Dimostrazione delle condizioni caratteristiche perchè una curva sia di diramazione di un piano quadruplo.

Memoria di OSCAR CHISINI (a Milano).

Sunto. - *Le relazioni funzionali, relative a nodi e cuspidi, ovviamente necessarie affinché una curva piana φ_m sia di diramazione per un piano quadruplo proveniente dalla proiezione di una superficie d'ordine $4 + \nu$ dotata di un punto ν -plo, vengono qui dimostrate essere sufficienti, e ciò in modo semplice e per qualunque valore di ν .*

Si completa tale risultato con la dimostrazione che tutti i piani multipli diramati da una φ_m del tipo indicato sono birazionalmente identici.

1. Introduzione.

La effettiva caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli comincia col lavoro di B. SEGRE ⁽¹⁾ dedicato ai piani n -pli relativi a superfici generali dell'ordine n : base ne è il Teorema di HALPHEN che permette di riconoscere quando una curva gobba d'ordine $m \cdot n$ è intersezione completa di due superfici degli ordini m ed n . Seguono i lavori di CHISINI e MANARA ⁽²⁾ sui piani tripli nel così detto caso semplice (superfici d'ordine $3 + \nu$ dotate di un punto ν -plo e del resto generali) e in un ulteriore caso poco più ampio.

Indirizzo diverso hanno i lavori della signora MASOTTI-BIGGIOGERO ⁽³⁾ i quali tendono a caratterizzare le curve di diramazione come involuppi di convenienti sistemi di curve piane pluritangenti, collegandosi così ad una fondamentale osservazione di O. CHISINI ⁽⁴⁾ e a successivi lavori di G. POMPILJ ⁽⁵⁾. Nei suoi lavori la MASOTTI si preoccupa essenzialmente di mostrare le possibilità del metodo, saggiandone le difficoltà e superandole nei primi casi. Essa, dopo aver ripreso i piani tripli nel caso semplice, tratta i primi due esempi di piani quadrupli (sempre del caso semplice).

⁽¹⁾ B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, « Mem. Acc. d'Italia », Vol. I^o, N. 4, (1930), pp. 1-31.

⁽²⁾ O. CHISINI e C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, « Annali di Mat. », Serie IV, Tomo XXV (1946), pp. 255-266 e « Boll. U.M.I. », Serie III, anno III, (1948), pp. 6-8.

⁽³⁾ G. MASOTTI-BIGGIOGERO, *La caratterizzazione della curva di diramazione dei piani tripli ottenuta mediante sistemi di curve pluritangenti*, « Rend. Istit. Lombardo », Vol. 80, (1947), pp. 151-160; *Sulla caratterizzazione della curva di diramazione dei piani quadrupli generali*, « Rend. Ist. Lombardo », Vol. 81, (1947), pp. 269-280; *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli*, « Rend. Istit. Lombardo », Vol. 81, (1948).

⁽⁴⁾ O. CHISINI, *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione*, « Rend. Istit. Lombardo », Vol. 77, (1943-44), pp. 339-356.

⁽⁵⁾ G. POMPILJ, *Su una classe di piani multipli rigati*, « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni » Serie V Vol 5 (1946) nn. 57-74.

Ora qui dimostro in generale la condizione perchè una curva φ sia di diramazione per un piano quadruplo del caso semplice (superficie d'ordine $4 + \nu$ dotata di punto ν -plo) e ciò riconducendomi a dimostrare che la φ è proiezione da un punto O della intersezione (completa) di una superficie di ordine $4 + \nu$ dotata di O ν -plo e della polare di O rispetto ad essa: tale via, più diretta, si accosta, per questo particolare, alla trattazione di B. SEGRE. Penso che la dimostrazione si possa estendere ai piani n -pli, sempre del caso semplice.

