Sur les courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur application à la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés.

par N. ABRAMESCO (Cluj-Roumanie).

INTRODUCTION

Les séries de polynomes à une variable complexe, $\Sigma\, A_n P_n(x)$, $\Sigma\, \frac{A_n}{P_n(x)}$, apparaissent comme une généralisation des séries $\Sigma\, A_n x^n$, $\Sigma\, \frac{A_n}{x^n}$. En commençant par les séries $\Sigma\, A_n P_n(x)$, on peut faire l'étude de ces séries à deux points de vue. Premièrement, étant donnée une fonction $f(x)$, régulière dans un domaine limité par la courbe (C), trouver le développement de $f(x)$ en série de polynomes, $f(x) = \Sigma\, A_n P_n(x)$, valable seulement à l'intérieur de la courbe (C). Ce problème a été résolu par M. FABER [1], qui a montré que les polynomes $P_n(x)$ dépendent seulement de contour (C) et les coefficients A_n dépendent de la courbe (C) et de la fonction $f(x)$.

Un autre point de vue de l'étude des séries de polynomes $\Sigma\, A_n P_n(x)$ est le suivant. On donne les polynomes $P_n(x)$ de degrés égaux aux indices et les coefficients A_n, et on demande les courbes de convergence de ces séries. Ce problème inverse a été abordé, il y a 50 ans, par DARBOUX [2] et POINCARÉ [3]. Dans ce qui suit nous considérons les cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par des relations de récurrence de Poincaré pour lesquelles on trouve $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n}$, ou quand on connait $\lim \sqrt[n]{P_n(x)}$. Nous construisons,

---

(1) FABER, *Ueber polynomische Entwickelungen* (« Math. Annalen », Bd. 57, 1903, p. 389; Bd. 64, 1907, p. 118). Voir aussi, P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.*

(2) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries* (« Journal de Math. pures et appliquées », t. IV, 1878, p. 411).

(3) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (« American Journal of Math. », vol. VII, 1884, p. 201).

comme application, des fonctions holomorphes dans des domaines limités par de courbes donnèes.

Les séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ suivant les inverses de polynomes donnés, rencontrées par MM. Guillet et Aubert ([6]), ont été étudiées en premier lieu par M. Appell ([7]). Nous étudions les courbes de convergence dans les cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par de relations de récurrence de Poincaré, ou quand on connait $\lim \sqrt[n]{P_n(x)}$; de même pour les séries $\Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$ ([8]).

Les séries $\Sigma A_n P_n(x)$.

1. Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$, les polynomes $P_n(x)$ étant liés par de relations de récurrence de Poincaré. Séries de Poincaré. — Considérons la série

$$\Sigma A_n P_n(x), \tag{1}$$

les polynomes $P_n(x)$ étant liés par la relation de récurrence de Poincaré

$$R_k P_{n+k} + R_{k-1} P_{n+k-1} + \dots + R_0 P_n = 0, \tag{2}$$

A_0, A_1, ... A_n, ... étant donnés tels que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$$

et R_q de fonctions qui dépendent de x et de rang n. Ces séries ont été considérées premièrement par Poincaré ([3]), ([4]), ([5]). On sait que le rapport $P_{n+1} : P_n$

([4]) S. Pincherle, *Sui sistemi di funzioni analitiche...* (» Annali di Matematica «, II, vol. XII).

([5]) E. Picard, *Cours d'Analyse supérieure de la Sorbonne*, en 1912, 1918. Les séries de Darboux et de Poincaré on été considérées par M. Picard dans son *Traité d'Analyse*, t. III, p. 419.

([6]) Guillet et Aubert, « Comptes Rendus », t. 155, 1912, pp. 139, 204, 708, 820.

([7]) P. Appell, *Sur les développements en séries suivant les inverses de polynomes donnés* (« Comptes Rendus », t. 157, 1913, pp. 5, 1042); « Bulletin des Sciences Math. », 2e série, t. 37, 1913, p. 345; « Bulletin de la Société Math. de France », t. 48, 1920, pp. 1-8).

([8]) Voir mes Notes: *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux* (« Annali di Mat. pura ed applicata », serie III, t. XXXI, 1922, p. 207); *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (« Journal de Math. pures et appliquées », 9e série, t. I, 1922, p. 77); *Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés* (« Comptes Rendus », t. 180, 1925, p. 566); *Sulle relazioni ricorrenti di ordine infinito* (« Bollettino dell'Unione Mat. Italiana », anno IV, n. 4, 1925, p. 155); *Nouvelle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynomes* tend, en général, vers la racine $p(x)$ de plus grand module de l'équation

$$(3) \qquad F(\lambda) = C_k\lambda^k + \dots + C_0 = 0, \quad C_s = \lim_{n \to \infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

Pour trouver les courbes de convergence de ces séries, considérons la série

$$A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n + \dots,$$

dont le rayon de convergence est l. Supposons premièrement $|p(x)| < l$ et considérons un nombre l_1 tel que $|p| < l_1 < l$. On a

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x), \quad \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < l_1 < l,$$

et si, pour fixer les idées, on suppose que l'on a cette inégalité en partant de $n = 0$, nous aurons

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| < l_1, \quad \left|\frac{P_2}{P_1}\right| < l_1, \dots, \quad \left|\frac{P_n}{P_{n-1}}\right| < l_1,$$
$$|P_n| < |P_0|\, l_1^n, \quad |A_n P_n| < |P_0| \cdot |A_n l_1^n|.$$

Donc, si $|p(x)| < l$, la série (1) est convergente, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la sèrie convergente $\Sigma A_n l_1^n$, $l_1 < l$.

