \qquad k_0 < k_1 < \dots < k_{n-c},$$

con

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^m & p_1^m & \dots & p_m^m \end{vmatrix}, \qquad Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_0^n & q_1^n & \dots & q_n^n \end{vmatrix}.$$

Per una nota formula sulle varietà definite dall'annullare tutti i minori di dato ordine di una matrice di forme (Cfr. G. GIAMBELLI, *Ordine di una varietà più ampia, ecc.*, « Mem. Ist. Lombardo » (3), 11, 1904), si ha: « *L'ordine della varietà* W(m, n; c) *è dato dalla funzione simmetrica*

$$\Phi(p_0,\ p_1, \dots,\ p_m;\ q_0,\ q_1, \dots,\ q_n)_c \text{ ».}$$

§ 3. Clebschiano puntuale definito dall'annullare tutti i minori di dato ordine, appartenenti ad una matrice di forme in più sistemi di variabili.

Siano

$$p_{u0},\ p_{u1}, \dots,\ p_{um},\ q_{u0},\ q_{u1}, \dots\ q_{un} \qquad (u = 1,\ 2, \dots,\ t)$$

interi positivi zero incluso; con

$$f_{jk}(1\ ;\ t) \qquad (j = 0,\ 1, \dots,\ m\ ;\ k = 0,\ 1, \dots,\ n)$$

si denoti una forma a coefficienti complessi di grado

$$p_{1j} + q_{1k} \text{ nelle variabili } x_{10},\ x_{11}, \dots,\ x_{1d_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{tj} + q_{tk} \text{ nelle variabili } x_{t0},\ x_{t1}, \dots,\ x_{td_t}.$$

Si denoti con $K(m,\ n\ ;\ c)_t$ il Clebschiano puntuale, o sistema di Clebschiani, tra gli spazi $[d_1], \dots,\ [d_t]$ definito dall'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ appartenenti alla matrice

$$\| f_{jk}(1\ ;\ t) \| \qquad (j = 0,\ 1, \dots,\ m\ ;\ k = 0,\ 1, \dots,\ n)\ ;$$

la dimensione δ di questo luogo è pure

$$\delta \geq d - (m - c + 1)(n - c + 1).$$

Si faccia la convenzione di indicare pure con $K(m,\ n\ ;\ c)$ questo luogo che è Clebschiano, se δ è minimo.

Si denoti con

$$\Phi(p_0, \dots,\ p_m\ ;\ q_0, \dots,\ q_n\ ;\ l_1, \dots,\ l_t)_c$$

la funzione simmetrica

$$\Phi(p_0, \dots\ p_m\ ;\ q_0, \dots,\ q_n)_c$$

quando in luogo di ciascuna p_j $(j = 0,\ 1, \dots,\ m)$ si ponga: $l_1 p_{1j} + l_2 p_{2j} + \dots + l_t p_{tj}$ ed in luogo di ciascuna q_k $(k = 1,\ 2, \dots,\ n)$ si ponga: $l_1 q_{1k} + l_2 q_{2k} + \dots + l_t q_{tk}$.

Siano $e_1,\ e_2, \dots,\ e_t$ interi positivi zero incluso di somma

$$d - (m - c + 1)(n - c + 1).$$

Dalla citata Nota: *Estensione del concetto di corrispondenza, ecc.*, segue: « *Il carattere* $\mathrm{G}(\mathrm{e}_1, \dots,\ \mathrm{e}_t)_t$ *del Clebschiano puntuale* $\mathrm{K}(\mathrm{m},\ \mathrm{n}\ ;\ \mathrm{c})_t$ *è il coefficiente di* $\mathrm{l}_1^{\mathrm{e}_1} \mathrm{l}_2^{\mathrm{e}_2} \dots \mathrm{l}_t^{\mathrm{e}_t}$ *nella funzione simmetrica*

$$\Phi(p_0, \dots,\ p_m\ ;\ q_0, \dots,\ q_n\ ;\ l_1, \dots,\ l_t)_c \text{ ».}$$

Questo risultato si trasforma per mezzo del concetto di *condizione di H. Schubert* (Cfr. *Kalkül der Abzählenden Geometrie*, Leipzig, 1879): « *La condizione imposta al gruppo* g_t *di appartenere al Clebschiano* $\mathrm{K}(\mathrm{m},\ \mathrm{n}\ ;\ \mathrm{c})$ *è data dalla funzione simmetrica*

$$\Phi(p_0, \dots,\ p_m\ ;\ q_0, \dots,\ q_n\ ;\ l_1, \dots,\ l_t)_c,$$

se si pensa per l_j $(\mathrm{j} = 1,\ 2, \dots,\ \mathrm{t})$, *la condizione semplice imposta al gruppo* g *di avere il punto* P_j *giacente in un dato iperpiano di* $[\mathrm{d}_j]$ ».