Il risultato da dimostrare è il seguente

TEOREMA. — Una curva piana φ_m è di diramazione per un piano quadruplo del tipo semplice, relativo ad una superficie di ordine $4 + \nu$ quando il suo ordine m ed i numeri δ e k dei suoi nodi e delle sue cuspidi soddisfino le relazioni aritmetiche

$$(1) \quad \begin{cases} m = 6\nu + 12 \\ \delta = 4(\nu + 1)(\nu + 3) \\ k = (\nu + 2)m \end{cases}$$

ed inoltre siano soddisfatte le seguenti relazioni funzionali di equivalenza

$$(2) \quad \begin{cases} K \equiv (\nu + 2)R \\ N' + 4T \equiv 2(\nu + 1)R \\ R + T \equiv Z \end{cases}$$

dove K indica il gruppo delle cuspidi, N' il gruppo N dei nodi considerati ciascuno su entrambi i rami di φ_m che vi passano, R un gruppo di punti di φ_m allineati, T un gruppo di punti non virtuale, Z un gruppo di punti tutti diversi dai punti T .

Si noti che la seconda delle (2) implica che il gruppo N' sia contenuto nella serie $2(\nu + 1)R$ e la terza delle (2) porta che la serie $|R + T|$ abbia dimensione almeno 3 e sia sprovvista di punti fissi.

Il teorema ora enunciato, anche se non espresso in questa forma, deve considerarsi appartenere alla signora MASOTTI, in quanto la generalizzazione dei casi da lei indicati al caso generale è del tutto ovvia. Qui, per semplicità, effettuo la dimostrazione nel caso, che può considerarsi *caratteristico*,

$$\nu = 5, \quad m = 42, \quad \delta = 192, \quad k = 294;$$

mettendo ai gruppi che interessano un indice che ne fissi l'ordine si ha:

$$R_{42}, \quad K_{294}, \quad N_{192}, \quad N'_{334}, \quad T_{30}.$$

Si potranno tralasciare questi indici quando essi non giovinno.

Indicheremo con una sola lettera tanto una curva quanto il polinomio primo membro della equazione; il fattore di proporzionalità di questo polinomio sarà scelto in modo da semplificare le formule, senza bisogno di ovvie

ed inutili precisazioni. Le curve indicate con ψ si intendono sempre essere aggiunte alla curva φ .

Infine, a coronamento della trattazione, faremo vedere che tutti i piani multipli (non importa fissare che siano quadrupli) diramati da una φ del tipo indicato sono tra loro birazionalmente identici.

2. Preliminari.

Come abbiamo detto vogliamo dimostrare il

TEOREMA. - Una curva piana φ_{42} è di diramazione per un piano quadruplo (proiezione di una superficie F_9 del nono ordine da un suo punto quintuplo, e del resto generale) quando abbia un gruppo N_{192} di 192 nodi e un gruppo K_{294} di 294 cuspidi ed esista un gruppo T_{30} di 30 punti tali che sia

$$(3) \quad \begin{cases} K_{294} \equiv 7R_{42} \\ N'_{384} + 4T_{30} \equiv 12R_{42} \\ R_{42} + T_{30} \equiv Z_{72} \end{cases}$$

dove, ripetiamo, N' è il gruppo dei nodi considerati, ciascuno, su entrambi i rami di φ che lo contengono e Z non ha punti in comune con T .

OSSERVAZIONE. - Come di consuetudine in queste questioni la φ_{42} è intesa irriducibile e generica entro la famiglia (cui appartiene) delle curve con uguali caratteri plückeriani.

Per giungere alla dimostrazione del teorema, in questo paragrafo esponiamo anzitutto, con qualche variante di dimostrazione, alcune proposizioni preliminari dovute anch'esse alla Signora MASOTTI ⁽⁶⁾.

LEMMA 1. - Esiste una curva p_{26} (d'ordine 26) che passa per i nodi e le cuspidi di φ_{42} e tocca questa, con intersezione quadripunta, nei 30 punti del gruppo T_{30} .