Supposons, au contraire, que $|p(x)| > l$, et que $|p| > l_2 > l$. Nous aurons

$$\left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > l_2, \quad |P_n| > |P_0|\, l_2^n, \quad |A_n P_n(x)| > |P_0| \cdot |A_n l_1^n|.$$

Donc, si $|p(x)| > l$, la série (1) est divergente, comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente, $\Sigma A_n l_2^n$, $l_2 > l$.

Il en résulte que la courbe de convergence de la série de Poincaré, $\Sigma A_n P_n(x)$, où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par la relation de récurrence (2), est donnée par l'équation $|p(x)| = l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (3) et $\frac{1}{l} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}$. La série est valable seulement à l'intérieur de la courbe $|p(x)| = l$, $x = X + iY$.

2. **Exemples.** — 1° $P_n(x)$ les polynomes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

---

orthogonaux (« Bulletin des Sciences Math. », t. LIV, nov. 1930); *Sur le facteur de convergence uniforme de M. Leja d'une série de polynomes* (« Comptes Rendus », t. 193, 1931, p. 984); *Sur la détermination de fonctions holomorphes dans des domaines donnés* (« Comptes Rendus », t. 194, 1932, p. 163); *Les polynomes orthogonaux* (« Annales de Toulouse », t. 24, 1932, pp. 67-87).

la relation (2) et l'équation (3) sont

$$nP_n-(2n+1)xP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0,\quad \lambda^2-2\lambda x+1=0.$$

La courbe de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$, $\frac{1}{l}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$, est donnée par $|p(x)|=l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation $\lambda^2-2\lambda x+1=0$, qu'on peut écrire

$$x=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right).$$

Donc, la courbe de convergence est donnée par

$$x=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\quad |\lambda|=l,$$

et en posant $\lambda=le^{i\theta}$, $x=X+iY$, on a

$$X=\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{l}\right)\cos\theta,\quad Y=\frac{1}{2}\left(l-\frac{1}{l}\right)\sin\theta,$$

ce qui montre que cette courbe est l'ellipse

$$\frac{4X^2}{\left(l+\frac{1}{l}\right)^2}+\frac{4Y^2}{\left(l-\frac{1}{l}\right)^2}=1,$$

de foyers -1 et $+1$, et la série est valable seulement à l'intérieur de cette ellipse.

2° *Considérons la série* $\Sigma A_n P_n(x)$, *les polynomes* $P_n(x)$ *étant donnés par*

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}},\quad y=\frac{1}{1+x^2},$$

et qui vérifient la relation de récurrence

$$P_n+2nxP_{n-1}+n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}=0.$$

Changeant n en $n+2$, cette relation devient

$$P_{n+2}+2(n+2)xP_{n+1}+(n+2)(n+1)(1+x^2)P_n=0.$$

Les coefficients R_q de cette relation de récurrence n'étant pas de même degré, posons $P_n=(n!)^\mu P'_n$ et l'on a [9]

$$(4)\qquad \begin{aligned}&(n+2)^\mu(n+1)^\mu P'_{n+2}+2(n+2)(n+1)^\mu xP'_{n+1}+\\&+(n+2)(n+1)(1+x^2)P'_n=0,\end{aligned}$$

[9] Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n'$ sont les mêmes que celles des séries $\Sigma A_n P_n$.

et la relation de récurrence générale (2) devient

$$P'_{n+k}+\frac{S_{k-1}}{(n+k)^{\mu}}P'_{n+k-1}+\frac{S_{k-2}}{[(n+k)(n+k-1)]^{\mu}}P'_{n+k-2}+\ldots=0.$$

Il faut déterminer μ tel que pour $n\to\infty$, les expressions

$$\left[\frac{(n+i)!}{(n+k)!}\right]^{\mu}S_i$$

soient finies. Dans notre cas, il suffit de prendre $\mu=1$, et la relation (4) devient

$$P'_{n+2}+2xP'_{n+1}+(1+x^2)P'_n=0.$$

L'équation qui donne la limite du rapport $P'_{n+1}:P'_n$ est

$$\lambda^2+2\lambda x+1+x^2=0,$$

d'où

$$\lambda=-x\pm i.$$

Si $x=X+iY$, on a

$$\lambda'=-x+i=-X+i(1-Y),\quad \lambda''=-x-i=-X-i(1+Y),$$
$$|\lambda'|^2=X^2+(1-Y)^2,\quad |\lambda''|^2=X^2+(1+Y)^2,\quad |\lambda''|>|\lambda'|.$$