§ 4. Connessi di spazi. - Clebschiani di spazi.

Essendo $h_j < k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$, si ponga: $d_j = \binom{k_j + 1}{h_j + 1} - 1$ e si interpretino le $x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jd_j}$ come coordinate di spazio $[h_j]$ nello spazio $[k_j]$. Si denoti con R_j il sistema di tutte le relazioni quadratiche di CLEBSCH-D'OVIDIO tra le coordinate $x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jd_j}$.

Si denotino con $g_t(h_j; k_j)$ i gruppi di t spazi $[h_1], \ldots, [h_t]$, immersi nei rispettivi spazi $[k_1], \ldots, [k_t]$. La totalità di questi gruppi di t spazi è ∞^ν con $\nu = (h_1 + 1)(k_1 - h_1) + \ldots + (h_t + 1)(k_t - h_t)$.

Se si aggregano i sistemi $R_1, \ldots, R_t$, la forma f a coefficienti complessi, di grado m_1 nelle $x_{10}, \ldots, x_{1d_1}, \ldots$, di grado m_t nelle $x_{t0}, \ldots, x_{td_t}$, definisce un connesso, di dimensione $\nu - 1$, $K(k_j; h_j)_t$ di spazi $[h_1], \ldots, [h_t]$ appartenenti ai rispettivi spazi $[k_1], \ldots, [k_t]$. Si dicono $m_1, \ldots, m_t$ caratteri del connesso di spazi. Se è nulla qualcuna delle $m_1, \ldots, m_t$, il connesso è degenere; in particolare se $m_j = 1$ $(j = 1, \ldots, t)$ e tutte le altre sono nulle, il connesso degenere $f = 0$ si dice *elementare d'indice* j. La $f = 0$ è un'equazione lineare tra le coordinate di spazio $[h_j]$ di $[k_j]$; definisce un complesso lineare speciale di spazi $[h_j]$ in $[k_j]$, ossia è il sistema degli spazi $[h_j]$ appoggiati in un punto ad un dato spazio $[k_j - h_j - 1]$ di $[k_j]$.

Il luogo dei gruppi $g_t(h_j; k_j)$ comuni a più connessi $K(k_j; h_j)_t$, se non è composto di parti di diversa dimensione, si chiama Clebschiano di spazi $[h_1], \ldots, [h_t]$ appartenenti ai rispettivi spazi $[k_1], \ldots, [k_t]$; si denota con il simbolo $C(h_1, \ldots, h_t; k_1, \ldots, k_t)_t$.

Il Clebschiano si dice di dimensione δ, se ad esso appartengono ∞^δ gruppi $g_t(h_j; k_j)$.

Siano $e_1, \ldots, e_t$ interi positivi, zero incluso, rispettivamente non maggiori di $(h_1 + 1)(k_1 - h_1), \ldots, (h_t + 1)(k_t - h_t)$; l'intersezione di e_1 connessi $K(h_j; k_j)_t$ elementari d'indice $1, \ldots$, di e_t elementari d'indice t, se è un Clebschiano di dimensione $d - e_1 - \ldots - e_t$, si chiama *Clebschiano elementare* di indici $e_1, \ldots, e_t$; si denoti con $C(k_j; h_j; e_1, \ldots, e_t)_t$.

Supposto

$$e_1 + \ldots + e_t + \delta = (h_1 + 1)(k_1 - h_1) + \ldots + (h_t + 1)(k_t - h_t),$$

esista un numero finito ν di gruppi $g_t(k_j, h_j)$ comuni ad un Clebschiano di spazi $C(h_1, \ldots, h_t; k_1, \ldots, k_t)_t$ di dimensione δ e ad un Clebschiano elementare $C(k_j; h_j; e_1, \ldots, e_t)_t$. Si definisce ν carattere $G(e_1, \ldots, e_t)_t$ del detto Clebschiano $C(h_1, \ldots, h_t; k_1, \ldots, k_t)_t$.

§ 5. Clebschiano di spazi definito dall'annullare tutti i minori di dato ordine appartenenti ad una matrice di forme in più sistemi di variabili.