Infatti: la φ_{42} ha il genere 334; sia G_{666} un suo gruppo canonico segato da una (particolare) aggiunta ψ_{39} . Il gruppo

$$2K + N' + 4T$$

per le prime due relazioni (3) è segato (fuori di K_{294} ed N_{192}) da una curva aggiunta d'ordine $39 + 26$ passante ulteriormente per il detto G_{666} . Questa aggiunta dovrà passare doppiamente per le cuspidi e per i punti doppi (K ed N) cioè essere una biaggiunta. Poichè il G_{666} appartiene ad una aggiunta ψ_{39} , segue che il gruppo $4T$ apparterrà ad una aggiunta d'ordine 26 (e la indichiamo con p_{26}) come afferma l'enunciato.

LEMMA 2. - La serie completa $|R + T|$ è segata dalle aggiunte ψ_{27} aventi (con la φ_{42}) contatto tripunto nei punti di T .

Ciò è ovvio; inoltre, per le ipotesi ammesse, la detta serie ha almeno la dimensione 3 e le ψ_{27} suddette non hanno contatto maggiore (al tripunto) fisso in alcun punto T .

⁽⁶⁾ Cfr. la terza delle note sopra citate.

LEMMA 3. — Le suddette ψ_{27} segano la p_{26} (oltre che nei punti N e K) in un gruppo Γ_{126} che è di contatto (con la p_{26}) per una curva $\mathfrak{P}_{12}$ tangente anche nel gruppo T .

Si osservi infatti che su φ_{42} tutti i gruppi equivalenti a $2R + 2T$ sono segati dalle aggiunte ψ_{28} passanti per $2T$; quindi, considerata una ψ_{27} (per $3T$) e il gruppo G_{72} che essa sega su φ_{42} , esiste una ψ_{28} che sega tale gruppo contato due volte, onde risulta che si può scrivere:

$$\psi_{27}^2 = \mathfrak{P}_{12}\varphi_{42} + p_{26}\psi_{28}$$

dove, ovviamente, la $\mathfrak{P}_{12}$ soddisfa alle condizioni enunciate.

3. Relazioni essenziali.

Veniamo ora a stabilire le proposizioni essenziali che conducono al risultato prefisso.

LEMMA 4. — Le ψ_{30} per $3T$, che segano su φ_{42} la serie $|4R + T|$ tagliano la p_{26} (oltre che in $3T$) nel gruppo fisso Γ_{126} e pertanto si scrivono nella forma

$$\psi_{30} = x_2 a_{27} + x_4 p_{26}$$

dove a_{27} indica una particolare (ma generica) ψ_{27} passante per $3T$ mentre x_3 ed x_4 indicano due generici polinomi in x e y d'ordine uguale al loro indice.

Osserviamo infatti che sulla p_{26} le ψ_{30} (per $3T$) segano la serie $|\Gamma_{126} + 3R'_{26}|$, dove R'_{26} indica un gruppo di 26 punti di p_{26} allineati. Questa serie (speciale) si ottiene ampliando la serie $3R'_{26}$ con l'aggiunta del gruppo Γ_{126} il quale, e occorre dimostrarlo, rimane fisso. Per dimostrare questo fatto basta (per il così detto lemma di riduzione) riconoscere che il Γ_{126} impone proprio 126 condizioni alle curve τ_{23} , d'ordine 23, che segano su p_{26} la serie canonica, già passanti per un gruppo $3R'_{26}$, cioè alle curve τ_{20} , d'ordine 20. A tale scopo si osservi che il Γ_{126} appartiene ad una $\mathfrak{P}_{12}$ di genere $p = 55$. Su questa le τ_{20} segano una serie ovviamente non speciale (d'ordine 240) di dimensione $r = 240 - 55$; similmente le τ_{20} passanti per il Γ_{126} segano una serie d'ordine 114 e di dimensione $s = 114 - 55$, ancora non speciale. Segue $r - s = 126$, e quindi il fatto che i 126 punti di Γ_{126} impongono 126 condizioni alle τ_{20} e quindi che la dimensione della serie $|\Gamma_{126} + 3R'_{26}|$ è uguale a quella della serie $|3R'_{26}|$ vale a dire che le ψ_{30} per il $3T$ passano tutte per il Γ_{126} .