Les courbes de convergence sont les cercles

$$|\lambda''|=l=\text{const.},\quad X^2+(1+Y)^2=l^2.$$

3° *Considérons la série* $\Sigma A_nP_n(x)$, $P_n(x)$ *étant les polynomes de Laguerre,* qui admettent la fonction génératrice

$$e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}}=(1-\alpha)\Sigma\alpha^nP_n(x).$$

Prenant la dérivée par rapport à α, on trouve

$$\frac{e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\frac{x}{1-\alpha}=(1-\alpha)\Sigma n\alpha^{n-1}P_n(x)-\Sigma\alpha^nP_n(x),$$

$$\Sigma\alpha^nP_n\frac{x}{1-\alpha}=(1-\alpha)\Sigma n\alpha^{n-1}P_n-\Sigma\alpha^nP_n,$$

$$x\Sigma\alpha^nP_n=(1-\alpha)^2\Sigma n\alpha^{n-1}P_n-(1-\alpha)\Sigma\alpha^nP_n.$$

Égalant les coefficients de α^n, on trouve la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}-(x+2n+1)P_n+nP_{n-1}=0.$$

Changeant n en $n+1$, on a

(5) $$(n+2)P_{n+2}-(x+2n+3)P_{n+1}+(n+1)P_n=0.$$

Pour $n \to \infty$, $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$, $F(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 1$, $F(1) = 0$, $\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = 0$, $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1$, indépendante de x.

En désignant par l le rayon de convergence de la série $\Sigma A_n x^n$, si $l > 1$ $\left[\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = \lambda = 1\right]$ la série $\Sigma A_n P_n(x)$ est toujours convergente; si ce rayon $l = 1$, le critérium fondé sur la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est en défaut. On peut employer le critère imaginé par Poincaré. En écrivant le rapport sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

on cherche la limite β de β_n pour $n \to \infty$. Si cette limite a sa partie réelle plus grande que 1, la série Σu_n est convergente, si cette partie réelle est plus petite que 1, la série est divergente.

Cela posé, trouvons les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$, pour lesquelles

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1, \quad \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1.$$

Posant

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}, \quad \lim \beta_n = \beta, \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \quad \lim \gamma_n = \gamma,$$

on a

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{P_{n+1}}{P_n} = \left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right)\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right) = 1 - \frac{\beta_n + \gamma_n}{n} + \frac{\beta_n\gamma_n}{n^2},$$

et en appliquant le critère de convergence employé, on trouve que la condition de convergence de la série $\Sigma A_n P_n$ est donnée par la relation: la partie réelle de $(\beta + \gamma) > 1$. Comme seulement β depend de x, les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$ sont données par: la partie réelle de $\beta = \text{const.}$

Dans le cas des polynomes de Laguerre, pour lesquels $F(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $F(1) = 0$, $\left[\frac{dF}{d\lambda}\right]_{\lambda=1} = 0$, il faut substituer

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right), \quad P_{n+2} = P_n\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\delta_{n+1}}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right),$$

et la relation de récurrence (5) devient

$$(n+2)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\delta_{n+1}}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right) -$$

$$- (x + 2n + 3)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right) + n + 1 = 0,$$

$$(\beta^2 - x) + (\delta_{n+1} - \delta_n) + H = 0.$$

Si $\lim \delta_n = \delta$, la dernière parenthèse est nulle, donc, pour $n \to \infty$, il reste $\beta^2 - x = 0$, car H est la somme des termes qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. Donc $\beta^2 = x$. Les courbes de convergence sont données par: la partie réelle de $\beta = \text{const.}$

Posant $\beta = u + iv$, $x = X + iY$, on a, de $\beta^2 = x$,

$$X = u^2 - v^2, \quad Y = 2uv, \quad Y^2 + 4u^2X - 4u^4 = 0,$$

et comme u la partie réelle de β est une constante, il résulte que les courbes de convergence des séries de polynomes de Laguerre, $\Sigma A_n P_n(x)$, avec $\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$, sont les paraboles $Y^2 + 4u^2X - 4u^4 = 0$, avec le foyer en origine.

3. **Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$ pour lesquelles on connait $\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$.** — I) Supposons d'abord $|p(x)| < l$. On peut trouver p_1 et l_1, tels que

$$|p(x)| < p_1 < l_1 < l.$$

On a

$$|A_n| < \frac{1}{l_1^n}, \quad |P_n(x)| < p_1^n, \quad |A_n P_n(x)| < \left(\frac{p_1}{l_1}\right)^n,$$

et donc la série est valable, car ses termes sont en valeur absolue plus petits que les termes d'une série convergente. Supposons, au contraire, $|p(x)| > l$. On peut trouver p_2 et l_2, tels que

$$|p(x)| > p_2 > l_2 > l.$$

On a

$$|A_n| > \frac{1}{l_2^n}, \quad |P_n(x)| > p_2^n, \quad |A_n P_n(x)| > \left(\frac{p_2}{l_2}\right)^n,$$

et la série diverge.