Nelle forme

$$f_{jk}(1; t) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, n),$$

definite nel § 3, si interpretino le $x_{10}, \ldots, x_{1d_1}$ come coordinate di spazio $[h_1]$ in $[k_1], \ldots$, le $x_{t0}, \ldots, x_{td_t}$ come coordinate di spazio $[h_t]$ in $[k_t]$. Si denoti con

$$C(m, n;\, c;\, h_1, \ldots, h_t;\, k_1, \ldots, k_t)_t$$

il Clebschiano definito dall'annullare tutti i numeri di ordine $c+t$ appartenenti alla matrice

$$\| f_{jk}(1\,;\, t) \| \qquad (j=0,\, 1, \ldots, m\,;\; k=0,\, 1, \ldots, n)$$

e dai sistemi di relazioni quadratiche di CLEBSCH-D'OVIDIO $R_1, \ldots R_t$. Si faccia l'ipotesi che la dimensione δ di questo Clebschiano sia minima, ossia $\delta = (h_1+1)(k_1-h_1)+\ldots+(h_t+1)(k_t-h_t)-(m-c+1)(n-c+1)$.

Siano $e_1, e_2, \ldots, e_t$ interi positivi, zero incluso di somma $(h_1+1)(k_1-h_1)+ \ldots +(h_t+1)(k_t-h_t)-(m-c+1)(n-c+1)$.

Dalla citata Nota: *Estensione del concetto di corrispondenza, ecc.* segue: « Il carattere $G(e_1, \ldots, e_t)_t$ del Clebschiano di spazi $C(m, n;\, c;\, h_1, \ldots, h_t;\, k_1, \ldots, k_t)_t$ è il coefficiente di $l_1^{e_1} l_2^{e_2} \ldots l_t^{e_t}$ nella funzione simmetrica

$$\Phi(p_0, \ldots, p_m;\, q_0, \ldots, q_n;\, l_1, \ldots, l_t)_c$$

Dal concetto di *condizione dello Schubert* segue:

« La condizione imposta al gruppo $g_t(h_j;\, k_j)$ di appartenere al Clebschiano $C(m, n;\, c;\, h_1, \ldots, h_t;\, k_1, \ldots, k_t)_t$ è data dalla funzione simmetrica

$$\Phi(p_0, \ldots, p_m;\, q_0, \ldots q_n;\, l_1, \ldots, l_t)_c,$$

se si pensa per $l_j (j=1,\, 2, \ldots, t)$ la condizione semplice σ_j imposta al gruppo $g_t(h_j;\, k_j)$ di avere lo spazio $[h_j]$ appoggiato in un punto ad un dato $[k_j-h_j-1]$ ».

§ 6. **Applicazioni.**

Si chiamano $\alpha_j (j=1, \ldots, t)$ gli spazi $[s]$ appartenenti a $[k_j]$; si denotino *ora semplicemente* con g_t i gruppi di t spazi $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ immersi nei rispettivi dati spazi $[k_1], \ldots, [k_t]$.

Si consideri il Clebschiano

$$C(m, n;\, c;\, h_1, \ldots, h_t;\, k_1, \ldots, k_t)_t$$

nel caso particolare $c=m$ con $n>m$ ed inoltre $h_1=h_2=\ldots=h_t=s$. Si denoti con $B_{s,t}$ il prodotto di espressioni fattoriali

$$\prod_{j=1}^{j=t} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_{j0} & b_{j1} & \ldots & b_{js} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{j0}^s & b_{j1}^s & \ldots & b_{js}^s \end{vmatrix} \frac{\left(b_{j0}+b_{j1}+\ldots b_{js}-\dfrac{s(s+1)}{2}\right)!}{b_{j0}!\, b_{j1}! \ldots b_{js}!} \right).$$

Segue:

« Il numero dei gruppi g_t di t spazi $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ di dimensione s, appartenenti al Clebschiano

$$C(m,\, n\,;\, m\,;\, s, \dots, s\,;\, k_1, \dots, k_t)_t ,$$

tali che lo spazio $\alpha_j (j = 1, \dots, t)$ soddisfi alla condizione caratteristica $(b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{js})$ con

$$\sum_{j=1}^{j=t} \left[b_{j0} + b_{j1} + \dots + b_{js} - \frac{s(s+1)}{2} \right] = n - m + 1$$

è il prodotto di $B_{s,t}$ per il coefficiente di

$$l_1^{b_{10}+b_{11}+\dots+b_{1s}-\frac{s(s+1)}{2}} \dots l_t^{b_{t0}+b_{t1}+\dots+b_{ts}-\frac{s(s+1)}{2}}$$

nella funzione simmetrica

$$\Phi(p_0 \dots, p_m\,;\, q_0, \dots, q_n\,;\, l_1, \dots l_t)_m \text{ ».}$$

Molte sono le applicazioni, ma non sono permesse dalla brevità dello spazio; si possono estendere a qualsiasi Clebschiano di spazi quelle della Nota di S. ROMANO, *Clebschiano di rette definito da matrice nulla*, « Atti Acc. Peloritana 1935 ».