OSSERVAZIONE. — Il ragionamento è valido anche se la p_{26} o la $\mathfrak{P}_{12}$ non fossero generiche ma presentassero delle complicazioni, ad esempio un punto del Γ_{126} fosse doppio per la p_{26} (e quindi anche per la $\mathfrak{P}_{12}$); in tali casi sono ovvie le varianti da apportarsi al ragionamento.

TEOREMA 5. — La serie $|R + T|$ è una g^2_{12} .

La dimostrazione è un facile corollario del Lemma precedente. Notiamo che la serie suddetta è tagliata dal sistema delle ψ_{27} per $3T$. Sia $\bar{\psi}_{27}$ una di esse. Si consideri la ψ_{30} formata da questa ψ_{27} e da una generica cubica γ_3 .

Si ha allora

$$\bar{\psi}_{27}\gamma_3 = x_3a_{27} + x_4p_{26}$$

il che mostra che la $\bar{\psi}_{27}$ passa per i punti comuni a a_{27} e p_{26} e quindi si scrive

$$\bar{\psi}_{27} = a_{27} + x_4p_{26} \quad (x_4 \text{ polinomio del prim'ordine});$$

questo esprime essere ∞^3 il sistema delle ψ_{27} (per $3T$) che segano la serie $|R + T|$ cioè appunto essere 3 la dimensione di questa.

OSSERVAZIONE. — Notiamo che la nostra curva φ_{42} si può considerare proiezione, dal punto improprio dell'asse z , di una curva gobba φ_{72}^* sulla quale i piani segano la serie (che si proietta nella) $|R + T|$; questa, φ_{72}^* è data dalla rappresentazione monoidale:

$$z = \frac{a_{27}}{p_{26}} \quad \text{con} \quad \varphi_{42} = 0.$$

I punti T della φ_{42} sono le proiezioni del punto Z_∞ , improprio dell'asse z , considerato su ciascuno dei 30 rami di φ_{72}^* che vi passano. Portiamo ora la nostra attenzione a questa curva gobba φ_{72}^* e alle serie segate su di questa. Dobbiamo stabilire due teoremi essenziali, di cui il primo è il

TEOREMA 6. — Entro il sistema delle superfici F_9 del nono ordine dotate del punto Z_∞ come quintuplo, superfici date dalle equazioni

$$F_9 = x_5z^4 + x_6z^3 + x_7z^2 + x_8z + x_9 = 0,$$

ne esistono almeno 5 linearmente indipendenti le quali tutte contengono la φ_{72}^* .

Qui, come innanzi, ciascuna x_s indica un polinomio — variabile — d'ordine s nelle coordinate x e y .

Osserviamo intanto che queste superfici F_9 staccano 5 volte il punto Z_∞ su ciascuno dei rami di φ_{72}^* che vi passano e pertanto staccano, sulla φ_{72}^* , gruppi della serie $S = |9R + 4T|$.

Ci importa valutare la dimensione r di questa serie, e a tal fine ne determiniamo l'indice di specialità, i , sulla base del teorema di RIEMANN-ROCH.

La serie canonica C è la serie $|13R + 4T|$, quindi la serie residua è la serie

$$|C - S| = |4R|$$

la quale è segata (su φ_{42}) dalle ψ_{30} per $3T$ cui si imponga un ulteriore passaggio per T . Ora ogni ψ_{30} per $3T$ si scrive nella forma

$$x_3a_{27} + x_4p_{26}$$

e quindi — ammesso per il momento che nessuna cubica passi per i 30 punti del T — le ψ_{30} per $4T$ si scrivono nella forma

$$x_4p_{26}$$

e la serie $|4R|$ risulta avere la dimensione 14, cioè otteniamo

$$i = 15.$$

Se invece per il T_{30} passano le cubiche γ_3 di un sistema lineare ∞^{s-1} , allora le ϕ_{30} per $4T$ si scrivono

$$\gamma_3 a_{27} + x_4 p_{20}$$

e l'indice di specialità risulta

$$i = 15 + s.$$

In definitiva si ha che la dimensione della serie $|9R + 4T|$ è

$$r = 498 - 334 + 15 + s = 179 + s$$

dove $s = 0$ quando mancassero le suddette cubiche γ_3 .