Donc, la courbe de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$ est donnée par $|p(x)| = l$, et la série est valable dans la région intérieure à cette courbe.

II) Considérons le cas où les suites

$$\sqrt[n]{|A_n|} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{|P_n(x)|}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

ne tendent pas vers de limites uniques pour $n \to \infty$, quand la région de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$ ne dependra seulement en général des limites supérieures des suites (6), mais aussi des autres points limites de ces mêmes suites, ce qu'on voit dans l'exemple suivant communiqué par M. Karamata. Considérons dans la série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$, où les polynomes $P_n(x)$ sont de la forme

$$P_n(x) = [x + (-1)^n]^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

séparément les sommes $S_1(x)$ des termes de rang pair et $S_2(x)$ des termes de rang impair. La série $S(x)$ convergera dans le domaine (D) intérieur aux cercles

$$|x+1| = l_1, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|A_{2n}|} = \frac{1}{l_1},$$

$$|x-1| = l_2, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|A_{2n+1}|} = \frac{1}{l_2}.$$

D'autre part,

$$|p(x)| = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \limsup_{n\to\infty} |x + (-1)^n|,$$

donc le domaine (D') $|p(x)| < l$, où $\dfrac{1}{l} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|}$, est la partie commune aux deux cercles

$$|x+1| = l, \quad |x-1| = l,$$

et puisque, dans le cas général, $l < l_1$, $l < l_2$, le domaine (D') sera contenu dans le domaine (D). Les deux cercles $|x+1| = l$, $|x-1| = l$ se coupent si leur rayon $l > 1$, ou ce qui revient au même si la série ΣA_n est convergente.

Ainsi que, dans le cas général, du fait que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n P_n(x)|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{l}|p(x)|,$$

la série $S(x)$ convergera toujours à l'intérieur du domaine (D) défini par $|p(x)| = l$, mais $|p(x)| = l$ ne sera pas en général la courbe limitant le domaine de convergence de la série $S(x)$. Cependant, si l'une des deux suites (6) tendent vers une limite déterminée pour $n \to \infty$, la série $S(x)$ converge seulement à l'intérieur de cette courbe.

Des exemples de séries de polynomes offrant de singularités de convergence plus profondes ont été données par M. Helge von Koch [10].

---

[10] Helge von Koch, *Remarques sur quelques séries de polynomes* (« Bulletin de la Société Math. de France », t. XXXIV, 1906, pp. 269-274).

4. **Les séries de polynomes orthogonaux.** — I) Supposons que $P_n(x)$ soient les polynomes orthogonaux, donnés par

$$\int_a^b \varphi(x)P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \lessgtr n, \quad \int_a^b \varphi(x)P_n^2(x)dx = I_n = \text{const.}$$

On sait [8] que

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{b-a}{4}|z|,$$

z étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)z + 1 = 0. \tag{7}$$

Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_nP_n(x)$, $\frac{1}{l} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$, sont données par $\frac{b-a}{4}|z| = l$, avec la relation (7), ou par

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z| = l\,\frac{4}{b-a},$$

et sont des ellipses de foyers a et b.

II) *Remarque relative à la relation de récurrence entre trois polynomes orthogonaux consécutifs.* On sait [8] que les polynomes orthogonaux

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + c_{n,0}, \quad c_{n,n} = 1,$$

vérifient la relation de récurrence

$$P_{n+1}(x) - (x - u_n)P_n(x) + v_nP_{n-1}(x) = 0, \tag{8}$$

$$u_n = c_{n,n-1} - c_{n+1,n} = \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots g_{n-1} & g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & \cdots g_{2n-1} & g_{2n+1} \end{vmatrix}}{D_n(\varphi)} - \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots g_{n-2} & g_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1} & g_n & \cdots g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix}}{D_{n-1}(\varphi)},$$

$$v_n = \frac{I_n}{I_{n-1}}, \quad I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & \cdots g_{2n} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t)t^s\,dt.$$

Le développement $\Sigma A_nP_n(x)$ étant valable dans la région de convergence trouvée, et $\lim\frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$ étant la racine de l'équation

$$\lambda^2 - (x - u)\lambda + v = 0, \tag{9}$$

qu'on obtient (n° 1) de (8), il suit que $\lim\left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = \lim \sqrt[n]{|P_n|}$, et donc $\lambda = \frac{b-a}{4}|z|$, z étant la racine de l'équation (7); donc $\lim\frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$ est la racine de l'équation

$$\lambda^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\lambda + \left(\frac{b-a}{4}\right)^2 = 0,$$

et en comparant avec (9), on trouve

$$u = \lim u_n = \frac{a+b}{2}, \quad v = \lim v_n = \left(\frac{b-a}{4}\right)^2.$$