§ 7. Sistemi lineari di connessi puntuali.

In questo § le forme sono a coefficienti complessi di grado m_1 nelle $x_{10}, \dots, x_{1d_1}, \dots$, di grado m_t nelle $x_{t0}, \dots, x_{td_t}$.

Posto

$$1 + N(m_j\,;\, d_j)_1^t = \frac{(m_1 + d_1)!}{m_1!\, d_1!} \dots \frac{(m_t + d_t)!}{m_t!\, d_t!},$$

si denoti con $\Lambda(m_1, \dots, m_t\,;\, d_j)_1^t$, o brevemente con T, il sistema lineare totale di dimensione $N(m_j,\, d_j)_1^t$, di tutti i connessi puntuali $K(d_j\,;\, 0)_t$ di caratteri $m_1, \dots, m_t$.

Siano $a_0, a_1, \dots, a_s$ interi positivi, zero incluso, diversi tra loro, disposti in ordine crescente con $a_s \leq N(m_j\,;\, d_j)_1^t$.

Siano $f_0, f_1, \dots, f_{a_s}$ forme, elementi base di un sistema lineare Σ_{a_s}, di dimensione a_s, contenuto in T. Gli $s+1$ sistemi lineari di connessi $\Sigma_{a_0}, \Sigma_{a_1}, \dots, \Sigma_{a_{s-1}}$, delle rispettive dimensioni $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}$ siano contenuti ciascuno nel successivo e $\Sigma_{a_{s-1}}$ contenuto in Σ_{a_s}.

Si denotino con $f_{j0}, f_{j1}, \dots, f_{ja_j}$ $(j = 0, 1, \dots, s-1)$ le forme elementi base di Σ_{a_j}. Si può fare in modo che $f_{j0}, f_{j1}, \dots, f_{ja_j}$ $(j = 0, 1, \dots, s-2)$ siano le stesse forme $f_{j+1,0}, f_{j+1,1}, \dots, f_{j+1,a_j}$ ed inoltre $f_{s-1,0}, f_{s-1,1}, \dots, f_{s-1,a_{s-1}}$ siano le forme $f_0, f_1, \dots, f_{a_{s-1}}$.

Gli $s+1$ sistemi lineari $\Sigma_{a_1}, \Sigma_{a_2}, \ldots, \Sigma_{a_s}$ formano in T *la figura di* SCHUBERT *di connessi puntuali*, indicata dal simbolo $E(a_0, a_1, \ldots a_s)$.

Il problema delle intersezioni delle figure di SCHUBERT di connessi puntuali $K(d_j; 0)_t$ contenuti in T si chiama:

problema in T *dei sistemi lineari di connessi puntuali secanti.*

Per $t=1$ si ha il *problema dei sistemi lineari di ipersuperficie, di dato ordine, secanti.*

In particolare: *se l' ordine è uno, si ha il problema degli spazi secanti.*

Questi tre problemi si collegano tra di loro, in modo che le formule relative ad uno di essi si mutano in formole relative agli altri due. Come esempio si costruisce la *formula fondamentale di* SCHUBERT *sul problema dei sistemi lineari dei connessi puntuali secanti.*

Posto $r = N(m_j;\, d_j)_1^t$ si denoti con σ la figura di SCHUBERT $E(r-s-1, r-s+1, \ldots, r)$ di connessi puntuali $K(d_j; 0)_t$; posto $\alpha = a_0 + a_1 + \ldots + a_s - \frac{s(s+1)}{2}$, si denoti con σ^α l' intersezione di α figure σ per ipotesi indipendenti. Si faccia pure l' ipotesi dell' indipendenza di σ^α e della figura $E(a_0, a_1, \ldots a_s)$, per cui esiste un numero finito di connessi $K(d_j; 0)_t$ appartenenti a questa intersezione, ossia al loro prodotto. Da una nota formula dello SCHUBERT sul problema degli spazi secanti segue:

« *Il numero dei connessi puntuali* $\mathrm{K}(\mathrm{d_j}; 0)_t$ *appartenenti all' intersezione* $\mathrm{E}(\mathrm{a_0}, \mathrm{a_1}, \ldots, \mathrm{a_s})\sigma^\alpha$ *è dato da*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^s & a_1^s & \ldots & a_s^s \end{vmatrix} \frac{\left(a_0 + a_1 + \ldots + a_s - \frac{s(s+1)}{2}\right)!}{a_0!\, a_1! \ldots a_s!} \text{ ».}$$

Qui per brevità di spazio non si fanno altre applicazioni. Ho incaricato di occuparsene, nella sua tesi di laurea, una mia allieva signorina MARIA BARBALACI.