D'altra parte le superfici F_9 formano un sistema di dimensione 184 (se ne contano subito i coefficienti). Nessuna di esse, che non contenga la φ_{72}^* , può tagliare su questa lo stesso gruppo staccato da una superficie $\gamma_3 x_4 z^5 = 0$ che pure (tolto ancora il punto Z_∞ contato 5 volte su ciascuno dei rami della φ_{72}^*) appartiene alla serie $|9R + 4T|$.

Infatti, qualora la superficie

$$F_9 = a_5 z^4 + a_6 z^3 + a_7 z^2 + a_8 z + a_9 = 0$$

tagliasse su φ_{72}^* lo stesso gruppo che la $\Phi_9 = 9_3 x_4 z^5 = 0$ che contiene, contato 5 volte, il gruppo staccato dal piano $z = 0$, questo dovrebbe appartenere ai con $a_m = 0$ ($m = 9 \dots 5$); e poichè $z = 0$ è un generico piano dello spazio, la φ_{72}^* , segata da questo piano generico secondo 72 punti appartenenti ad una quintica a_5 , dovrebbe appartenere ad una superficie del quint'ordine S_5 . Cosa assurda perchè la polare di Z_∞ rispetto S_5 dovrebbe contenere i punti di φ_{42}^* che hanno per proiezioni le 294 cuspidi.

Si conclude che la serie segata dalle F_9 ha, al massimo, la dimensione $r - s = 179$, e quindi 5 almeno di esse, linearmente indipendenti, contengono la φ_{72}^* .

OSSERVAZIONE. - Le superfici F_9 contenenti la φ_{72}^* costituiscono un sistema lineare Σ_s di dimensione $s \geq 4$.

Prima di venire al secondo teorema essenziale dobbiamo premettere ancora alcuni lemmi.

LEMMA 7. - Entro ogni sistema (lineare) Σ_4 di dimensione 4 contenuto in Σ_s esiste (almeno) una superficie F_9 spezzata in un generico piano α (ed in una residua F_8).

Per dimostrare questo fatto si osservi che le F_9 passanti per la φ_{72}^* tagliano sopra un generico piano α un sistema di curve C_9 passanti per 72 punti fissi, appartenenti ad una qualsiasi di esse, e pertanto su questa, esse segano una g_9^r la cui dimensione si vede facilmente essere al massimo $r = 3$. Segue che in Σ_4 esiste almeno una F_9 che contiene il piano α .

LEMMA 8. - Entro il sistema Σ_4 , un generico fascio Σ_1 di superfici F_9 ha una curva base composta della φ_{72}^* e di una parte residua ϑ_9^* (del nono ordine) che non passa per Z_∞ .

Ciò risulta evidente ove si consideri un fascio contenente una F_9 spezzata in α e in una F_8 .

LEMMA 9. — I coni H , osculatori alle varie F_9 di Σ_3 nel punto quintuplo Z_∞ , coincidono o, almeno, ciò accade, per le F_9 di un sistema (lineare) Σ_4 di dimensione 4, contenuto in Σ_3 .

La cosa sembra evidente, in quanto i suddetti coni H , che sono del quinto ordine, devono contenere le 30 rette che dal punto Z_∞ proiettano i punti del T_{30} (appartenenti a φ_{42}); ma vi è a temere che i detti coni siano spezzati con una parte in comune, sicchè l'osservazione può costituire una efficace presunzione ma non una dimostrazione.

Questa si ottiene osservando che:

1) Le superficie $\bar{F}_9$ aventi in Z_∞ la molteplicità 6, e però del tipo

$$\bar{F}_9 = a_6 z^3 + a_7 z^2 + a_8 z + a_9 = 0$$

formano un sistema lineare 463 , e segano sulla φ_{42}^* gruppi della serie lineare $S' = |9R + 3T|$, la quale ha una certa dimensione r' .