III) Comme *cas particuliers* des polynomes orthogonaux sont les polynomes de Legendre, pour lesquels $\varphi(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, les polynomes de Jacobi, où

$$\varphi(x) = (x-a)^\lambda(x-b)^\mu, \quad \lambda + 1 > 0, \quad \mu + 1 > 0;$$

les polynomes qui résultent de la série hypergéométrique, considérés par DARBOUX [2],

$$\varphi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha - \gamma + 1 > 0, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Un cas intéressant des polynomes orthogonaux est donné par les *polynomes de Laguerre*, qui peuvent être obtenus de la manière suivante. En posant

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

considérons l'intégrale

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i \int_0^\infty e^{-x}x^{y+i-1}dx. \tag{10}$$

On sait que

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx, \quad \Gamma(a+n) = a(a+1)\dots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Donc

$$I(y) = \Sigma\, a_i\Gamma(y+i),$$

$$I(y) = \Gamma(y)\sum_{i=0}^n a_i y(y+1)\dots(y+i-1).$$

L'intégrale $I(y)$ est nulle quand

$$\sum_{i=0}^n a_i y(y+1)\dots(y+i-1) = 0,$$

ou

$$Q(y) = a_n y(y+1)\dots(y+n-1) + a_{n-1}y(y+1)\dots(y+n-2) + \dots + a_0 = 0. \tag{11}$$

Écrivons que les polynomes $P_n(x)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k P_n(x)dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots n-1.$$

Ces conditions expriment que l'intégrale (10) $I(y) = 0$ pour $y = 1, 2, \dots n$, et comme $I(y) = 0$ est donnée par la relation (11), il suit que l'équation (11) a pour racines $1, 2, \dots n$. Donc, les coefficients $a_0, a_1, \dots a_n$ se trouvent en écrivant que l'équation (11) a pour racines $1, 2, \dots n$, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$(12) \qquad (y-1)(y-2)\dots(y-n) = a_n y(y+1)\dots(y+n-1) + \\ + a_{n-1}y(y+1)\dots(y+n-2) + \dots + a_0.$$

Pour trouver ces coefficients, considérons les identités (la première est la dérivée avec la formule de Leibniz)

$$\frac{d^n(u^n u^{-y})}{du^n} = (-y)(-y-1)\dots(-y-n+1)u^{-y} + \\ + nC_n^1(-y)(-y-1)\dots(-y-n+2)u^{-y} + \dots + n!\,u^{-y},$$

$$\frac{d^n(u^{n-y})}{du^n} = (n-y)(n-y-1)\dots(-y+1)u^{-y}.$$

En identifiant ces expressions multipliées par $(-1)^n$ et en simplifiant avec u^{-y}, on a

$$(y-1)(y-2)\dots(y-n) = y(y+1)\dots(y+n-1) - \\ - nC_n^1 y(y+1)\dots(y+n-2) + \dots + (-1)^n n!.$$

En comparant avec (12), il suit

$$a_{n-i} = (-1)^{n+i}n(n-1)\dots(n-i+1)C_n^i,$$

de sorte que l'expression des polynomes de Laguerre est

$$P_n(x) = (-1)^n[x^n - nC_n^1x^{n-1} + n(n-1)C_n^2x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!] = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

et satisfait à l'équation différentielle $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$.

Ces polynomes, utilisés dans la théorie de l'atome d'hydrogène dans la Mécanique ondulatoire, étant orthogonaux, donnés par

$$\int_a^b \varphi(x)P_m(x)P_n(x)dx = 0,\ m \lesseqgtr n;\ \varphi(x) = e^{-x},\ a = 0,\ b = \infty,\ \int_0^\infty e^{-x}P_n^2(x)dx = (n!)^2,$$

on sait que les courbes de convergence des séries de polynomes orthogonaux sont des ellipses de foyers a et b, qui dans le cas des polynomes de Laguerre ($b \to \infty$) sont des paraboles avec le foyer à l'origine ($a = 0$), de sorte que nous retrouvons le résultat obtenu (nº 2, 3º).

5. Détermination des fonctions holomorphes dans des domaines limités par des courbes données. — On represente une fonction holomorphe dans un domaine (D) par une série entière, $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$, sans donner une expression d'où l'on pourrait voir que cette fonction est valable seulement dans ce domaine. Dans ce qui suit, nous construisons une fonction holomorphe représentée par une série de polynomes, qui est valable seulement à l'intérieur d'un contour (D) limité par une courbe (C).