2) L'indice di specialità della S' si calcola osservando che la serie residua di essa rispetto alla serie canonica C :

$$|C - S'| = |4R + T|$$

è segata sulla φ_{42} dalle ψ_{30} per $3T$ che si scrivono (lemma 4) nella forma

$$x_2 a_{27} + x_4 p_{26}$$

e perciò ha la dimensione 24, sicchè

$$i = 25, \quad r' = 9.42 + 3.30 - 334 + 25 = 159.$$

3) Segue l'esistenza almeno di un sistema ∞^3 di $\bar{F}_9$ contenenti la φ_{42}^* , e quindi — ampliando questo mediante una generica F_9 del sistema Σ_3 — l'esistenza del sistema Σ_4 di F_9 col cono osculatore H fisso.

LEMMA 10. — I 30 punti del T_{30} sono le intersezioni di una quintica $a_5 = 0$ e di una sestica $b_6 = 0$ non aventi parti in comune.

Si considerino infatti due F_9 , una generica nel sistema Σ_4 e l'altra appartenente al sistema Σ_3 , rispettivamente di equazione

$$\begin{aligned} a_5 z^4 + a_6 z^3 + a_7 z^2 + a_8 z + a_9 &= 0 \\ b_6 z^3 + b_7 z^2 + b_8 z + b_9 &= 0. \end{aligned}$$

I punti T risultano comuni alle curve (quintica e sestica)

$$a_5 = 0 \quad \text{e} \quad b_6 = 0.$$

D'altra parte queste due curve non possono avere parti in comune, giacchè allora avrebbero una parte in comune i coni osculatori, alle due F_9 sopra scritte, nel punto Z_∞ e questo avrebbe allora per la φ_{72}^* molteplicità superiore a 30.

Siamo ora in grado di dimostrare come secondo teorema essenziale il

TEOREMA 11. - Le superfici Φ_8 polari, rispetto alle F_9 del sistema Σ_4 , del loro punto quintuplo Z_∞ , segano sulla φ_{72}^* (come intersezioni variabili) gruppi della $\mathcal{G}_{72}^3 = |R + T|$.

Per dimostrare il teorema osserviamo anzitutto che queste polari passano per i punti K^* che hanno come proiezioni le cuspidi di φ_{42} , i quali formano un gruppo equivalente, per ipotesi, a $7R$. Inoltre per una qualunque delle nostre F_9 contenenti la φ_{72}^* si consideri la equazione

$$F_9 = x_5 z^4 + x_6 z^3 + x_7 z^2 + x_8 z + x_9 = 0 :$$

accade che la quintica $x_5 = 0$ contenga il gruppo dei punti T (che sono le proiezioni dei punti infinitamente vicini a Z_∞) sui vari rami di φ_{72}^* che passano per Z_∞ ; quindi la relativa polare

$$\Phi_8 = \frac{\partial F_9}{\partial z} = 4x_5 z^3 + \dots = 0$$

ha come quintuplo il punto improprio dell'asse z ed è quivi tangente a ciascuno dei 30 rami di φ_{72}^* .

Per questi due fatti succede intanto che le Φ_8 segano gruppi della serie

$$|8R + 3T| - 7R - T = |R + 2T|.$$

Per giungere al nostro assunto occorre riconoscere che la serie $|R + 2T|$ contiene come fisso il gruppo T e quindi, come parti variabili, si riduce alla $|R + T|$.

Infatti, se sommando alla $|R + T|$ il gruppo T questa serie si ampliasse, per il lemma di riduzione il gruppo dei 30 punti T dovrebbe imporre meno di 30 condizioni alle aggiunte ψ_{39} che contengono un gruppo della $|R + T|$ e quindi il gruppo T dovrebbe imporre meno di 30 condizioni alle ψ_{39} per T .