Soit

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_n Z^n + \ldots, \tag{13}$$

la transformation conforme qui fait correspondre le domaine extérieur à la courbe donnée (C) au domaine intérieur du cercle de rayon $|Z| = r$, la fonction $\varphi(Z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon r, donné par $\frac{1}{r} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Considérons les polynomes $P_n(x)$ donnés par les relations de récurrence d'ordre infini

$$\begin{gathered} aP_{n+1} = xP_n - a_1 P_{n-1} - \ldots - a_{n-1} P_1 + (n+1) a_n, \\ P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = -\frac{x}{a}, \quad aP_2 - xP_2 = 2a_1, \ldots \end{gathered} \tag{14}$$

Il résulte que x appartenant à une certaine région de convergence, la série en Z,

$$P_1 + ZP_2 + \ldots + Z^n P_{n+1} + \ldots, \tag{15}$$

est le quotient des deux séries

$$\frac{c_1 + c_2 Z + \ldots + c_{n+1} Z^n + \ldots}{b_1 + b_2 Z + \ldots + b_{n+1} Z^n + \ldots} = P_1 + ZP_2 + \ldots + Z^n P_{n+1} + \ldots, \quad b_1 \lesseqgtr 0. \tag{16}$$

D'où, par identification, les relations trouvées

$$P_1 b_1 = c_1, \quad P_2 b_1 + P_1 b_2 = c_2, \quad P_3 b_1 + P_2 b_2 + P_1 b_3 = c_3, \ldots$$

doivent être les relations (14). Donc

$$\begin{gathered} c_1 = -x, \quad c_2 = 2a_1, \quad c_3 = 3a_2, \ldots\ c_{n+1} = (n+1)a_n, \ldots \\ b_1 = a, \quad b_2 = -x, \quad b_3 = a_1, \ldots\ b_{n+1} = a_{n-1}, \ldots \end{gathered}$$

et les séries $\Sigma\, c_n Z^n$, $\Sigma\, b_n Z^n$ ont le même cercle de convergence de rayon r, et donc la série (15), qui est le quotient des ces deux séries, a un rayon de convergence $|Z| \leq r$.

Remplaçant en (16) les valeurs de c_s et b_s, on a

$$\frac{Z\varphi'(Z) + \varphi(Z) - x}{a + Z\varphi(Z) - Zx} = P_1 + ZP_2 + \ldots, \tag{17}$$

ou

$$(18) \qquad \frac{-\frac{a}{Z^2}+\varphi'(Z)}{\frac{a}{Z}+\varphi(Z)-x}=-\frac{1}{Z}+P_1(x)+ZP_2(x)+\dots$$

En posant

$$z=\frac{a}{Z}+\varphi(Z),$$

nous aurons le développement

$$(19) \qquad \frac{z'}{z-x}=-\frac{1}{Z}+P_1(x)+ZP_2(x)+\dots$$

Or, la série $P_1(x)+ZP_2(x)+\dots$, ou $\Sigma Z^n P_n(x)$, a pour rayon de convergence $|Z|=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|P_n(x)|}}$, et le développement (19) est valable seulement pour $|x|<|z|$, c'est-à-dire pour les points x intérieurs à la courbe (C) obtenue par la transformation conforme (13)

$$z=\frac{a}{Z}+\varphi(Z).$$

Donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|P_n(x)|}=\frac{1}{Z}, \quad x=\frac{a}{Z}+\varphi(Z), \quad \varphi(Z)=a_1Z+a_2Z^2+\dots.$$

Considérons une série de polynomes, $\Sigma A_n P_n(x)$, les polynomes $P_n(x)$ étant donnés par les relations (14), ou par la fonction génératrice (17) ou (18), et les coefficients A_n tels que $\frac{1}{r}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$. On sait (n° 3) que la courbe de convergence de cette série est donnée par $|p(x)|=r$, ou

$$x=\frac{a}{Z}+\varphi(Z), \quad \frac{1}{|Z|}=r,$$

c'est-à-dire la courbe donnée (C), et la série est valable seulement à l'interieur de cette courbe. Donc la série $\Sigma A_n P_n(x)$ représente une fonction holomorphe seulement à l'intérieur de la courbe (C).

Exemples. — 1° Considérons l'ellipse

$$x=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right), \quad |Z|=\frac{1}{l}.$$

On a $x=\frac{a}{Z}+\varphi(Z)$, $a=\frac{1}{2}$, $\varphi(Z)=\frac{1}{2}Z$, et donc la fonction génératrice (17), pour les polynomes attachés à cette trausformation, est

$$\frac{Z\varphi'(Z)+\varphi(Z)-x}{a+Z\varphi(Z)-Zx}=-\Sigma Z^n P_{n+1}$$

$$\frac{2Z-2x}{1-2xZ+Z^2}=\frac{1}{Z-(x+\sqrt{x^2-1})}+\frac{1}{Z-(x-\sqrt{x^2-1})}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}.$$

On a

$$-P_n(x)=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^n}+\frac{1}{(x-\sqrt{x^2-1})^n}$$

$$=(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n,$$

les polynomes de Tchebischef. La fonction $f(x)=\Sigma A_n P_n(x)$ est holomorphe seulement à l'intérieur de cette ellipse $\left(\frac{1}{l}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}\right)$.

2° Considérons les ovales de Cassini

$$x=\frac{\sqrt{1+Z^2}}{Z},\quad |Z|=\frac{1}{l};\quad \sqrt{|x-1||x+1|}=\frac{1}{|Z|}=l,$$

pour les quelles on a

$$x=\frac{a}{Z}+\varphi(Z)=\frac{\sqrt{1+Z^2}}{Z},\quad a=1,\quad \varphi(Z)=\frac{1}{Z}(\sqrt{1+Z^2}-1)$$

et donc avec la relation (17) on peut former la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$,

$$\frac{\frac{Z}{\sqrt{1+Z^2}}-x}{\sqrt{1+Z^2}-xZ}=P_1+ZP_2+\ldots=$$

$$=\frac{-x+Z-\frac{Z^3}{2}+\frac{1\cdot3}{1\cdot2}\frac{Z^5}{2^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{Z^7}{2^3}+\ldots}{1-xZ+\frac{Z^2}{2}-\frac{1\cdot1}{1\cdot2}\frac{Z^4}{2^2}+\frac{1\cdot1\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\frac{Z^6}{2^3}-\ldots}.$$

Identifiant, on trouve

$$P_1=-x,$$
$$P_2-xP_1=1,$$
$$P_3-xP_2+\frac{1}{2}P_1=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et de même les coefficients a_n de

$$\varphi(Z) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+Z^2}-1) = \frac{Z}{2} - \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\frac{Z^3}{2^2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{Z^5}{2^3} - \dots;$$

on peut donc former une fonction, $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$, holomorpe seulement à l'intérieur de cette courbe ([11]).

En général, la fonction $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$, $\frac{1}{l} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}$, est holomorphe à l'intérieur du domaine limité par la courbe

$$(20) \qquad |p(x)| = l, \quad x = \varphi(Z), \quad |Z| = \text{const.},$$

quand on connait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|, \quad \text{ou} \quad \lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = |p(x)|,$$

comme nous avons vu dans le cas des polynomes orthogonaux (n° 4), la courbe (20) étant une ellipse, ou pour les polynomes de Laguerre (n° 2, 3°), la courbe (20) étant une parabole.

Les séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ de M. Appell.

6. **Les courbes de convergence des séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$, les polynomes $P_n(x)$ étant donnés par de relations de récurrence.** — Considérons les polynomes $P_n(x)$ donnés par la relation de récurrence

$$(21) \qquad R_k P_{n+k}(x) + R_{k-1} P_{n+k-1}(x) + \dots + R_0 P_n(x) = 0,$$

k étant un nombre donné et R_s de fonctions données qui dependent de x et du rang n. On sait que le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, en général, vers la racine $p(x)$ de plus grand module de l'équation

$$(22) \qquad \lambda^k + C_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + C_0 = 0, \quad C_s = \lim_{n\to\infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

([11]) On peut encore obtenir un développement $\Sigma (\alpha_n x + \beta_n)[(x-a)(x-b)]^n$ à l'intérieur d'une ovale de Cassini. Voir A. Kienast, *Ueber die Darstellung der analytischen Funktionen durch Reihen die nach Potenzen eines Polynoms...* (« Inaugural Dissertation, Universität Zürich », 1906). Voir aussi ma Note, *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynome donné* (Congrès des math. roumains à T. Severin, 8 Mai 1932).

Pour trouver la région de convergence d'une série $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ suivant les inverses de polynomes donnés de M. Appell, pour laquelle $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = l$, supposons premièrement $|p(x)| > l$, et considérons un nombre l_1, tel que $l < l_1 < |p|$. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x), \quad \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > l_1 > l,$$

et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'on ait cette inégalité à partir de $n = 0$, nous aurons

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| > l_1, \quad \left|\frac{P_2}{P_1}\right| > l_1, \ldots \left|\frac{P_n}{P_{n-1}}\right| > l_1;$$

$$|P_n| > |P_0|\, l_1^n, \quad \left|\frac{A_n}{P_n}\right| < \frac{1}{|P_0|} \frac{|A_n|}{l_1^n}.$$

Donc, si $|p(x)| > l$, la série de M. Appell est valable, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma \frac{A_n}{z^n}$, à l'extérieur de cercle $|z| = l$, $l_1 > l$.

Supposons, au contraire, que $|p(x)| < l$ et que $|p| < l_2 < l$. Nous aurons

$$\left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < l_2 < l, \quad |P_n| < |P_0|\, l_2^n, \quad \left|\frac{A_n}{P_n}\right| > \frac{1}{|P_0|} \frac{|A_n|}{l_2^n}.$$

Donc, si $|p(x)| < l$, la série de M. Appell est divergente, comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente $\Sigma \frac{A_n}{l_2^n}$, $l_2 < l$.

Il en résulte que la courbe de convergence de la série de M. Appell, où les polynomes $P_n(x)$ sont liés par la relation de récurrence (20), est donnée par l'équation $|p(x)| = l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (22). La courbe $|p(x)| = l$, $(x = X + iY)$, du plan XOY, sépare le plan en deux régions, l'une intérieure à la courbe, l'autre extérieure où se trouvent les points à l'infini.