Ma le ψ_{39} per T segano (su φ_{42}) la serie $|12R + 3T|$ cui appartengono i gruppi segati (su φ_{72}^*) dalle superfici F_{12} di equazioni

$$F_{12} = x_9 z^3 + x_{10} z^2 + x_{11} z + x_{12} = 0$$

(qui, al solito, x_i indica un polinomio variabile d'ordine i nelle due variabili x e y).

D'altra parte perchè i gruppi segati da queste F_{12} vengano a contenere (ulteriormente) il gruppo T occorre che la curva $x_9 = 0$ contenga il gruppo T . Ora le x_9 passanti per il T sono ∞^{24} in quanto si scrivono nella forma

$$x_9 = x_4 a_5 + x_3 b_5$$

cioè i punti del T impongono esattamente 30 condizioni alle x_9 e quindi alle F_{12} e (a maggior ragione) alle ψ_{39} già passanti per il T_{30} .

4. Conclusione.

Tutta l'analisi fino ad ora svolta può essere conclusa col seguente

TEOREMA 12. - La curva φ_{72}^* è l'intersezione completa di una superficie

$$F_9 = a_5 z^4 + a_6 z^3 + a_7 z^2 + a_8 z + a_9 = 0$$

(dove ciascuna a_i indica un polinomio in x e y d'ordine i) e della relativa polare

$$\Phi_8 = \frac{\partial F_9}{\partial z} = 4a_5 z^3 + 3a_6 z^2 + 2a_7 z + a_8 = 0.$$

Osserviamo infatti che nessuna delle F_9 del sistema Σ_4 può essere un cono col vertice in Z_∞ , quindi nessuna delle relative polari (rispetto al polo Z_∞) può essere identicamente nulla. Le polari costituiscono quindi un sistema Σ' di dimensione 4 e poichè tagliano su φ_{72}^* gruppi della serie $|R + T|$ che ha la dimensione 3, una di queste polari, e sia essa la polare della F_9 indicata nell'enunciato, deve contenere la φ_{72}^* .

OSSERVAZIONE. - Quantunque quasi inutile, si può osservare esplicitamente che il teorema 12 esprime appunto che la φ_{42} , proiezione della φ_{72}^* , è curva di diramazione del piano quadruplo definito dalla F_9 .

A complemento di tutta la trattazione enunciamo e dimostriamo l'unicità del piano quadruplo diramato dalla φ_{42} :

TEOREMA 13. - Tutti i piani multipli diramati dalla φ_{42} (per i quali le singolarità della φ_{42} sono essenziali) sono birazionalmente identici.

Infatti, dal teorema precedente risulta (7) che la φ_{42} ammette come forma limite una curva spezzata nelle curve a_6 , a_7 , a_8 , ciascuna contata due volte, in modo che ciascun punto comune ad a_6 ed a_8 sia limite di quattro nodi e ogni punto comune ad a_7 con a_6 e con a_8 sia limite di tre cuspidi. Segue che alle componenti a_6 ed a_8 devono essere collegati scambi del tipo (1, 2) e (3, 5), mentre alla a_7 deve essere collegato uno scambio del tipo (2, 3). E questo significa l'unicità del piano multiplo.

OSSERVAZIONE. - Il ragionamento precedente può prestarsi a qualche dubbio critico. È infatti bensì evidente che le curve doppie a_6 ed a_8 contengono di necessità qualche punto di diramazione che ne collega le due parti, onde ad esse compete un unico scambio; ma i 98 punti di diramazione della a_7 doppia (cioè di collegamento fra le due parti di essa) potrebbero andare tutti a confluire nelle cuspidi. Qui tuttavia basta osservare che la degenerazione della φ_{42} si ottiene annullando successivamente i polinomi a_5 , a_6 , a_7 (cioè che porta lo staccamento delle a_6 , a_7 , a_8 contate due volte): dopo lo staccamento di a_5 (contata due volte) appare chiaro che le curve doppie a_7 ed a_8 hanno ancora dei punti di diramazione che collegano le loro parti doppie. Pertanto anche alla a_7 doppia compete un unico scambio.

(7) Cfr. CHISINI-MANARA, Seconda delle note citate in (2),