Pour une de ces régions, on a $|p(x)| - l > 0$, pour l'autre $|p(x)| - l < 0$; donc, d'après ce que nous avons vu, dans la premiére région, $|p(x)| - l > 0$, la série de M. Appell converge, dans l'autre diverge. Or, ces séries convergent pour x tendant vers l'infini, qui est dans la région extérieure à la courbe, et donc la série sera convergente dans la région extérieure à la courbe $|p(x)| = l$, qui est en même temps extérieure à la courbe où se trouvent les racines des polynomes $P_n(x)$.

EXEMPLES. — 1° Considérons les polynomes électrosphériques $P_n(x)$ qui admettent la fonction génératrice [6]

$$\frac{1}{1-2tx+t^2}=\Sigma\, t^n P_n(x).$$

Ces polynomes ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle des deux sphères électrisées, ou d'une sphère et d'un plan; la capacité commune des deux armateurs en présence est donnée, à un facteur près, par la série de M. Appell $\Sigma\frac{1}{P_n(x)}$. La relation de récurrence entre ces polynomes est

$$P_{n+1}-2xP_n+P_{n-1}=0$$

et on voit, de cette relation, que la suite de Sturm: $P_0(x)$, $P_1(x)$,... $P_n(x)$, devient pour -1 et 1

$$1,\quad 2,\ 3,\ldots,\ (-1)^n(n+1);\quad 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ (n+1),$$

donc la suite perd, entre -1 et 1, n variations, et donc les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$. L'équation (22) est $\lambda^2-2\lambda x+1=0$, et la région de convergence de la série $\Sigma\frac{1}{P_n(x)}$, où $\lim\sqrt[n]{|A_n|}=1$, est limité par le segment $(-1, +1)$, $x=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)$, $|Z|=1$, et donc cette série est valable dans tout le plan XOY $(x=X+iY)$, sauf la coupure $(-1, +1)$.

2° Supposons que $P_n(x)$ soient les polynomes de Legendre

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qui ont toutes leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$. La courbe de convergence de la série de M. Appell, $\Sigma\frac{A_n}{P_n(x)}$, est l'ellipse

$$x=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right),\quad |Z|=l,$$

et la région de convergence est le domaine extérieur à cette ellipse.

7. Les courbes de convergence des séries $\Sigma\frac{A_n}{P_n(x)}$, pour lesquelles $\overline{\lim}\sqrt[n]{|P_n(x)|}=|p(x)|$, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}=l$. — Supposons d'abord $|p(x)|>l$. On peut trouver l_1 et p_1, tels que $l < l_1 < p_1 < |p(x)|$. On a

$$|A_n| < l_1^n, \quad |P_n(x)| > p_1^n, \quad \left|\frac{A_n}{P_n(x)}\right| < \left(\frac{l_1}{p_1}\right)^n,$$

donc la série est valable, car ses termes sont en module plus petits que ceux d'une série convergente. Supposons au contraire, $|p(x)| < l$. On peut trouver l_2 et p_2, tels que $|p(x)| < p_2 < l_2 < l$. On a

$$|A_n| > l_2^n, \quad |P_n(x)| < p_2^n, \quad \left|\frac{A_n}{P_n}\right| > \left(\frac{l_2}{p_2}\right)^n,$$

et la série de M. Appell diverge. Donc, la courbe de convergence de cette série est donnée par $|p(x)| = l$, et la région où la série est valable est extérieure à cette courbe et extérieure à la courbe où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.

Exemple. — $P_n(x)$ étant les polynomes orthogonaux, on sait (nº 4) que

$$\lim \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{b-a}{4}|z|,$$

z étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{b-a}{4}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)z + 1 = 0.$$

La courbe de convergence de la série de M. Appell, $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$, est l'ellipse

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad |z| = \frac{4}{b-a}l,$$

et la série est valable dans la région extérieure à cette courbe et extérieure à la courbe où sont les racines des polynomes $P_n(x)$, le segment ab.

8. La région de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$. — Supposons que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|B_n|} = l'$, et que l'on connait, soit $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x)$, ou $\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|$, et soient (Γ) et (Γ') les courbes $|p(x)| = l$, $|p(x)| = l'$, La série considérée est valable dans la région intérieure à la courbe (Γ), extérieure à la courbe (Γ') et extérieure à la courbe (C) où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.

Dans le cas des polynomes orthogonaux, le domaine de convergence de la série est une couronne formée par deux ellipses homofocales.

Application. — Soient $P_n(x)$ les polynomes attachés à la transformation (nº 5)

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_1 Z + \dots + a_n Z^n + \dots$$

et (Γ), (Γ') les courbes correspondant aux valeurs

$$|Z| = \frac{1}{l}, \quad |Z| = \frac{1}{l'},$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|B_n|} = l', \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}.$$

La fonction

$$f(x) = \Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$$

est holomorphe dans la région intérieure à la courbe (Γ), extérieure à la courbe (Γ') et extérieure à la courbe (c) où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.